



HAL
open science

Quinze méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice

David Pigeon

► **To cite this version:**

| David Pigeon. Quinze méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice. 2025. <hal-04617942v4>

HAL Id: hal-04617942

<https://hal.science/hal-04617942v4>

Preprint submitted on 30 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

Quinze méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice

David Pigeon*

30 janvier 2025

Mots clés : matices, inversion, opérations élémentaires, pivot de Gauss, décomposition LU , comatrice, cofacteurs, déterminant, Cayley-Hamilton, polynôme caractéristique, décomposition QR , décomposition Cholesky, décomposition de Schur, matrices d'Householder, décomposition polaire, rotations de Givens.

Résumé

On donne sur un exemple quinze méthodes simples pour calculer l'inverse d'une matrices : par la formule avec la comatrice, par les décompositions PLU et LU , par le pivot de Gauss, en faisant des opérations sur les lignes, en faisant des opérations sur les colonnes, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton et une formule déduite de ce théorème, en utilisant la diagonalisation, et en utilisant les décomposition de Schur, de Cholesky, QR et polaire.

Table des matières

1 Comatrice	7
1.1 Introduction	7
1.2 Exemple	9
2 Décompositions PLU et LU	11
2.1 Introduction	11
2.2 Exemple	16
2.3 Exemple de décomposition en matrices élémentaires	17
3 Pivot de Gauss	19
3.1 Introduction	19
3.2 Exemple	20
4 Opération sur les lignes	22
4.1 Introduction	22
4.2 Exemple	22
4.3 Produit des matrices associées aux opérations élémentaires	23
5 Opération sur les colonnes	25
5.1 Introduction	25
5.2 Exemple	26
5.3 Produit des matrices associées aux opérations élémentaires	27
6 Théorème de Cayley-Hamilton	29
6.1 Introduction	29
6.2 Exemple	31

*<https://sites.google.com/view/davidpigeon/>

7	Formule déduite du théorème de Cayley-Hamilton	33
7.1	Introduction	33
7.2	Exemple	35
8	Diagonalisation et polynôme minimal	36
8.1	Introduction	36
8.2	Exemple	40
9	Diagonalisation et matrice de passage	43
9.1	Introduction	43
9.2	Exemple	43
10	Diagonalisation et matrice orthogonale	46
10.1	Introduction	46
10.2	Exemple	49
11	Décomposition de Schur	53
11.1	Introduction	53
11.2	Exemple	58
12	Décomposition de Cholesky	61
12.1	Introduction	61
12.2	Exemple	64
13	Décomposition QR et orthonormalisation de Gram-Schmidt	66
13.1	Introduction	66
13.2	Exemple	70
14	Décomposition RQ et matrices d'Householder	72
14.1	Introduction	72
14.2	Exemple	75
15	Décomposition polaire	77
15.1	Introduction	77
15.2	Exemple	80
A	Matrices d'opérations	82
A.1	Groupes symétriques	82
A.2	Déterminant d'une matrice	86
A.3	Matrices de permutation	88
A.4	Matrices d'opérations élémentaires	90
A.5	Propriétés	91
A.6	Cas des matrices triangulaires	94
B	Opérations élémentaires sur les lignes	98
B.1	Les trois opérations élémentaires	98
B.2	Un exemple simple	99
C	Opérations élémentaires sur les colonnes	100
C.1	Les trois opérations élémentaires	100
C.2	Un exemple simple	101

D Rotations de Givens	102
D.1 Introduction	102
D.2 Exemple	105
Références	108

Introduction

Dans tout le texte, si rien n'est précisé, n et p sont des entiers naturels non nuls et \mathbb{R} le corps de nombres réels. On note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille (n,p) ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés de taille n .

Définition 0.0.1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **inversible** s'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$MN = I_n \wedge NM = I_n.$$

On note $GL_n(\mathbb{R})$ le **groupe linéaire des matrices inversibles de tailles n** .

Si M est inversible alors la matrice N est unique, on a la note :

$$M^{-1}.$$

On peut montrer qu'une seule des deux égalités est utile car on a le théorème suivant.

Théorème 0.0.2

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que $MN = I_n$. Alors on a $NM = I_n$.

Chaque section du texte comporte deux sous-sections. Une première sous-section théorique où on étudie le cas en dimension n (pour une partie des résultats, on démontrera le ou les théorèmes dans le cas $n := 3$) et une seconde sous-section où on applique ces résultats à la matrice A qui suit.

La matrice A du texte

La matrice A à laquelle on applique les résultats théoriques pour le calcul de A^{-1} est la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On va calculer l'inverse de A de quinze façons différentes¹ :

- 1 . en utilisant la comatrice ;
- 2 . en utilisant les décompositions PLU et LU ;
- 3 . en appliquant la méthode du pivot de Gauss ;
- 4 . en faisant des opérations élémentaires sur les lignes ;
- 5 . en faisant des opérations élémentaires sur les colonnes ;
- 6 . en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton ;
- 7 . en utilisant une formule déduite du théorème de Cayley-Hamilton ;

1. On commence par les méthodes avec la comatrice et les décompositions PLU et LU car elles sont à la base de plusieurs preuves qui suivront.

- 8 . en diagonalisant et en utilisant le polynôme minimal ;
- 9 . en diagonalisant et en utilisant la matrice de passage ;
- 10 . en diagonalisant et en utilisant une matrice de passage orthogonale ;
- 11 . en utilisant la décomposition de Schur ;
- 12 . en utilisant la décomposition Cholesky ;
- 13 . en utilisant la décomposition QR avec la méthode de Gram-Schmidt ;
- 14 . en utilisant la décomposition RQ avec les matrices d'Householder ;
- 15 . en utilisant la décomposition polaire.

On obtiendra dans tous les cas que l'inverse de A vaut :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les méthodes utilisées dans le texte ne sont pas forcément des méthodes usuelles pour calculer l'inverse d'une matrice. Les deux objectifs du texte sont :

- (1) faire pratiquer sur un exemple simple des outils puissants et usuels d'algèbre linéaire ;
- (2) faire découvrir de nouvelles techniques d'algèbre linéaire. Certaines méthodes seront lourdes en calcul. Elles semblent inutiles car longues mais peuvent l'être suivant les informations que l'on possède avant le calcul de l'inverse.

La fin du texte comporte quatre annexes :

- A . sur les notions utiles d'algèbre linéaire : le déterminant et les matrices élémentaires ;
- B . sur les opérations élémentaires sur les lignes ;
- C . sur les opérations élémentaires sur les colonnes ;
- D . une dernière technique pour calculer la décomposition QR en utilisant les rotations de Givens.

On trouvera dans les livres de Denis Serre [2], de Roger A. Horn et Charles R. Johnson [1], et sur les pages Wikipédia [3] des informations complémentaires à ce texte.

Inversibilité de A

On finit cette introduction avec l'inversibilité de la matrice A . On montre de deux façons différentes que A est inversible (voir en annexe et dans le texte pour les notations utilisées).²

- (1) En exploitant le 0 sur la dernière ligne et comme le rang est invariant par les opérations sur les lignes et les colonnes (voir les sections B et C pour les notations utilisées), on a directement que :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \end{aligned}$$

2. Chacune des méthodes que l'on verra dans ce texte peuvent-être aussi des méthodes pour montrer l'inversibilité : un calcul possible ou un calcul qui se termine étant un critère d'inversibilité.

$$\begin{aligned} &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

car les deux lignes de la matrice de taille 2 sont non colinéaires (donc forment une famille libre).

(2) En calculant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

1 Comatrice

On utilise dans cette section la formule usuelle reliant l'inverse d'une matrice et la transposée de la matrice des cofacteurs appelée aussi comatrice (voir l'appendice A pour les informations nécessaires sur le groupe symétrique et le déterminant).

1.1 Introduction

On rappelle la définition de la comatrice d'une matrice carrée.

Définition 1.1.1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Le **mineur** $\Delta_{i,j}(M)$ **d'indice** (i, j) **de** M est défini comme le déterminant de la matrice M à laquelle on a enlevé la ligne i et la colonne j .

(b) Le **cofacteur d'indice** (i, j) **de** M est défini par :

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M).$$

(ii) La **comatrice de** M est la matrice des cofacteurs définie par :

$$\text{Com}(M) := \left((-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M) \right)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit une méthode pour calculer l'inverse grâce au résultat usuel suivant.

Proposition 1.1.2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\det(M)I_n = M\text{Com}(M)^T = \text{Com}(M)^T M.$$

Démonstration. On note $M := (m_{i,j})_{i,j}$. Montrons une des deux égalités pour $n := 3$. On a pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} [M\text{Com}(M)^T]_{ij} &= \left[\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11}(M) & -\Delta_{21}(M) & \Delta_{31}(M) \\ -\Delta_{12}(M) & \Delta_{22}(M) & -\Delta_{32}(M) \\ \Delta_{13}(M) & -\Delta_{23}(M) & \Delta_{33}(M) \end{pmatrix} \right]_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^3 m_{ik} [\text{Com}(M)^T]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^3 m_{ik} [\text{Com}(M)]_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^3 (-1)^{j+k} m_{ik} \Delta_{j,k}(M) \end{aligned}$$

On a deux cas.

(1) Cas $i = j$. Prenons par exemple $i := j := 1$. On a :

$$\mathfrak{S}_3 = \{\text{Id}, (12), (13), (23), (123) = (12)(23), (132) = (13)(32)\}$$

$$=: \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$$

et les signatures des six permutations valent :

$$\begin{array}{lll} \varepsilon(\sigma_1) = 1 & \varepsilon(\sigma_2) = -1 & \varepsilon(\sigma_3) = -1 \\ \varepsilon(\sigma_4) = -1 & \varepsilon(\sigma_5) = 1 & \varepsilon(\sigma_6) = 1 \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} & [M\text{Com}(M)^T]_{11} \\ &= \sum_{k=1}^3 m_{1k} (-1)^{1+k} \Delta_{1,k}(M) \\ &= m_{11} \Delta_{1,1}(M) - m_{12} \Delta_{1,2}(M) + m_{13} \Delta_{1,3}(M) \\ &= m_{11} \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{12} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{13} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix} \\ &= m_{11} m_{22} m_{33} - m_{11} m_{23} m_{32} - m_{12} m_{21} m_{33} + m_{12} m_{23} m_{31} + m_{13} m_{21} m_{32} - m_{13} m_{22} m_{31} \\ &= \varepsilon(\sigma_1) \prod_{i=1}^3 m_{i,\sigma_1(i)} + \varepsilon(\sigma_4) \prod_{i=1}^3 m_{i,\sigma_4(i)} + \varepsilon(\sigma_2) \prod_{i=1}^3 m_{i,\sigma_2(i)} \\ &\quad + \varepsilon(\sigma_5) \prod_{i=1}^3 m_{i,\sigma_5(i)} + \varepsilon(\sigma_6) \prod_{i=1}^3 m_{i,\sigma_6(i)} + \varepsilon(\sigma_3) \prod_{i=1}^3 m_{i,\sigma_3(i)} \\ &= \sum_{k=1}^6 \varepsilon(\sigma_k) \prod_{i=1}^3 m_{i,\sigma_k(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)} \\ &= \det(M) \end{aligned}$$

(2) Cas $i \neq j$. Prenons par exemple $i := 1$ et $j := 2$. On a :

$$\begin{aligned} & [M\text{Com}(M)^T]_{12} \\ &= \sum_{k=1}^3 m_{1k} (-1)^{2+k} \Delta_{2,k}(M) \\ &= -m_{11} \Delta_{2,1}(M) + m_{12} \Delta_{2,2}(M) - m_{13} \Delta_{2,3}(M) \\ &= -m_{11} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{12} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{13} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix} \\ &= -m_{11} m_{12} m_{33} + m_{11} m_{32} m_{13} + m_{12} m_{11} m_{33} - m_{12} m_{31} m_{13} - m_{13} m_{11} m_{32} + m_{13} m_{31} m_{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

On en déduit alors une formule pour calculer l'inverse d'une matrice.

Corollaire 1.1.3

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^T.$$

1.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la formule du corollaire :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^T.$$

• **Comatrice de A .** On a :

$$\begin{aligned} \text{Com}(A) &= \begin{pmatrix} \Delta_{11}(A) & -\Delta_{12}(A) & \Delta_{13}(A) \\ -\Delta_{21}(A) & \Delta_{22}(A) & -\Delta_{23}(A) \\ \Delta_{31}(A) & -\Delta_{32}(A) & \Delta_{33}(A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• **Déterminant de A .** On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -8 + 4 + 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^T \\ &= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}^T \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Décompositions PLU et LU

On utilise dans cette section les décompositions *PLU* et *LU* pour calculer l'inverse d'une matrice (voir l'appendice A pour les informations nécessaires sur le déterminant et les matrices d'opérations). Ces décompositions permettent d'exprimer une matrice inversible comme le produit de deux matrices triangulaires à multiplication par une matrice de permutations près. Le calcul de l'inverse de la matrice devient donc facile.

2.1 Introduction

On commence par une définition qui nous servira pour la décomposition *LU*, celle de mineur principal.

Définition 2.1.1

Soit $M := (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les **mineurs principaux de M** sont les déterminants des sous-matrices :

$$(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$$

pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

On note alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mu_k(M) := \det((m_{ij})_{1 \leq i, j \leq k})$$

appelé **mineur principal de M de taille k** .

Par exemple pour une matrice :

$$M := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

les trois mineurs principaux sont :

$$\mu_1(M) = \det(m_{11}) = m_{11}$$

$$\mu_2(M) = \Delta_{33}(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

$$\mu_3(M) = \det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

On a alors le résultat suivant sur l'existence et l'unicité des décompositions *PLU* et *LU*.

Proposition 2.1.2

(i) (**Décomposition LU**) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls.

(a) Il existe des uniques matrices $L, U \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de la forme :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ l_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ & u_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

telles que :

$$A = LU$$

On appelle cette décomposition la **décomposition LU** de A .

(b) On a :

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}.$$

(ii) (**Décomposition PLU**) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) Il existe une matrice de permutations $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et deux matrices $L, U \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de la forme :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ l_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ & u_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

telles que :

$$A = PLU$$

On appelle cette décomposition une **décomposition PLU** de A .

(b) On a :

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P^{-1}.$$

Démonstration. Montrons le résultat dans le cas $n := 3$. Posons :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

(i) Notons les trois mineurs principaux de A par :

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \mu_1(A) = a_{11} \\ \mu_2 &:= \mu_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \mu_3 &:= \mu_3(A) = \det(A) \end{aligned}$$

Soit :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On a par identification :

$$\begin{aligned} A &= LU \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{1ère ligne :} & a_{11} = u_{11}, \quad a_{12} = u_{12}, \quad a_{13} = u_{13} \\ \text{2ème ligne :} & a_{21} = l_{21}u_{11}, \quad a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22}, \quad a_{23} = l_{21}u_{13} + u_{23} \\ \text{3ème ligne :} & a_{31} = l_{31}u_{11}, \quad a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}, \quad a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \\ \text{déterminant :} & \mu_3 = \det(A) = u_{11}u_{22}u_{33} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iff \mu_1, \mu_2 \neq 0 \wedge \left\{ \begin{array}{l} u_{11} = a_{11} = \mu_1, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13} \\ l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{a_{21}}{\mu_1} \\ u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{\mu_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \\ u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = \frac{\Delta_{32}}{\mu_1} \\ l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{a_{31}}{\mu_1} \\ l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{\Delta_{23}}{\mu_2} \\ u_{33} = \frac{\mu_3}{u_{11}u_{22}} = \frac{\mu_3}{\mu_2} \end{array} \right. \\ & \iff \mu_1, \mu_2 \neq 0 \wedge L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/\mu_1 & 1 & 0 \\ a_{31}/\mu_1 & \Delta_{23}/\mu_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \mu_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \mu_2/\mu_1 & \Delta_{32}/\mu_1 \\ 0 & 0 & \mu_3/\mu_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc, par le raisonnement par équivalence, existence et unicité de la décomposition LU.

- (ii) Il suffit de montrer qu'il existe une matrice de permutation P' telle que $P'A$ ait tous ces mineurs principaux non-nuls car ainsi $P'A$ s'écrira $P'A = LU$ comme dans le cas (i) *i.e.* :

$$A = P'^{-1}LU = PLU.$$

avec $P := (P')^{-1}$ qui est aussi une matrice de permutations.

Comme A est inversible, sa première colonne est non nulle. Donc il existe un indice $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ tel que $a_{i_0,1} \neq 0$. Posons alors :

$$P' := \mathbf{P}_{1,i_0}.$$

Posons $A' := P'A$. La matrice A' est du type :

$$A' =: \begin{pmatrix} a_{i_0,1} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

Comme A' est inversible (car A et P' le sont), les deux premières colonnes de A' sont non-colinéaires. Alors un des deux déterminants suivants est non nul (s'ils étaient tous les deux nuls les deux colonnes seraient colinéaires donc A' ne serait pas inversible) :

$$\alpha := \begin{vmatrix} a_{i_0,1} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}, \quad \beta := \begin{vmatrix} a_{i_0,1} & a'_{12} \\ a'_{31} & a'_{32} \end{vmatrix}.$$

On a alors deux cas.

- (1) Cas $\alpha \neq 0$. Alors on a :

$$\mu_1(A') := a_{i_0,1}, \quad \mu_2(A') := \alpha, \quad \mu_3(A') := \det(A')$$

qui sont tous non-nuls. Ainsi A' vérifie les conditions de (i) et par la remarque faite au début de la preuve de (ii), on a le résultat.

- (2) Cas $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$. Posons :

$$P'' := \mathbf{P}_{2,3}, \quad A'' := P''A' = P''P'A.$$

La matrice $P''P$ est une matrice de permutation. La matrice A'' est inversible et est du type :

$$A'' =: \begin{pmatrix} a_{i_0,1} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$\mu_1(A'') := a_{i_0,1} \quad , \quad \mu_2(A'') := \beta \quad , \quad \mu_3(A'') := \det(A'')$$

qui sont tous non-nuls. Ainsi A'' vérifie aussi les conditions de (i) et par la remarque faite au début de la preuve de (ii), on a le résultat. □

Une décomposition LU donne une décomposition PLU en prenant $P := I_n$. Comme nous verrons dans l'exemple suivant, la décomposition PLU n'est pas forcément unique *i.e.* il n'existe pas forcément une seule matrice de permutation P telle que PA ait tous ses mineurs principaux non nuls.

Exemple 2.1.3

Soit :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On va trouver deux décompositions PLU distinctes pour A .

(1) Les deux mineurs principaux de A sont :

$$\mu_1(A) = 1 \quad , \quad \mu_2(A) = \det(A) = 1 - 4 = -3.$$

Comme ils sont non nuls, A a une unique décomposition LU . Soit :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U := \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} A = LU &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 1 = u \quad , \quad 2 = v \\ 2 = lu \quad , \quad \det(A) = -3 = uw \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u = 1 \quad , \quad v = 2 \\ l = 2 \quad , \quad w = -3 \end{cases} \\ &\iff L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) Posons :

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A' := PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les deux mineurs principaux de A' sont :

$$\mu_1(A') = 2 \quad , \quad \mu_2(A') = \det(A') = 4 - 1 = 3.$$

Comme ils sont non nuls, A' a une unique décomposition LU . Soit :

$$L' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U' := \begin{pmatrix} u' & v' \\ 0 & w' \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 A' = L'U' &\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' & v' \\ 0 & w' \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2 = u' , 1 = v' \\ 1 = l'u' , \det(A') = 3 = u'w' \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} u' = 2 , v' = 1 \\ l = 1/2 , w = 3/2 \end{cases} \\
 &\iff L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} , U' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En conclusion, on a trouvé deux décompositions PLU distinctes pour A :

$$\begin{aligned}
 A &= LU \\
 &= I_2LU \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\
 A &= P^{-1}A'LU \\
 &= P'L'U' \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

avec $P' := P^{-1}$.

On obtient alors le résultat fondamental suivant.

Corollaire 2.1.4

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors A s'écrit comme le produit d'au plus :

$$n^2 + n - 1$$

matrices élémentaires.

Démonstration. La matrice A admet une décomposition PLU par la proposition 2.1.2 *i.e.* il existe une matrice de permutation $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et deux matrices $L, U \in GL_n(\mathbb{R})$ de la forme :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ l_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} , U := \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ & u_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

telles que :

$$A = PLU$$

Par la proposition A.6.3, les matrices L et U se décomposent en produit de matrices élémentaires *i.e.* il existe $r \in \{0, \dots, n(n-1)/2\}$, $s \in \{0, \dots, n(n+1)/2\}$ et $B_1, \dots, B_r, B_{r+1}, \dots, B_{r+s} \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$L = B_r \cdots B_1 , U = B_{r+s} \cdots B_{r+1}.$$

Par le point (i,b) du lemme A.5.1, il existe un entier $t \in \{0, \dots, n-1\}$ et des matrices de transpositions $B_{r+s+t}, \dots, B_{r+s+1} \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_\sigma = B_{r+s+1} \cdots B_{r+s+t}$$

Ainsi on a :

$$A = B_{r+s+t} \cdots B_1.$$

et :

$$r + s + t \leq \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + n - 1 = n^2 + n - 1.$$

□

2.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en décomposant A par la décomposition PLU ou la décomposition LU . Posons $A := (a_{ij})_{ij}$. Les mineurs principaux de A valent :

$$\mu_1(A) = a_{11} = 2$$

$$\mu_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\mu_3(A) = \det(A) = -3.$$

Ils sont tous non-nuls. Donc on est dans la condition (i) : la matrice A admet une unique décomposition LU .

• **Calculs de L et U .** Soit

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On a :

$$A = LU$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{1ère ligne : } & a_{11} = u_{11}, \quad a_{12} = u_{12}, \quad a_{13} = u_{13} \\ \text{2ème ligne : } & a_{21} = l_{21}u_{11}, \quad a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22}, \quad a_{23} = l_{21}u_{13} + u_{23} \\ \text{3ème ligne : } & a_{31} = l_{31}u_{11}, \quad a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}, \quad a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{11} = 2, \quad u_{12} = -2, \quad u_{13} = 1 \\ l_{21} = a_{21}/u_{11} = 1 \\ u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -1 \\ u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 \\ l_{31} = a_{31}/u_{11} = -1/2 \\ l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = -1 \\ u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

• **Calculs de L^{-1} et U^{-1} .** Les matrices L et U sont inversibles car elles sont triangulaires avec aucun 0 sur leurs diagonales. On a alors :

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

On peut trouver les inverses de L et U par une des méthodes exposées dans les sections du texte. On a aussi une expression directe dans l'appendice dans le cas d'une matrice triangulaire (voir la sous-section A.6). On a directement :

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

• **Calcul de A^{-1} .** Ainsi on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= U^{-1}L^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3 Exemple de décomposition en matrices élémentaires

Décomposons :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en matrices élémentaires de taille 3. On a $A = LU$ avec :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Par les propositions A.6.1 et A.6.2, on peut décomposer L et U en :

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{2,1}(1)\mathbf{T}_{3,1}(-1/2)\mathbf{T}_{3,2}(-1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ U &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_1(2)\mathbf{D}_2(-1)\mathbf{D}_3(3/2)\mathbf{T}_{1,2}(-1)\mathbf{T}_{1,3}(1/2)\mathbf{T}_{2,3}(-1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} A &= LU \\ &= \mathbf{T}_{2,1}(1)\mathbf{T}_{3,1}(-1/2)\mathbf{T}_{3,2}(-1)\mathbf{D}_1(2)\mathbf{D}_2(-1)\mathbf{D}_3(3/2)\mathbf{T}_{1,2}(-1)\mathbf{T}_{1,3}(1/2)\mathbf{T}_{2,3}(-1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 Pivot de Gauss

Dans cette section, on expose l'algorithme du pivot de Gauss. En agissant sur les lignes d'un système linéaire associé à une matrice inversible, cet algorithme rend le système triangulaire sans élément nul sur la diagonale. Il devient donc facile à résoudre en "remontant" les équations, ce qui nous donne une expression de l'inverse. On utilise les notations de l'appendice B.

3.1 Introduction

Proposition 3.1.1

Soit $A := (a_{ij})_{ij} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ et soit le système :

$$(E) : AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$. Pour calculer A^{-1} , on peut résoudre le système (E) en opérant sur les lignes, on a l'équivalence pour $X \in \mathbb{R}^n$:

$$X \in \text{Sol}(E) \iff AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

Cette méthode s'appelle la **méthode du pivot de Gauss** ou l'**élimination de Gauss-Jordan**.

Démonstration. Par le corollaire 2.1.4, il existe $r \in \mathbb{N}$ et des matrices élémentaires $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$A = B_1 \cdots B_r$$

i.e. on a :

$$B_r^{-1} \cdots B_1^{-1} A = I_n.$$

Et donc on a :

$$A^{-1} = B_r^{-1} \cdots B_1^{-1}.$$

Par l'appendice B, multiplier à gauche une matrice par une matrice élémentaires B_i^{-1} est équivalent à agir sur les lignes de la matrice. Posons pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$:

$$\text{Op}_i := \text{Op}_L(B_i^{-1}).$$

Soit $X, B \in \mathbb{R}^n$. Alors en agissant sur le système :

$$AX = B$$

en faisant successivement les opérations sur les lignes :

$$\text{Op}_1 \text{ puis } \text{Op}_2 \text{ puis } \cdots \text{Op}_r$$

i.e. en multipliant à gauche par :

$$B_1^{-1} \text{ puis } B_2^{-1} \text{ puis } \cdots B_r^{-1}$$

on a :

$$\begin{aligned} X \in \text{Sol}(E) &\iff AX = B \\ &\iff B_r^{-1} \cdots B_1^{-1} AX = B_r^{-1} \cdots B_1^{-1} B \\ &\iff X = A^{-1} B \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Posons :

$$A := (a_{ij})_{ij}, A^{-1} := (c_{ij})_{ij} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), X := (x_i)_i, B := (b_i)_i \in \mathbb{R}^n.$$

Alors le système (E) est équivalent à :

$$(E) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

En agissant sur les lignes de (E) par les trois opérations élémentaires sur les lignes (voir annexe B), on obtient que le système (E) est équivalent à :

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,1}b_1 + c_{1,2}b_2 + \cdots + c_{1,n}b_n \\ x_2 = c_{2,1}b_1 + c_{2,2}b_2 + \cdots + c_{2,n}b_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n,1}b_1 + c_{n,2}b_2 + \cdots + c_{n,n}b_n \end{cases}$$

3.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en opérant sur les lignes par le pivot de Gauss. Soit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

On a :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 2x - 2y + z = a \\ 2x - 3y + 2z = b \\ -x + 2y = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y = c & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2x - 3y + 2z = b \\ 2x - 2y + z = a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y = c \\ y + 2z = b + 2c & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 2y + z = a + 2c & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y = c \\ 2y + z = b + 2c \\ -3z = a - 2b - 2c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y - c \\ y = (b + 2c - z)/2 \\ z = (-a + 2b + 2c)/3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = (4a - 2b + c)/3 \\ y = (2a - b + 2c)/3 \\ z = (-a + 2b + 2c)/3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 Opération sur les lignes

On utilise les notations de l'appendice B. La méthode est semblable à celle du pivot de Gauss de la section précédente. La seule différence est qu'au lieu d'agir sur les lignes d'un système linéaire, on agit sur les lignes d'une matrice par blocs.

4.1 Introduction

Proposition 4.1.1

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe $r \in \mathbb{N}_*$ et des matrices d'opérations élémentaires sur les lignes B_1, \dots, B_r de taille n telles qu'en agissant sur la matrice par blocs $(A \mid I_n)$, on ait :

$$B_r \cdots B_1 (A \mid I_n) = (I_n \mid A^{-1})$$

i.e. on a :

$$(B_r \cdots B_1 A \mid B_r \cdots B_1) = (I_n \mid A^{-1}).$$

On a donc :

$$A^{-1} = B_r \cdots B_1.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 3.1.1. Par le corollaire 2.1.4, il existe $r \in \mathbb{N}$ et $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$A = B_1 \cdots B_r$$

i.e. on a :

$$B_r^{-1} \cdots B_1^{-1} A = I_n.$$

Et donc on a :

$$A^{-1} = B_r^{-1} \cdots B_1^{-1}.$$

Par l'appendice B, multiplier à gauche une matrice par une matrice B_i est équivalent à agir sur les lignes de la matrice. A chaque étape, on a donc :

$$\begin{aligned} (A \mid I_n) &\sim_L B_1 (A \mid I_n) = (B_1 A \mid B_1) \\ (B_1 A \mid B_1) &\sim_L B_2 (B_1 A \mid B_1) = (B_2 B_1 A \mid B_2 B_1) \\ &\vdots \\ (B_{r-1} \cdots B_1 A \mid B_{r-1} \cdots B_1) &\sim_L B_r (B_{r-1} \cdots B_1 A \mid B_{r-1} \cdots B_1) \\ &= (B_r \cdots B_1 A \mid B_r \cdots B_1) = (I_n \mid A^{-1}). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

4.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en opérant sur les lignes de la matrice par blocs $(A \mid I_3)$. On a successivement :

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
 \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \\
 \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
 \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_3 \\
 \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) & L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\
 \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -1/3.L_1 \\ L_2 \leftarrow 1/3.L_2 \\ L_3 \leftarrow -1/3.L_3 \end{array}
 \end{array}$$

Donc on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.3 Produit des matrices associées aux opérations élémentaires

Associons à chaque opération (élémentaire ou non) sur les lignes sa matrice (voir la section B pour les notations utilisées) :

$$\begin{aligned}
 \text{Mat}(L_1 \leftrightarrow L_3) &= \mathbf{P}_{1,3} =: B_1 \\
 \text{Mat}(L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) &= \mathbf{T}_{2,1}(2) =: B_2 \\
 \text{Mat}(L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) &= \mathbf{T}_{3,1}(2) =: B_3 \\
 \text{Mat}(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) &= \mathbf{T}_{3,1}(-2) =: B_4 \\
 \text{Mat}(L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_3) &= \text{Mat}(L_2 \leftarrow 3L_2) \text{Mat}(L_2 \leftarrow L_2 + 2/3.L_3) \\
 &= \mathbf{D}_2(3) \mathbf{T}_{2,3}(2/3) =: B_6 B_5 \\
 \text{Mat}(L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2) &= \text{Mat}(L_1 \leftarrow 3L_1) \text{Mat}(L_1 \leftarrow L_1 - 2/3.L_2) \\
 &= \mathbf{D}_1(3) \mathbf{T}_{1,2}(-2/3) =: B_8 B_7 \\
 \text{Mat}(L_1 \leftarrow -1/3.L_1) &= \mathbf{D}_1(-1/3) =: B_9 \\
 \text{Mat}(L_2 \leftarrow 1/3.L_2) &= \mathbf{D}_2(1/3) =: B_{10} \\
 \text{Mat}(L_3 \leftarrow -1/3.L_3) &= \mathbf{D}_3(-1/3) =: B_{11}
 \end{aligned}$$

Montrons que le produit de ces opérations élémentaires donne l'inverse de A . On a :³

$$\begin{aligned}
 &B_{11} B_{10} B_9 B_8 B_7 B_6 B_5 B_4 B_3 B_2 B_1 \\
 &= \mathbf{D}_3(-1/3) \mathbf{D}_2(1/3) \mathbf{D}_1(-1/3) \mathbf{D}_1(3) \mathbf{T}_{1,2}(-2/3) \mathbf{D}_2(3) \mathbf{T}_{2,3}(2/3) \\
 &\quad \mathbf{T}_{3,2}(-2) \mathbf{T}_{3,1}(2) \mathbf{T}_{2,1}(2) \mathbf{P}_{1,3}
 \end{aligned}$$

3. On sépare par le symbole • les multiplications faites ensembles.

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= A^{-1}
\end{aligned}$$

5 Opération sur les colonnes

On utilise les notations de l'appendice C. La méthode est similaire à la section précédente 4. On agit cette fois-ci sur les colonnes d'une matrice par blocs.

5.1 Introduction

Proposition 5.1.1

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe $r \in \mathbb{N}_*$ et des matrices d'opérations élémentaires sur les colonnes B_1, \dots, B_r de taille n telles qu'en agissant sur la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}$, on ait :

$$\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} B_1 \cdots B_r = \begin{pmatrix} I_n \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

i.e. on a :

$$\begin{pmatrix} AB_1 \cdots B_r \\ B_1 \cdots B_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$A^{-1} = B_1 \cdots B_r.$$

Démonstration. Posons la matrice par blocs :

$$(A' \mid I_n) := (A^T \mid I_n) = \begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}^T.$$

On est dans le cas de la proposition 4.1.1 avec la matrice par blocs $(A' \mid I_n)$. Il existe $r \in \mathbb{N}_*$ et des matrices d'opérations élémentaires sur les lignes B'_1, \dots, B'_r de taille n telles qu'en agissant sur la matrice par blocs $(A' \mid I_n)$, on ait :

$$B'_r \cdots B'_1 (A' \mid I_n) = (I_n \mid (A')^{-1})$$

i.e. on a :

$$(B'_r \cdots B'_1 A' \mid B'_r \cdots B'_1) = (I_n \mid (A')^{-1}).$$

On a donc :

$$A'^{-1} = B'_r \cdots B'_1.$$

En repassant à la transposée et en posant pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$:

$$B_i := (B'_i)^T,$$

on a donc à chaque étape :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} &\sim_C \begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} B_1 = \begin{pmatrix} AB_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} AB_1 \\ B_1 \end{pmatrix} &\sim_C \begin{pmatrix} AB_1 \\ B_1 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} AB_1 B_2 \\ B_1 B_2 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \begin{pmatrix} AB_1 \cdots B_{r-1} \\ B_1 \cdots B_{r-1} \end{pmatrix} &\sim_C \begin{pmatrix} AB_1 \cdots B_{r-1} \\ B_1 \cdots B_{r-1} \end{pmatrix} B_r \\ &= \begin{pmatrix} AB_1 \cdots B_r \\ B_1 \cdots B_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ A^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

5.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en opérant sur les colonnes de la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A \\ I_3 \end{pmatrix}$. On a successivement :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ I_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim_C \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && C_1 \leftrightarrow C_3 \\ &\sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \end{array} \\ &\sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2 \\ &\sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} && C_2 \leftarrow 3C_2 - 2C_3 \\ &\sim_C \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \hline 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} && C_1 \leftarrow 3C_1 - 2C_2 \end{aligned}$$

$$\sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow 1/3.C_1 \\ C_2 \leftarrow 1/3.C_2 \\ C_3 \leftrightarrow 1/3.C_3 \end{array}$$

Donc on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.3 Produit des matrices associées aux opérations élémentaires

Associons à chaque opération (élémentaire ou non) sur les colonnes sa matrice (voir la section C pour les notations utilisées) :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(C_1 \leftrightarrow C_3) &= \mathbf{P}_{1,3} =: B_1 \\ \text{Mat}(C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1) &= \mathbf{T}_{2,1}(2)^T =: B_2 \\ \text{Mat}(C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1) &= \mathbf{T}_{3,1}(-2)^T =: B_3 \\ \text{Mat}(C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2) &= \mathbf{T}_{3,2}(2)^T =: B_4 \\ \text{Mat}(C_2 \leftarrow 3C_2 - 2C_3) &= \text{Mat}(C_2 \leftarrow C_2 - 2/3.C_3) \text{Mat}(C_2 \leftarrow 3C_2) \\ &= \mathbf{T}_{2,3}(-2/3)^T \mathbf{D}_2(3) =: B_5 B_6 \\ \text{Mat}(C_1 \leftarrow 3C_1 - 2C_2) &= \text{Mat}(C_1 \leftarrow C_1 - 2/3.C_2) \text{Mat}(C_1 \leftarrow 3C_1) \\ &= \mathbf{T}_{1,2}(-2/3)^T \mathbf{D}_1(3) =: B_7 B_8 \\ \text{Mat}(C_1 \leftarrow 1/3.C_1) &= \mathbf{D}_1(1/3) =: B_9 \\ \text{Mat}(C_2 \leftarrow 1/3.C_2) &= \mathbf{D}_2(1/3) =: B_{10} \\ \text{Mat}(C_3 \leftarrow 1/3.C_3) &= \mathbf{D}_3(1/3) =: B_{11} \end{aligned}$$

Montrons que le produit de ces opérations élémentaires donne l'inverse de A . On a :⁴

$$\begin{aligned} & B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} \\ &= \mathbf{P}_{1,3} \mathbf{T}_{2,1}(2)^T \mathbf{T}_{3,1}(-2)^T \mathbf{T}_{3,2}(2)^T \mathbf{T}_{2,3}(-2/3)^T \mathbf{D}_2(3) \\ & \quad \mathbf{T}_{1,2}(-2/3)^T \mathbf{D}_1(3) \mathbf{D}_1(1/3) \mathbf{D}_2(1/3) \mathbf{D}_3(1/3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. On sépare par le symbole \bullet les multiplications faites ensembles.

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A^{-1} \end{aligned}$$

6 Théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley-Hamilton dit que le polynôme caractéristique d'une matrice est un polynôme annulateur de cette matrice. Ainsi dans le cas d'une matrice inversible, on trouve une méthode rapide pour calculer son inverse.

6.1 Introduction

On rappelle quelques résultats utiles sur le polynôme caractéristique d'une matrice ⁵.

Définition 6.1.1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le **polynôme caractéristique de M** est défini par :

$$\chi_M(X) := \det(M - XI_3).$$

En développant le déterminant, on trouve que le polynôme $\chi_M(X)$ est de degré n , de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\det(M)$. Donc il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n - 1$ tel que :

$$\chi_M(X) = XR(X) + \det(M). \quad (6.1.1)$$

Exemple 6.1.2

Soit $M := (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a en développant par exemple par rapport à la première ligne le déterminant de taille 3 :

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \det(M - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} m_{11} - X & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} - X & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} - X \end{vmatrix} \\ &= (m_{11} - X) \begin{vmatrix} m_{22} - X & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} - X \end{vmatrix} - m_{12} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} - X \end{vmatrix} + m_{13} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} - X \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix} \\ &= (m_{11} - X) [(m_{22} - X)(m_{33} - X) - m_{32}m_{23}] \\ &\quad - m_{12} [m_{21}(m_{33} - X) - m_{31}m_{23}] \\ &\quad + m_{13} [m_{21}m_{32} - m_{31}(m_{22} - X)] \\ &= -X^3 + (m_{11} + m_{11} + m_{11})X^2 \\ &\quad + (m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22} + m_{13}m_{31} + m_{23}m_{32} - m_{11}m_{33} - m_{22}m_{33})X \\ &\quad - m_{13}m_{22}m_{31} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} - m_{11}m_{23}m_{32} - m_{12}m_{21}m_{33} + m_{11}m_{22}m_{33} \\ &= -X^3 + \text{Tr}(M)X^2 - c_1X + \det(M) \end{aligned}$$

avec :

$$c_1 := m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22} + m_{13}m_{31} + m_{23}m_{32} - m_{11}m_{33} - m_{22}m_{33}.$$

On a donc :

$$\chi_M(X) = XR(X) + \det(M)$$

avec :

$$R(X) := -X^2 + \text{Tr}(M)X - c_1.$$

5. On aurait pu définir χ_M par $\chi_M(X) := \det(XI_n - M)$.

Proposition 6.1.3: Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\chi_M(M) = 0.$$

Démonstration. Montrons le résultat pour $n := 3$. Posons :

$$N := \text{Com}(M - XI_3)^T.$$

et :

$$-X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0 := \chi_M(X) = \det(M - XI_3).$$

En développant les déterminants apparaissant dans la comatrice de $M - XI_3$, on obtient que N est un polynôme de degré 2 du type :

$$X^2N_2 + XN_1 + N_0 := N = \text{Com}(M - XI_3)^T.$$

Alors on a par la proposition 1.1.2 :

$$\begin{aligned} -X^3I_3 + c_2X^2I_3 + c_1XI_3 + c_0I_3 &= \chi(X)I_3 \\ &= \det(M - XI_3)I_3 \\ &= (M - XI_3)\text{Com}(M - XI_3)^T \\ &= (M - XI_3)N \\ &= (M - XI_3)(X^2N_2 + XN_1 + N_0) \\ &= -X^3N_2 + X^2(MN_2 - N_1) + X(MN_1 - N_0) + MN_0 \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})[X]$, on a :

$$\begin{aligned} c_0I_3 &= MN_0 \\ c_1I_3 &= MN_1 - N_0 \\ c_2I_3 &= MN_2 - N_1 \\ -I_3 &= -N_2 \end{aligned}$$

Ainsi en multipliant la deuxième équation par M , la troisième par M^2 et la quatrième par M^3 , on a :

$$\begin{aligned} c_0I_3 &= MN_0 \\ c_1M &= M(MN_1 - N_0) \\ c_2M^2 &= M^2(MN_2 - N_1) \\ -M^3 &= -M^3N_2 \end{aligned}$$

En sommant ces quatre équations, on a par télescopage :

$$\begin{aligned} \chi_M(M) &= -M^3 + c_2M^2 + c_1M + c_0I_3 \\ &= -M^3N_2 + M^2(MN_2 - N_1) + M(MN_1 - N_0) + MN_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

On en déduit le corollaire suivant dans le cas d'une matrice inversible.

Corollaire 6.1.4

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n - 1$ tel que :

$$A^{-1} = \frac{-1}{\det(A)} R(A).$$

Démonstration. Par l'équation (6.1.1), il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n - 1$ tel que :

$$\chi_A(X) = XR(X) + \det(A).$$

Comme $\det(A) \neq 0$, on a par le théorème de Cayley-Hamilton :

$$0 = \chi_A(A) = AR(A) + \det(A)I_n$$

i.e. on a :

$$A^{-1} = \frac{-1}{\det(A)} R(A).$$

□

En comparant avec le corollaire 1.1.3, on a donc :

$$R(A) = -\text{Com}(A)^T.$$

6.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant le corollaire précédent. Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} 2-X & -2 & 1 \\ 2 & -3-X & 2 \\ -1 & 2 & -X \end{vmatrix} \\ &= (2-X) \begin{vmatrix} -3-X & 2 \\ 2-X & -X \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2-X & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3-X & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2-X)((3-X)X - 2(2-X)) - 2(2X - (2-X)) - (-4 + 3 - X) \\ &= -X^3 - X^2 + 5X - 3 \end{aligned}$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \chi_A(A) \\ &= -A^3 - A^2 + 5A - 3I_3 \\ &= A(-A^2 - A + 5I_3) - 3I_3 \end{aligned}$$

i.e. on a⁶ :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(-A^2 - A + 5I_3)$$

6. On est donc dans le cas où $R(X) := -X^2 - X + 5$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \left[- \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[- \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7 Formule déduite du théorème de Cayley-Hamilton

Dans la section précédente, on a obtenu une expression de l'inverse d'une matrice comme un polynôme en la matrice (voir le corollaire 6.1.4). Dans cette section, on donne la formule explicite de ce polynôme. Les coefficients de ce polynôme dépendent des traces des puissances de la matrice.

7.1 Introduction

Pour obtenir la formule générale, on a besoin d'une notation. Posons pour tout $s \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\Gamma(n, s) := \left\{ (k_1, \dots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}, s + \sum_{l=1}^{n-1} lk_l = n-1 \right\}.$$

Proposition 7.1.1

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{s=0}^{n-1} A^s \sum_{(k_1, \dots, k_{n-1}) \in \Gamma(n, s)} \prod_{l=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k_l+1}}{l^{k_l} k_l!} \text{Tr}(A^l)^{k_l}.$$

Démonstration. On donne la preuve dans le cas $n := 3$. On montre après la preuve que la formule se réduit dans ce cas à :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\frac{1}{2} [(\text{Tr} A)^2 - \text{Tr}(A^2)] I_3 - A \text{Tr}(A) + A^2 \right).$$

Montrons cette formule. Il existe des coefficients $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que le polynôme caractéristique de A vaut :

$$\chi_A(X) = -X^3 + c_2 X^2 + c_1 X + \det(A)$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ les valeurs propres complexes de A (comptées avec multiplicités) *i.e.* on a :

$$\chi_A(X) = -(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3).$$

On a donc en développant et en identifiant les deux expressions de χ_A (ce sont les relations coefficients-racines) :

$$\begin{aligned} c_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ c_1 &= -\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned}$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$s_k := \text{Tr}(A^k)$$

Comme toute matrice est trigonalisable dans \mathbb{C} , il existe une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure :

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

telles que :

$$T = P^{-1} A P.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ $A^k = P T^k P^{-1}$, on a donc :

$$\begin{aligned} s_k &= \text{Tr}(A^k) \\ &= \text{Tr}(P T^k P^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Tr}(T^k) \\
 &= \text{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & * \\ 0 & \lambda_2^k & * \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix} \\
 &= \lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k
 \end{aligned}$$

Par le théorème sur les polynômes symétriques, les scalaires s_k s'expriment en fonction des c_k et inversement les scalaires c_k s'expriment en fonction des s_k , ce sont les identités de Newton. Les formules générales utilisent les **polynômes de Bell** B_k . Dans le cas $n := 3$, on trouve simplement les formules à la main. On a :

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
 &= s_1 \\
 &= \text{Tr}(A) \\
 c_1 &= -\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3 \\
 &= \frac{1}{2} [-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)] \\
 &= \frac{1}{2} [-s_1^2 + s_2] \\
 &= \frac{1}{2} [-(\text{Tr}A)^2 + \text{Tr}(A^2)]
 \end{aligned}$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$0 = \chi_A(A) = -A^3 + c_2A^2 + c_1A + \det(A)I_3$$

i.e. on a :

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{\det A} (A^2 - c_2A - c_1I_3) \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \left(\frac{1}{2} [(\text{Tr}A)^2 - \text{Tr}(A^2)] I_3 - A\text{Tr}(A) + A^2 \right)
 \end{aligned}$$

□

On finit la sous-section par les cas $n := 2$ et $n := 3$. On démontre en particulier la formule donnée dans la preuve de la proposition précédente dans le cas $n := 3$.

Exemple 7.1.2

(1) Pour $n := 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(2, 0) &= \{k_1 \in \mathbb{N}, 0 + k_1 = 1\} = \{1\} \\
 \Gamma(2, 1) &= \{k_1 \in \mathbb{N}, 1 + k_1 = 1\} = \{0\}
 \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{s=0}^1 A^s \sum_{k_1 \in \Gamma(1,s)} \frac{(-1)^{k_1+1}}{1^{k_1} k_1!} \text{Tr}(A^1)^{k_1} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \left(A^0 \frac{(-1)^{1+1}}{1^1 1!} \text{Tr}(A^1)^2 + A^1 \frac{(-1)^{0+1}}{1^0 0!} \text{Tr}(A^1)^1 \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\det A} (\text{Tr}(A)I_2 - A)$$

(2) Pour $n := 3$, on a :

$$\Gamma(3, 0) = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2, 0 + k_1 + 2k_2 = 2\} = \{(2, 0), (0, 1)\}$$

$$\Gamma(3, 1) = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2, 1 + k_1 + 2k_2 = 2\} = \{(1, 0)\}$$

$$\Gamma(3, 2) = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2, 2 + k_1 + 2k_2 = 2\} = \{(0, 0)\}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{s=0}^2 A^s \sum_{(k_1, k_2) \in \Gamma(3, s)} \prod_{l=1}^2 \frac{(-1)^{k_l+1}}{l^{k_l} k_l!} \text{Tr}(A^l)^{k_l} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \left(A^0 \left(\frac{(-1)^{2+1}}{1^2 2!} \text{Tr}(A^1)^2 \frac{(-1)^{0+1}}{2^0 0!} \text{Tr}(A^2)^0 + \frac{(-1)^{0+1}}{1^0 0!} \text{Tr}(A^1)^0 \frac{(-1)^{1+1}}{2^1 1!} \text{Tr}(A^2)^1 \right) \right. \\ &\quad \left. + A^1 \frac{(-1)^{1+1}}{1^1 1!} \text{Tr}(A^1)^1 \frac{(-1)^{0+1}}{2^0 0!} \text{Tr}(A^2)^0 + A^2 \frac{(-1)^{0+1}}{1^0 0!} \text{Tr}(A^1)^0 \frac{(-1)^{0+1}}{2^0 0!} \text{Tr}(A^2)^0 \right) \\ &= \frac{1}{\det(A)} \left(\frac{1}{2} [(\text{Tr}A)^2 - \text{Tr}(A^2)] I_3 - A \text{Tr}(A) + A^2 \right) \end{aligned}$$

7.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la formule précédente dans le cas $n := 3$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\frac{1}{2} [(\text{Tr}A)^2 - \text{Tr}(A^2)] I_3 - A \text{Tr}(A) + A^2 \right)$$

Comme :

$$\text{Tr}(A) = -1$$

$$\det(A) = -3$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(A^2) = 11$$

on a donc :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \left(\frac{1}{2} [(\text{Tr}A)^2 - \text{Tr}(A^2)] I_3 - A \text{Tr}(A) + A^2 \right) \\ &= \frac{1}{-3} \left(-5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8 Diagonalisation et polynôme minimal

Comme nous avons vu, le théorème de Cayley-Hamilton dit que le polynôme caractéristique d'une matrice est un polynôme annulateur de cette matrice. De plus, l'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice forme un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$. Ainsi cet idéal est engendré par un polynôme unitaire de degré minimal appelé le polynôme minimal de la matrice. Son degré peut être le même que le polynôme caractéristique mais dans le cas contraire, on obtient une méthode plus rapide (car demandant moins de multiplications de matrices) que celle de la section 6 utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.

8.1 Introduction

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On note :

$$\text{Ann}(M) := \{P \in \mathbb{K}[X], P(M) = 0\}.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton est équivalent à l'assertion :

$$\chi_M(X) \in \text{Ann}(M).$$

Comme $\text{Ann}(M)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ (appelé l'**idéal des polynômes annulateurs de M**) et comme l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est **principal** *i.e.* pour tout idéal I de $\mathbb{K}[X]$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I = P\mathbb{K}[X]$, on a la définition suivante.

Définition 8.1.1

Le **polynôme minimal de M** est l'unique polynôme unitaire π_M de $\text{Ann}(M)$ (de degré minimal) tel que :

$$\text{Ann}(M) = \pi_M(X)\mathbb{K}[X].$$

Comme $\chi_M(X) \in \text{Ann}(M)$, le polynôme π_M divise donc χ_M . Avant d'énoncer le résultat utile pour cette section, on fait des rappels sur la diagonalisation.

Définition 8.1.2

(i) On dit que M et N sont **semblables** s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M = PNP^{-1}.$$

On note alors :

$$M \sim N.$$

(ii) On dit que M est **diagonalisable** s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M \sim D.$$

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une **valeur propre de M dans \mathbb{K}** s'il existe un vecteur non nul $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $Mu = \lambda u$. On dit que u est un **vecteur propre associé à λ** .

(a) On note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M dans \mathbb{K} . On notera simplement $\text{Sp}(M) := \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$.

(b) L'espace propre associé à la valeur propre λ est le \mathbb{K} -espace vectoriel $E_{\lambda}(M)$ défini par :

$$E_{\lambda}(M) := \{v \in \mathbb{K}^n, Mv = \lambda v\} := \text{Ker}(M - \lambda I_n).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a les équivalences simples :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M) &\iff \exists v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, Mv = \lambda v \\ &\iff \exists v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}, M^k v = \lambda^k v \\ &\iff \exists v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, \pi_M(\lambda)v = 0 \\ &\iff \pi_M(\lambda) = 0\end{aligned}$$

i.e. λ est valeur propre de M si et seulement si elle est une racine de π_M .

Dit autrement, si M est diagonalisable, il existe une base (u_1, \dots, u_n) de \mathbb{K}^n et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$P = (u_1 \mid \dots \mid u_n) \quad , \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Comme P est la matrice de passage de la base canonique (e_1, \dots, e_n) à la base (u_1, \dots, u_n) , on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ $P^{-1}u_i = e_i$ et donc :

$$\begin{aligned}Mu_i &= PDP^{-1}u_i \\ &= PDe_i \\ &= P\lambda_i e_i \\ &= \lambda_i u_i\end{aligned}$$

i.e. u_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i (u_i est non nul car c'est un vecteur d'une base). Ainsi on a l'équivalence entre :

- (i) M est diagonalisable dans \mathbb{K} ;
- (ii) il existe une base de \mathbb{K}^n formée de vecteurs propres de M .

De plus soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M) &\iff \exists v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, Mv = \lambda v \\ &\iff \exists v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, (M - \lambda I_n)v = 0 \\ &\iff \det(M - \lambda I_n) \neq 0 \\ &\iff \chi_M(\lambda) = 0\end{aligned}$$

i.e. les valeurs propres de M sont exactement les racines de χ_M .

On a alors le lemme usuel.

Lemme 8.1.3

On a équivalence entre :

- (i) M est diagonalisable dans \mathbb{K} ;
- (ii) on a la somme directe :

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} E_{\lambda}(M).$$

Démonstration. Montrons le résultat dans le cas où M a deux valeurs propres distinctes λ et μ .

Supposons que M soit diagonalisable dans \mathbb{K} . Montrons que la somme est directe. Soit :

$$x \in E_\lambda(M) \cap E_\mu(M)$$

i.e. on a :

$$Mx = \lambda x \quad , \quad Mx = \mu x.$$

Donc on a $(\lambda - \mu)x = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, on a donc $x = 0$.

Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Comme M est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres $x_1, \dots, x_k \in E_\lambda(M)$ et $x_{k+1}, \dots, x_{k+n} \in E_\mu(M)$ (avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$). Donc il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i \in E_\lambda(M) + E_\mu(M) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{K}^n = E_\lambda(M) \oplus E_\mu(M)$. Soit (u_1, \dots, u_k) une base de $E_\lambda(M)$ et (u_{k+1}, \dots, u_n) une base de $E_\mu(M)$. Alors (u_1, \dots, u_n) est une base de vecteurs propres associée à la somme directe. Donc M est diagonalisable. \square

Proposition 8.1.4

On a équivalence entre :

- (i) M est diagonalisable dans \mathbb{K} ;
- (ii) π_M est scindé à racines simples *i.e.* :

$$\pi_M = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} (X - \lambda).$$

Démonstration. • (i) \implies (ii). Supposons que M soit diagonalisable dans \mathbb{K} . Il suffit de montrer que :

- (1) $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} (X - \lambda)$ divise π_M ;
- (2) π_M divise $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} (X - \lambda)$ en redémontrant un cas simple du lemme des noyaux.

On en déduira alors que comme les deux polynômes sont unitaires, ils sont donc égaux. Posons :

$$\sum_{k=0}^p a_k M^k := \pi_M(X) \in \mathbb{K}[X]$$

avec $p \leq n$.

- (1) Montrons que $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} (X - \lambda)$ divise π_M . Comme l'ensemble des polynômes $(X - \lambda)$ pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ forme une famille de polynômes premiers entre eux, il suffit de montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$, le polynôme $(X - \lambda)$ divise π_M *i.e.* que $\pi_M(\lambda) = 0$. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ et $x \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre (non nul) associé à λ . Montrons que λ est racine de π_M . Comme $Mx = \lambda x$, on a par récurrence simple pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$M^k x = \lambda^k x.$$

Comme $\pi_M(M) = 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}^n} &= 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} x \\ &= \pi_M(M) x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^p a_k M^k x \\
&= \sum_{k=0}^p a_k \lambda^k x \\
&= \pi_M(\lambda)x.
\end{aligned}$$

Comme x est non nul, on a donc :

$$\pi_M(\lambda) = 0.$$

(2) Montrons que π_M divise $P := \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} (X - \lambda)$ *i.e.* $P(M) = 0$ (car alors $P \in \text{Ann}(M)$ et par minimalité de π_M , on a π_M qui divise P). Montrons que :

$$\text{Ker}(P(M)) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \text{Ker}(M - \lambda I_n). \quad (8.1.1)$$

C'est un cas particulier du **lemme des noyaux**. Montrons ce résultat dans le cas où M a deux valeurs propres distinctes λ et μ dans \mathbb{K} . Les polynômes $X - \lambda$ et $X - \mu$ sont premiers entre eux *i.e.* par le théorème de Bézout, il existe des polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$(*) : U(X)(X - \lambda) + V(X)(X - \mu) = 1$$

en prenant par exemple (ce n'est pas utile pour la suite) :

$$U := \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad V := \frac{1}{\lambda - \mu}.$$

Donc on a en évaluant $(*)$ en M :

$$(**) : U(M)(M - \lambda I_n) + V(M)(M - \mu I_n) = I_n.$$

Montrons que :

$$\text{Ker}(M - \lambda I_n) \cap \text{Ker}(M - \mu I_n) = \{0\}.$$

Soit $x \in \text{Ker}(M - \lambda I_n) \cap \text{Ker}(M - \mu I_n)$. D'après la relation $(**)$, on a :

$$\begin{aligned}
x &= I_n x \\
&= U(M)(M - \lambda I_n)x + V(M)(M - \mu I_n)x \\
&= U(M)0_{\mathbb{K}^n} + V(M)0_{\mathbb{K}^n} \\
&= 0_{\mathbb{K}^n}
\end{aligned}$$

Montrons par double inclusion que :

$$\text{Ker}(P(M)) = \text{Ker}(M - \lambda I_n) + \text{Ker}(M - \mu I_n).$$

Soit $x \in \text{Ker}(P(M))$. Posons :

$$u := U(M)(M - \lambda I_n)x, \quad v := V(M)(M - \mu I_n)x.$$

Par $(**)$, on a :

$$\begin{aligned}
(M - \mu I_n)u &= (M - \mu I_n)U(M)(M - \lambda I_n)x \\
&= U(M)P(M)x \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(M - \lambda I_n)v &= (M - \lambda I_n)V(M)(M - \mu I_n)x \\
&= V(M)P(M)x \\
&= 0
\end{aligned}$$

i.e. on a :

$$u \in \text{Ker}(M - \mu I_n) \quad , \quad v \in \text{Ker}(M - \lambda I_n).$$

De plus par (**), on a :

$$\begin{aligned}
x &= I_n x \\
&= U(M)(M - \lambda I_n)x + V(M)(M - \mu I_n)x \\
&= u + v \in \text{Ker}(M - \mu I_n) + \text{Ker}(M - \lambda I_n)
\end{aligned}$$

Soit $y \in \text{Ker}(M - \lambda I_n)$ *i.e.* $(M - \lambda I_n)y = 0$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
P(M)y &= (M - \lambda I_n)(M - \mu I_n)y \\
&= (M - \mu I_n)(M - \lambda I_n)y \\
&= (M - \mu I_n)0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

i.e. on a $y \in \text{Ker}(P(M))$. De même on a par symétrie $\text{Ker}(M - \mu I_n) \subset \text{Ker}(P(M))$. Ainsi on a :

$$\text{Ker}(M - \lambda I_n) + \text{Ker}(M - \mu I_n) \subset \text{Ker}(P(M)).$$

Ainsi par le lemme 8.1.3 on a :

$$\text{Ker}(P(M)) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \text{Ker}(M - \lambda I_n) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} E_{\lambda}(M) = \mathbb{K}^n$$

i.e. $P(M) = 0$.

- (ii) \implies (i). Réciproquement supposons que π_M soit scindé à racines simples *i.e.*

$$\pi_M = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} (X - \lambda).$$

On a alors par l'équation (8.1.1) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}^n &= \text{Ker}(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \\
&= \text{Ker}(\pi_M(M)) \\
&= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \text{Ker}(M - \lambda I_n) \\
&= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} E_{\lambda}(M)
\end{aligned}$$

Donc on peut choisir une base de vecteurs propres de M dans \mathbb{K}^n adaptée à cette somme directe *i.e.* M est diagonalisable dans \mathbb{K} . \square

8.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant le polynôme minimal de A . Nous devons pour cela avoir une forme factorisée du polynôme caractéristique de A contrairement à la section 6. On a :

$$\begin{aligned}
 \chi_A(X) &= \det(A - XI_3) \\
 &= \begin{vmatrix} 2-X & -2 & 1 \\ 2 & -3-X & 2 \\ -1 & 2 & -X \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2-X & -2 & 1 \\ -2+2X & 1-X & 0 \\ -1+2X-X^2 & 2-2X & 0 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + XL_1 \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 2-X & -2 & 1 \\ -2(1-X) & 1-X & 0 \\ -(1-X)^2 & 2(1-X) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -2(1-X) & 1-X \\ -(1-X)^2 & 2(1-X) \end{vmatrix} \\
 &= (1-X)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -(1-X) & 2 \end{vmatrix} \\
 &= -(X-1)^2(X+3)
 \end{aligned}$$

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 2y + z = x \\ 2x - 3y + 2z = y \\ -x + 2y = z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3}(A) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 2y + z = -3x \\ 2x - 3y + 2z = -3y \\ -x + 2y = -3z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 8y + 16z = 0 & L_5 \longrightarrow L_5 + 5L_3 \\ 4y + 8z = 0 & L_2 \longrightarrow L_2 + 2L_3 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -2z \\ x = 2y + 3z = -z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc on a :

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-3}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les dimensions des espaces propres sont respectivement égales aux ordres de multiplicité des valeurs propres dans le polynôme caractéristique *i.e.* A est diagonalisable dans \mathbb{R} . On a deux méthodes possibles.

- (1) **En utilisant le polynôme minimal annulateur.** C'est ce que nous voyons dans cette section.
- (2) **En utilisant la matrice de passage** (la méthode n'est pratique pas car elle nécessite de calculer l'inverse de la matrice de passage qui peut-être aussi difficile à calculer que l'inverse de A). C'est ce que nous verrons dans la section suivante 9.

Comme A est diagonalisable dans \mathbb{R} , son polynôme annulateur π_A est scindé à racines simples réelles, est divisible par $(X - 1)(X + 3)$ et divise χ_A *i.e.* on a :

$$\pi_A(X) = (X - 1)(X + 3) = X^2 + 2X - 3.$$

On vérifie bien que (mais c'est inutile) :

$$\begin{aligned} \pi_A(A) &= A^2 + 2A - 3I_3 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

i.e. on a $A(A + 2I_3) = 3I_3$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{3}(A + 2I_3) \\ &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9 Diagonalisation et matrice de passage

On va reprendre les calculs de la section précédente 8 et utiliser la matrice de passage pour calculer l'inverse d'une matrice inversible et diagonalisable.

9.1 Introduction

On a une relation simple entre l'inverse de la matrice, la matrice de passage et la matrice diagonale.

Proposition 9.1.1

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Supposons que A soit diagonalisable dans \mathbb{R} i.e. il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale :

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Alors on a :

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

donc on a :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Et de plus on a :

$$\begin{aligned} PD^{-1}P^{-1}A &= PD^{-1}P^{-1}PDP^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Cette méthode n'est pas pratique car elle nous demande de calculer l'inverse de P qui n'a aucune raison d'être plus facile que le calcul de l'inverse de A .

9.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la matrice de passage. On a trouvé dans la section précédente 8 que le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+3)$$

et que :

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-3}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc A est diagonalisable. Posons alors :

$$P := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On a par exemple en utilisant la comatrice (voir le corollaire 1.1.3) :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \text{Com}(P)^T.$$

• **Comatrice de P .** On a :

$$\begin{aligned} \text{Com}(P) &= \begin{pmatrix} \Delta_{11}(P) & -\Delta_{12}(P) & \Delta_{13}(P) \\ -\Delta_{21}(P) & \Delta_{22}(P) & -\Delta_{23}(P) \\ \Delta_{31}(P) & -\Delta_{32}(P) & \Delta_{33}(P) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• **Déterminant de P .** On a :

$$\begin{aligned} \det(P) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{\det(P)} \text{Com}(P)^T \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Calcul de A^{-1} .** Comme $D = P^{-1}AP$, on a

$$\begin{aligned} A^{-1} &= PD^{-1}P^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10 Diagonalisation et matrice orthogonale

Le problème de la section précédente 9 est qu'il faut calculer l'inverse de la matrice de passage. Il existe un cas simple où l'inverse de la matrice de passage est simple à calculer : si la matrice de départ est symétrique alors la matrice de passage est orthogonale. Comment faire si la matrice de départ n'est pas symétrique, on peut alors travailler sur une matrice associée qui est le produit de la matrice de départ par sa transposée.

On aurait pu espérer que la méthode soit plus simple mais comme on le verra, à cause de l'orthonormalisation, on va faire apparaître des racines carrées un peu partout dans le calcul, ce qui au final rendra la méthode longue et technique.

10.1 Introduction

Définition 10.1.1

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (i) On dit que A et B sont **orthogonalement semblables** s'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ (i.e. $P^{-1} = P^T$) telle que :

$$A = P^T B P.$$

On note alors :

$$A \sim_{\perp} B.$$

- (ii) On dit que A est **orthogonalement diagonalisable** s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A \sim_{\perp} D.$$

On commence par un lemme usuel sur les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice symétrique.

Lemme 10.1.2

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **symétrique** i.e. $C^T = C$.

- (i) Alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) \subset \mathbb{R}$.
(ii) Supposons qu'il existe deux valeurs propres λ et μ distinctes de C . Soit $x \in E_{\lambda}(C)$ et $y \in E_{\mu}(C)$. Alors on a :

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Démonstration. (i) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(C)$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ (non nul). Comme x est non nul, on a :

$$\alpha := \|x\|^2 = \bar{x}^T x > 0$$

Et ainsi on a :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\lambda \bar{x}^T x}{\alpha} \\ &= \frac{\bar{x}^T (\lambda x)}{\alpha} \\ &= \frac{\bar{x}^T C x}{\alpha} \\ &= \frac{C x^T x}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overline{\lambda x^T x}}{\alpha} \\
&= \frac{\overline{\lambda \overline{x^T x}}}{\alpha} \\
&= \overline{\lambda}
\end{aligned}$$

i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle &= \lambda x^T y - \mu x^T y \\
&= (\lambda x)^T y - x^T (\mu y) \\
&= (Cx)^T y - x^T (Cy) \\
&= x^T C^T y - x^T C y \\
&= x^T C y - x^T C y \\
&= 0
\end{aligned}$$

or $\lambda - \mu \neq 0$, d'où le résultat. □

On en déduit alors le théorème spectral.

Proposition 10.1.3: Théorème spectral

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors C est orthogonalement diagonalisable.

Démonstration. Une preuve usuelle du théorème spectral se fait par récurrence sur la dimension.

On se place ici en dimension $n := 3$ et on construit à la main la matrice orthogonale. La matrice C admet 3 valeurs propres réelles (comptés avec multiplicité) d'après le lemme 10.1.2.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(C)$. Il existe $u \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ tel que $Cu = \lambda u$. Posons :

$$F := \text{Vect}(u)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3, \langle u, x \rangle = 0\}$$

l'orthogonal de $\text{Vect}(u)$ dans \mathbb{R}^3 . Alors F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (l'orthogonale d'une droite vectorielle en dimension 3 est un plan vectoriel) stable par C car pour tout $y \in F$:

$$\begin{aligned}
\langle Cy, u \rangle &= (Cy)^T u \\
&= y^T C^T u \\
&= y^T (Cu) \\
&= \lambda y^T u \\
&= \lambda \langle y, u \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

i.e. $Cy \in F$.

Soit (v, w) une base orthonormale de F . Posons la base orthonormale $\mathcal{B} := (u, v, w)$ et la matrice orthogonale $P := (u \mid v \mid w)$. Comme F est stable par C , il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que $Cv = av + bw$ et $Cw = cv + dw$. On a ainsi par changement de base :

$$C' := P^T C P$$

$$\begin{aligned}
&= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Cu) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Cv) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Cw)) \\
&= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda u) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}}(av + bw) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}}(cv + dw)) \\
&=: \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \widetilde{C}' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec :

$$\widetilde{C}' := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

La matrice C' est symétrique car :

$$\begin{aligned}
(C')^T &= (P^T C P)^T \\
&= P^T C^T P \\
&= P^T C P \\
&= C'
\end{aligned}$$

Ainsi $b = c$ i.e. \widetilde{C}' est symétrique.

En utilisant encore le lemme 10.1.2, soit μ une valeur propre réelle de \widetilde{C}' . Il existe $u' \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ tel que $\widetilde{C}'u' = \mu u'$. Posons :

$$F' := \text{Vect}(u')^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2, \langle u', x \rangle = 0\}$$

l'orthogonal de $\text{Vect}(u')$ dans \mathbb{R}^2 . Alors F' est un sous-espace vectoriel de dimension 1 (l'orthogonale d'une droite vectorielle en dimension 2 est une droite vectorielle) stable par \widetilde{C}' car pour tout $y \in F'$:

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{C}'y, u' \rangle &= (\widetilde{C}'y)^T u' \\
&= y^T \widetilde{C}'^T u' \\
&= y^T (\widetilde{C}'u') \\
&= \mu y^T u' \\
&= \mu \langle y, u' \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

i.e. $\widetilde{C}'y \in F'$.

Soit v' une base orthonormale de F' . Posons la base orthonormale $\mathcal{B}' := (u', v')$ et la matrice orthogonale $\widetilde{P}' := (u' \mid v')$. Comme F' est stable par \widetilde{C}' , il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{C}'v' = \nu v'$. On a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}'' &:= (\widetilde{P}')^T \widetilde{C}' \widetilde{P}' \\
&= (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\widetilde{C}'u') \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\widetilde{C}'v')) \\
&= (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mu u') \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\nu v')) \\
&= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Posons :

$$P' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{P}' \end{pmatrix}$$

Alors la matrice P' est orthogonale car :

$$(P')^T P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{P}' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{P}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{P}'^T \widetilde{P}' \end{pmatrix} \\
&= I_3
\end{aligned}$$

et donc aussi PP' . Et on a :

$$\begin{aligned}
(PP')^T CPP' &= (P')^T P^T CPP' \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{P}' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \widetilde{C}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{P}' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 0 & (\widetilde{P}')^T \widetilde{C}' \widetilde{P}' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i.e. on a :

$$C \sim_1 \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

□

On en déduit alors une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice sans calculer l'inverse de la matrice de passage. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Posons :

$$C := AA^T.$$

Alors C est symétrique car :

$$\begin{aligned}
C^T &= (AA^T)^T \\
&= AA^T \\
&= C.
\end{aligned}$$

Donc il existe une matrice P orthogonale et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$C = PDP^{-1} = PDP^T.$$

Comme $C^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= A^T C^{-1} \\
&= APD^{-1}P^T C^{-1}
\end{aligned}$$

On doit donc "seulement" calculer l'inverse d'une matrice diagonale. Comme il a été dit dans l'introduction, cela n'empêchera pas le calcul d'être fastidieux car le calcul de P fera intervenir de nombreuses racines carrées.

10.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en diagonalisant la matrice symétrique :

$$C := AA^T.$$

On a :

$$\begin{aligned} C &= AA^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 12 & -6 \\ 12 & 17 & -8 \\ -6 & -8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice C est diagonalisable dans \mathbb{R} car symétrique. On a :

$$\begin{aligned} \chi_C(X) &= \det(C - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} 9-X & 12 & -6 \\ 12 & 17-X & -8 \\ -6 & -8 & 5-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 8X & -36 + (9-X)(5-X) \\ 0 & 1-X & 2-2X \\ 6 & -8 & 5-X \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 6L_1 + (9-X)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array} \\ &= 6 \begin{vmatrix} 8X & -36 + (9-X)(5-X) \\ 1-X & 2-2X \end{vmatrix} \\ &= 6(1-X) \begin{vmatrix} 8X & 9-14X+X^2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6(1-X)(X^2 - 30X + 9) \end{aligned}$$

Posons pour $e \in \{\pm 1\}$:

$$a := 6\sqrt{6} \quad , \quad \lambda_e := 15 + ea.$$

On a donc :

$$\text{Sp}(C) = \{1, 15 \pm 6\sqrt{6}\} = \{1, \lambda_1, \lambda_{-1}\}.$$

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(C) &\iff C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 9x + 12y - 6z = x \\ 12x + 17y - 8z = y \\ -6x - 8y + 5z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x + 6y - 3z = 0 \\ 6x + 8y - 4z = 0 \\ -3x - 4y + 2z = 0 \end{cases} && L_2 = -2L_3 \\ &\iff \begin{cases} 4x + 6y - 3z = 0 \\ -3x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x + 6y - 3z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow 4L_2 + 3L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases} \end{aligned}$$

et on a pour $e \in \{\pm 1\}$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_e}(C) &\iff C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (15 + ea) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 9x + 12y - 6z = (15 + ea)x \\ 12x + 17y - 8z = (15 + ea)y \\ -6x - 8y + 5z = (15 + ea)z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -(6 + ea)x + 12y - 6z = 0 \\ 12x + (2 - ea)y - 8z = 0 \\ -6x - 8y - (10 + ea)z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (120 + 8ea)y + 2(120 + 8ea)z = 0 \\ -(14 + ea)y - 2(14 + ea)z = 0 \\ 6x - 8y - (10 + ea)z = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 6L_1 - (6 + ea)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array} \\
 &\iff \begin{cases} y = -2z \\ x = \frac{8y + (10 + ea)z}{6} = \frac{-6 + ea}{6}z = (1 - e\sqrt{6})z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc on a en normalisant chaque vecteur :

$$\begin{aligned}
 E_1(C) &= \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
 E_{\lambda_e}(C) &= \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 - e\sqrt{6} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\alpha_e \begin{pmatrix} 1 - e\sqrt{6} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

avec pour $e \in \{\pm 1\}$:

$$\alpha_e := \frac{1}{\sqrt{12 - 2e\sqrt{6}}}.$$

Donc la matrice de passage orthogonale vaut :

$$P := \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(1 - \sqrt{6}) & \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{5} & -2\alpha_1 & -2\alpha_{-1} \\ 2/\sqrt{5} & \alpha_1 & \alpha_{-1} \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{-1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 + 6\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 15 - 6\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
 C^{-1} &= PD^{-1}P^T \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(1 - \sqrt{6}) & \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{5} & -2\alpha_1 & -2\alpha_{-1} \\ 2/\sqrt{5} & \alpha_1 & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ \alpha_1(1 - \sqrt{6}) & -2\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6}) & -2\alpha_{-1} & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(1 - \sqrt{6}) & \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{5} & -2\alpha_1 & -2\alpha_{-1} \\ 2/\sqrt{5} & \alpha_1 & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ \alpha_1(1 - \sqrt{6})/\lambda_1 & -2\alpha_1/\lambda_1 & \alpha_1/\lambda_1 \\ \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6})/\lambda_{-1} & -2\alpha_{-1}/\lambda_{-1} & \alpha_{-1}/\lambda_{-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi comme $C^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^T C^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11 Décomposition de Schur

La décomposition de Schur permet de trigonaliser une matrice trigonalisable dans \mathbb{R} avec une matrice de changement de base orthogonale. On obtient un algorithme simple : l'ingrédient de base est la construction de bases orthonormales successives ayant pour premier vecteur le normalisé d'un vecteur propre.

11.1 Introduction

On rappelle la définition d'une matrice trigonalisable.

Définition 11.1.1

- (i) On dit que M est **trigonalisable (dans \mathbb{R})** si M est semblable à une matrice triangulaire *i.e.* il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = PTP^{-1}.$$

- (ii) On dit que M est **orthogonalement trigonalisable (dans \mathbb{R})** si M est orthogonalement semblable à une matrice triangulaire *i.e.* il existe $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = PTP^T.$$

Posons :

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Comme :

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \det(M - XI_n) \\ &= \det(PTP^{-1} - XI_n) \\ &= \det(T - XI_n) \\ &= \chi_T(X) \\ &= \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X) \end{aligned}$$

on en déduit que M a n valeurs propres réelles (comptés avec multiplicité).

On commence par un lemme.

Lemme 11.1.2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable dans \mathbb{R} , (u_1, \dots, u_n) une base de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M . Posons :

$$w_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Complétons w_1 en une base orthonormée (w_1, \dots, w_n) de \mathbb{R}^n . Posons la matrice :

$$Q := (w_1 \mid \dots \mid w_n) \in \text{O}_n(\mathbb{R}).$$

Alors $Q^T M Q$ est du type :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & M' \end{pmatrix} := Q^T M Q$$

avec $M' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. La matrice M' vérifie de plus les deux propriétés suivantes.

(i) On a :

$$\text{Sp}(M') = \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

(ii) Posons pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $u'_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que :

$$Q^T u_i = \begin{pmatrix} * \\ u'_i \end{pmatrix}.$$

Alors on a $u'_i \in E_{\lambda_i}(M')$.

Démonstration. Par le changement de base donné par la matrice Q , la première colonne de la matrice $Q^T M Q = Q^{-1} M Q$ est la décomposition du vecteur $M w_1 = \lambda_1 w_1$ dans la base (w_1, \dots, w_n) i.e. cette première colonne vaut simplement :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la forme de la matrice $Q^T M Q$.

(i) On a :

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \det(M - X I_n) \\ &= \det(Q^T M Q - X I_n) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & * \\ 0 & M' - X I_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - X) \det(M' - X I_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 - X) \chi_{M'}(X) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(ii) On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} * \\ \lambda_i u'_i \end{pmatrix} &= \lambda_i \begin{pmatrix} * \\ u'_i \end{pmatrix} \\ &= \lambda_i Q^T u_i \\ &= Q^T M u_i \\ &= Q^T M Q Q^T u_i \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & M' \end{pmatrix} Q^T u_i \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ u'_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * \\ M' u'_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc on a $M' u'_i = \lambda_i u'_i$.

On a donc un algorithme simple pour obtenir la décomposition de Schur, il suffit de réappliquer le lemme avec la matrice M' . On obtient alors le résultat suivant.

Proposition 11.1.3: Décomposition de Schur

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable dans \mathbb{R} . Alors M est orthogonalement trigonalisable *i.e.* il existe une matrice T triangulaire supérieure et Q une matrice orthogonale telles que :

$$M = QTQ^T.$$

Démonstration. Expliquons l'algorithme dans la cas $n := 3$. Soit $(u_{1,0}, u_{2,0}, u_{3,0})$ une base de vecteurs propres respectivement associés à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois valeurs propres réelles de M (comptées avec multiplicité).

Première étape. Posons :

$$w_{1,0} := \frac{u_{1,0}}{\|u_{1,0}\|}.$$

On construit une base orthonormale $\mathcal{B}_0 := (w_{1,0}, w_{2,0}, w_{3,0})$ avec pour premier vecteur $w_{1,0}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Posons :

$$Q_0 := (w_{1,0} \mid w_{2,0} \mid w_{3,0}).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} Q_0^T A Q_0 &= \begin{pmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ w_{3,0} \end{pmatrix} A (w_{1,0} \mid w_{2,0} \mid w_{3,0}) \\ &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(Aw_{1,0}) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(Aw_{2,0}) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(Aw_{3,0})) \\ &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\lambda_1 w_{1,0}) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(Aw_{2,0}) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(Aw_{3,0})) \\ &=: \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$A_1 \in \text{GL}_2(\mathbb{R}).$$

Deuxième étape. Posons $u_{2,1}, u_{3,1} \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{aligned} Q_0^T u_{2,0} &= \begin{pmatrix} * \\ u_{2,1} \end{pmatrix} \\ Q_0^T u_{3,0} &= \begin{pmatrix} * \\ u_{3,1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par le lemme 11.1.2, on a que $\text{Sp}(A_1) = \{\lambda_2, \lambda_3\}$ et

$$E_{\lambda_2}(A_1) = \text{Vect}(u_{2,1}) \quad , \quad E_{\lambda_3}(A_1) = \text{Vect}(u_{3,1}).$$

Troisième étape. Posons :

$$w_{2,1} := \frac{u_{2,1}}{\|u_{2,1}\|}.$$

On construit par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir la section 13 pour des détails sur ce procédé) une base orthonormale $\mathcal{B}_1 := (w_{2,1}, w_{3,1})$ avec pour premier vecteur $w_{2,1}$. Posons :

$$\tilde{Q}_1 := (w_{2,1} \mid w_{3,1}) \quad , \quad Q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice \tilde{Q}_1 est orthogonale. La matrice Q_1 est aussi orthogonale car :

$$\begin{aligned} Q_1 Q_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_1^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_1^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1^T A_1 \tilde{Q}_1 &= \begin{pmatrix} w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{pmatrix} A_1 (w_{2,1} \mid w_{3,1}) \\ &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(A_1 w_{2,1}) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(A_1 w_{3,1})) \\ &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\lambda_2 w_{2,1}) \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(A_1 w_{3,1})) \\ &=: \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et ainsi, on a :

$$\begin{aligned} T &:= Q_1^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \tilde{Q}_1^T A_1 \tilde{Q}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \lambda_2 \quad \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons :

$$Q := Q_0 Q_1.$$

La matrice Q est orthogonale et on a :

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= Q_1^T Q_0^T A Q_0 Q_1 \\ &= Q_1^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_1 \\ &= T \end{aligned}$$

Et donc on a :

$$A = Q T Q^T = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \lambda_2 \quad \lambda_3 \end{pmatrix} Q^T$$

i.e. $A \sim_1 T$. □

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles de A comptés avec multiplicité et $u_{1,0}, \dots, u_{n,0}$ des vecteurs propres respectivement associés. On construit successivement des matrices Q_0, \dots, Q_{n-2} orthogonales par récurrence sur la taille n de la matrice. Expliquons les deux premières étapes.

(1) Soit :

$$\mathcal{B}_0 := \left(w_{1,0} := \frac{u_{1,0}}{\|u_{1,0}\|}, w_{2,0}, \dots, w_{n,0} \right)$$

une base orthonormée avec pour premier vecteurs le normalisé de $u_{1,0}$. On pose :

- la matrice orthogonale :

$$Q_0 := (w_{1,0} \mid w_{2,0} \mid \dots \mid w_{n,0})$$

- $A_1 \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice telle que :

$$Q_0^T A Q_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

- posons $u_{2,1}, \dots, u_{n,1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que

$$Q_0^T u_{2,0} = \begin{pmatrix} * \\ u_{2,1} \end{pmatrix}, \quad Q_0^T u_{3,0} = \begin{pmatrix} * \\ u_{3,1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad Q_0^T u_{n,0} = \begin{pmatrix} * \\ u_{n,1} \end{pmatrix}.$$

Par le lemme 11.1.2, on a que $\text{Sp}(A_1) = \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ et pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $u_{i,1} \in E_{\lambda_i}(A_1)$.

(2) Soit :

$$\mathcal{B}_1 := \left(w_{2,1} := \frac{u_{2,1}}{\|u_{2,1}\|}, w_{3,1}, \dots, w_{n,1} \right)$$

une base orthonormée avec pour premier vecteurs le normalisé de $u_{2,1}$. On pose :

- les matrices orthogonales :

$$\tilde{Q}_1 := (w_{2,1} \mid w_{3,1} \mid \dots \mid w_{n,1}) \quad , \quad Q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_1 \end{pmatrix}$$

- $A_2 \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice telle que :

$$\tilde{Q}_1^T A_1 \tilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

- posons $u_{3,2}, \dots, u_{n,2} \in \mathbb{R}^{n-2}$ tels que

$$Q_1^T u_{3,1} = \begin{pmatrix} * \\ u_{3,2} \end{pmatrix}, \quad Q_1^T u_{4,1} = \begin{pmatrix} * \\ u_{4,2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad Q_1^T u_{n,1} = \begin{pmatrix} * \\ u_{n,2} \end{pmatrix}.$$

Par le lemme 11.1.2, on a que $\text{Sp}(A_2) = \{\lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ et pour tout $i \in \{3, \dots, n\}$, $u_{i,2} \in E_{\lambda_i}(A_2)$.

Et ainsi de suite, on construit une suite de matrices orthogonales Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-2} . On pose alors :

$$Q := Q_0 \cdots Q_{n-2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} T &:= Q^T A Q \\ &= Q_{n-1}^T \cdots Q_0^T A Q_0 \cdots Q_{n-1} \\ &= Q_{n-1}^T \cdots Q_1^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_1 \cdots Q_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Q_{n-1}^T \cdots Q_2^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} Q_2 \cdots Q_{n-1} \\
&= Q_{n-2}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (*) \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-2} & \\ (0) & & & A_{n-2} \end{pmatrix} Q_{n-2} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a ainsi $A = QTQ^T$ et :

$$A^{-1} = QT^{-1}Q^T$$

11.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la décomposition de Schur. On a trouvé dans la section 8 que le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+3)$$

et que :

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-3}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc A est diagonalisable (donc trigonalisable) dans \mathbb{R} . Posons :

$$u_{1,0} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{2,0} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{3,0} := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Première étape. On construit une base orthonormale avec pour premier vecteur le normalisé de $u_{1,0}$:

$$\mathcal{B}_0 := \left(w_{1,0} := \frac{u_{1,0}}{\|u_{1,0}\|}, w_{2,0}, w_{3,0} \right) := \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Posons :

$$Q_0 := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

On a :

$$Q_0^T A Q_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -20 & 4\sqrt{5} \\ 0 & -10 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 5\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \\
&=: \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec :

$$A_1 := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 & 3\sqrt{5} \\ 5\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième étape. On a :

$$\begin{aligned}
Q_0^T u_{2,0} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} \\
Q_0^T u_{3,0} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{5} \\ -3/\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{5} \\ u_{3,1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par le lemme 11.1.2, on a que $\text{Sp}(A_1) = \{1, -3\}$ et

$$\begin{aligned}
E_1(A_1) &= \text{Vect}(u_{2,1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \\
E_{-3}(A_1) &= \text{Vect}(u_{3,1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -3/\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Troisième étape. On construit une base orthonormale avec pour premier vecteur le normalisé de $u_{2,1}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &:= \left(w_{2,1} := \frac{u_{2,1}}{\|u_{2,1}\|}, w_{3,1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{6/5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, w_{3,0} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{5/6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{5/6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Posons :

$$Q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & -\sqrt{5/6} \\ 0 & \sqrt{5/6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
T &:= Q_1^T \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & \sqrt{5/6} \\ 0 & -\sqrt{5/6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -20 & 4\sqrt{5} \\ 0 & -10 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 5\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & -\sqrt{5/6} \\ 0 & \sqrt{5/6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -20 & 4\sqrt{5} \\ 0 & 5\sqrt{6}/2 & \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{5} \\ 0 & 5\sqrt{30}/2 & -5\sqrt{6}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6/5} \\ 0 & \sqrt{6/5} & \sqrt{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4\sqrt{6/5} \\ 0 & 1 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned} Q &:= Q_0 Q_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & -\sqrt{5/6} \\ 0 & \sqrt{5/6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5/6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme T est triangulaire supérieure, son inverse se calcule facilement, on a par la proposition A.6.2 :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/\sqrt{30} \\ 0 & 1 & -2/(3\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Comme :

$$\begin{aligned} T &= Q_1^T \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_1 \\ &= Q_1^T Q_0^T A Q_0 Q_1 \\ &= Q^T A Q \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= Q T^{-1} Q^T \\ &= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5/6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/\sqrt{30} \\ 0 & 1 & -2/(3\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & \sqrt{5/6} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & \sqrt{6}/2 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & \sqrt{6}/3 \\ 0 & \sqrt{5/6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & \sqrt{5/6} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12 Décomposition de Cholesky

Dans la section 10, on a utilisé la matrice AA^T symétrique ce qui nous a permis de diagonaliser avec une matrice orthogonale.

Il y a une information que l'on n'a pas exploitée : comme la matrice A est inversible, alors la matrice AA^T est définie positive. Grâce à cette nouvelle propriété, on obtient une nouvelle décomposition simple.

12.1 Introduction

On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles (voir la section 10). On commence par une définition.

Définition 12.1.1

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que B est **définie positive** si toutes les valeurs propres de B sont strictement positives.

Ainsi si B est symétrique et définie positive, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$P^T B P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ les valeurs propres de B . Ainsi B est semblable à une matrice diagonale avec des éléments strictement positifs sur la diagonale (en particulier B est inversible).

Lemme 12.1.2

- (i) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors la matrice $B := AA^T$ est une matrice symétrique définie positive.
- (ii) Soit $B \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors les mineurs principaux de B sont tous strictement positifs.

Démonstration. (i) On a :

$$\begin{aligned} B^T &= (AA^T)^T \\ &= (A^T)^T A^T \\ &= AA^T \\ &= B \end{aligned}$$

Soit λ une valeur propre de B et v un vecteur propre associé. Posons $u := A^T v$. Comme v est non nul et comme A^T est inversible, on a que u est non nul *i.e.* $\|u\|^2 > 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} \lambda \|v\|^2 &= \lambda v^T v \\ &= v^T B v \\ &= v^T A A^T v \\ &= (A^T v)^T A^T v \\ &= u^T u \end{aligned}$$

$$= \|u\|^2 > 0$$

i.e. on a $\lambda > 0$ car $\|v\|^2 > 0$ (v est non nul).

$$P^T B P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. On a :

$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^T \\ &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mu_1(B) &= b_{11} \\ &= \lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2 + \lambda_3 p_{13}^2 > 0 \\ \mu_3(B) &= \det(B) \\ &= \det \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^T \right) \\ &= \det(P)^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0 \end{aligned}$$

Comme P est inversible, les deux dernières lignes sont non colinéaires *i.e.* un des trois déterminants suivant est non nul :

$$\Delta_{33}(P) \quad , \quad \Delta_{32}(P) \quad , \quad \Delta_{31}(P).$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \mu_2(B) &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &= b_{11} b_{22} - b_{12}^2 \\ &= (\lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2 + \lambda_3 p_{13}^2)(\lambda_1 p_{21}^2 + \lambda_2 p_{22}^2 + \lambda_3 p_{23}^2) - (\lambda_1 p_{11} p_{21} + \lambda_2 p_{12} p_{22} + \lambda_3 p_{13} p_{23})^2 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (p_{11}^2 p_{22}^2 + p_{12}^2 p_{21}^2 - 2 p_{11} p_{12} p_{21} p_{22}) + \lambda_1 \lambda_3 (p_{11}^2 p_{23}^2 + p_{13}^2 p_{21}^2 - 2 p_{11} p_{13} p_{21} p_{23}) \\ &\quad + \lambda_2 \lambda_3 (p_{12}^2 p_{23}^2 + p_{13}^2 p_{22}^2 - 2 p_{12} p_{13} p_{22} p_{23}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21})^2 + \lambda_1 \lambda_3 (p_{11} p_{23} - p_{13} p_{21})^2 + \lambda_2 \lambda_3 (p_{12} p_{23} - p_{13} p_{22})^2 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \Delta_{33}(P)^2 + \lambda_1 \lambda_3 \Delta_{32}(P)^2 + \lambda_2 \lambda_3 \Delta_{31}(P)^2 > 0 \end{aligned}$$

□

On en déduit la décomposition de Cholesky.

Proposition 12.1.3: Décomposition de Cholesky

Soit $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une unique matrice réelle triangulaire inférieure L à coefficients diagonaux strictement positifs telle que :

$$B = LL^T.$$

Démonstration. Montrons le résultat dans le cas $n := 3$. Posons :

$$B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice :

$$L := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

avec $a, c, f > 0$. Comme :

$$\begin{aligned} LL^T &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2 + c^2 & bd + ce \\ ad & bd + ce & d^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a les équivalences :

$$\begin{aligned} B = LL^T &\iff \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2 + c^2 & bd + ce \\ ad & bd + ce & d^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a^2 = b_{11} \\ ab = b_{12} \\ ad = b_{13} \\ b^2 + c^2 = b_{22} \\ bd + ce = b_{23} \\ d^2 + e^2 + f^2 = b_{33} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \sqrt{b_{11}} = \sqrt{\mu_1} & \text{car } a, c, f > 0 \\ b = \frac{b_{12}}{a} = \frac{b_{12}}{\sqrt{\mu_1}} \\ d = \frac{b_{13}}{a} = \frac{b_{13}}{\sqrt{\mu_1}} \\ c = \sqrt{b_{22} - b^2} = \sqrt{\frac{b_{22}b_{11} - b_{12}^2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \\ e = \frac{b_{23} - bd}{c} = \frac{b_{11}b_{23} - b_{12}b_{13}}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \\ f = \sqrt{b_{33} - d^2 - e^2} = \frac{\sqrt{b_{33}\mu_2 - \frac{\mu_2 b_{12} - (b_{11}b_{23} - b_{12}b_{13})^2}{\mu_1}}}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\det(B)}}{\sqrt{\mu_2}} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 & 0 \\ \mu_2 b_{12} & \mu_2 b_{13} & 0 \\ \mu_2 & b_{11}b_{23} - b_{12}b_{13} & \sqrt{\mu_1 \det(B)} \end{pmatrix}$$

D'où l'existence et l'unicité par l'équivalence. □

On obtient alors une technique simple pour calculer l'inverse d'une matrice A . On pose :

$$B := AA^T$$

Alors B est symétrique définie positive. Donc il existe une unique matrice réelle triangulaire inférieure L à coefficients diagonaux strictement positifs telle que :

$$B = LL^T.$$

Comme :

$$A^{-1} = A^T B^{-1}$$

on a donc :

$$A^{-1} = A^T (L^{-1})^T L^{-1} \tag{12.1.1}$$

12.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la décomposition de Cholesky et la formule (12.1.1). On a :

$$\begin{aligned} B &:= AA^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 12 & -6 \\ 12 & 17 & -8 \\ -6 & -8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit la matrice :

$$L := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

avec $a, c, f > 0$. On a :

$$\begin{aligned} B = LL^T &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 12 & -6 \\ 12 & 17 & -8 \\ -6 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2 + c^2 & bd + ce \\ ad & bd + ce & d^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 3, b = 4, d = -2 \\ c^2 + b^2 = 17, bd + ce = -8 \\ 4 + e^2 + f^2 = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = 4, d = -2 \\ c = 1, e = 0 \\ f = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule facilement l'inverse de L par une des méthodes exposées avant car L est triangulaire inférieure. En utilisant la formule de la proposition A.6.1 pour l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure, on a :

$$L^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Et donc on a :

$$\begin{aligned} B^{-1} &= (L^{-1})^T L^{-1} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et ainsi on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^T B^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13 Décomposition QR et orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans cette section, on expose la décomposition QR d'une matrice inversible en utilisant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour trouver la matrice orthogonale Q . Dans la section suivante 14 et dans l'appendice D, on verra deux autres méthodes pour calculer une matrice Q .

13.1 Introduction

Définition 13.1.1

Soit (u_1, \dots, u_k) une famille libre de \mathbb{R}^n avec $k \in \{1, \dots, n\}$ (donc sans vecteurs nuls).

(i) On dit que (u_1, \dots, u_k) est une **famille orthogonale de \mathbb{R}^n** si ^a :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \implies \langle u_i, u_j \rangle = 0.$$

On dit de plus que la famille est une **base orthogonale** si de plus c'est une base de \mathbb{R}^n (i.e. $k = n$).

(ii) On dit que (u_1, \dots, u_k) est une **famille orthonormale de \mathbb{R}^n** si :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

On dit de plus que la famille est une **base orthonormale** si de plus c'est une base de \mathbb{R}^n (i.e. $k = n$).

a. On pourrait définir plus généralement une famille orthogonale avec des vecteurs nuls.

On a alors le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt qui construit une base orthonormale (pour le produit scalaire usuel) à partir d'une base donnée.

Lemme 13.1.2: Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit (u_1, \dots, u_n) une base de \mathbb{R}^n . Définissons les deux familles (v_1, \dots, v_n) et (w_1, \dots, w_n) par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} v_1 &:= u_1 \\ w_1 &:= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ v_k &:= u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, w_i \rangle w_i \quad (k \in \{2, \dots, n\}) \\ w_k &:= \frac{v_k}{\|v_k\|} \quad (k \in \{2, \dots, n\}) \end{aligned}$$

Alors on a les résultats suivants :

- (i) la famille (v_1, \dots, v_n) est une base orthogonale de \mathbb{R}^n ;
- (ii) la famille (w_1, \dots, w_n) est une base orthonormale de \mathbb{R}^n ;
- (iii) pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(w_1, \dots, w_k).$$

On pose alors :

$$(w_1, \dots, w_n) := \text{GS}(u_1, \dots, u_n).$$

Démonstration. Montrons le lemme pour $n := 3$. On a :

$$\begin{aligned} v_1 &:= u_1 & w_1 &:= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ v_2 &:= u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle w_1 & w_2 &:= \frac{v_2}{\|v_2\|} \\ v_3 &:= u_3 - \langle u_3, w_2 \rangle w_2 - \langle u_3, w_1 \rangle w_1 & w_3 &:= \frac{v_3}{\|v_3\|} \end{aligned}$$

On commence par une remarque :

(*) pour tout vecteurs non nuls $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x/\|x\|$ **unitaire** (*i.e.* de norme 1) car :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Montrons que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre (donc sans vecteur nul).

(1) Par définition, on a :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(w_1).$$

(2) On a par linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle w_1 \rangle \\ &= \langle v_1, u_2 \rangle - \langle u_2, w_1 \rangle \langle v_1, w_1 \rangle \\ &= \langle v_1, u_2 \rangle - \langle u_2, \frac{v_1}{\|v_1\|} \rangle \langle v_1, \frac{v_1}{\|v_1\|} \rangle \\ &= \langle v_1, u_2 \rangle - \langle u_2, v_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et on a par définition :

$$v_1, v_2 \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, w_1) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2)$$

i.e. on a :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subset \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2).$$

Montrons que (v_1, v_2) est une famille libre. Supposons par l'absurde v_2 soit colinéaire à v_1 *i.e.* $v_2 = \alpha v_1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Alors on a :

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 + \langle u_2, w_1 \rangle w_1 \\ &= \left(\alpha + \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|u_1\|} \right) v_1 \end{aligned}$$

i.e. la famille (u_1, u_2) est liée (ce qui est contradictoire). Donc la famille (v_1, v_2) est libre. Donc la famille (v_1, v_2) est orthogonale et :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2).$$

Comme la famille (v_1, v_2) est libre, elle ne contient pas de vecteur non nul. Donc la famille (w_1, w_2) est **normale** (*i.e.* ne contient que des vecteurs unitaires) par la remarque (*) et libre (car si la famille (w_1, w_2) est liée *i.e.* w_1 et w_2 colinéaires, alors la famille (v_1, v_2) serait liée, ce qui est contradictoire). Donc la famille (w_1, w_2) est orthormale. On a de plus :

$$w_1, w_2 \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, v_2) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$$

i.e. comme la famille (w_1, w_2) est libre, on a :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(w_1, w_2) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2).$$

(3) Pour $i \in \{1, 2\}$, on a par linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
 \langle v_i, v_3 \rangle &= \langle v_i, u_3 - \langle u_3, w_2 \rangle w_2 - \langle u_3, w_1 \rangle w_1 \rangle \\
 &= \langle v_i, u_3 \rangle - \langle u_3, w_2 \rangle \langle v_i, w_2 \rangle - \langle u_3, w_1 \rangle \langle v_i, w_1 \rangle \\
 &= \langle \|v_i\| w_i, u_3 \rangle - \langle u_3, w_2 \rangle \langle \|v_i\| w_i, w_2 \rangle - \langle u_3, w_1 \rangle \langle \|v_i\| w_i, w_1 \rangle \\
 &= \|v_i\| \langle w_i, u_3 \rangle - \langle u_3, w_2 \rangle \|v_i\| \delta_{i2} - \langle u_3, w_1 \rangle \|v_i\| \delta_{i1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Et on a par définition :

$$v_1, v_2, v_3 \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, w_1, u_3, w_2, w_1) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3)$$

i.e. on a :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) \subset \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3).$$

Montrons que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre. Supposons par l'absurde v_3 soit coplanaire à v_1 et v_2 *i.e.* $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Alors on a :

$$\begin{aligned}
 u_3 &= v_3 + \langle u_3, w_2 \rangle w_2 + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 \\
 &= \left(\alpha + \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\|u_1\|} \right) u_1
 \end{aligned}$$

i.e. la famille (u_1, u_2, u_3) est liée (ce qui est contradictoire). Donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. Donc la famille (v_1, v_2, v_3) est orthogonale et :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, v_3).$$

Comme la famille (v_1, v_2, v_3) est libre, elle ne contient pas de vecteur non nul. Donc la famille (w_1, w_2, w_3) est normale par la remarque (*) et libre (car si la famille (w_1, w_2, w_3) est liée, alors la famille (v_1, v_2, v_3) serait liée, ce qui est contradictoire). Donc la famille (w_1, w_2, w_3) est orthormale. On a de plus :

$$w_1, w_2, w_3 \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, v_2, v_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$$

i.e. comme la famille (w_1, w_2, w_3) est libre, on a :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(w_1, w_2, w_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3).$$

□

Le procédé d'orthonormalisation construit deux bases de vecteurs : la base (v_1, \dots, v_n) qui est orthogonale et la base (w_1, \dots, w_n) qui est orthonormale. On construit un élément de chaque base à chaque étape. On aurait pu séparer les constructions et construire d'abord la base (v_1, \dots, v_n) (l'**orthogonalisation**) puis la base (w_1, \dots, w_n) (la **normalisation**).

Proposition 13.1.3

Soit :

$$A := (u_1 \mid \dots \mid u_n).$$

Posons :

$$(w_1, \dots, w_n) := \text{GS}(u_1, \dots, u_n) \quad , \quad Q := (w_1 \mid \dots \mid w_n) \quad , \quad R := Q^T A.$$

Alors la matrice Q est orthonormale et la matrice R est triangulaire supérieure inversible.

On a donc :

$$A^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = R^{-1}Q^T.$$

Démonstration. On démontre le résultat dans le cas $n := 3$. Soit :

$$A := (u_1 \mid u_2 \mid u_3) \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Construisons la base orthonormée (w_1, w_2, w_3) associée à (u, v, w) par le procédé de Gram-Schmidt. On a :

$$\begin{aligned} v_1 &:= u_1 & w_1 &:= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ v_2 &:= u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle w_1 & w_2 &:= \frac{v_2}{\|v_2\|} \\ v_3 &:= u_3 - \langle u_3, w_2 \rangle w_2 - \langle u_3, w_1 \rangle w_1 & w_3 &:= \frac{v_3}{\|v_3\|} \end{aligned}$$

Posons alors :

$$Q := (w_1 \mid w_2 \mid w_3).$$

Comme la base (w_1, w_2, w_3) est orthonormée, on a :

$$\begin{aligned} Q^T Q &= \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix} (w_1 \mid w_2 \mid w_3) \\ &= \begin{pmatrix} w_1^T w_1 & w_1^T w_2 & w_1^T w_3 \\ w_2^T w_1 & w_2^T w_2 & w_2^T w_3 \\ w_3^T w_1 & w_3^T w_2 & w_3^T w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, w_2 \rangle & \langle w_1, w_3 \rangle \\ \langle w_2, w_1 \rangle & \langle w_2, w_2 \rangle & \langle w_2, w_3 \rangle \\ \langle w_3, w_1 \rangle & \langle w_3, w_2 \rangle & \langle w_3, w_3 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} R &= Q^T A \\ &= \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix} (u_1 \mid u_2 \mid u_3) \\ &= \begin{pmatrix} w_1^T u_1 & w_1^T u_2 & w_1^T u_3 \\ w_2^T u_1 & w_2^T u_2 & w_2^T u_3 \\ w_3^T u_1 & w_3^T u_2 & w_3^T u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle w_1, u_1 \rangle & \langle w_1, u_2 \rangle & \langle w_1, u_3 \rangle \\ \langle w_2, u_1 \rangle & \langle w_2, u_2 \rangle & \langle w_2, u_3 \rangle \\ \langle w_3, u_1 \rangle & \langle w_3, u_2 \rangle & \langle w_3, u_3 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle w_1, u_1 \rangle & \langle w_1, u_2 \rangle & \langle w_1, u_3 \rangle \\ 0 & \langle w_2, u_2 \rangle & \langle w_2, u_3 \rangle \\ 0 & 0 & \langle w_3, u_3 \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où les résultats. □

On peut exprimer la famille (u_1, \dots, u_n) en fonction de la famille orthonormale (w_1, \dots, w_n) . Pour $n := 3$, on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \|u_1\|w_1 = \langle u_1, w_1 \rangle w_1 \\ u_2 &= v_2 + \langle u_2, w_1 \rangle w_1 = \|v_2\|w_2 + \langle u_2, w_1 \rangle w_1 \\ &= \langle v_2, w_2 \rangle w_2 + \langle u_2, w_1 \rangle w_1 \\ &= \langle u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle w_1, w_2 \rangle w_2 + \langle u_2, w_1 \rangle w_1 \\ &= \langle u_2, w_2 \rangle w_2 + \langle u_2, w_1 \rangle w_1 \\ u_3 &= v_3 + \langle u_3, w_2 \rangle w_2 + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 \\ &= \|v_3\|w_3 + \langle u_3, w_2 \rangle w_2 + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 \\ &= \langle v_3, w_3 \rangle w_3 + \langle u_3, w_2 \rangle w_2 + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 \\ &= \langle u_3 - \langle u_3, w_2 \rangle w_2 - \langle u_3, w_1 \rangle w_1, w_3 \rangle w_3 + \langle u_3, w_2 \rangle w_2 + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 \\ &= \langle u_3, w_3 \rangle w_3 + \langle u_3, w_2 \rangle w_2 + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 \end{aligned}$$

13.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la décomposition QR avec la matrice Q calculée par l'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la base des colonnes de A . On note les colonnes de A par :

$$(u_1 \mid u_2 \mid u_3) := A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Construisons la base orthonormée (w_1, w_2, w_3) associée à (u_1, u_2, u_3) . On a :

$$\begin{aligned} w_1 &:= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ w_2 &:= u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-12}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ w_2 &:= \frac{v_2}{\|v_2\|} = v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ w_3 &:= u_3 - \langle u_3, w_1 \rangle w_1 - \langle u_3, w_2 \rangle w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ w_3 &:= \frac{v_3}{\|v_3\|} = w' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons alors :

$$Q := (w_1 \mid w_2 \mid w_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On a bien (c'est inutile de le calculer) :

$$\begin{aligned} QQ^T &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

i.e. Q est orthogonale (et même ici symétrique donc $Q^{-1} = Q^T = Q$ *i.e.* Q est **involutive**). On a :

$$\begin{aligned} R &= Q^T A \\ &= QA \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On calcule facilement l'inverse de R par une des méthodes exposées avant car R est triangulaire supérieure. Utilisons par exemple, la méthode de la comatrice. Comme :

$$\text{Com}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a :

$$R^{-1} = \frac{1}{\det(R)} \text{Com}(R)^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi comme $A = QR$, on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= R^{-1}Q^{-1} \\ &= R^{-1}Q^T \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

14 Décomposition RQ et matrices d'Householder

Cette section est plus un prétexte pour voir une nouvelle technique d'algèbre linéaire. La décomposition QR utilise les colonnes de la matrice et la décomposition RQ utilise les lignes de la matrice. Dans cette section, on utilisera les matrices d'Householder pour trouver la matrice Q .⁷

Dans la section précédente 13 et dans l'appendice D, on trouvera deux autres méthodes pour calculer une matrice Q .

14.1 Introduction

Définition 14.1.1

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ non nul. La **matrice d'Householder associée à v** est :

$$H_v := I_n - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2}.$$

On a donc :

$$H_v = I_n - 2 \frac{vv^T}{v^T v}.$$

Les matrices de Householder vérifient les propriétés simples qui permettent une décomposition QR .

Lemme 14.1.2

- (i) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ non nul. Alors H_v est symétrique et involutive (donc orthogonale).
- (ii) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$ et $\|x\| = \|y\|$. Alors on a :

$$H_{x-y}(x) = y.$$

Démonstration. (i) On a :

$$\begin{aligned} (H_v)^T &= \left(I_n - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2} \right)^T \\ &= I_n - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2} \\ &= H_v \\ H_v^2 &= \left(I_n - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2} \right)^2 \\ &= I_n - 4 \frac{vv^T}{\|v\|^2} + 4 \frac{v(v^T v)v^T}{\|v\|^4} \\ &= I_n - 4 \frac{vv^T}{\|v\|^2} + 4 \frac{vv^T}{\|v\|^2} \\ &= I_n \end{aligned}$$

(ii) Comme $x^T x = y^T y$, on a :

$$\|x - y\|^2 = (x - y)^T (x - y)$$

7. La décomposition RQ est simplement une décomposition QR appliquée à la transposée. L'idée de ce texte est de pratiquer des techniques d'algèbre linéaire, on peut voir cette section comme une astuce supplémentaire.

$$\begin{aligned}
 &= x^T x - 2x^T y + y^T y \\
 &= x^T x - 2x^T y + x^T x \\
 &= 2x^T(x - y)
 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
 H_{x-y}(x) &= x - 2 \frac{(x-y)(x-y)^T x}{\|x-y\|^2} \\
 &= x - \frac{2x^T(x-y)}{2x^T(x-y)}(x-y) \\
 &= x - (x-y) \\
 &= y
 \end{aligned}$$

□

Donc H_v est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à v^\perp (l'hyperplan orthogonal à v). On en déduit alors une méthode pour calculer Q dans la décomposition QR en utilisant les matrices d'Householder.

Proposition 14.1.3

Soit :

$$A := (u_1 \mid * \mid \dots \mid *) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Alors la matrice $H_{u_1 - \|u_1\|e_1} A$ est du type :

$$\begin{pmatrix} \|u_1\| & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

avec $A_1 \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit A la matrice définie en colonne par :

$$A := (u_1 \mid * \mid \dots \mid *) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Alors on a par le point (ii) du lemme précédent :

$$\begin{aligned}
 H_{u_1 - \|u_1\|e_1} A &= (H_{u_1 - \|u_1\|e_1} u_1 \mid * \mid \dots \mid *) \\
 &= (\|u_1\|e_1 \mid * \mid \dots \mid *) \\
 &=: \begin{pmatrix} \|u_1\| & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

avec $A_1 \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$.

□

On en déduit alors une méthode pour calculer la matrice Q . Réappliquons la proposition sur la matrice :

$$A_1 := (u_2 \mid * \mid \dots \mid *) \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$$

Alors la matrice $H_{u_2 - \|u_2\|e_1^{(n-1)}} A_1$ (ici $e_1^{(n-1)}$ est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{n-1} , on met en puissance " $(n-1)$ " pour indiquer la dimension du vecteur) est du type :

$$\begin{pmatrix} \|u_2\| & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} := H_{u_2 - \|u_2\|e_1^{(n-1)}} A_1$$

avec $A_2 \in \text{GL}_{n-2}(\mathbb{R})$. On construit successivement des matrices orthogonales :

$$Q_1 := H_{u_1 - \|u_1\|e_1^{(n)}} \quad , \quad Q_2 := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & H_{u_2 - \|u_2\|e_1^{(n-1)}} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad , \quad \dots \quad , \quad Q_k := \begin{pmatrix} I_k & & 0 \\ & H_{u_k - \|u_k\|e_1^{(n-k+1)}} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Posons

$$Q := Q_n \cdots Q_1$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} QA &= Q_n \cdots Q_1 A \\ &= Q_n \cdots Q_2 \begin{pmatrix} \|u_1\| & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \\ &= Q_n \cdots Q_3 \begin{pmatrix} \|u_1\| & * & * \\ 0 & \|u_2\| & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} \|u_1\| & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \|u_n\| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En passant à la transposée, on obtient un résultat similaire mais en décomposant A suivant ses lignes.

Corollaire 14.1.4

Soit :

$$A := \begin{pmatrix} u_1 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Alors la matrice $AH_{u_1 - \|u_1\|e_1}$ est du type :

$$\begin{pmatrix} \|u_1\| & 0 \\ * & A_1 \end{pmatrix}$$

avec $A_1 \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$.

On en déduit encore une fois une méthode pour calculer la matrice Q . Réappliquons la proposition sur la matrice :

$$A_1 := \begin{pmatrix} u_2 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$$

Alors la matrice $A_1 H_{u_2 - \|u_2\|e_1^{(n-1)}}$ est du type :

$$\begin{pmatrix} \|u_2\| & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix} := A_1 H_{u_2 - \|u_2\|e_1^{(n-1)}}$$

avec $A_2 \in \text{GL}_{n-2}(\mathbb{R})$. On construit successivement des matrices orthogonales :

$$Q_1 := H_{u_1 - \|u_1\|e_1^{(n)}} \quad , \quad Q_2 := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & H_{u_2 - \|u_2\|e_1^{(n-1)}} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad , \quad \dots \quad , \quad Q_k := \begin{pmatrix} I_k & & 0 \\ & H_{u_k - \|u_k\|e_1^{(n-k+1)}} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Posons

$$Q := Q_1 \cdots Q_n$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} AQ &= AQ_1 \cdots Q_n \\ &= \begin{pmatrix} \|u_1\| & 0 \\ & A_1 \end{pmatrix} Q_2 \cdots Q_n \\ &= \begin{pmatrix} \|u_1\| & 0 & 0 \\ * & \|u_2\| & 0 \\ * & * & A_2 \end{pmatrix} Q_3 \cdots Q_n \\ &= \cdots \\ &= \begin{pmatrix} \|u_1\| & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & \|u_n\| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

14.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la décomposition QR (ici on va faire dans l'autre sens qu'on peut appeler décomposition RQ) avec la matrice Q calculée avec les matrices d'Householder. Comme on l'a indiqué en fin de sous-section précédente, on applique les résultats aux lignes de A (donc on utilise le corollaire précédent).

On note :

$$A := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$u' := u - \|u\|e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\|u'\|^2 = 6$, on a :

$$\begin{aligned} Q_1 &:= H_{u'} \\ &= I_n - 2 \frac{u' u'^T}{\|u'\|^2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} AQ_1 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme AQ_1 est triangulaire inférieure, on a fini l'algorithme. On pose alors :

$$Q := Q_1, \quad R := AQ.$$

On a bien $QQ^T = I_3$ i.e. $Q \in O_3(\mathbb{R})$. On a

$$R := Q^T A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule facilement l'inverse de R par une des méthodes exposées avant car R est triangulaire supérieure. Utilisons par exemple, la méthode de la comatrice, comme

$$\text{Com}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a :

$$R^{-1} = \frac{1}{\det(R)} \text{Com}(R)^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi comme $A = QR$, on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= R^{-1}Q^{-1} \\ &= R^{-1}Q^T \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15 Décomposition polaire

Pour toute matrice symétrique définie positive, on peut définir la notion de racine carrée. On obtient ainsi la décomposition polaire de cette matrice.

En prenant la produit d'une matrice inversible par sa transposée (voir aussi la section 10), on construit une matrice symétrique définie positive. En utilisant la décomposition polaire de cette dernière, on obtient une dernière méthode pour calculer l'inverse d'une matrice.

15.1 Introduction

On commence avec la notion de racine carrée associée à une symétrique définie positive.

Lemme 15.1.1

Soit $C \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Alors il existe une unique matrice R symétrique définie positive telle que :

$$R^2 = C.$$

On la note :

$$\sqrt{C} := R$$

appelée la **racine carrée de C** .

Démonstration. Montrons l'existence de R . Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres strictement positives de C . Il existe une matrice orthogonale Q telle que :

$$C = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^T.$$

Posons :

$$R := Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Q^T.$$

La matrice R est symétrique car :

$$\begin{aligned} R^T &= \left(Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Q^T \right)^T \\ &= Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Q^T \\ &= R \end{aligned}$$

et R est définie positive car ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ sont strictement positives.

Montrons l'unicité de R . Soit R une matrice symétrique définie positive telle que $R^2 = C$. Posons μ_1, \dots, μ_p les valeurs propres distinctes de C ($p \leq n$) et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ $n_i := \dim_{\mathbb{R}} E_{\mu_i}(C)$. On a la somme directe (voir la sous-section 8.1) :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_{\mu_i}(C)$$

et soit \mathcal{B} une base adaptée à cette somme directe. Posons P la matrice de changement de base de la base canonique de \mathbb{R}^n à \mathcal{B} .

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, l'espace propre $E_{\mu_i}(C)$ est stable par R car pour tout $x \in E_{\mu_i}(C)$:

$$\begin{aligned} C(Rx) &= R^3x \\ &= RCx \\ &= \mu_i Rx \end{aligned}$$

i.e. $Rx \in E_{\mu_i}(C)$. Ainsi la matrice $S := P^{-1}RP$ est une matrice diagonale par blocs du type :

$$S = P^{-1}RP = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$$

avec pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$A_i \in \text{GL}_{n_i}(\mathbb{R}).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p^2 \end{pmatrix} &= S^2 \\ &= (P^{-1}RP)^2 \\ &= P^{-1}R^2P \\ &= P^{-1}CP \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_p I_{n_p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e. on a pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$A_i^2 = \mu_i I_{n_i}.$$

De plus pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, A_i est symétrique et définie positive car comme R est symétrique on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1^T & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p^T \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}^T \\ &= S^T \\ &= (P^{-1}RP)^T \\ &= P^{-1}R^T P \\ &= P^{-1}RP \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e. pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $A_i^T = A_i$, et comme R est définie positive, on a :

$$\begin{aligned} \chi_R(X) &= \det(R - XI_n) \\ &= \det(P^{-1}RP - XI_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(S - XI_n) \\
&= \begin{vmatrix} A_1 - XI_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p - XI_{n_p} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^p \det(A_i - XI_{n_i}) \\
&= \prod_{i=1}^p \chi_{A_i}(X)
\end{aligned}$$

donc on a pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$\text{Spec}(A_i) \subset \text{Spec}(R) \subset \mathbb{R}_*^+.$$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ et α une valeur propre (réelle) de A_i . On a pour tout $x \in E_\alpha(A_i)$:

$$\begin{aligned}
\mu_i x &= \mu_i I_{n_i} x \\
&= A_i^2 x \\
&= A_i \alpha x \\
&= \alpha^2 x
\end{aligned}$$

i.e. $\alpha^2 = \mu_i$ (x est non nul). Comme $\alpha > 0$ (car A_i est définie positive), on a donc $\alpha = \sqrt{\mu_i}$. Ainsi A_i est diagonalisable (car symétrique) et a une unique valeur propre $\sqrt{\mu_i}$. Donc il existe une matrice inversible P' telle que :

$$(P')^{-1} A_i P' = \sqrt{\mu_i} I_{n_i}$$

i.e. on a :

$$\begin{aligned}
A_i &= P' \sqrt{\mu_i} I_{n_i} (P')^{-1} \\
&= \sqrt{\mu_i} I_{n_i}
\end{aligned}$$

(une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre est une homothétie et donc A_i est déterminée de façon unique). On a donc montré qu'il existe au plus une matrice R qui vaut :

$$\begin{aligned}
R &= P S P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\mu_p} I_{n_p} \end{pmatrix} P^{-1}.
\end{aligned}$$

D'où l'existence et l'unicité de la matrice R . □

On en déduit la décomposition polaire.

Proposition 15.1.2: Décomposition polaire

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale $U \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique définie positive $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PU.$$

Démonstration. Faisons une analyse pour trouver les expressions de U et P .

Analyse. Supposons que $A = PU$ avec U une matrice orthogonale U et P une matrice symétrique définie positive. Comme P est définie positive, P se décompose en :

$$P = QDQ^T$$

avec Q orthogonale. Et donc on a :

$$\begin{aligned} AA^T &= PU(PU)^T \\ &= PUU^T P^T \\ &= PP^T \\ &= P^2 \end{aligned}$$

Synthèse. Comme AA^T est définie positive, on pose alors (voir le lemme précédent 15.1.1) :

$$P := \sqrt{AA^T} \quad , \quad U := P^{-1}A = (\sqrt{A^T A})^{-1}A.$$

La matrice P est symétrique définie positive par le lemme et :

$$\begin{aligned} UU^T &= P^{-1}A(P^{-1}A)^T \\ &= P^{-1}AA^T(P^{-1})^T \\ &= P^{-1}P^2(P^{-1})^T \\ &= P^{-1}P(P^{-1}P)^T \\ &= I_n \end{aligned}$$

Ainsi U est orthogonale, P est symétrique définie positive et $A = PU$. □

On obtient alors que :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^T C^{-1} \\ &= A^T P D^{-1} P^T \end{aligned}$$

15.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la décomposition polaire. Dans la section 10, on a étudié la matrice :

$$C := AA^T.$$

On a trouvé que C est diagonalisable (car symétrique) et :

$$\begin{aligned} C = AA^T &= \begin{pmatrix} 9 & 12 & -6 \\ 12 & 17 & -8 \\ -6 & -8 & 5 \end{pmatrix} \\ \chi_C(X) &= 6(1 - X)(X^2 - 30X + 9) \end{aligned}$$

$$\text{Sp}(C) = \{1, 15 \pm 6\sqrt{6}\} = \{1, \lambda_1, \lambda_{-1}\}$$

$$E_1(C) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{\lambda_e}(C) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 - e\sqrt{6} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\alpha_e \begin{pmatrix} 1 - e\sqrt{6} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

avec pour $e \in \{\pm 1\}$:

$$\alpha_e := \frac{1}{\sqrt{12 - 2e\sqrt{6}}}.$$

Donc la matrice de passage orthogonale vaut :

$$P := \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(1 - \sqrt{6}) & \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{5} & -2\alpha_1 & -2\alpha_{-1} \\ 2/\sqrt{5} & \alpha_1 & \alpha_{-1} \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 + 6\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 15 - 6\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{-1} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} C^{-1} &= PD^{-1}P^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(1 - \sqrt{6}) & \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{5} & -2\alpha_1 & -2\alpha_{-1} \\ 2/\sqrt{5} & \alpha_1 & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ \alpha_1(1 - \sqrt{6}) & -2\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6}) & -2\alpha_{-1} & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(1 - \sqrt{6}) & \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{5} & -2\alpha_1 & -2\alpha_{-1} \\ 2/\sqrt{5} & \alpha_1 & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ \alpha_1(1 - \sqrt{6})/\lambda_1 & -2\alpha_1/\lambda_1 & \alpha_1/\lambda_1 \\ \alpha_{-1}(1 + \sqrt{6})/\lambda_{-1} & -2\alpha_{-1}/\lambda_{-1} & \alpha_{-1}/\lambda_{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $C^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^T C^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A Matrices d'opérations

On définit les trois matrices d'opérations élémentaires. Pour simplifier les définitions, on utilise les notations suivantes.

- Le **symbole de Kronecker** est défini pour tous éléments a, b par :

$$\delta_{a,b} := \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tout $l \in \{1, \dots, p\}$, on note $[M]_{k,l}$ le coefficient de M à la ligne k et la colonne l .
- On omettra la virgule en indice pour séparer les indices si aucune confusion n'est possible. On écrira par exemple $a_{ij} := a_{i,j}$ mais on laissera $a_{i+2,j}$.
- On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On a pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u^T v \\ \langle v, v \rangle &= v^T v = \|v\|^2 \end{aligned}$$

A.1 Groupes symétriques

Définition A.1.1

- (i) Une **permutation de** $\{1, \dots, n\}$ est une bijection σ de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, n\}$. Son support est défini par :

$$\text{Supp}(\sigma) := \{i \in \{1, \dots, n\}, \sigma(i) \neq i\}.$$

On note \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

- (ii) Soit $k \in \{2, \dots, n\}$ et i_1, \dots, i_k des éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. Le **cycle** $\sigma := (i_1, \dots, i_k)$ de **longueur** k est la permutation de $\{1, \dots, n\}$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \dots, k-1\}, \sigma(i_j) &= i_{j+1} \\ \sigma(i_k) &= i_1 \\ \text{Supp}(\sigma) &= \{i_1, \dots, i_k\} \end{aligned}$$

- (iii) Une **transposition** τ de $\{1, \dots, n\}$ est un cycle de longueur 2 *i.e.* il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $\text{Supp}(\tau) = \{i, j\}$. On la note :

$$\tau_{i,j} := \tau = (i, j).$$

- (iv) Pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, la **signature de** σ est définie par :

$$\varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

La composition est une loi de composition interne dans \mathfrak{S}_n qui fait de \mathfrak{S}_n un groupe et :

$$\text{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!.$$

On pourra noter de deux façons une permutation σ :

- sous forme de matrice :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- sous-forme de tableau :

i	1	2	...	n
$\sigma(i)$	$\sigma(1)$	$\sigma(2)$...	$\sigma(n)$

La proposition suivante énonce les résultats utiles pour la compréhension du texte.

Proposition A.1.2

- (i) Toute permutation σ peut s'écrire comme le produit de transpositions.
- (ii) La signature définie un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) &\longrightarrow (\{\pm 1\}, \times) \\ \sigma &\longmapsto \varepsilon(\sigma) \end{aligned}$$

Démonstration. On donne une idée des preuves.

- (i) Ce résultat se démontre en deux étapes. Supposons que σ soit différente de l'identité *i.e.* son support est non vide.
 - (a) Premièrement, on a que toute permutation σ peut s'écrire comme le produit de cycle. Pour voir cela, posons :

$$\{i_1, \dots, i_k\} := \text{Supp}(\sigma).$$

Prenons le premier élément, $i_{j_1} := i_1$ et construisons un cycle en posant successivement :

$$i_{j_1} := i_1 \quad , \quad i_{j_2} := \sigma(i_{j_1}) \quad , \quad i_{j_3} := \sigma(i_{j_2}) \quad \dots$$

Comme le support est fini, par le principe des tiroirs et comme σ est bijective, il existe un premier entier $r \geq 2$ tel que :

$$i_{j_1} := \sigma(i_{j_r}).$$

On a alors défini le cycle de longueur r :

$$c_1 := (i_{j_1}, \dots, i_{j_r})$$

On prend ensuite un élément de (si cet ensemble est non vide, sinon on s'arrête) :

$$\text{Supp}(\sigma) - \{i_{j_1}, \dots, i_{j_r}\}$$

et on construit de la même manière un cycle c_2 commençant par cet élément. On réitère cet opération tant que des éléments de $\text{Supp}(\sigma)$ n'apparaissent pas dans un des cycles. Il existe alors $s \in \mathbb{N}_*$ et des cycles c_1, \dots, c_s tels que :

$$\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_s.$$

- (b) Deuxièmement, on a que tout cycle s'écrit comme le produit de transpositions. Soit un cycle (i_1, \dots, i_k) de $\{1, \dots, n\}$. On a la formule simple :

$$(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \dots \circ (i_{k-1}, i_k).$$

- (ii) On a pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

avec :

$$\mathcal{P} := \{\{i, j\}, 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq n \wedge i \neq j\}.$$

Soit $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Montrons que :

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma \circ \tau) &= \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{(\sigma \circ \tau)(j) - (\sigma \circ \tau)(i)}{j - i} \\ &= \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\ &= \prod_{\{k,l\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(k) - \sigma(l)}{k - l} \varepsilon(\tau) \\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) \end{aligned}$$

□

On peut aussi montrer que la parité du nombre de transpositions apparaissant dans la décomposition ne dépend pas de la décomposition (*i.e.* si on a deux décompositions de σ en produit de transpositions avec N et N' transpositions respectivement alors $N' \equiv N[2]$). On a alors :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^N.$$

Soit un cycle $c := (i_1, \dots, i_k)$ de $\{1, \dots, n\}$. On a donc :

$$\varepsilon(c) = (-1)^k$$

et en particulier la signature d'une transposition vaut -1 (cycle de longueur 2). On donne deux exemples simples pour comprendre les objets et notions définis.

Exemple A.1.3

(1) Le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 est d'ordre $6 = 3!$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{\text{Id}, (12), (13), (23), (123) = (12)(23), (132) = (13)(32)\} \\ &=: \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} \end{aligned}$$

Comme la signature d'une transposition vaut -1 , les signatures des six permutations valent :

$$\begin{array}{lll} \varepsilon(\sigma_1) = 1 & \varepsilon(\sigma_2) = -1 & \varepsilon(\sigma_3) = -1 \\ \varepsilon(\sigma_4) = -1 & \varepsilon(\sigma_5) = \varepsilon(\sigma_2)\varepsilon(\sigma_4) = 1 & \varepsilon(\sigma_6) = \varepsilon(\sigma_3)\varepsilon(\sigma_4) = 1 \end{array}$$

Montrons avec l'autre formule que $\varepsilon(\sigma_6) = 1$. Comme :

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

on a :

$$\varepsilon(\sigma_6) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{\sigma_6(j) - \sigma_6(i)}{j - i}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_6(2) - \sigma_6(1)}{2 - 1} \cdot \frac{\sigma_6(3) - \sigma_6(1)}{3 - 1} \cdot \frac{\sigma_6(3) - \sigma_6(2)}{3 - 2} \\
 &= \frac{1 - 3}{2 - 1} \cdot \frac{2 - 3}{3 - 1} \cdot \frac{2 - 1}{3 - 2} \\
 &= -1 \times -1 \times 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(2) Soit la permutation de $\{1, \dots, 12\}$:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 3 & 10 & 8 & 9 & 7 & 12 & 6 & 1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\text{Supp}(\sigma) = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}.$$

Construisons, comme dans la preuve, une décomposition en produit de transpositions pour σ .

- On prend le premier élément du support 1 et on construit le premier cycle avec pour éléments :

$$1, \quad \sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 4, \quad \sigma(4) = 10, \quad \sigma(10) = 1.$$

On a donc un cycle de longueur 4 $c_1 := (1, 2, 4, 10)$.

- Comme il reste des éléments non choisis, on prend le premier non choisi 5 et on construit le deuxième cycle avec pour éléments :

$$5, \quad \sigma(5) = 8, \quad \sigma(8) = 12, \quad \sigma(12) = 5.$$

On a donc un cycle de longueur 3 $c_2 := (5, 8, 12)$.

- Comme il reste des éléments non choisis, on prend le premier non choisi 6 et on construit le deuxième cycle avec pour éléments :

$$6, \quad \sigma(6) = 9.$$

On a donc un cycle de longueur 2 $c_3 := (6, 9)$.

- Il ne reste plus d'éléments dans le support qui ne apparaissent pas dans un cycle. On a alors :

$$\sigma = c_1 \circ c_2 \circ c_3 = (1, 2, 4, 10) \circ (5, 8, 12) \circ (6, 9).$$

- On écrit ensuite chaque cycle comme le produit de transpositions :

$$c_1 = (1, 2, 4, 10) = (1, 2) \circ (2, 4) \circ (4, 10)$$

$$c_2 = (5, 8, 12) = (5, 8) \circ (8, 12)$$

$$c_3 = (6, 9)$$

Ainsi on a :

$$\sigma = (1, 2) \circ (2, 4) \circ (4, 10) \circ (5, 8) \circ (8, 12) \circ (6, 9)$$

et on a :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = 1$$

A.2 Déterminant d'une matrice

On donne dans cette sous-section seulement les notions importantes sur le déterminant pour comprendre le texte. On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n définie par :

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition A.2.1

Soit f une application de $(\mathbb{R}^n)^n$ vers \mathbb{R} . On dit que f est une **forme n -linéaire alternée** si :

- (i) (**linéarité en chaque variable**) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, tous $x_1, \dots, x_n, y_i \in \mathbb{R}^n$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n);$$

- (ii) (**alternée**) pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts et tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_i = x_j$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Proposition A.2.2

Soit f une forme n -linéaire alternée. Alors on a :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(j), j} \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

Démonstration. Montrons le résultat dans le cas $n := 3$ (on dit que f est **trilinéaire alternée**). On a en développant successivement par linéarité par rapport à chaque variable (on met un 'alt' sous le égal pour signifier qu'on utilise l'alternance et un 'lin' pour signifier qu'on utilise la linéarité par rapport à une variable) :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_{11}e_1 + x_{21}e_2 + x_{31}e_3, x_2, x_3) \\ \text{lin} &= x_{11}f(e_1, x_2, x_3) + x_{21}f(e_2, x_2, x_3) + x_{31}f(e_3, x_2, x_3) \\ &= x_{11}f(e_1, x_{12}e_1 + x_{22}e_2 + x_{32}e_3, x_3) \\ &\quad + x_{21}f(e_2, x_{12}e_1 + x_{22}e_2 + x_{32}e_3, x_3) \\ &\quad + x_{31}f(e_3, x_{12}e_1 + x_{22}e_2 + x_{32}e_3, x_3) \\ \text{lin} &= x_{11}[x_{12}f(e_1, e_1, x_3) + x_{22}f(e_1, e_2, x_3) + x_{32}f(e_1, e_3, x_3)] \\ &\quad + x_{21}[x_{12}f(e_2, e_1, x_3) + x_{22}f(e_2, e_2, x_3) + x_{32}f(e_2, e_3, x_3)] \\ &\quad + x_{31}[x_{12}f(e_3, e_1, x_3) + x_{22}f(e_3, e_2, x_3) + x_{32}f(e_3, e_3, x_3)] \\ \text{alt} &= x_{11}[0 + x_{22}f(e_1, e_2, x_3) + (-1)^1 x_{32}f(e_1, x_3, e_3)] \\ &\quad + x_{21}[(-1)^1 x_{12}f(e_1, e_2, x_3) + 0 + (-1)^2 x_{32}f(x_3, e_2, e_3)] \\ &\quad + x_{31}[(-1)^2 x_{12}f(e_1, x_3, e_3) + (-1)^1 x_{22}f(x_3, e_2, e_3) + 0] \\ &= (x_{11}x_{22} + (-1)^1 x_{21}x_{12}) f(e_1, e_2, x_{13}e_1 + x_{23}e_2 + x_{33}e_3) \\ &\quad + ((-1)^1 x_{11}x_{32} + (-1)^2 x_{31}x_{12}) f(e_1, x_{13}e_1 + x_{23}e_2 + x_{33}e_3, e_3) \\ &\quad + ((-1)^1 x_{31}x_{22} + (-1)^2 x_{21}x_{32}) f(x_{13}e_1 + x_{23}e_2 + x_{33}e_3, e_2, e_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 lin &= (x_{11}x_{22} + (-1)^1x_{21}x_{12})(x_{13}f(e_1, e_2, e_1) + x_{23}f(e_1, e_2, e_2) + x_{33}f(e_1, e_2, e_3)) \\
 &\quad + ((-1)^1x_{11}x_{32} + (-1)^2x_{31}x_{12})(x_{13}f(e_1, e_1, e_3) + x_{23}f(e_1, e_2, e_3) + x_{33}f(e_1, e_3, e_3)) \\
 &\quad + ((-1)^1x_{31}x_{22} + (-1)^2x_{21}x_{32})(x_{13}f(e_1, e_2, e_3) + x_{23}f(e_2, e_2, e_3) + x_{33}f(e_3, e_2, e_3)) \\
 alt &= (x_{11}x_{22} + (-1)^1x_{21}x_{12})(x_{33}f(e_1, e_2, e_1) + 0 + 0) \\
 &\quad + ((-1)^1x_{11}x_{32} + (-1)^2x_{31}x_{12})(0 + x_{23}f(e_1, e_2, e_3) + 0) \\
 &\quad + ((-1)^1x_{31}x_{22} + (-1)^2x_{21}x_{32})(x_{13}f(e_1, e_2, e_3) + 0 + 0) \\
 &= (x_{11}x_{22} + (-1)^1x_{21}x_{12})x_{33}f(e_1, e_2, e_1) \\
 &\quad + ((-1)^1x_{11}x_{32} + (-1)^2x_{31}x_{12})x_{23}f(e_1, e_2, e_3) \\
 &\quad + ((-1)^1x_{31}x_{22} + (-1)^2x_{21}x_{32})x_{13}f(e_1, e_2, e_3)
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_3 &= \{\text{Id}, (12), (13), (23), (123) = (12)(23), (132) = (13)(32)\} \\
 &=: \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}
 \end{aligned}$$

et les signatures des six permutations valent :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\sigma_1) &= (-1)^0 = 1 & \varepsilon(\sigma_2) &= (-1)^1 = -1 & \varepsilon(\sigma_3) &= (-1)^1 = -1 \\
 \varepsilon(\sigma_4) &= (-1)^1 = -1 & \varepsilon(\sigma_5) &= (-1)^2 = 1 & \varepsilon(\sigma_6) &= (-1)^2 = 1
 \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
 &f(x_1, x_2, x_3) \\
 &= [x_{11}x_{22}x_{33} + (-1)^1x_{12}x_{21}x_{33} + (-1)^1x_{11}x_{23}x_{32} \\
 &\quad + (-1)^2x_{12}x_{23}x_{31} + (-1)^1x_{13}x_{22}x_{31} + (-1)^2x_{13}x_{21}x_{32}] f(e_1, e_2, e_3) \\
 &= \left[\varepsilon(\sigma_1) \prod_{i=1}^3 x_{i, \sigma_1(i)} + \varepsilon(\sigma_2) \prod_{i=1}^3 x_{i, \sigma_2(i)} + \varepsilon(\sigma_4) \prod_{i=1}^3 x_{i, \sigma_4(i)} \right. \\
 &\quad \left. \varepsilon(\sigma_5) \prod_{i=1}^3 x_{i, \sigma_5(i)} + \varepsilon(\sigma_3) \prod_{i=1}^3 x_{i, \sigma_3(i)} + \varepsilon(\sigma_6) \prod_{i=1}^3 x_{i, \sigma_6(i)} \right] f(e_1, e_2, e_3) \\
 &= \left[\sum_{k=1}^6 \varepsilon(\sigma_k) \prod_{i=1}^3 x_{i, \sigma_k(i)} \right] f(e_1, e_2, e_3) \\
 &= \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)} \right] f(e_1, e_2, e_3)
 \end{aligned}$$

□

L'ensemble des formes n -linéaires alternées forme un espace vectoriel de dimension 1. Il est donc engendré par toute forme n -linéaire alternée non nulle. D'où les définitions suivantes.

Définition A.2.3

(i) Le **déterminant** \det est l'unique forme n -linéaire alternée telle que :

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

(ii) Soit la matrice définie par ses colonnes :

$$M := (C_1 \mid \cdots \mid C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Le **déterminant** de M est défini par :

$$\det(M) := \det(C_1, \dots, C_n).$$

Pour $M = (m_{i,j})_{ij}$, on a donc :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}.$$

On a les propriétés utiles suivantes du déterminant.

Proposition A.2.4

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) On a :

$$\det(M^T) = \det(M).$$

(ii) On a :

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

(iii) On a :

$$\det(M) \neq 0 \iff M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

A.3 Matrices de permutation

Définition A.3.1

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La **matrice de permutation associée à σ** est la matrice $\mathbf{P}_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$:

$$[\mathbf{P}_\sigma]_{k,l} := \delta_{k,\sigma(l)}.$$

On reprend l'exemple (1) de A.1.3.

Exemple A.3.2

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_3 &= \{\text{Id}, (12), (13), (23), (123) = (12)(23), (132) = (13)(32)\} \\ &=: \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} \end{aligned}$$

Les six matrices de permutation associées valent :

$$\mathbf{P}_{\sigma_1} = \mathbf{P}_{\text{Id}} = \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma_1(1)} & \delta_{1,\sigma_1(2)} & \delta_{1,\sigma_1(3)} \\ \delta_{2,\sigma_1(1)} & \delta_{2,\sigma_1(2)} & \delta_{2,\sigma_1(3)} \\ \delta_{3,\sigma_1(1)} & \delta_{3,\sigma_1(2)} & \delta_{3,\sigma_1(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{\sigma_2} = \mathbf{P}_{(1,2)} &= \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma_2(1)} & \delta_{1,\sigma_2(2)} & \delta_{1,\sigma_2(3)} \\ \delta_{2,\sigma_2(1)} & \delta_{2,\sigma_2(2)} & \delta_{2,\sigma_2(3)} \\ \delta_{3,\sigma_2(1)} & \delta_{3,\sigma_2(2)} & \delta_{3,\sigma_2(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,2} & \delta_{1,1} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,2} & \delta_{2,1} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,2} & \delta_{3,1} & \delta_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{\sigma_3} = \mathbf{P}_{(1,3)} &= \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma_3(1)} & \delta_{1,\sigma_3(2)} & \delta_{1,\sigma_3(3)} \\ \delta_{2,\sigma_3(1)} & \delta_{2,\sigma_3(2)} & \delta_{2,\sigma_3(3)} \\ \delta_{3,\sigma_3(1)} & \delta_{3,\sigma_3(2)} & \delta_{3,\sigma_3(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,3} & \delta_{1,2} & \delta_{1,1} \\ \delta_{2,3} & \delta_{2,2} & \delta_{2,1} \\ \delta_{3,3} & \delta_{3,2} & \delta_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{\sigma_4} = \mathbf{P}_{(2,3)} &= \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma_4(1)} & \delta_{1,\sigma_4(2)} & \delta_{1,\sigma_4(3)} \\ \delta_{2,\sigma_4(1)} & \delta_{2,\sigma_4(2)} & \delta_{2,\sigma_4(3)} \\ \delta_{3,\sigma_4(1)} & \delta_{3,\sigma_4(2)} & \delta_{3,\sigma_4(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,3} & \delta_{1,2} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,3} & \delta_{2,2} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,3} & \delta_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{\sigma_5} = \mathbf{P}_{(1,2,3)} &= \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma_5(1)} & \delta_{1,\sigma_5(2)} & \delta_{1,\sigma_5(3)} \\ \delta_{2,\sigma_5(1)} & \delta_{2,\sigma_5(2)} & \delta_{2,\sigma_5(3)} \\ \delta_{3,\sigma_5(1)} & \delta_{3,\sigma_5(2)} & \delta_{3,\sigma_5(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,2} & \delta_{1,3} & \delta_{1,1} \\ \delta_{2,2} & \delta_{2,3} & \delta_{2,1} \\ \delta_{3,2} & \delta_{3,3} & \delta_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{\sigma_6} = \mathbf{P}_{(1,3,2)} &= \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma_6(1)} & \delta_{1,\sigma_6(2)} & \delta_{1,\sigma_6(3)} \\ \delta_{2,\sigma_6(1)} & \delta_{2,\sigma_6(2)} & \delta_{2,\sigma_6(3)} \\ \delta_{3,\sigma_6(1)} & \delta_{3,\sigma_6(2)} & \delta_{3,\sigma_6(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,3} & \delta_{1,1} & \delta_{1,2} \\ \delta_{2,3} & \delta_{2,1} & \delta_{2,2} \\ \delta_{3,3} & \delta_{3,1} & \delta_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On a alors les résultats fondamentaux suivants.

Lemme A.3.3

(i) Soit $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. On a :

$$\mathbf{P}_{\sigma \circ \tau} = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_\tau.$$

(ii) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a $\mathbf{P}_\sigma \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathbf{P}_\sigma^{-1} = \mathbf{P}_{\sigma^{-1}} = \mathbf{P}_\sigma^T.$$

Démonstration. (i) Comme τ est une bijection, on a pour tous $p, q \in \{1, \dots, n\}$:

$$p = \tau(q) \iff q = \tau^{-1}(p).$$

Ainsi Pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_\tau]_{kl} &= \sum_{m=1}^n [\mathbf{P}_\sigma]_{km} [\mathbf{P}_\tau]_{ml} \\
 &= \sum_{m=1}^n \delta_{k,\sigma(m)} \delta_{m,\tau(l)} \\
 &= \delta_{k,\sigma(\tau(l))} \\
 &= [\mathbf{P}_{\sigma \circ \tau}]_{kl}
 \end{aligned}$$

(ii) Pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_\sigma^T]_{kl} &= \sum_{m=1}^n [\mathbf{P}_\sigma]_{km} [\mathbf{P}_\sigma^T]_{ml} \\
 &= \sum_{m=1}^n [\mathbf{P}_\sigma]_{km} [\mathbf{P}_\sigma]_{lm} \\
 &= \sum_{m=1}^n \delta_{k,\sigma(m)} \delta_{l,\sigma(m)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \delta_{k,l} \\
 &= [I_n]_{kl}
 \end{aligned}$$

et par bijection de σ , on a :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_{\sigma^{-1}}]_{kl} &= \sum_{m=1}^n [\mathbf{P}_\sigma]_{km} [\mathbf{P}_{\sigma^{-1}}]_{ml} \\
 &= \sum_{m=1}^n \delta_{k,\sigma(m)} \delta_m, \\
 &= \sum_{m=1}^n \delta_{k,\sigma(\sigma^{-1}(l))} \\
 &= \delta_{k,l} \\
 &= [I_n]_{kl}
 \end{aligned}$$

Donc on a $\mathbf{P}_\sigma \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathbf{P}_\sigma^{-1} = \mathbf{P}_{\sigma^{-1}} = \mathbf{P}_\sigma^T.$$

□

Donc l'inverse d'une matrice de permutation est une matrice de permutation.

A.4 Matrices d'opérations élémentaires

Définition A.4.1

(i) Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. La **matrice de permutation (i, j) de taille n** est la matrice :

$$\mathbf{P}_{i,j} := \mathbf{P}_{\tau_{i,j}}$$

avec $\tau_{i,j}$ la transposition de i et j . On dit aussi que $\mathbf{P}_{i,j}$ est une **matrice élémentaire de permutation** ou une **matrice de transposition**.

(ii) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. La **matrice de dilatation (i, a) de taille n** est la matrice $\mathbf{D}_i(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$:

$$[\mathbf{D}_i(a)]_{k,l} := \begin{cases} a & \text{si } k = l = i \\ \delta_{k,l} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $b \in \mathbb{R}$. La **matrice de transvection (i, j, b) de taille n** est la matrice $\mathbf{T}_{i,j}(b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$:

$$[\mathbf{T}_{i,j}(b)]_{k,l} := \begin{cases} b & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ \delta_{k,l} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices élémentaires de taille n i.e. :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_n(\mathbb{R}) &= \{ \mathbf{P}_{i,j}, i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \} \\
 &\quad \cup \{ \mathbf{D}_i(a), i \in \{1, \dots, n\}, a \in \mathbb{R}^* \} \\
 &\quad \cup \{ \mathbf{T}_i(b), i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \wedge b \in \mathbb{R} \}.
 \end{aligned}$$

Pour $n := 3$, on a par exemple :

$$\mathbf{P}_{1,2} = \mathbf{P}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{1,2}(b) = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{2,3}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{1,3} = \mathbf{P}_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{1,3}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{3,1}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{2,3} = \mathbf{P}_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{2,1}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{3,2}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

A.5 Propriétés

On a les relations simples suivantes.

Lemme A.5.1

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(i) (a) On a $\mathbf{P}_{i,j} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathbf{P}_{i,j}^{-1} = \mathbf{P}_{i,j}^T = \mathbf{P}_{i,j}.$$

(b) Toute matrices de permutation est le produit d'au plus $n-1$ matrices élémentaires de permutations.

(c) On a :

$$\det(\mathbf{P}_\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

(ii) (i) On a $\mathbf{D}_i(a) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathbf{D}_i(a)^{-1} = \mathbf{D}_i(1/a) \quad , \quad \mathbf{D}_i(a)^T = \mathbf{D}_i(a).$$

(ii) On a :

$$\det(\mathbf{D}_i(a)) = a.$$

(iii) (i) On a $\mathbf{T}_{i,j}(b) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathbf{T}_{i,j}(b)^{-1} = \mathbf{T}_{i,j}(-b) \quad , \quad \mathbf{T}_{i,j}(b)^T = \mathbf{T}_{j,i}(b).$$

(ii) On a :

$$\det(\mathbf{T}_{i,j}(b)) = 1.$$

Démonstration. (i) (a) Par le lemme A.3.3, on a $\mathbf{P}_{i,j} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,j}^{-1} &= \mathbf{P}_{\tau_{i,j}}^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{\tau_{i,j}^{-1}} \\ &= \mathbf{P}_{\tau_{i,j}} \\ &= \mathbf{P}_{i,j} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,j}^T &= \mathbf{P}_{\tau_{i,j}}^T \\ &= \mathbf{P}_{\tau_{i,j}^{-1}} \\ &= \mathbf{P}_{\tau_{i,j}} \\ &= \mathbf{P}_{i,j} \end{aligned}$$

(b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. Alors par la proposition A.1.2, σ est le produit de transpositions τ_1, \dots, τ_k :

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k.$$

On a donc par le point (i) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\sigma &= \mathbf{P}_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k} \\ &= \mathbf{P}_{\tau_1} \cdots \mathbf{P}_{\tau_k} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) Soit $\tau_{i,j}$ une transposition avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i < j$. Montrons que :

$$\det(\mathbf{P}_{i,j}) = -1 = \varepsilon(\tau_{i,j}).$$

On a par antisymétrie du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}_{i,j}) &= \det(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= -\det(e_1, \dots, e_n) \\ &= -1 \\ &= \varepsilon(\tau_{i,j}) \end{aligned}$$

On réutilise les notations du point (iii). Soit une permutation décomposée en produit de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}_\sigma) &= \det(\mathbf{P}_{\tau_1} \cdots \mathbf{P}_{\tau_k}) \\ &= \prod_{i=1}^k \det(\mathbf{P}_{\tau_i}) \\ &= (-1)^k \\ &= \varepsilon(\sigma) \end{aligned}$$

(ii) Soit $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Comme :

$$[\mathbf{D}_i(a)]_{k,l} = \begin{cases} a & \text{si } k = l = i \\ \delta_{k,l} & \text{sinon.} \end{cases} = (a-1)\delta_{k,i}\delta_{l,i} + \delta_{k,l}$$

on a :

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_i(a)\mathbf{D}_i(1/a)]_{kl} &= \sum_{m=1}^n [\mathbf{D}_i(a)]_{km} [\mathbf{D}_i(1/a)]_{ml} \\ &= \sum_{m=1}^n ((a-1)\delta_{k,i}\delta_{m,i} + \delta_{k,m}) ((1/a-1)\delta_{m,i}\delta_{l,i} + \delta_{m,l}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a-1)(1/a-1) \sum_{m=1}^n \delta_{k,i} \delta_{m,i} \delta_{m,i} \delta_{l,i} + (a-1) \sum_{m=1}^n \delta_{k,i} \delta_{m,i} \delta_{m,l} \\
 &\quad + (1/a-1) \sum_{m=1}^n \delta_{k,m} \delta_{m,i} \delta_{l,i} + \sum_{m=1}^n \delta_{k,m} \delta_{m,l} \\
 &= (a-1)(1/a-1) \delta_{k,i} \delta_{l,i} + (a-1) \delta_{k,i} \delta_{l,i} + (1/a-1) \delta_{k,i} \delta_{l,i} + \delta_{k,l} \\
 &= \delta_{k,l} \\
 &= [I_n]_{kl}
 \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{D}_i(a)^T]_{kl} &= [\mathbf{D}_i(a)]_{lk} \\
 &= (a-1) \delta_{l,i} \delta_{k,i} \\
 &= (a-1) \delta_{k,i} \delta_{l,i} \\
 &= [\mathbf{D}_i(a)]_{kl}
 \end{aligned}$$

Donc on a $\mathbf{D}_i(a) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathbf{D}_i(a)^{-1} = \mathbf{D}_i(1/a) \quad , \quad \mathbf{D}_i(a)^T = \mathbf{D}_i(a).$$

(iii) Soit $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Donnons une expression des coefficients de ces matrices sans conditionnement. On a pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$:

$$[\mathbf{T}_{i,j}(b)]_{k,l} = \begin{cases} b & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ \delta_{k,l} & \text{sinon.} \end{cases} = b \delta_{k,i} \delta_{l,j} + \delta_{k,l}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{T}_{i,j}(b) \mathbf{T}_{i,j}(-b)]_{kl} &= \sum_{m=1}^n [\mathbf{T}_{i,j}(b)]_{km} [\mathbf{T}_{i,j}(-b)]_{ml} \\
 &= \sum_{m=1}^n (b \delta_{k,i} \delta_{m,j} + \delta_{k,m}) (-b \delta_{m,i} \delta_{l,j} + \delta_{m,l}) \\
 &= -b^2 \sum_{m=1}^n \delta_{k,i} \delta_{m,j} \delta_{m,i} \delta_{l,j} + b \sum_{m=1}^n \delta_{k,i} \delta_{m,j} \delta_{m,l} - b \sum_{m=1}^n \delta_{k,m} \delta_{m,i} \delta_{l,j} + \sum_{m=1}^n \delta_{k,m} \delta_{m,l} \\
 &= 0 + b \delta_{k,i} \delta_{j,l} - b \delta_{k,i} \delta_{l,j} + \delta_{k,l} \\
 &= \delta_{k,l} \\
 &= [I_n]_{kl}
 \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{T}_{i,j}(b)^T]_{kl} &= [\mathbf{T}_{i,j}(b)]_{lk} \\
 &= b \delta_{l,i} \delta_{k,j} + \delta_{l,k} \\
 &= b \delta_{k,j} \delta_{l,i} + \delta_{k,l} \\
 &= [\mathbf{T}_{j,i}(b)]_{kl}
 \end{aligned}$$

Donc on a $\mathbf{T}_{i,j}(b) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathbf{T}_{i,j}(b)^{-1} = \mathbf{T}_{i,j}(-b) \quad , \quad \mathbf{T}_{i,j}(b)^T = \mathbf{T}_{j,i}(b).$$

□

On en déduit deux stabilités fondamentales de l'ensemble $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire A.5.2

L'ensemble $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ des matrices élémentaires de taille n est stable par la transposée et l'inverse.

A.6 Cas des matrices triangulaires

On montre dans cette sous-section que toute matrice triangulaire inversible de taille 3 s'écrit comme produit d'opérations élémentaires. On commence par les matrices triangulaires inférieures.

Proposition A.6.1

(i) Soit :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ d & e & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

(a) On a :

$$L = \mathbf{T}_{2,1}(b)\mathbf{T}_{3,1}(d)\mathbf{T}_{3,2}(e).$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} L^{-1} &= \mathbf{T}_{3,2}(-e)\mathbf{T}_{3,1}(-d)\mathbf{T}_{2,1}(-b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ be-d & -e & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Soit :

$$L := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

(donc a, c et f sont non nuls).

(a) On a :

$$L = \mathbf{D}_3(f)\mathbf{D}_2(c)\mathbf{D}_1(a)\mathbf{T}_{2,1}(b/c)\mathbf{T}_{3,1}(d/f)\mathbf{T}_{3,2}(e/f).$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} L^{-1} &= \mathbf{T}_{3,2}(-e/f)\mathbf{T}_{3,1}(-d/f)\mathbf{T}_{2,1}(-b/c)\mathbf{D}_1(1/a)\mathbf{D}_2(1/c)\mathbf{D}_3(1/f) \\ &= \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -b/(ac) & 1/c & 0 \\ (be-cd)/(acf) & -e/(cf) & 1/f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Démonstration. (i) (a) On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2,1}(b)\mathbf{T}_{3,1}(d)\mathbf{T}_{3,2}(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d & e & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ d & e & 1 \end{pmatrix} \\
 &= L
 \end{aligned}$$

(b) On a par (a) :

$$\begin{aligned}
 L^{-1} &= \mathbf{T}_{3,2}(-e)\mathbf{T}_{3,1}(-d)\mathbf{T}_{2,1}(-b) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ -d & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ be-d & -e & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(ii) Soit :

$$L := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

(a) On a par (1.a) :

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{D}_3(f)\mathbf{D}_2(c)\mathbf{D}_1(a)\mathbf{T}_{2,1}(b/c)\mathbf{T}_{3,1}(d/f)\mathbf{T}_{3,2}(e/f) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b/c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d/f & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e/f & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b/c & 1 & 0 \\ d/f & e/f & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \\
 &= L
 \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 &L^{-1} \\
 &= \mathbf{T}_{3,2}(-e/f)\mathbf{T}_{3,1}(-d/f)\mathbf{T}_{2,1}(-b/c)\mathbf{D}_1(1/a)\mathbf{D}_2(1/c)\mathbf{D}_3(1/f) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d/f & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b/c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b/c & 1 & 0 \\ (be-dc)/(cf) & -e/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1/f \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -b/(ac) & 1/c & 0 \\ (be-cd)/(acf) & -e/(cf) & 1/f \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En passant à la transposée, on a le résultat pour les matrices triangulaires supérieures (voir aussi le lemme A.5.1).

Proposition A.6.2

(i) Soit :

$$U := \begin{pmatrix} 1 & b & d \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

(a) On a :

$$U = \mathbf{T}_{2,3}(e)\mathbf{T}_{1,3}(d)\mathbf{T}_{1,2}(b).$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} U^{-1} &= \mathbf{T}_{1,2}(-b)\mathbf{T}_{1,3}(-d)\mathbf{T}_{2,3}(-e) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -b & be - d \\ 0 & 1 & -e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Soit :

$$U := \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Les réels a , c et f sont non nuls.

(b) On a :

$$U = \mathbf{T}_{2,3}(e/f)\mathbf{T}_{1,3}(d/f)\mathbf{T}_{1,2}(b/c)\mathbf{D}_1(a)\mathbf{D}_2(c)\mathbf{D}_3(f).$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} U^{-1} &= \mathbf{D}_3(1/f)\mathbf{D}_2(1/c)\mathbf{D}_1(1/a)\mathbf{T}_{1,2}(-b/c)\mathbf{T}_{1,3}(-d/f)\mathbf{T}_{2,3}(-e/f) \\ &= \begin{pmatrix} 1/a & -b/(ac) & (be - cd)/(acf) \\ 0 & 1/c & -e/(cf) \\ 0 & 0 & 1/f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le résultat se généralise en dimension quelconque. Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, on utilise les notations :

$$\begin{aligned} \prod_i^{1 \rightarrow n} a_i &= a_1 \cdots a_n \\ \prod_i^{n \rightarrow 1} a_i &= a_n \cdots a_1 \end{aligned}$$

On a pour les matrices triangulaires inférieures et supérieures le résultat suivant.

Proposition A.6.3

(i) Soit :

$$L := \begin{pmatrix} t_{11} & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ t_{n1} & \cdots & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

(a) On a :

$$L = \left[\prod_{i=1}^n \mathbf{D}_i(t_{i,i}) \right] \bullet \left[\prod_i^{2 \rightarrow n} \left[\prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{T}_{i,k} \left(\frac{t_{i,k}}{t_{i,i}} \right) \right] \right].$$

(b) On a :

$$L^{-1} = \prod_i^{n \rightarrow 2} \left[\prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{T}_{i,k} \left(-\frac{t_{i,k}}{t_{i,i}} \right) \right] \bullet \left[\prod_{i=1}^n \mathbf{D}_i \left(\frac{1}{t_{i,i}} \right) \right].$$

(ii) Soit :

$$U := \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

(a) On a :

$$U = \left[\prod_i^{n \rightarrow 2} \left[\prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{T}_{k,i} \left(\frac{t_{k,i}}{t_{i,i}} \right) \right] \right] \bullet \left[\prod_{i=1}^n \mathbf{D}_i(t_{i,i}) \right].$$

(b) On a :

$$U^{-1} = \left[\prod_{i=1}^n \mathbf{D}_i \left(\frac{1}{t_{i,i}} \right) \right] \bullet \prod_i^{2 \rightarrow n} \left[\prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{T}_{k,i} \left(-\frac{t_{i,k}}{t_{i,i}} \right) \right].$$

B Opérations élémentaires sur les lignes

On définit les trois opérations élémentaires sur les lignes. A chacune on associe une matrice inversible. On garde les notations de la section précédente. On commence par la définition d'équivalence par lignes.

Définition B.0.1

Soit $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que M et N sont **équivalentes par lignes** s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = PN$$

On note alors $M \sim_L N$.

La relation \sim_L est une relation d'équivalence sur les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

B.1 Les trois opérations élémentaires

Matrices de permutation

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. La **matrice de permutation des lignes i et j de taille n** est la matrice $\mathbf{P}_{i,j}$. Elle est symbolisée par :

$$L_i \leftrightarrow L_j.$$

On note alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(L_i \leftrightarrow L_j) &:= \mathbf{P}_{i,j} \\ \text{Op}_L(\mathbf{P}_{i,j}) &:= [L_i \leftrightarrow L_j] \end{aligned}$$

Matrices de dilatation

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. La **matrice de dilatation de la ligne i par a de taille n** est la matrice $\mathbf{D}_i(a)$. Elle est symbolisée par :

$$L_i \leftarrow aL_i.$$

On note alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(L_i \leftarrow aL_i) &:= \mathbf{D}_i(a) \\ \text{Op}_L(\mathbf{D}_i(a)) &:= [L_i \leftarrow aL_i] \end{aligned}$$

Matrices de transvection

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $b \in \mathbb{R}$. La **matrice de transvection (b, j) de la ligne i de taille n** est la matrice $\mathbf{T}_{i,j}(b, j)$. Elle est symbolisée par :

$$L_i \leftarrow L_i + bL_j.$$

On note alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(L_i \leftarrow L_i + bL_j) &:= \mathbf{T}_{i,j}(b, j) \\ \text{Op}_L(\mathbf{T}_{i,j}(b, j)) &:= [L_i \leftarrow L_i + bL_j] \end{aligned}$$

B.2 Un exemple simple

Faire une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice est équivalent à multiplier la matrice à gauche par une matrice élémentaire.

Regardons cela sur un exemple simple. Soit la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(1) Dilatation :

$$[L_2 \leftarrow 5L_2] \quad \mathbf{D}_2(5)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 20 & 25 & 30 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(2) Permutation :

(a)

$$[L_2 \leftrightarrow L_3] \quad \mathbf{P}_{2,3}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$[L_1 \leftrightarrow L_3] \quad \mathbf{P}_{1,3}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) Transvection :

$$[L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1] \quad \mathbf{T}_{3,1}(3)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

(4) Transvection et dilatation :

$$[L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1] \quad \mathbf{D}_3(2)\mathbf{T}_{3,1}(3/2)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 26 & 31 & 36 \end{pmatrix}$$

Cela correspond aux deux opérations élémentaires faites successivement :

$$[L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1] \equiv [L_3 \leftarrow L_3 + 3/2.L_1 \quad \text{puis} \quad L_3 \leftarrow 2L_3]$$

i.e. on a matriciellement⁸ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. L'ordre dans le produit des matrices est inversé car on multiplie à gauche.

C Opérations élémentaires sur les colonnes

On définit les trois opérations élémentaires sur les colonnes. A chacune on associe une matrice inversible. Elles sont simplement les transposées des matrices élémentaires sur les lignes. On garde les notations des sections précédentes. On commence par la définition d'équivalence par colonnes.

Définition C.0.1

Soit $M, N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On dit que M et N sont **équivalentes par colonnes** s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = NQ^{-1}$$

On note alors $M \sim_C N$.

La relation \sim_C est une relation d'équivalence sur les matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

C.1 Les trois opérations élémentaires

Matrices de permutation

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. La **matrice de permutation des colonnes i et j de taille n** est la matrice :

$$\mathbf{P}_{i,j}^T = \mathbf{P}_{i,j}.$$

Elle est symbolisée par :

$$C_i \leftrightarrow C_j.$$

On note alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(C_i \leftrightarrow C_j) &:= \mathbf{P}_{i,j} \\ \text{Op}_C(\mathbf{P}_{i,j}) &:= [C_i \leftrightarrow C_j] \end{aligned}$$

Matrices de dilatation

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. La **matrice de dilatation de la ligne i par a de taille n** est :

$$\mathbf{D}_i(a)^T = \mathbf{D}_i(a).$$

Elle est symbolisée par :

$$C_i \leftarrow aC_i.$$

On note alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(C_i \leftarrow aC_i) &:= \mathbf{D}_i(a) \\ \text{Op}_C(\mathbf{D}_i(a)) &:= [C_i \leftarrow aC_i] \end{aligned}$$

Matrices de transvection

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $b \in \mathbb{R}$. La **matrice de transvection (b, j) de la ligne i de taille n** est :

$$\mathbf{T}_{i,j}(b, j)^T = \mathbf{T}_{j,i}(b, j).$$

Elle est symbolisée par :

$$C_i \leftarrow C_i + bC_j.$$

On note alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(C_i \leftarrow C_i + bC_j) &:= \mathbf{T}_{j,i}(b, j) \\ \text{Op}_C(\mathbf{T}_{j,i}(b, j)) &:= [C_i \leftarrow C_i + bC_j] \end{aligned}$$

C.2 Un exemple simple

Faire une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice est équivalent à multiplier la matrice à droite par une matrice élémentaire.

Regardons cela sur un exemple simple. Soit la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(1) Dilatation :

$$[C_2 \leftarrow 5C_2] \quad MD_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 25 & 6 \\ 7 & 40 & 9 \end{pmatrix}.$$

(2) Permutation :

(a)

$$[C_2 \leftrightarrow C_3] \quad MP_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$[C_1 \leftrightarrow C_3] \quad MP_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

(3) Transvection :

$$[C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1] \quad MT_{3,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 18 \\ 7 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

(4) Transvection et dilatation :

$$[C_3 \leftarrow 2C_3 + 3C_1] \quad MT_{3,1}(3/2)D_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 24 \\ 7 & 8 & 39 \end{pmatrix}$$

Cela correspond aux deux opérations élémentaires faites successivement :

$$[C_3 \leftarrow 2C_3 + 3C_1] \equiv [C_3 \leftarrow C_3 + 3/2.C_1 \text{ puis } C_3 \leftarrow 2C_3]$$

i.e. on a matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$G(2, 3, c, s) = G(2, 3, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & c & -s \\ 0 & s & c \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G(3, 2, c, s) = G(3, 2, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & -s & c \\ 0 & c & s \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On commence par un lemme utile.

Lemme D.1.3

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) On a $G(i, j, \theta) \in O_n(\mathbb{R})$.

(ii) Soit :

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

avec $r := \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \neq 0$. Alors on a :

$$G\left(i, j, \frac{x_i}{r}, -\frac{x_j}{r}\right) X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

Démonstration. Dans les deux preuves, on a va utiliser une expression de $G(i, j, \theta)$ avec des symboles de Kronecker. Pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$[G(i, j, \theta)]_{kl} = s(\delta_{(k,l),(j,i)} - \delta_{(k,l),(i,j)}) + (c-1)(\delta_{(k,l),(i,i)} + \delta_{(k,l),(j,j)}) + \delta_{k,l}$$

(i) Posons $c := \cos(\theta)$ et $s := \sin(\theta)$. Montrons que $G(i, j, \theta)^T G(i, j, \theta) = I_n$. Pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$ et comme $s^2 + c^2 = 1$, on a :

$$\begin{aligned} & [G(i, j, \theta)^T G(i, j, \theta)]_{kl} \\ &= \sum_{h=1}^n [G(i, j, \theta)^T]_{kh} [G(i, j, \theta)]_{hl} \\ &= \sum_{h=1}^n [G(i, j, \theta)]_{hk} [G(i, j, \theta)]_{hl} \\ &= \sum_{h=1}^n (s(\delta_{(h,k),(j,i)} - \delta_{(h,k),(i,j)}) + (c-1)(\delta_{(h,k),(i,i)} + \delta_{(h,k),(j,j)}) + \delta_{h,k}) \\ & \quad \times (s(\delta_{(h,l),(j,i)} - \delta_{(h,l),(i,j)}) + (c-1)(\delta_{(h,l),(i,i)} + \delta_{(h,l),(j,j)}) + \delta_{h,l}) \\ &= s^2 \sum_{h=1}^n (\delta_{(h,k),(j,i)} - \delta_{(h,k),(i,j)}) (\delta_{(h,l),(j,i)} - \delta_{(h,l),(i,j)}) \\ & \quad + (c-1)^2 \sum_{h=1}^n (\delta_{(h,k),(i,i)} + \delta_{(h,k),(j,j)}) (\delta_{(h,l),(i,i)} + \delta_{(h,l),(j,j)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + s(c-1) \sum_{h=1}^n [(\delta_{(h,k),(j,i)} - \delta_{(h,k),(i,j)})(\delta_{(h,l),(i,i)} + \delta_{(h,l),(j,j)}) + (\delta_{(h,k),(i,i)} + \delta_{(h,k),(j,j)})(\delta_{(h,l),(j,i)} - \delta_{(h,l),(i,j)})] \\
& + s \sum_{h=1}^n [(\delta_{(h,k),(j,i)} - \delta_{(h,k),(i,j)})\delta_{h,l} + \delta_{h,k}(\delta_{(h,l),(j,i)} - \delta_{(h,l),(i,j)})] \\
& + (c-1) \sum_{h=1}^n [(\delta_{(h,l),(i,i)} + \delta_{(h,l),(j,j)})\delta_{h,l} + \delta_{h,k}(\delta_{(h,l),(i,i)} + \delta_{(h,l),(j,j)})] \\
& + \sum_{h=1}^n \delta_{h,k}\delta_{h,l} \\
= & s^2 (\delta_{(i,k),(i,j)}\delta_{(i,l),(i,j)} + \delta_{(j,k),(j,i)}\delta_{(j,l),(j,i)}) \\
& + (c-1)^2 (\delta_{(i,k),(i,i)}\delta_{(i,l),(i,i)} + \delta_{(j,k),(j,j)}\delta_{(j,l),(j,j)}) \\
& + s(c-1) (-\delta_{(i,k),(i,j)}\delta_{(i,l),(i,i)} - \delta_{(i,k),(i,i)}\delta_{(i,l),(i,j)} + \delta_{(j,k),(j,i)}\delta_{(j,l),(j,j)} + \delta_{(j,k),(j,j)}\delta_{(j,l),(j,i)}) \\
& + s (-\delta_{(i,k),(i,j)}\delta_{i,l} - \delta_{i,k}\delta_{(i,l),(i,j)} + \delta_{(j,k),(j,i)}\delta_{j,l} + \delta_{j,k}\delta_{(j,l),(j,i)}) \\
& + (c-1) (\delta_{(i,l),(i,i)}\delta_{i,l} + \delta_{i,k}\delta_{(i,l),(i,i)} + \delta_{(j,l),(j,j)}\delta_{j,l} + \delta_{j,k}\delta_{(j,l),(j,j)}) \\
& + \delta_{k,l} \\
= & s^2 (\delta_{k,j}\delta_{l,j} + \delta_{k,i}\delta_{l,i}) + (c-1)^2 (\delta_{i,k}\delta_{i,l} + \delta_{k,j}\delta_{l,j}) \\
& + s(c-1) \times 0 + s \times 0 + (c-1) (\delta_{i,l} + \delta_{i,k}\delta_{l,i} + \delta_{j,l} + \delta_{j,k}\delta_{l,j}) + \delta_{k,l} \\
= & (s^2 + (c-1)^2 + c-1) (\delta_{k,j}\delta_{l,j} + \delta_{k,i}\delta_{l,i}) + (c-1) (\delta_{i,l} + \delta_{j,l}) + \delta_{k,l} \\
= & \begin{cases} (-c+1) + (c-1) + 1 & \text{si } k = l = i \text{ ou } k = l = j \\ \delta_{k,l} & \text{sinon.} \end{cases} \\
= & \delta_{k,l} \\
= & [I_n]_{k,l}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(ii) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \left[G\left(i, j, \frac{x_i}{r}, -\frac{x_j}{r}\right) X \right]_k \\
= & \sum_{h=1}^n \left[G\left(i, j, \frac{x_i}{r}, -\frac{x_j}{r}\right) \right]_{kh} [X]_h \\
= & \sum_{h=1}^n \left(\frac{-x_j}{r} (\delta_{(k,h),(j,i)} - \delta_{(k,h),(i,j)}) + \left(\frac{x_i}{r} - 1\right) (\delta_{(k,h),(i,i)} + \delta_{(k,h),(j,j)}) + \delta_{k,h} \right) x_h \\
= & \left(\frac{-x_j}{r} \delta_{(k,i),(j,i)} + \left(\frac{x_i}{r} - 1\right) \delta_{(k,i),(i,i)} \right) x_i + \left(\frac{-x_j}{r} \delta_{(k,j),(i,j)} + \left(\frac{x_i}{r} - 1\right) \delta_{(k,j),(j,j)} \right) x_j + \delta_{k,k} x_k \\
= & \begin{cases} \left(\frac{x_i}{r} - 1\right) x_i + \frac{x_j}{r} x_j + x_i & \text{si } k = i \\ \frac{-x_j}{r} x_i + \left(\frac{x_i}{r} - 1\right) x_j + x_j & \text{si } k = j \\ x_k & \text{sinon.} \end{cases} \\
= & \begin{cases} r & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k = j \\ x_k & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Par le lemme, la multiplication à gauche par une rotation de Givens est une "double transvection" où l'on fait apparaître un r en ligne i et un 0 en ligne j .

En multipliant successivement à gauche par des rotations de Givens, on peut rendre la matrice triangulaire supérieure et le produit des rotations de Givens donnera la matrice Q comme on le verra dans la sous-section suivante.

En multipliant à droite par des rotations de Givens, on obtiendrait une décomposition RQ comme dans la section 14.

D.2 Exemple

Calculons l'inverse de :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la décomposition QR et les rotations de Givens.

Cas où $i := 1, j := 2, x_i := 2, x_j := 2$. On a :

$$\begin{aligned} r &:= \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_1 &:= G\left(i, j, \frac{x_i}{r}, -\frac{x_j}{r}\right) A \\ &= G\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) A \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\frac{5}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cas où $i := 1, j := 3, x_i := 2\sqrt{2}, x_j := -1$. On a :

$$\begin{aligned} r &:= \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ &= \sqrt{8 + 1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_2 &:= G\left(i, j, \frac{x_i}{r}, -\frac{x_j}{r}\right) A_1 \\ &= G\left(1, 3, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right) A_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\frac{5}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Cas où $i := 2$, $j := 3$, $x_i := -\sqrt{2}/2$, $x_j := \sqrt{2}/2$. On a :

$$\begin{aligned} r &:= \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ &= \sqrt{1/2 + 1/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R &:= A_3 \\ &:= G\left(i, j, \frac{x_i}{r}, -\frac{x_j}{r}\right) A_2 \\ &= G\left(2, 3, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) A_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons :

$$Q := G\left(2, 3, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) G\left(1, 3, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right) G\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

On a :

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a bien (c'est inutile de le montrer) :

$$\begin{aligned} QA &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= R \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la proposition A.6.2 pour l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure, on a :

$$R^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= R^{-1}Q \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Références

- [1] Roger A. Horn, Charles R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, (1990).
- [2] Denis Serre, *Matrices, Theory and Applications*, Springer, (2000).
- [3] Wikipedia, *Invertible matrix # Methods of matrix inversion*.