



**HAL**  
open science

# Utilisation de la covariance et du formalisme espace-temps pour les simulations thermomécaniques en élasticité et viscoélasticité

Benoît Panicaud, Emmanuelle Rouhaud, Richard Kerner

► **To cite this version:**

Benoît Panicaud, Emmanuelle Rouhaud, Richard Kerner. Utilisation de la covariance et du formalisme espace-temps pour les simulations thermomécaniques en élasticité et viscoélasticité. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04611063

**HAL Id: hal-04611063**

**<https://hal.science/hal-04611063v1>**

Submitted on 3 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Utilisation de la covariance et du formalisme espace-temps pour les simulations thermomécaniques en élasticité et viscoélasticité

B. Panicaud<sup>1</sup>, E. Rouhaud<sup>2</sup>, R. Kerner<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LASMIS, Université de Technologie de Troyes (UTT), France, benoit.panicaud@utt.fr

<sup>2</sup> GAMMA3, Université de Technologie de Troyes (UTT), France, emmanuelle.rouhaud@utt.fr

<sup>3</sup> LPTMC, Sorbonne Université, France, richard.kerner@sorbonne-universite.fr

**Résumé** — Le principe d'objectivité matérielle utilisé dans la mécanique classique des milieux continus stipule que les comportements des matériaux doivent être invariants par changement d'observateur. Ce principe peut être étendu en utilisant un principe de covariance, naturellement exprimé dans un formalisme espace-temps. Nous proposons donc de construire une approche thermodynamique dans ce cadre pour obtenir des modèles de comportement, notamment viscoélastique. Le modèle résultant est ensuite illustré pour différentes applications mécaniques, notamment via des simulations numériques.

**Mots clés** — thermomécanique des milieux continus, principe d'objectivité matérielle, hyperélasticité, viscoélasticité, dérivée de Lie, formalisme espace-temps

## 1 Thermodynamique dans un formalisme espace-temps pour des modèles thermo-viscoélastiques

L'extension du nombre de dimensions en incluant le temps comme dimension supplémentaire offre un cadre intéressant pour traiter de manière cohérente la cinématique des transformations finies. Ce formalisme spatio-temporel distingue clairement le principe de covariance et l'indifférence par rapport à la superposition des mouvements de corps rigides. Cette dernière est une propriété du matériau qui peut être prise en compte ou non, alors que le principe de covariance est intrinsèquement vérifié par l'utilisation de grandeurs et d'opérateurs à quatre dimensions. Comme les changements d'observateurs se déroulent dans l'espace et dans le temps, cela conduit à l'utilisation systématique de vecteurs à quatre dimensions et de tenseurs à quatre dimensions, tels que mentionné ici et dans les articles [12, 11] en tant que formalisme espace-temps. Les problèmes concernant les dérivées temporelles sont alors résolus en utilisant des dérivées à quatre dimensions : la dérivée covariante dans la direction de la vitesse et la dérivée de Lie quadridimensionnelle dans le champ de vitesse ; ces dérivées correspondent à des dérivées totales par rapport au temps. La première n'est pas invariante par rapport à la superposition des mouvements de corps rigides, alors que la seconde l'est. Les deux sont indifférentes au changement d'observateur, par construction. La dérivée de Lie le long du mouvement est ainsi un outil très puissant, qui répond au besoin exprimé par [5, 10, 2, 19, 6] d'une construction cohérente d'un modèle élastique exprimé sous forme de taux. Par l'utilisation du formalisme espace-temps, la dérivée de Lie le long du mouvement garantit simultanément la covariance du transport et l'invariance à la superposition du mouvement de corps rigide [12].

Le formalisme espace-temps englobe également les descriptions Eulériennes et Lagrangiennes des transformations matérielles (une preuve peut être trouvée dans [11]). Un modèle constitutif tensoriel dans ce formalisme espace-temps est intrinsèque et correspond à une expression indifférente de l'observateur. Dans ce contexte, le cas Lagrangien correspond à un choix particulier de coordonnées espace-temps, i.e. un choix spécifique d'observateur se déformant avec la matière, comme généralisation de la notion Newtonienne de système de coordonnées convectées.

Un dernier intérêt pour l'utilisation du formalisme espace-temps concerne la modélisation de la gravitation. Depuis Einstein, on sait que la description de la gravitation doit se faire strictement par l'utilisation de la relativité générale qui permet aussi de traiter correctement l'accélération locale. Par conséquent, même s'il ne s'agit pas d'applications pratiques pour la mécanique des solides, il permet d'assurer in-fine une construction correcte des couplages aux champs cinématiques du modèle de comportement.

Pour obtenir des modèles de comportement appropriés, il est utile d'utiliser la thermodynamique. La thermodynamique et le formalisme espace-temps ont conduit à de nombreuses publications portant sur des aspects théoriques, telles que les équations d'équilibre ou les modèles constitutifs. Par exemple, des travaux significatifs sur la relativité pour la thermodynamique ont été réalisés par Tolman [14], Lichnerowicz [8] ou encore Tsallis [15], visant une formulation covariante de la thermodynamique, notamment sur le couplage avec la température pour tous les observateurs ou sur certaines généralisations de l'inégalité de Clausius-Duhem.

Le formalisme à quatre dimensions a été utilisé par différents auteurs pour proposer de nouveaux cadres pour la description de la mécanique des milieux continus et de la thermodynamique. Il existe différentes tentatives, soit en considérant une dimension temporelle supplémentaire comme celles proposées par Havas [7] ou De Saxcé [4] dans un cadre galiléen étendu, soit en utilisant des approches spatio-temporelles comme celles envisagées dans les théories de la relativité [18]. Il convient également de noter que le point de départ peut être différent. Bressan [3], Vallée [17] ou Maugin [9] ont proposé des articles présentant des relations à quatre dimensions soit à partir d'une construction heuristique directement entre quantités à quatre dimensions, soit à partir d'une dérivation thermodynamique comme conséquence de la relation de Clausius-Duhem. Certains articles partent également d'approches variationnelles. C'est notamment le cas de Valanis [16] qui montre dans le formalisme espace-temps comment un Lagrangien est équivalent à l'énergie libre volumique de Helmholtz, pour des matériaux non-dissipatifs.

Dans le présent article, nous souhaitons proposer une variante de cette méthode pour obtenir un comportement thermomécanique, notamment pour les processus réversibles ou irréversibles. Nous utilisons les équations de conservation de l'approche à quatre dimensions établies dans le cadre de la relativité générale [18]. Pour les relations d'état et les modèles de dissipation, le modèle est dérivé de la thermodynamique afin d'inclure facilement les dissipations, ainsi que les couplages multiphysiques. Un objectif important de cet article est donc de présenter un formalisme espace-temps pour la thermodynamique pour déduire de nouveaux modèles covariants de comportement en transformations finies et en particulier pour des matériaux thermo-viscoélastiques. Le modèle résultant est ensuite illustré pour différentes applications mécaniques via des simulations numériques soit sur un point matériel, soit une structure en utilisant une approche par éléments finis en quatre dimensions.

## 2 Description du formalisme espace-temps

Les coordonnées d'un évènement sont données par :

$$x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^i, ct) \quad (1)$$

On associe une métrique  $\mathbf{g}$  à l'espace-temps de signature  $(-1, -1, -1, +1)$ . Pour simplifier, on se place dans le cadre de la relativité sans gravitation : espace-temps de courbure 4D nulle ( $R^{4D} = 0$ ) pour  $G = 0$ . On introduit la notion d'intervalle  $ds$  (avec  $s = c\tau$  et  $\tau$  le temps propre) :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

La 4-vitesse est définie par :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (3)$$

$$\text{telle que } \|\mathbf{u}\| = u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 1 \quad (4)$$

### 2.1 Observateurs et covariance

On considère des observateurs quelconques pouvant être globalement accélérés ou en rotation, ou se déformant. Une base 4D  $\{\mathbf{e}_\mu\}$  définit un observateur. Sous un changement du système de coordonnées  $x^\mu \rightarrow \hat{x}^\nu(x^\mu)$ , les vecteurs de base se transforment comme  $\hat{\mathbf{e}}_\nu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\nu}\right) \mathbf{e}_\mu$ . La matrice  $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\nu}\right)$  est non singulière et appartient au groupe  $GL(4, \mathbb{R})$ . Le groupe  $\mathcal{M} \times GL(4, \mathbb{R})$  a naturellement la structure d'un fibré principal sur  $\mathcal{M}$ , nommé le fibré principal des observateurs. Sa dimension est égale à

$\dim \mathcal{M} + \dim (GL(4, \mathbb{R})) = 20$ .

On définit le principe de covariance, comme l'invariance de forme par changement d'observateur, i.e. l'invariance de forme par changement du système de coordonnées 4D. Toutes les grandeurs tensorielles sont de dimension 4 et respectent par construction ce principe de covariance. Il existe plusieurs observateurs intéressants :

- Observateurs inertiels  $O^i$  tels que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  (où  $\eta$  est la métrique de Minkowski), et animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement de translation rectiligne uniforme, donc à vitesse  $v = \|v^i\|$  constante quelconque (cas Galiléen pour  $v \ll c$ ). Pour un observateur inertiel, on a :

$$u^\mu = \left( \frac{\gamma dx^i}{c dt}, \frac{\gamma dx^4}{c dt} \right) = \left( \frac{\gamma}{c} v^i, \gamma \right) \quad (5)$$

$$\text{avec le facteur de Lorentz } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6)$$

- Observateurs propres  $\hat{O}$  tels que :

$$\hat{u}^\mu = (0, 0, 0, 1) \text{ et } \hat{\gamma} = 1 \quad (7)$$

Le changement entre observateurs propre et inertiel se fait par  $F^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\nu}$  ou  $F'$  l'inverse de  $F$ .

## 2.2 Notions de projecteurs

La projection sur le temps et l'espace permet de décomposer proprement les différents phénomènes, indépendamment de l'effet du mouvement de la matière [3]. On définit ainsi le projecteur temporel  $u^\mu$  et le projecteur spatial  $\underline{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ .

## 2.3 Dérivées espace-temps

Dans le formalisme espace-temps, on dispose d'un choix plus restreint de dérivées utiles :

- Dérivée covariante Riemannienne symétrique associée à la métrique  $\mathbf{g}$ , utilisant les symboles de Christoffel  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{g})$ , appliquée à un tenseur  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  de rang 2, deux fois contravariant :

$$\nabla_\lambda \mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \mathcal{T}^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\kappa\lambda} \mathcal{T}^{\mu\kappa} \quad (8)$$

La généralisation de la dérivée matérielle (via le projecteur) est alors :

$$u^\lambda \nabla_\lambda \mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{d \mathcal{T}^{\mu\nu}}{ds} + u^\lambda (\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \mathcal{T}^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\kappa\lambda} \mathcal{T}^{\mu\kappa}) \quad (9)$$

Pour un observateur inertiel  $O^i$ , donc tel que  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$  et un mouvement non-relativiste, on retrouve la dérivée matérielle :

$$u^\lambda \nabla_\lambda (\cdot) = \frac{d(\cdot)}{ds} = u^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\cdot) \stackrel{v \ll c}{\approx} \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\cdot) \quad (10)$$

- Dérivée de Lie d'un 4-tenseur (rang 0 ou 2) dans le champ de 4-vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$\mathcal{L}_u(S) = u^\lambda \frac{\partial S}{\partial x^\lambda} \quad (11a)$$

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{T}^{\mu\nu}) = u^\lambda \frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \mathcal{T}^{\lambda\nu} \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\lambda} - \mathcal{T}^{\mu\lambda} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda} \quad (11b)$$

## 3 Bilans physiques

On va effectuer un certain nombre de bilans pour résoudre des problèmes thermomécaniques, en se plaçant dans un cadre simplificateur.

### 3.1 Hypothèses physiques

1. pas de gravitation
2. pas de phénomène électromagnétique, i.e. pas de charge ni de courant imposé par des générateurs électriques, pas d'aimantation ni de polarisation spontanée
3. pas d'échange de molécules par diffusion (systèmes fermés et concentrations constantes)
4. pas de réaction chimique ou nucléaire, pas de transformation de phases
5. pas de discontinuité interne du milieu (pas de rupture, pas d'endommagement...)

### 3.2 Construction du tenseur impulsion-énergie

On suppose qu'il existe un tenseur impulsion-énergie  $\mathbf{T}$ , tenseur de rang 2 symétrique décrivant le contenu énergétique de la matière en interaction avec son environnement. On projette ce tenseur-impulsion énergie sur le temps, sur le temps et l'espace, et sur l'espace :

$$\mathcal{U} = u_\alpha T^{\alpha\beta} u_\beta \quad (12a)$$

$$q^\mu = \underline{g}^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} u_\beta \quad (12b)$$

$$T_\sigma^{\mu\nu} = \underline{g}^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} \underline{g}^\nu_\beta \quad (12c)$$

Ce qui permet de décomposer de façon unique ce tenseur :

$$T^{\mu\nu} = T_{\mathcal{U}}^{\mu\nu} + T_q^{\mu\nu} + T_\sigma^{\mu\nu} \quad (13)$$

$$= \mathcal{U} u^\mu u^\nu + q^\mu u^\nu + u^\mu q^\nu + T_\sigma^{\mu\nu} \quad (14)$$

Pour l'observateur propre :  $\hat{u}^\mu = (0, 0, 0, 1)$ , on a en particulier :

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{T}_{\sigma 11} & \hat{T}_{\sigma 12} & \hat{T}_{\sigma 13} & \hat{q}_1 \\ \hat{T}_{\sigma 12} & \hat{T}_{\sigma 22} & \hat{T}_{\sigma 23} & \hat{q}_2 \\ \hat{T}_{\sigma 13} & \hat{T}_{\sigma 23} & \hat{T}_{\sigma 33} & \hat{q}_3 \\ \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \hat{q}_3 & \hat{\mathcal{U}} \end{pmatrix}_{\hat{o}} \quad (15)$$

Ce qui permet d'interpréter physiquement chaque terme de la décomposition et de les dénommer :

- $\mathcal{U}$  densité d'énergie totale telle que  $\mathcal{U} = \rho_c c^2 = \tilde{\rho}_c c^2 \left(1 + \frac{e_{int}}{c^2}\right)$  incluant l'énergie interne  $e_{int}$
- $\mathbf{q}$  flux d'énergie = flux de chaleur
- $\mathbf{T}_\sigma$  tenseur des contraintes à relier au comportement mécanique du matériau

### 3.3 Lois de conservation et de bilan

Soit un domaine espace-temps  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . On cherche à établir différentes lois physiques.

La conservation de la masse au repos est :

$$\forall x^\mu \in \Omega, \nabla_\nu (\tilde{\rho}_c u^\nu) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_u(\tilde{\rho}_c) = 0 \quad (16)$$

où  $\tilde{\rho}_c$  est la masse volumique au repos, à énergie interne nulle.

La conservation du tenseur impulsion-énergie est :

$$\forall x^\mu \in \Omega, \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (17)$$

On effectue la projection sur l'espace de la conservation de  $\mathbf{T}$ , ce qui conduit au **principe fondamental de la dynamique**. On effectue la projection sur le temps de la conservation de  $\mathbf{T}$ , ce qui conduit au **premier principe de la thermodynamique** = bilan d'énergie interne, qui permet ensuite d'obtenir l'équation de la chaleur, moyennant un modèle de dissipation que nous proposerons au paragraphe 4.3 :

$$\forall x^\mu \in \Omega, u_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

Finalement, on obtient le second principe de la thermodynamique, via le bilan d'entropie, comme :

$$\forall x^\mu \in \Omega, \nabla_\nu \left( \tilde{\rho}_c \eta u^\nu + \frac{q^\nu}{\theta} \right) = \frac{\Phi}{\theta c} \geq 0 \quad (18)$$

où  $\eta$  est l'entropie massique,  $\theta$  la température et  $\Phi$  la dissipation.

## 4 Comportement espace-temps pour la thermo-viscoélasticité

### 4.1 Inégalité de Clausius-Duhem espace-temps

On cherche à obtenir des modèles de comportement, qui sont à la fois covariants et thermodynamiquement compatibles. Pour cela, on va suivre plusieurs étapes [1]. On commence par introduire l'énergie libre  $\Psi = e_{int} - \theta\eta$ . On obtient l'inégalité de Clausius-Duhem espace-temps :

$$-\tilde{\rho}_c u^\nu (\eta \nabla_\nu \theta + \nabla_\nu \Psi) - q^\nu \left( \frac{1}{\theta} \nabla_\nu \theta - u^\mu \nabla_\mu u_\nu \right) + T_\sigma^{\mu\nu} d_{\mu\nu} = \frac{\Phi}{c} \geq 0$$

Ensuite, on va utiliser  $u^\nu \nabla_\nu \theta = \mathcal{L}_u(\theta)$ ,  $u^\nu \nabla_\nu \Psi = \mathcal{L}_u(\Psi)$  permettant d'introduire la dérivée de Lie dans cette inégalité, et enfin la relation entre le taux de déformation et la métrique :

$$\mathcal{L}_u(g_{\mu\nu}) = 2d_{\mu\nu} \quad (19)$$

### 4.2 Modèle de comportement en thermo-hyperélasticité

Dans le cas particulier d'une transformation adiabatique ( $q^\nu = 0$ ) et réversible ( $\Phi = 0$ ), on obtient :

$$-\tilde{\rho}_c (\eta \mathcal{L}_u(\theta) + \mathcal{L}_u(\Psi)) + \frac{1}{2} T_\sigma^{\mu\nu} \mathcal{L}_u(g_{\mu\nu}) = 0 \quad (20)$$

On voit un des intérêts de la dérivée de Lie espace-temps : elle inclut naturellement la variation dans le temps. On liste les variables d'état du modèle :

1. température  $\theta$

2. déformation  $e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - F'^{\alpha\mu} F'^{\beta\nu} \eta_{\alpha\beta})$  et ses invariants  $I_I = e_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  et  $I_{II} = e_{\mu\nu} e^{\mu\nu}$

On choisit l'énergie libre  $\Psi$  telle que :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_\theta(C_m, \theta) + \Psi_{\theta\sigma} \left( \frac{\kappa\alpha}{\rho_c}, \theta, I_I \right) + \Psi_\sigma(\lambda/\tilde{\rho}_c, \mu/\tilde{\rho}_c, I_I, I_{II}) \\ &= \Psi_\theta(C_m, \theta) - 3 \frac{\kappa\alpha}{\rho_c} (\theta - \theta_{ref}) I_I + \frac{\lambda}{\rho_c} \frac{I_I^2}{2} + \frac{\mu}{\rho_c} I_{II} \end{aligned} \quad (21)$$

On obtient finalement un **modèle de thermo-hyperélasticité**, homogène et isotrope :

$$\begin{aligned} T_\sigma^{\mu\nu} &= \lambda (e_{\alpha\beta} \underline{g}^{\alpha\beta}) \left( \underline{g}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} \underline{g}^{\alpha\beta}) g^{\mu\nu} - 2 (e^\mu_\beta g^{\beta\nu}) \right) + 2\mu \left( \underline{e}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} \underline{e}^{\alpha\beta}) g^{\mu\nu} - 2 (e^\mu_\beta e^{\beta\nu})^{Sym} \right) \\ &\quad - 3\kappa\alpha (\theta - \theta_{ref}) \left( (e_{\alpha\beta} \underline{g}^{\alpha\beta}) g^{\mu\nu} + (\underline{g}^{\mu\nu} - 2e^{\mu\nu}) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

A partir de l'équation 22, on peut obtenir un modèle thermo-hyperélastique espace-temps, non-relativiste et en transformations finies pour  $\hat{O}$ , correspondant à un modèle Lagrangien, dont les composantes spatiales sont :

$$\begin{aligned} \hat{T}_\sigma^{ij}/J &\approx \lambda (\hat{e}_a^b \delta^a_b) \hat{g}^{ij} + 2\mu \hat{e}^{ij} + \frac{1}{2} \lambda (\hat{e}_a^b \delta^a_b)^2 \hat{g}^{ij} + \mu (\hat{e}^{\alpha\beta} \hat{e}_{\alpha\beta}) \hat{g}^{ij} \\ &\quad - 2\lambda (\hat{e}_a^b \delta^a_b) \hat{e}^{ij} - 4\mu (\hat{e}^{ia} \hat{e}_a^j)^{Sym} \\ &\quad - 3\kappa\alpha (\theta - \theta_{ref}) \left( (\hat{e}_a^b \delta^a_b) \hat{g}^{ij} + (\hat{g}^{ij} - 2\hat{e}^{ij}) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

que l'on doit remettre en Eulérien (i.e. dans l'observateur inertiel  $O^i$ ) pour comparaison avec les modèles Newtoniens. On obtient alors  $T_\sigma^{ij}$  avec différents termes :

- Termes "classiques" non-linéaires d'ordre 1 en la déformation.
- Plusieurs autres non-linéarités mécaniques, ne dépendant que des 2 paramètres matériaux  $\lambda, \mu$ .
- Termes de couplage thermomécanique pour des variations finies de température avec le paramètre matériau  $3\kappa\alpha$ .

### 4.3 Modèle de comportement en thermo-viscoélasticité

Pour prendre en compte la dissipation, il suffit de rajouter une contribution irréversible au tenseur impulsion-énergie. La contribution réversible est donnée dans le paragraphe précédent. La contribution irréversible, donc dissipative, peut s'écrire [13] :

$$(T^{\mu\nu})^{irrev} = \frac{K}{c} g^{\mu\alpha} (\nabla_\alpha \theta - \theta a_\alpha) u^\nu + \frac{K}{c} g^{\nu\beta} (\nabla_\beta \theta - \theta a_\beta) u^\mu + 2\tilde{\mu} \left( \frac{g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta}}{2} \right) c d_{\alpha\beta} + \left( \zeta - \frac{2\tilde{\mu}}{3} \right) c d_\alpha^\alpha g^{\mu\nu} \quad (24)$$

où  $K$  est la conductivité thermique, et  $\zeta$  et  $\tilde{\mu}$  sont les coefficients de viscosité du milieu homogène et isotrope.

## 5 Applications via des simulations numériques

### 5.1 Comparaison avec les modèles Newtonien ; cas de l'extension

On peut comparer ces modèles pour le cas d'une sollicitation appliquée à un point matériel. Les modèles de comportement Newtonien sont décrits dans [1]. On considère le cas d'une extension uniaxiale simple, avec une vitesse de déformation constante  $\dot{\chi}$  (telle que  $\chi(t) = \dot{\chi}t + 1$ ). On applique la transformation de Lorentz pour un événement. Ce qui conduit à  $F^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\nu}$  la matrice de passage (avec  $\hat{x}^\nu = X^\nu$ ), dont l'expression à la limite non-relativiste est :

$$F^\mu_\nu \stackrel{\dot{\chi}X^1 \ll c}{\approx} \begin{pmatrix} \chi(t) & 0 & 0 & \frac{\dot{\chi}X^1}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\chi+1)\frac{\dot{\chi}X^1}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour un matériau ayant les coefficients de Lamé  $\lambda = 187.5GPa$  et  $\mu = 125GPa$  (sans dissipation et isotherme ou matériau indilatable), on obtient les résultats présentés sur les Figures 1 et 2 avec la Légende suivante : HPP Newtonien ; élastique Newtonien ; hyperélastique Newtonien ; espace-temps.

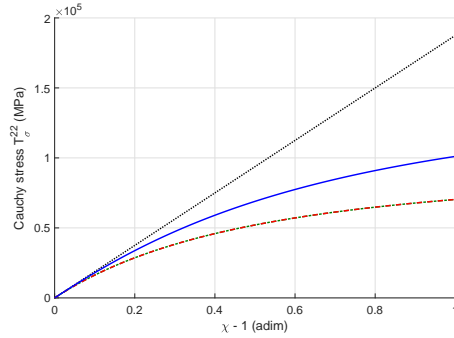
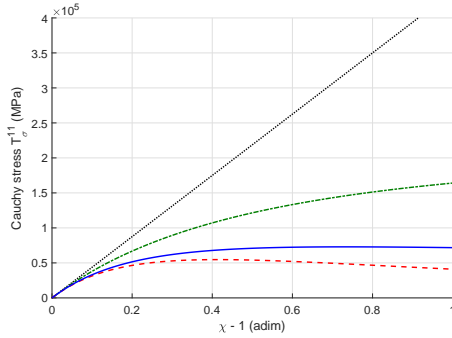


FIG. 1 – Composante 11, durant une extension uniaxiale, fonction de  $\chi - 1$  pour différents modèles

FIG. 2 – Composante 22, durant une extension uniaxiale, fonction de  $\chi - 1$  pour différents modèles

### 5.2 Simulations numériques ; cas de l'extension

#### 5.2.1 Forme faible générale du problème thermomécanique

On construit la forme faible à partir de  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$  :

$$\forall r_\nu \in \mathcal{V}, \int_{\partial\Omega} T^{\mu\nu} n_\mu r_\nu dV - \int_{\Omega} T^{\mu\nu} (\nabla_\mu r_\nu)^{Sym} d\Omega = 0 \quad (25)$$

où  $n_\mu$  est la normale sortante de l'hypervolume et  $r_\nu$  est le vecteur virtuel d'un espace vectoriel  $\mathcal{V}$ . Les 4 champs inconnus sont  $\theta$  et les 3 coordonnées spatiales  $x^i$ . La simulation éléments finies espace-temps est réalisée avec l'outil FEniCS qui permet d'écrire des formes variationnelles. FEniCS permet un maillage (2+1)D, i.e. une implémentation en 2D espace + 1D temps.

## 5.2.2 Résultats numériques

On considère l'extension isotherme d'une poutre parallélépipédiques (2+1)D avec un plan de symétrie et avec les paramètres suivants.

### Paramètres géométriques

- $L_T/c = 3s$
- $L_Y = 1m$
- $L_Z = 0.01m$

### Paramètres du matériau = acier

- $\tilde{\rho}_c = 7850kg/m^3$
- $\lambda = 97.06GPa$  et  $\mu = 82.68GPa$
- et  $\kappa = \frac{2}{3}\mu + \lambda = 152.17GPa$
- Pas de dissipation thermique ou mécanique
- $C_m = 520J/K/kg$  et  $\alpha = 13 * 10^{-6}K^{-1}$

### Paramètres numériques

$N_T = 6$  et  $N_Z = 5$  et éléments Lagrange P1

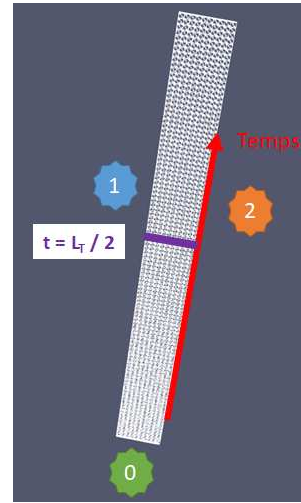


FIG. 3 – Conditions aux limites et maillage de la structure

On considère également les conditions aux limites suivantes (cf. Fig.3) :

- Sur le bord 1 ( $\hat{y} = 0$ ), encastrement et  $\theta = 293K$
- Sur le bord 2 ( $\hat{y} = L_Y$ ), extension avec  $dep^y = 0.5m \rightarrow \epsilon_{max} \approx 50\%$  et  $\theta = 293K$
- Sur le plan de symétrie ( $\hat{z} = 0$ ), tel que  $dep^z = 0$
- Sur le bord 0 (surface à  $\hat{t} = 0$ ), encastrement donc  $dep^y = 0$  et  $dep^z = 0$  et  $\theta = 293K$

On obtient les cartographies suivantes des inconnues du problème (Figs. 4 à 6).

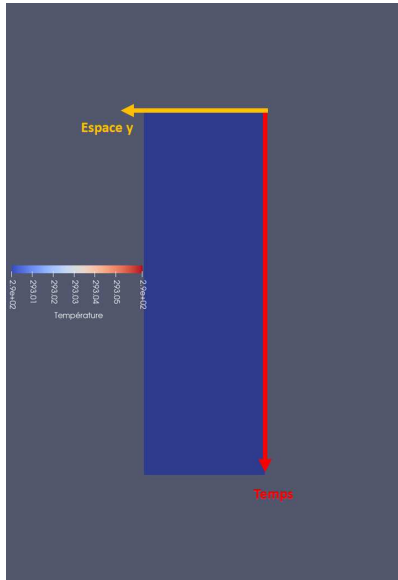


FIG. 4 – Température (K), durant une extension pour le modèle (2+1)D

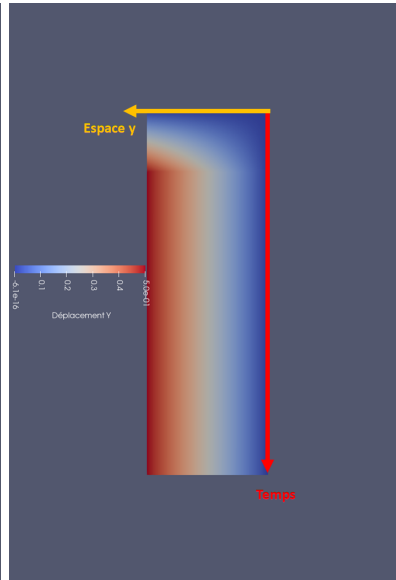


FIG. 5 – Déplacement selon y (m), durant une extension pour le modèle (2+1)D

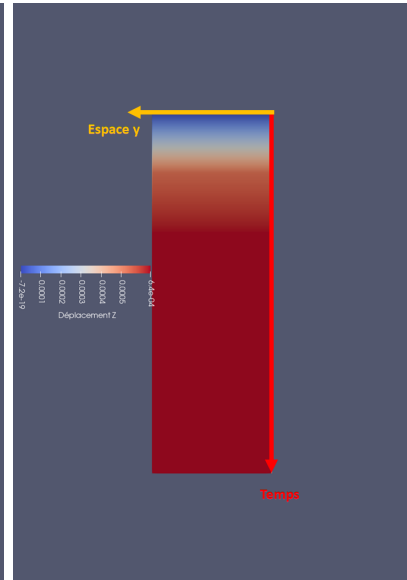


FIG. 6 – Déplacement selon z (m), durant une extension pour le modèle (2+1)D

Les résultats montrent une température homogène de 293K (Figure 4). Le déplacement final suivant la direction d'extension montre un comportement spatial linéaire comme attendu, imposé par les conditions aux limites (Figure 5). Le déplacement final suivant la direction perpendiculaire montre une valeur constante par rapport à l'espace liée à l'effet Poisson, et propre au modèle proposé (Figure 6).



## 6 Conclusions

Une approche considérant un cadre thermodynamique dans un formalisme espace-temps a ainsi été proposée. Le but est d'obtenir une méthode générale pleinement covariante à toutes les étapes du calcul, c'est-à-dire qui peut être adapté pour n'importe quel observateur, et donc à n'importe quel mouvement, et appliqué à la construction de modèles constitutifs. Différentes lois dans ce formalisme ont été écrites, réversibles ou irréversibles, utilisant notamment l'inégalité de Clausius-Duhem. La méthodologie est ainsi appliquée pour produire un nouveau modèle covariant de comportement mécanique thermo-viscoélastique. Nous avons également montré les avantages de la méthode par rapport au cas Newtonien, notamment par l'utilisation de la dérivée de Lie quadridimensionnelle. Par ailleurs, des simulations utilisant une approche variationnelle ont été proposées pour des applications thermomécaniques. Ceci est réalisé pour un matériau thermo-hyperélastique soumis à un chargement en extension, en utilisant la méthode par éléments finis également basée sur ce formalisme espace-temps. L'utilisation des éléments finis permet finalement d'illustrer l'approche, qui pourrait évidemment s'appliquer sur des géométries plus complexes, et avec des chargements variées (flexion, charge cyclique...).

## Références

- [1] R. Al Nahas, M. Wang, B. Panicaud, E. Rouhaud, A. Charles, R. Kerner. *Covariant spacetime formalism for applications to thermo-hyperelasticity*, Acta Mechanica, 2022.
- [2] J. Besson, G. Cailletaud, J.L. Chaboche, S. Forest. *Non-linear Mechanics of Materials*, Springer, New York, 2009.
- [3] A. Bressan. *Relativistic Theories of Materials*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [4] G. De Saxce, C. Vallée. *Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua*, John Wiley & Sons, 2016.
- [5] A.C. Eringen. *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [6] A. Eshraghi, K.D. Papoulia, H. Jahed. *Eulerian framework for inelasticity based on Jaumann rate and a hyperelastic constitutive relation - Part I : Rate-form hyperelasticity*, Journal of Applied Mechanics 80, 1-11, 2013.
- [7] P. Havas. *Four-dimensional formulations of Newtonian mechanics and their relation to the special and the general theory of relativity*, Reviews of Modern Physics 36, 938-965, 1964.
- [8] A. Lichnerowicz. *Magneto-hydrodynamics : waves and shock waves in curved spacetime*, Springer Science and Business Media 14, 2013.
- [9] G. Maugin. *Champ des déformations d'un milieu continu dans l'espace-temps de Minkowski*, CR Acad. Sci. Paris A 273, 65-68, 1971.
- [10] S. Nemat-Nasser. *Plasticity, A Treatise on Finite Element Deformation of Heterogeneous Inelastic Materials*, Cambridge University Press, New York, 2004.
- [11] B. Panicaud, E. Rouhaud. *A frame-indifferent model for a thermo-elastic material beyond the three-dimensional eulerian and lagrangian descriptions*, Continuum Mechanics and Thermodynamics 26, 79-93, 2014.
- [12] E. Rouhaud, B. Panicaud, R. Kerner. *Canonical frame-indifferent transport operators with the four-dimensional formalism of differential geometry*, Computational Materials Science 77, 120-130, 2013.
- [13] D.E. Soper. *Classical Field Theory*. Dover Publication, 2008.
- [14] R.C. Tolman. *On the use of the entropy principle in general relativity*, Physical Review 35, 896, 1930.
- [15] C. Tsallis, S.V. Levy, A.M. Souza, R. Maynard. *Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature*, Physical Review Letters 75, 3589, 1995.
- [16] C.K. Valanis. *Elasticity of Space-Time : Basis of Newton's 2nd Law of Motion*, Journal of engineering mechanics, 1039-1047, 2003.
- [17] C. Vallée. *Relativistic thermodynamics of continua*, International Journal of Engineering Science 19, 589-601, 1981.
- [18] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity, volume 1*, Wiley, New York, 1972.
- [19] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers. *A natural generalization of hypoelasticity and Eulerian rate type formulation of hyperelasticity*, Journal of Elasticity 56, 59-93, 1999.