



**HAL**  
open science

# Évaluation de la performance de schémas numériques pour la propagation des ondes dans des guides d'onde 1D périodiques

Alvaro C. Gavilan-Rojas, Qinghua Zhang, Christophe Droz

► **To cite this version:**

Alvaro C. Gavilan-Rojas, Qinghua Zhang, Christophe Droz. Évaluation de la performance de schémas numériques pour la propagation des ondes dans des guides d'onde 1D périodiques. CSMA 2024 - 16ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2024, Giens, France. hal-04624310

**HAL Id: hal-04624310**

**<https://hal.science/hal-04624310v1>**

Submitted on 25 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Évaluation de la performance de schémas numériques pour la propagation des ondes dans des guides d'onde 1D périodiques

A. Gavilán Rojas<sup>1</sup>, Q. Zhang<sup>1</sup>, C. Droz<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ. Gustave Eiffel, Inria, I4S team, Rennes, France {alvaro.gavilan-rojas,qinghua.zhang,christophe.droz}@inria.fr

**Résumé** — Dans cette communication, des métriques d'erreur sont proposées pour évaluer les performances de trois transformations spectrales du problème aux valeurs propres  $k(\omega)$  résultant de la propagation d'ondes élastiques dans des guides 1D périodiques. Les métriques sont illustrées sur le modèle d'un échangeur thermique pour évaluer les impacts des différents schémas. Les performances en termes de temps de calcul sont présentées. Un schéma aux performances améliorées est proposé dans cet article.  
**Mots clés** — Ondes guidées. Guides d'onde. Milieux périodiques. Floquet-Bloch.

## 1 Introduction

Les milieux périodiques sont largement étudiés en physique, que ce soit dans le domaine de l'électromagnétisme et l'acoustique –cristaux photoniques et phononiques [8, 14]– ou la mécanique du solide –matériaux composites et architecturés–. Leurs applications, à diverses échelles, sont variées en ingénierie, puisque l'avènement de la fabrication additive favorise leur déploiement industriel dans l'intérêt de concevoir des structures allégées et de contrôler la propagation des ondes, avec des exemples tels que les cristaux phononiques [16] ou les LRM (*locally resonant materials*) [15].

Pour contrôler les ondes élastiques, l'étude des structures périodiques se base principalement sur l'examen des courbes de dispersion (*band diagrams*). Ces courbes révèlent des bandes interdites (*band-gaps*) où les ondes élastiques sont fortement atténuées, ou bien, ne se propagent pas du tout à certaines fréquences. Cette étude est faite pour une cellule unitaire, représentative de toute la structure périodique. Les courbes de dispersion sont souvent construites en définissant un vecteur d'onde –dans le cas d'un guide d'onde 1D, le nombre d'onde  $k$ – et en résolvant pour les fréquences  $\omega$  un problème aux valeurs propres. Cette approche est appelé  $\omega(k)$  ou formulation inverse, elle est répandue dans la littérature des ondes guidées [7, 10, 17]. Cependant, la formulation inverse a une limitation, car elle ne tient pas compte de l'atténuation associée à la partie imaginaire du nombre d'onde complexe  $\mathfrak{Z}(k)$ .

Parmi les méthodes existantes dans la littérature, la Méthodes des Elements Finis Ondulatoires, WFEM (*Wave Finite Element Method*) est capable –dans sa formulation initiale [12]– de trouver, à partir d'une description FEM d'une cellule unitaire, les nombres d'onde  $k$  complexes en fixant la fréquence  $\omega$ . Cette approche est appelée  $k(\omega)$  ou formulation directe. Son point faible est la parcimonie du spectre [19, 13], qui se traduit par des grands écarts entre les valeurs propres des ondes propagatives et évanescentes. Un contournement du problème est l'obtention du spectre partiel avec les formulations proposées par Zhong et Williams [23] et Huang *et al.* [6]. Néanmoins, la première a des difficultés dans l'extraction des vecteurs propres [19, 20] et ces solutions d'onde (valeurs et vecteurs propres de la relation de dispersion) étant nécessaires à la constitution de bases réduites permettant d'effectuer des simulations harmoniques, transitoires [4] ou acoustiques [5] pour la conception des métamatériaux ou l'interaction onde-défaut [1, 9, 2], il est pertinent de déterminer si le schéma proposé par Huang *et al.* résout ces imprécisions, et dans le cas contraire, rechercher des alternatives pour obtenir le spectre partiel.

Face aux inquiétudes sur la précision des schémas, des métriques d'erreur doivent être incorporées dans l'analyse ondulatoire et d'autres schémas pourraient être investigués. À ce titre, on présente dans la section 2.1 les schémas numériques existants et le schéma proposé. Dans la section 2.2, des métriques physiquement significatives sont proposées. En guise d'application, un modèle d'échangeur thermique est présenté dans la section 3. Nous utiliserons ce modèle et ses métriques d'erreur pour comparer les performances des trois schémas étudiés et ainsi déterminer lequel est le plus performant.

## 2 Propagation des ondes dans des guides d'onde 1D périodiques

Dans cette section, la formulation de la WFEM [12] est introduite. Nous partons de l'équation du mouvement avec les matrices éléments finis de masse  $\mathbf{M}$ , amortissement  $\mathbf{C}$  et raideur  $\mathbf{K}$ , toutes réelles de taille  $n_d$  (nombre de degrés de liberté), représentatives d'une cellule unitaire de la structure périodique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (1)$$

En régime harmonique, cette équation s'écrit  $\mathbb{D}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ , où la *matrice de raideur dynamique* s'écrit  $\mathbb{D} = -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}$ , avec  $\omega \in \mathbb{R}$  étant la pulsation,  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^{n_d}$  les déplacements nodaux et  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{n_d}$  les forces nodales. Une première simplification de l'équation (1) consiste à considérer qu'il n'y a pas de chargement externe sur les nœuds internes de la cellule unitaire. En indexant les blocs des matrices selon les degrés de liberté à gauche ( $L$ ), internes ( $I$ ) ou à droite ( $R$ ), on écrit la condition précédente  $\mathbf{f}_I = \mathbf{0}$ . Avec cette condition, de l'équation (1) écrite avec les vecteurs et la matrice en blocs selon  $L, I, R$ , on obtient une expression pour les déplacements nodaux internes  $\mathbf{q}_I = -\mathbb{D}_{II}^{-1}(\mathbb{D}_{IL}\mathbf{q}_L + \mathbb{D}_{IR}\mathbf{q}_R)$  en fonction des déplacements nodaux aux bords de la cellule  $\mathbf{q}_L$  et  $\mathbf{q}_R$ . Cette expression des déplacements nodaux internes  $\mathbf{q}_I$  nous permet d'écrire l'*équation condensée du mouvement* :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Où  $\mathbf{D}_{jk} = \mathbb{D}_{jk} - \mathbb{D}_{jI}\mathbb{D}_{II}^{-1}\mathbb{D}_{Ik} \quad \forall j, k \in \{L, R\}$ .

Le théorème de Floquet-Bloch nous dit que la solution d'un champ périodique donné –par exemple, un champ de déplacements– s'exprime comme une fonction  $\mathbf{q}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \mathbf{q}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R})$  où  $\mathbf{R}$  est le réseau de Bravais ou vecteur *lattice*. Si on considère un guide d'onde périodique infini avec des cellules unitaires de taille  $d$  assemblées sur leurs côtés, cela revient à dire que, pour les déplacements,  $\mathbf{q}_L^{[j+1]} = \exp(ikd)\mathbf{q}_L^{[j]}$ , et pour les forces,  $\mathbf{f}_L^{[j+1]} = \exp(ikd)\mathbf{f}_L^{[j]}$ , étant  $\mathbf{v}^{[j]}$  un vecteur  $\mathbf{v}$  associé à la cellule  $j$ . On appelle ce facteur *constante de propagation*  $\lambda = \exp(ikd)$ .

L'équilibre interne des forces aux interfaces entre cellules du guide d'onde infini s'écrit directement  $\mathbf{f}_R^{[j]} + \mathbf{f}_L^{[j+1]} = \mathbf{0}$ . Avec l'équation (2) et le théorème de Bloch on écrit le problème aux valeurs propres :

$$(\lambda^2\mathbf{D}_{LR} + \lambda(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) + \mathbf{D}_{RL})\mathbf{q}_L = \mathbf{0} \quad (3)$$

Cette formulation du problème sera notée *schéma*  $\lambda$ . Il est à noter que, en remplaçant  $\lambda$  par  $\frac{1}{\lambda}$  et en transposant le problème, nous obtenons le même problème aux valeurs propres. Par conséquent, l'équation (3) est appelé le *problème aux valeurs propres quadratique T-palindromique* [6] et c'est le problème que l'on doit résoudre pour obtenir les constantes de propagation  $\lambda$  (valeurs propres) et les *modes de Bloch*  $\mathbf{q}_L$  (vecteurs propres).

### 2.1 Résolution du problème aux valeurs propres

Dans cette section on présente trois schémas de résolution du problème aux valeurs propres (3). Les trois schémas présentés sont susceptibles d'être résolus pour l'obtention du spectre partiel, avec des solveurs basés sur la méthode itérative d'Arnoldi (e.g, ARPACK). Premièrement, deux schémas de la littérature sont présentés, en mettant le point sur leur sensible similarité. Ces deux schémas existants nous donnent des valeurs propres doubles. Deuxièmement, une transformation spectrale est proposée afin d'avoir des valeurs propres simples.

#### 2.1.1 Schéma 1 : Zhong et Williams (*schéma* $\mu_{zw}$ )

Une formulation couramment utilisée dans la littérature est celle de Zhong et Williams [23], qui propose une transformation spectrale permettant d'obtenir un spectre partiel, où les premières solutions qui apparaissent sont les ondes propagatives, et les suivantes, de plus en plus évanescentes. Ce premier schéma s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL} & -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) \\ \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{LR} \\ -\mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Avec  $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ , et les constantes de propagation  $\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ . Chaque vecteur propre du problème (3) associé à  $\lambda$  est obtenu à partir d'une combinaison linéaire des deux vecteurs propres associés à  $\mu(\lambda)$  et  $\mu(\frac{1}{\lambda})$  du problème (4), les poids de cette combinaison linéaires sont calculés par une décomposition en valeurs singulières (SVD) proposé par Waki [19]. Des erreurs dans le calcul des vecteurs propres par cette méthode ont été signalées pour le cas des structures à symétrie cyclique [20].

### 2.1.2 Schéma 2 : Huang *et al.* (schéma $\mu_H$ )

Une autre formulation, proposé par Huang *et al.* [6], s'écrit dans l'équation (5). Elle diffère légèrement de celle proposé par Zhong et Williams, mais l'avantage de cette formulation est que le théorème 2.2 énoncé dans l'article [6] permet d'obtenir les vecteurs propres du problème (3) à partir d'une combinaison linéaire des deux vecteurs propres associés à  $\mu(\lambda)$  et  $\mu(\frac{1}{\lambda})$ , avec  $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ , ayant comme poids de la combinaison linéaire les valeurs propres obtenus. Ainsi, on obtient les vecteurs propres  $\mathbf{z}_1 + \frac{1}{\lambda}\mathbf{z}_2$  et  $\mathbf{z}_1 + \lambda\mathbf{z}_2$  associés respectivement à  $\lambda$  et  $\frac{1}{\lambda}$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL} & -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) \\ \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{Bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{RL} \\ -\mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Premièrement, on doit noter que les indices  $L$  et  $R$  sont inversés dans la matrice du membre de droite des problèmes (4) et (5). Il est à remarquer aussi que les vecteurs propres du problème (4) ne sont pas les mêmes que ceux du problème (5). De plus, une vérification ligne par ligne des blocs de matrices du problème (4) nous donne le problème (3), mais il n'en est pas de même pour le problème (5).

### 2.1.3 Schéma 3 : Transformation spectrale proposée (schéma $\mu_\theta$ )

Une transformation spectrale permettant d'obtenir un spectre partiel est présentée ici. Basée sur le schéma de Zhong et Williams, cette transformation a l'avantage de ne pas avoir des valeurs propres doubles quand  $\theta \neq 0$ , et donc, d'extraire directement les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres  $\lambda$  et  $\frac{1}{\lambda}$  recherchées. Ce troisième schéma, proposé dans cet article, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LRE}^{-i\theta} - \mathbf{D}_{RLE}^{i\theta} & -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR})e^{i\theta} \\ (\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR})e^{-i\theta} & \mathbf{D}_{LRE}^{-i\theta} - \mathbf{D}_{RLE}^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} = \mu(\theta) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{LR} \\ -\mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Avec  $\mu(\theta) = \lambda e^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{\lambda}$ , et les constantes de propagation  $\lambda = \frac{\mu e^{-i\theta} \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ .

## 2.2 Métrique d'erreur sur le calcul des vecteurs propres

Une solution du problème aux valeurs propres (3) consiste en la valeur propre  $\lambda$  et le vecteur propre associé  $\mathbf{q}_L$ . Naturellement, la norme des résidus de l'équation (3) nous donnerait une estimation de l'erreur numérique des solutions obtenues, mais nous proposons ici une autre métrique à caractère physique. Il s'agit de calculer les forces à partir des déplacements de l'équation (3) pour ensuite évaluer le résidu d'un équilibre interne de forces (troisième loi de Newton). Pour cette approche, on calcule d'abord les vecteurs propres liés aux forces nodales, avec les solutions du problème (3) et l'équation (2) :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_L = (\mathbf{D}_{LL} + \lambda\mathbf{D}_{LR}) \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_R = (\mathbf{D}_{RL} + \lambda\mathbf{D}_{RR}) \mathbf{q}_L \end{cases} \quad (7)$$

Avec les vecteurs de force à gauche et à droite, et sachant que l'équilibre interne des forces sur l'interface entre deux cellules unitaires doit être vérifié, nous avons donc  $\lambda\mathbf{f}_L + \mathbf{f}_R = \mathbf{0}$ . On peut aussi écrire un vecteur de forces nodales  $\mathbf{f}$  comme un vecteur de force résultante à trois composantes  $f_x, f_y, f_z$ , noté  $\mathbf{f}^*$ . Nous obtenons ainsi l'erreur relative  $\varepsilon$ , en divisant la norme des résidus  $\lambda\mathbf{f}_L^* + \mathbf{f}_R^*$  par la norme du vecteur de force  $\mathbf{f}_R^*$ , qui reste affecté par  $\lambda$  juste une fois.

$$\varepsilon = \frac{\|\lambda\mathbf{f}_L^* + \mathbf{f}_R^*\|}{\|\mathbf{f}_R^*\|}$$

La métrique précédente nous donne une estimation de l'erreur pour une solution donnée  $(\lambda, \mathbf{q}_L)$ . Or, pour obtenir une estimation de l'erreur pour l'ensemble des  $n$  solutions calculées du problème (3) à une

fréquence donnée, une somme pondérée des erreurs relatives de chaque solution sera calculée, ayant comme poids l'exponentiel de la partie imaginaire du nombre d'onde,  $\exp(-|\Im(k)|)$ , valeur qui varie entre 0 –ondes purement évanescentes– et 1 –ondes purement propagatives–. Nous avons ainsi l'erreur relative cumulée pondérée, qui est aussi de caractère physique :

$$\varepsilon_c = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \exp(-|\Im(k_j)|)$$

### 3 Modèle numérique

La structure choisie pour illustrer un cas d'application est un échangeur thermique, de type tube à ailettes longitudinales (ailettes en U soudées au tube). Ce type des structures est susceptible d'être inspecté par ondes guidées pour la détection de défauts [11, 22], et sa modélisation numérique aide à la sélection des modes ondulatoires et plages de fréquences avant la mise en œuvre des essais.

Le modèle numérique, illustré dans la Figure 1, consiste en une cellule unitaire de taille  $d = 5$  mm avec un maillage 3D de 6450 degrés de liberté (DDL), construit à partir de 936 tétraèdres quadratiques à 10 nœuds de taille  $h = 5$  mm. Le nombre de degrés de liberté du modèle  $n_d$  est 6450, et sur chaque interface  $n = 1314$  et à l'intérieur  $n_I = 3822$ . Le matériau du tube et des ailettes est l'aluminium, avec un module d'Young  $E = 69.0$  GPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.35$ , densité  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup> et facteur de pertes  $\eta = 0.001$ .

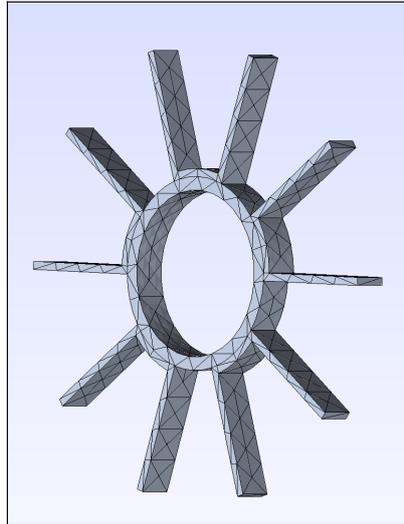


FIGURE 1 – Cellule unitaire de l'échangeur thermique.

#### 3.1 Analyse de dispersion

La résolution du problème aux valeurs propres de l'équation (3) nous donne comme valeurs propres les constantes de propagation  $\lambda$ . À partir des constantes  $\lambda$  on obtient les nombres d'onde  $k \in \mathbb{C}$ , et par conséquent leurs parties réelle  $\Re(k) = \frac{\arg(\lambda)}{d}$  et imaginaire  $\Im(k) = -\frac{\ln(|\lambda|)}{d}$ . La partie imaginaire du nombre d'onde est une mesure de l'atténuation par unité de longueur appelée *atténuation linéique* [3], elle est notée  $\alpha$  et mesurée en nepers par mètre (1 Np  $\approx$  8.686 dB). Pour comprendre son sens physique, on peut voir qu'une atténuation linéique  $\alpha = 10$  dB/m équivaut à une réduction des déplacements au 31.6% des déplacements un mètre en avant. La Figure 2 montre les courbes de dispersion des vingt premiers modes de Bloch ainsi que leur degré d'évanescence, indiqué en couleurs par l'atténuation linéique. On peut apprécier que les modes correspondants aux ailettes longitudinales, qui se déclenchent et se convertissent autour de 2.5 à 3.0 kHz, sont légèrement moins propagatifs que les modes du tube. La transition entre les valeurs d'atténuation linéique est forte lors de ces déclenchements, et le reste des ondes évanescentes ne se propagent pas au delà de une ou deux cellules unitaires.

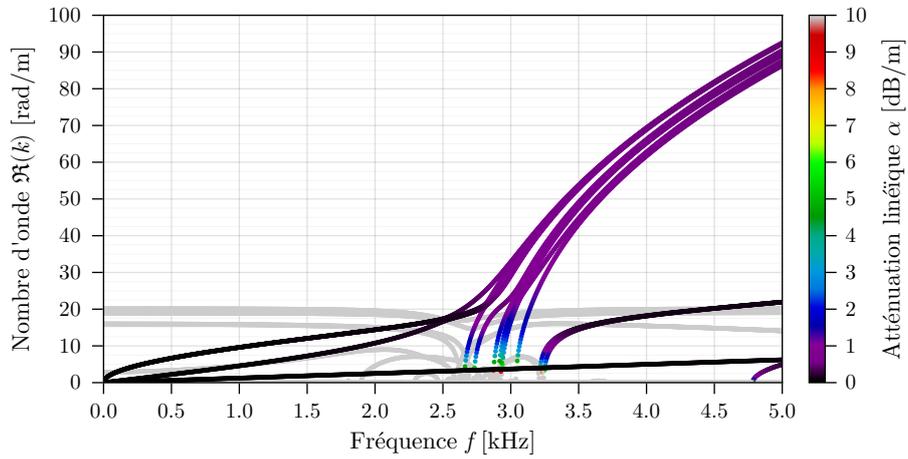


FIGURE 2 – Courbes de dispersion. Le gradient de couleur indique l'atténuation spatiale des ondes.

La résolution de l'équation (3) nous donne aussi les déplacements  $\mathbf{q}_L$ , qui nous permettent de reconstruire les modes de Bloch. Six modes de Bloch sont illustrés dans la Figure 3, avec des champs de contraintes en couleurs (positives en bleu, négatives en rouge). Pour les ondes de compression et flexion, le champ de contraintes  $\sigma_{zz}$ , et pour la torsion, le champ de contraintes  $\tau_{z\theta}$ , étant  $z$  la direction axiale du guide d'onde. Les modes sont illustrés pour un assemblage de 100 cellules unitaires ( $L = 50$  cm). On peut apprécier les modes de flexion des ailettes, qui sont déclenchés et convertis entre 2.5 et 3.0 kHz et sont moins propagatifs que les modes du tube.

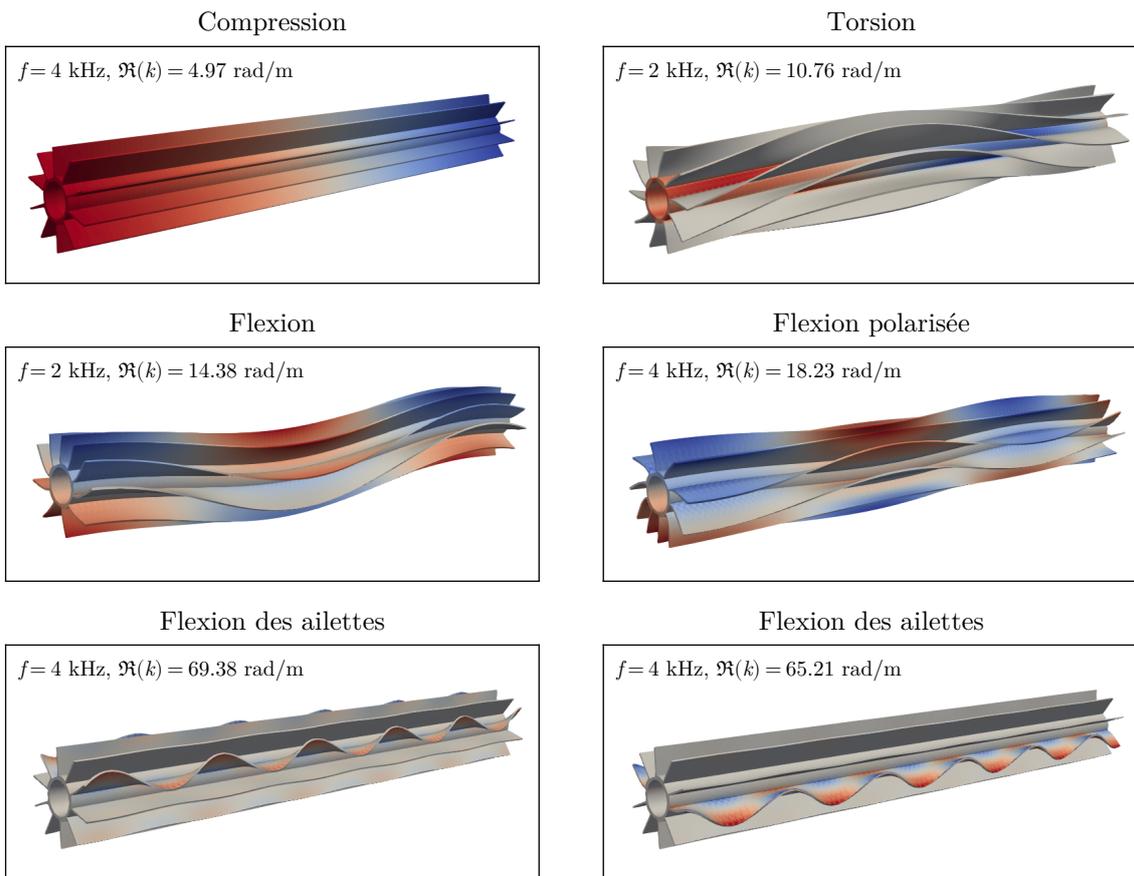


FIGURE 3 – Visualisation des modes de Bloch propagatifs.

### 3.2 Évaluation de la performance numérique

Nous comparons d’abord les erreurs  $\varepsilon$  obtenues pour les trois schémas dans la Figure 4. On peut apprécier que la différence entre valeurs propres –en l’occurrence,  $\Re(k)$ – n’est pas visuellement identifiable, ce qui pourrait nous faire supposer que la différence entre les vecteurs propres ne l’est pas non plus, mais pourtant la métrique d’erreur  $\varepsilon$  indique un comportement différent pour les vecteurs propres. Pour le schéma  $\mu_{ZW}$  on peut voir que les erreurs augmentent considérablement sur l’onde de flexion en basse fréquence. La structure étant à symétrie cyclique, ce mode possède des valeurs propres  $\lambda$  dupliqués, et l’obtention de ces modes est imprécise [20]. Les schémas  $\mu_H$  et  $\mu_\theta$  sont plus précis que le schéma  $\mu_{ZW}$ , mais le schéma  $\mu_\theta$  reste légèrement moins précis que le schéma  $\mu_H$ .

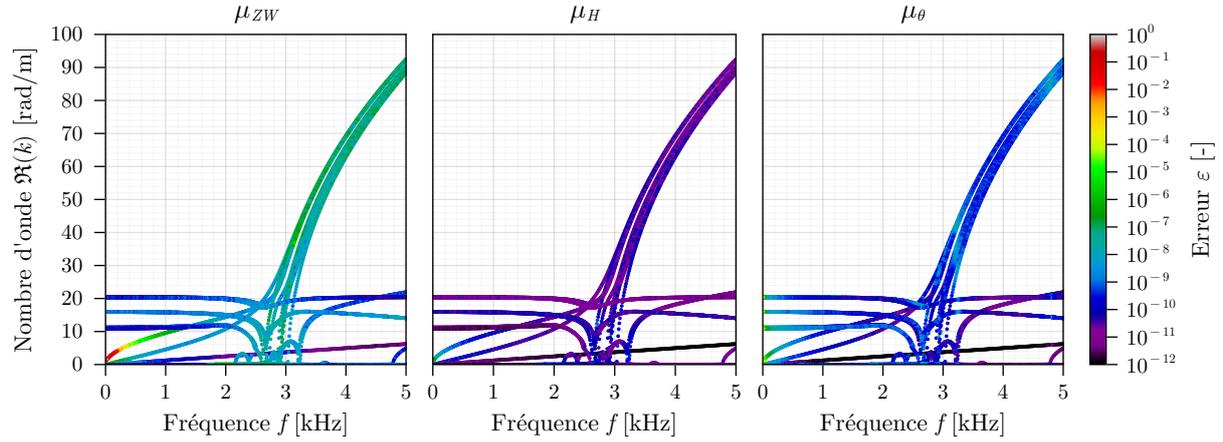


FIGURE 4 – Erreurs  $\varepsilon$  des trois schémas de résolution.

Pour l’évaluation des 40 solutions obtenues (20 ondes positives et 20 ondes négatives) à chaque fréquence, les erreurs cumulées pondérées  $\varepsilon_c$  sont comparées dans la Figure 5. On peut apprécier que la métrique  $\varepsilon_c$  atteint les valeurs les plus élevées en basses fréquences pour les trois formulations. Cependant, les erreurs du schéma  $\mu_{ZW}$  restent les plus élevées parmi les trois schémas, comme dans le cas des erreurs  $\varepsilon$ . Le schéma  $\mu_\theta$  atteint des erreurs faibles presque au même niveau que le schéma  $\mu_H$ , ce qui nous amène à faire des comparaisons de temps de calcul pour examiner l’efficacité de cette méthode.

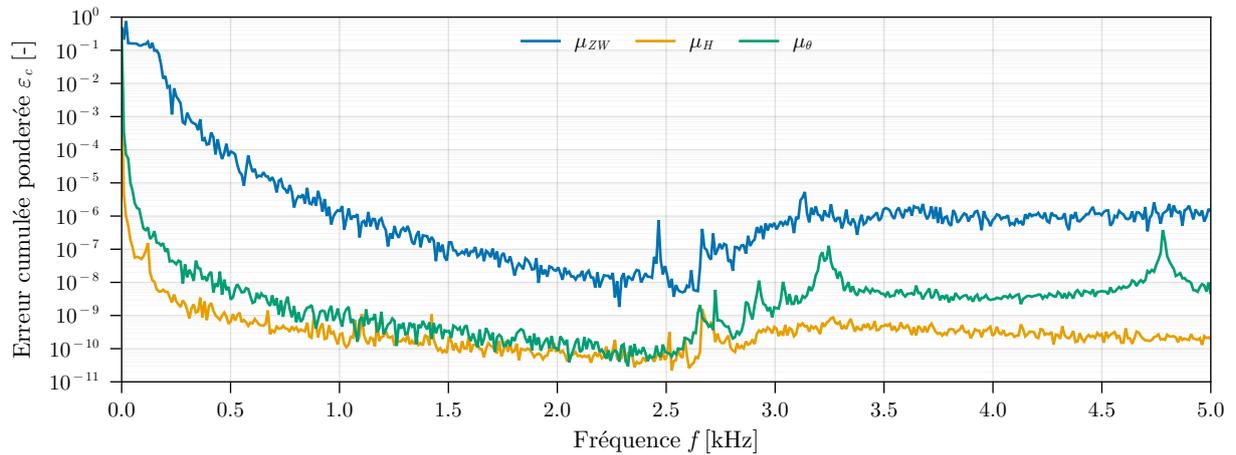


FIGURE 5 – Comparaison des erreurs  $\varepsilon_c$  issues des trois schémas de résolution.

Concernant les temps de calcul, dans le Tableau 1 sont présentés des moyennes de mesure de temps de calcul du problème aux valeurs propres sur la plage de fréquences de l’analyse de dispersion réalisé (1 à 5 000 Hz, 500 itérations). On peut apprécier que le schéma  $\mu_\theta$  est le plus performant, allant 8.88 fois plus vite que le schéma  $\mu_{ZW}$  et 6.03 fois plus vite que le schéma  $\mu_H$  quand on extrait 20 solutions (10 ondes positives et 10 ondes négatives).

TABLE 1 – Temps de calcul des trois schémas de résolution (en sec.) en fonction du nombre de solutions requises dans le solveur.

Nb. sol. :	$\mu_{ZW}$	$\mu_H$	$\mu_\theta$
80	20.50	6.00	2.53
60	16.72	5.46	2.17
40	12.91	5.69	1.68
20	11.28	7.66	1.27

## 4 Conclusions

Dans le contexte de la modélisation des milieux périodiques, les courbes de dispersion et les vecteurs propres qui représentent les modes de Bloch sont utilisés pour saisir les phénomènes ondulatoires d'un guide d'onde à partir de l'étude d'une cellule unitaire. De nos jours, une méthode amplement utilisée pour réaliser ces calculs est la WFEM, qui repose sur la résolution d'un problème aux valeurs propres quadratique. Deux transformations spectrales du problème avec des expressions sensiblement similaires (Zhong et Williams [23], Huang *et al.* [6]) permettent d'obtenir un spectre partiel du problème. Le schéma de Zhong et Williams ( $\mu_{ZW}$ ) a été l'objet de questionnements sur la précision des vecteurs propres, surtout avec des guides d'onde à symétrie cyclique.

Nécessitant d'une évaluation de la performance numérique de ces méthodes, on a proposé dans cet article deux métriques d'erreur de nature physique : l'erreur  $\epsilon$  calculée pour évaluer une solution donnée et l'erreur cumulée pondérée  $\epsilon_c$  pour évaluer un ensemble de solutions (ondes propagatives et évanescentes). Ces métriques ont été évaluées sur un modèle numérique physique d'un échangeur thermique de type tube à ailettes longitudinales. Le résultat de ces évaluations montre que la transformation spectrale proposée par Huang *et al.* ( $\mu_H$ ) est plus précise que la transformation  $\mu_{ZW}$ . Quant au temps de calcul, le schéma  $\mu_H$  est plus performant, puisque l'extraction des vecteurs propres se fait par une combinaison linéaire avec les valeurs propres, alors que le schéma  $\mu_{ZW}$  nécessite d'une décomposition en valeurs singulières pour obtenir les poids de cette combinaison. L'utilisation du schéma  $\mu_H$  est donc préférable au schéma  $\mu_{ZW}$  pour l'obtention du spectre partiel de notre problème.

Le spectre obtenu à partir de ces deux transformations consiste en deux moitiés identiques (valeurs propres doubles). En cherchant connaître l'impact de cette condition du spectre sur les performances numériques, une troisième transformation spectrale,  $\mu_\theta$ , a été présentée. Cette transformation, basée sur celle de Zhong et Williams, génère un spectre de valeurs propres simples et l'extraction des vecteurs propres associés est directe, sans combinaison linéaire. L'évaluation des métriques d'erreur sur ce troisième schéma montre qu'elles se situent proches de celles du schéma  $\mu_H$  et inférieures à celles du schéma  $\mu_{ZW}$ . Pour ce qui est du temps de calcul, cette transformation  $\mu_\theta$  permet d'atteindre des facteurs de réduction de 6.03 par rapport à  $\mu_H$  et de 8.88 par rapport à  $\mu_{ZW}$ . En conclusion, la transformation spectrale proposée dans cet article reste la plus performante des trois transformations étudiées du problème aux valeurs propres  $k(\omega)$ .

## Références

- [1] D. S. Claro, V. Denis, J.-M. Mencik. *Defect localization in waveguide assemblies with curved joints via wave finite elements and time of flight analysis*, European Journals of Mechanics - A/Solids, Elsevier, 2023
- [2] C. Droz, R. Boukadia, E. Deckers, W. Desmet. *Sub-wavelength damage detectability assessment in periodic assemblies using a Bloch modelling framework*, Proceedings of the XI International Conference on Structural Dynamics EURO-DYN2020, 2020
- [3] C. Droz, R. Boukadia, M. Ichchou, W. Desmet. *Diffusion-based design of locally resonant sub-systems using a reduced wave finite element framework*, International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA2018, pp. 3071–3084, 2018.
- [4] C. Droz, R. Boukadia, W. Desmet. *A multi-scale model order reduction scheme for transient modelling of periodic structures*, Journal of Sound and Vibration, 2021

- [5] F. Errico, Ichchou, M. Ichchou, F. Franco, S. De Rosa, O. Bareille, C. Droz. *Schemes for the sound transmission of flat, curved and axisymmetric structures excited by aerodynamic and acoustic sources*. Journal of Sound and Vibration, 2019
- [6] T.-M. Huang, W.-W. Lin, J. Qian. *Structure-preserving algorithms for palindromic quadratic eigenvalue problems arising from vibration of fast trains*, Journal on Matrix Analysis and Applications, SIAM, 2009
- [7] M. Hussein. *Reduced Bloch mode expansion for periodic media band structure calculations*, Proceedings of the Royal Society A, Royal Society, 2825-2848, 2009
- [8] M. I. Hussein, M. J. Leamy, M. Ruzzene. *Dynamics of phononic materials and structures : historical origins, recent progress and future outlook*, Applied Mechanics Review, ASME Journals, 2014
- [9] M. N. Ichchou, J.-M. Mencik, W. Zhou. *Wave finite elements for low and mid-frequency description of coupled structures with damage*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 2009
- [10] D. Krattiger, M. I. Hussein. *Generalized Bloch mode synthesis for accelerated calculation of elastic band structures*, Journal of Computational Physics, Elsevier, 2018
- [11] O. M. Malinowski, M. S. Lindsey. *Ultrasonic guided wave testing of finned tubing*, Proceedings of the ASME 2015 Pressure Vessels and Piping Conference, ASME, 2015
- [12] D. J. Mead. *A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 1973
- [13] J.-M. Mencik, D. Duhamel. *A wave-based model reduction technique for the description of the dynamic behavior of periodic structures involving arbitrary-shaped substructures and large-sized finite element models*, Finite Elements in Analysis and Design, Elsevier, 2015
- [14] E. J. P. Miranda Jr., S. F. Rodrigues, J. M. C. Dos Santos. *Complex dispersion diagram and evanescent modes in piezomagnetic phononic structures*, Solid State Communications, Elsevier, 2022
- [15] M. Moscatelli, R. Ardito, L. Driemeier, C. Comi. *Band-gap structure in two- and three-dimensional cellular locally resonant materials*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2019
- [16] G. Okudan, H. Danawe, D. Ozevin, S. Tol. *Torsional wave focusing in cylindrical structures with the conformal gradient-index phononic crystal lens*, Journal of Applied Physics, AIP, 2021
- [17] A. Palermo, A. Marzani. *A reduced Bloch operator finite element method for fast calculation of elastic complex band structures*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 2020
- [18] L. H. M. S. Ribeiro, V. F. Dal Poggetto, C. Claeys, D. Chronopoulos, J. Arruda. *Computing dispersion diagrams and forced responses of arbitrarily varying waveguides*, International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, 2023
- [19] Y. Waki, B. R. Mace, M. J. Brennan. *Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, page2, 2009
- [20] W. Wang, Y. Fan, L. Li. *Extending Zhong-Williams scheme to solve repeated-root wave modes*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2022
- [21] Y. Yang, B. R. Mace, M. J. Kingan. *Vibroacoustic analysis of periodic structures using a wave and finite element method*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2019
- [22] B. Zheng, J.-W. Su, Y. Xie, J. Miles, H. Wang, W. Gao, M. Xin, J. Lin. *An autonomous robot for shell and tube heat exchanger inspection*, Journal of Field Robotics, Wiley, 2022
- [23] W. X. Zhong, F. W. Williams. *On the direct solution of wave propagation for repetitive structures*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 1995