



**HAL**  
open science

# Une nouvelle formulation PGD pour les problèmes définis sur domaine variable, discrétisation spatiale étendue et temporelle par morceaux.

Max Beckermann, Andrea Barbarulo, Massimiliano Cremonesi

## ► To cite this version:

Max Beckermann, Andrea Barbarulo, Massimiliano Cremonesi. Une nouvelle formulation PGD pour les problèmes définis sur domaine variable, discrétisation spatiale étendue et temporelle par morceaux.. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04611060

**HAL Id: hal-04611060**

**<https://hal.science/hal-04611060v1>**

Submitted on 3 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une nouvelle formulation PGD pour les problèmes définis sur domaine variable, discrétisation spatiale étendue et temporelle par morceaux.

M. Beckermann<sup>1</sup>, A. Barbarulo<sup>1</sup>, M. Cremonesi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, CentraleSupélec, {max.beckermann, andrea.barbarulo}@centralesupelec.fr

<sup>2</sup> Department of Civil and Environmental Engineering, Politecnico di Milano, massimiliano.cremonesi@polimi.it

**Résumé** — La PGD est une technique de réduction de modèle très efficace qui a fait ses preuves en géométrie et maillage fixe. Nous proposons ici une nouvelle formulation pour les problèmes définis sur des maillages et des domaines variables dans le temps. Cette nouvelle méthode a pour vocation d'être utilisée pour une application de la PGD à des problèmes avec activation séquentielle d'éléments - tels que la fabrication additive - ainsi qu'à des problèmes à larges déformations, en mécanique des solides ou fluides. L'idée innovante est d'accumuler la totalité des degrés de liberté spatiaux dans le temps au sein d'une discrétisation spatiale étendue et de réinitialiser les modes temporels à zéro à chaque apparition de nouveaux points. Après une recontextualisation du projet de recherche et une présentation succincte de la méthode, elle sera illustrée par un exemple en thermique linéaire.

**Mots clés** — Proper Generalized Decomposition, Réduction de modèle, fabrication additive, fluide Lagrangien.

## 1 Introduction et contexte

Afin d'en comprendre les enjeux, commençons tout d'abord par recontextualiser le projet de recherche qui inspire les travaux présentés ici. Ce projet consiste à étudier l'application des méthodes de réduction de modèles aux méthodes P-FEM pour les fluides à surface libres. Il s'agit de méthodes éléments finis à "particules" où les fluides sont traités avec une description Lagrangienne, c'est-à-dire avec des maillages qui ne restent pas fixes et évoluent dans le temps avec la vitesse propre du fluide [1]. Ces méthodes sont très intéressantes entre autre car il y a disparition du terme de transport non-linéaire dans les équations et qu'elles gèrent automatiquement les interfaces, qu'elles soient libres ou avec des structures. Elles restent malheureusement très chères en matière de temps de calcul, de plus aucune méthode de réduction de modèle permettant d'accélérer ces temps de calcul n'a été appliquée pour le moment sur ces solveurs.

Une possibilité est d'appliquer la PGD ([2][3]). Il s'agit d'une méthode de réduction de modèle robuste, qui ne nécessite aucune connaissance préalable de la solution et qui est largement utilisée pour de nombreux problèmes complexes et non-linéaires ([4][6][7]). Elle a également déjà fait ses preuves en fluide Eulérien (i.e. à maillage fixe) [6], il semble donc naturel d'essayer de la combiner avec les méthodes Lagrangiennes. La nouvelle approximation de la solution est construite de manière itérative en combinant des modes spatiaux et des modes temporels. L'idée est de ne résoudre qu'un nombre fortement réduit de systèmes linéaires, réduisant ainsi considérablement le temps de calcul total. Habituellement, les modes spatiaux sont calculés sur un maillage fixe ce qui est impossible lorsque le maillage est en mouvement car on perd alors la séparabilité de la solution. C'est donc ici qu'intervient notre contribution qui permet de traiter ce problème. Cette nouvelle formulation PGD peut non seulement être appliquée aux méthodes fluides Lagrangiennes mais aussi à tout autre problème défini sur domaine variable.

Nous allons donc en premier lieu résumer la formulation mathématique de la méthode. Puis, il y aura la présentation d'un problème simplifié de fabrication additive qui justifie l'utilisation de la nouvelle formulation, suivie de résultats numériques démontrant la convergence de la méthode et d'une conclusion.

## 2 La nouvelle formulation PGD

Cette section permet d'introduire les idées phares de notre nouvelle formulation PGD. Elle ne rentre pas dans les détails du calcul mathématique, mais permet d'en comprendre les grandes lignes. Nous allons en premier lieu rappeler les notations PGD standard, puis introduire l'idée d'extension du domaine discrétisé en PGD et enfin aborder la définition par morceaux des modes temporels.

### 2.1 Quelques notations

Imaginons tout d'abord, pour simplifier, que nous nous trouvons dans un intervalle temporel où le nombre de degrés de liberté reste fixe. Après discrétisation spatiale, les problèmes que l'on va traiter seront alors des problèmes du type ; on recherche  $\mathbf{U}(t) \in CA_{h,0}$  tel que :

$$\forall t \in I \quad \mathbf{W}(t) = \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}_{BC} \quad (1)$$

Avec  $\mathbf{W}(t)$  le champ d'intérêt exprimé aux noeuds du maillage,  $\mathbf{U}(t)$  l'inconnue après relèvement,  $CA_{h,0}$  l'ensemble homogène discrétisé des fonctions cinématiquement admissibles pour notre problème et  $I$  l'intervalle de temps. On cherche alors  $\mathbf{U}(t) \in CA_{h,0}$  vérifiant un problème du type :

$$\forall \mathbf{V}^* \in CA_{h,0}, \forall t \in I, \mathbf{V}^{*T} \{ \mathbf{M}(t) \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{U}(t) - \mathbf{Q}(t) \} = 0 \quad (2)$$

Dans la formulation PGD standard, on s'intéresse à une approximation à l'ordre  $N$  sous la forme :

$$\forall t \in I, \mathbf{U}^N(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{\Lambda}_i \lambda_i(t) \quad (3)$$

avec les  $\lambda_i \in I = L^2(I)$  les modes temporels et les  $\mathbf{\Lambda}_i \in CA_{h,0}$  les modes spatiaux discrétisés. On s'imagine ensuite que les  $N - 1$  premières paires de modes ont déjà été calculées et que l'on cherche  $\lambda_N(t)$  et  $\mathbf{\Lambda}_N$ . En sautant l'approche de Galerkin, qui est déjà traitée en détail pour la PGD classique dans [3], [4] et [5], on aboutit à un système linéaire pour le mode spatial et une équation différentielle ordinaire pour le mode temporel :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{\Lambda}^* \in CA_{h,0}, & \mathbf{\Lambda}^{*T} \{ (\int_0^T \lambda_N \dot{\lambda}_N \mathbf{M}(t) dt + \int_0^T \lambda_N^2 \mathbf{K}(t) dt) \mathbf{\Lambda}_N - \int_0^T \lambda_N \mathbf{Q}_N(t) dt \} = 0 \\ \forall t \in I & (\mathbf{\Lambda}_N^T \mathbf{M}(t) \mathbf{\Lambda}_N) \dot{\lambda}_N + (\mathbf{\Lambda}_N^T \mathbf{K}(t) \mathbf{\Lambda}_N) \lambda_N - \mathbf{\Lambda}_N^T \mathbf{Q}_N(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

avec pour  $N > 2$  :

$$\mathbf{Q}_N(t) = \mathbf{Q}(t) - \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_{N-1}(t) - \mathbf{K} \mathbf{U}_{N-1}(t) \quad (5)$$

Ce système d'équations est habituellement résolu à l'aide d'un algorithme du point fixe. L'intérêt de la méthode PGD repose sur le fait que la résolution de  $N \ll N_T$  points fixe de ce type est souvent moins chère que la résolution pas à pas classique.

### 2.2 Discrétisation spatiale étendue

Le premier problème que l'on rencontre lorsqu'on essaye de généraliser la formulation PGD aux domaines et maillages variables se trouve au niveau de la détermination du mode spatial. En effet, on peut remarquer en regardant l'équation (4) que les opérateurs intégrés ne sont plus triviaux à calculer car le nombre de degrés de liberté n'est pas fixe au cours de la simulation. Le concept central de notre nouvelle approche étendue consiste à inclure chaque point présent à chaque étape de la simulation dans une nouvelle discrétisation spatiale globale. Cet espace de discrétisation, que nous appellerons dorénavant "l'espace étendu", est défini par des tenseurs portant un indice  $e$ . Tous ces tenseurs étendus sont construits cette fois-ci avec des dimensions uniformes. Cela nous permet alors de calculer des modes spatiaux PGD dans cet espace et de déterminer ainsi une solution étendue. Par la suite, cette solution peut être projetée sur la représentation physique actuelle à un temps  $t$  pour obtenir la solution réelle.

Divisons l'intervalle temporel  $I$  en  $N_d$  intervalles  $I_k$  sur lesquels on a un nombre fixe de degrés de liberté dans la discrétisation spatiale et notons  $\{ \mathbf{N}^{(k)}(x, t) \}_{k \in \llbracket 1, N_d \rrbracket}$  les fonctions de formes respectives à chaque intervalle. La nouvelle discrétisation s'écrit alors :

$$u(x, t) = \mathbf{N}_e^T(x, t) \cdot \mathbf{U}_e(t) \quad \forall k \in \llbracket 1, N_d \rrbracket \quad \forall t \in I_k \quad (6)$$

Appelons  $\Omega_k$  les nouveaux noeuds du domaine ajoutés au début de l'intervalle  $I_k$ , au temps  $t = t_k$ . Si l'on écrit la nouvelle fonction de forme  $N_e(x, t)$  comme un tenseur spatio-temporel, on peut l'écrire comme une somme creuse des fonctions de formes définies précédemment :

$$N_e = \begin{matrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \vdots \\ \Omega_{N_d} \end{matrix} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & \dots & I_{N_d} \\ N^{(1)} & N^{(2)} & \dots & N^{(N_d)} \\ 0 & N^{(2)} & \dots & N^{(N_d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & N^{(N_d)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

On peut donc construire de manière classique de nouveaux opérateurs  $M_e(t)$ ,  $K_e(t)$ ,  $Q_e(t)$  et aboutir ainsi à un nouveau problème à taille constante qui prend bien en compte l'évolution du domaine; on cherche  $U_e(t) \in CA_{h,e,0}$  tel que :

$$\forall \mathbf{V}^* \in \mathbb{U}_{0,e}, \mathbf{V}^{*T} \{M_e(t)\dot{U}(t) + K_e(t)U(t) - Q_e(t)\} = 0 \quad (8)$$

### 2.3 Description temporelle par morceaux

Le deuxième problème que l'on rencontre est l'initialisation de la solution sur les nouveaux noeuds qui apparaissent au temps  $t_k$ . Cette initialisation peut être soit à une valeur constante donnée, soit interpolée sur les points déjà présents. Nous avons pour cela défini une famille de  $N_d - 1$  matrices de transferts interpolatrices, notées  $\mathcal{H}_k$  qui permettent d'assurer la continuité des points déjà présents et d'interpoler les nouveaux. On cherche alors à avoir :

$$\forall k \in \llbracket 1, N_d - 1 \rrbracket \quad U_e(t_k^+) = \mathcal{H}_k U_e(t_k^-) \quad (9)$$

Une manière de vérifier ces contraintes avec la formulation PGD est de forcer les modes temporels à zéro. C'est justement l'idée de l'approche par morceaux : les modes temporels vont dorénavant être définis par morceaux et vont valoir zéro à chaque instance  $t_k$ .

On retourne à la formulation PGD, on recherche  $\{\Lambda_{e,i}\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \in CA_{h,e,0}^N$  et  $\{\lambda_i^{(1)}(t), \dots, \lambda_i^{(N_d)}(t)\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \in I_1^N \times \dots \times I_{N_d}^N$  tels que la solution d'ordre  $N$  s'écrit comme :

$$\forall t \in [0, T] \quad U_e^N(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_d} 1_{t \in I_k}(t) \left[ \lambda_i^{(k)}(t) + \mathcal{W}_i^{(k)}(\{\lambda_i^{(j-1)}(t_j)\}_{j>k}) \right] \Lambda_{e,i} \quad (10)$$

avec

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \begin{cases} \mathcal{W}_i^{(1)} = 0 \\ \forall k \in \llbracket 2, N_d \rrbracket \quad \mathcal{W}_i^{(k)} = \mathcal{H}_k[\lambda_i^{(k-1)}(t_k) + \mathcal{W}_i^{(k-1)}] \end{cases} \quad (11)$$

et avec une extension par continuité des modes temporels telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \forall k \in \llbracket 1, N_d \rrbracket \quad \lambda_i^{(k)}(t_k) = 0 \quad (12)$$

On peut vérifier que les contraintes (9) sont vérifiées à chaque instance  $t_k$  et pour tout nombre de mode  $N$ . Nous allons une fois de plus sauter les détails de la formulation de Galerkin ([3][4][5]). Si les  $N - 1$  premiers modes sont déjà calculés, chercher  $\Lambda_{e,N} \in CA_{h,e,0}$  et  $\{\lambda_N^{(1)}(t), \dots, \lambda_N^{(N_d)}(t)\} \in I_1 \times \dots \times I_{N_d}$  revient à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \Lambda_e^* \in \mathbb{V}_{e,0} \quad \Lambda_e^{*T} \left\{ \sum_{k=1}^{N_d} \left[ \int_{I_k} M_e(t) \lambda_N^{(k)} \dot{\lambda}_N^{(k)} dt + \int_{I_k} K_e(t) (\lambda_N^{(k)})^2 dt \right. \right. \\ \quad + [\mathcal{W}_N^{(k)}]^T \int_{I_k} M_e(t) \dot{\lambda}_N^{(k)} dt + [\mathcal{W}_N^{(k)}]^T \int_{I_k} K_e(t) \lambda_N^{(k)} dt \\ \quad \left. \left. + \int_{I_k} K_e(t) \lambda_N^{(k)} dt \mathcal{W}_N^{(k)} + [\mathcal{W}_N^{(k)}]^T \int_{I_k} K_e(t) dt \mathcal{W}_N^{(k)} \right] \Lambda_{e,N} \right. \\ \quad \left. - \int_{I_k} \lambda_N^{(k)} Q_{e,N}(t) dt - [\mathcal{W}_N^{(k)}]^T \int_{I_k} Q_{e,N}(t) dt \right\} = 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, N_d \rrbracket \quad \forall t \in I_k \quad (\Lambda_{e,N}^T M_e(t) \Lambda_{e,N}) \dot{\lambda}_N^{(k)}(t) + (\Lambda_{e,N}^T K_e(t) \Lambda_{e,N}) \lambda_N^{(k)}(t) \\ \quad - \Lambda_{e,N}^T Q_{e,N}(t) + \Lambda_{e,N}^T K_e(t) [\mathcal{W}_N^{(k)}(\{\lambda_i^{(j-1)}(t_j)\}_{j>k})] \Lambda_{e,N} = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

avec pour  $N > 2$  :

$$\mathbf{Q}_{e,N}(t) = \mathbf{Q}_e(t) - \mathbf{M}_e(t)\dot{\mathbf{U}}_{N-1}(t) - \mathbf{K}_e(t)\mathbf{U}_{N-1}(t) \quad (14)$$

On retrouve une fois de plus un système linéaire pour le mode spatial et  $N_d$  équations différentielles ordinaires à résoudre les unes après les autres. L'assemblage des opérateurs est plus complexe mais le coût de résolution reste le même.

### 3 Un exemple de fabrication additive

Afin de pouvoir prouver la convergence de la méthode sur un maillage connu à l'avance et sur des équations linéaires, nous avons tout d'abord étudié un cas simplifié de fabrication additive [8] [9]. Dans le cadre de ce résumé, nous allons nous limiter à la présentation de ce cas.

#### 3.1 Définition de l'exemple

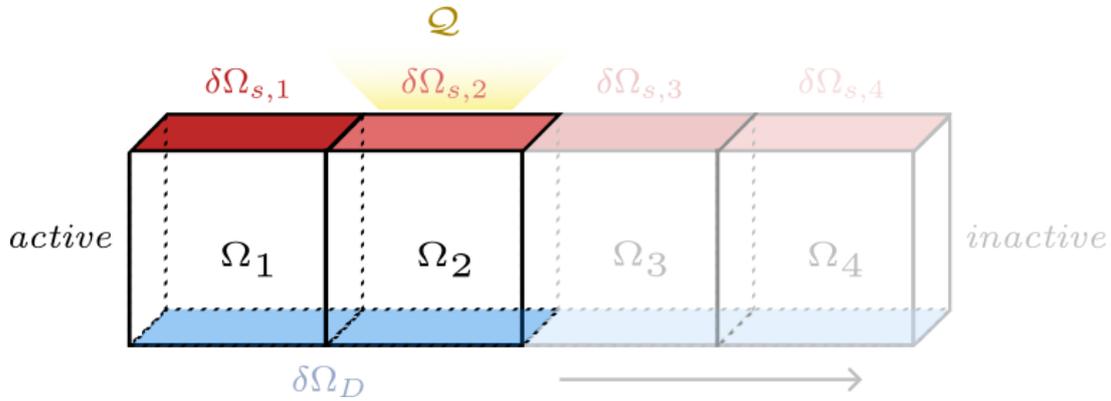


FIGURE 1 – Un exemple de problème pour  $N_d = 4$ . Seuls les deux premiers domaines sont actifs pour le moment.

Considérons  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  comme un sous-ensemble ouvert avec une frontière  $\delta\Omega$ , et  $I = [0, T]$  comme l'intervalle de temps d'intérêt. Soit  $\{\Omega_j\}_1^{N_d}$  une partition non chevauchante de  $\Omega$ , c'est-à-dire

$$\bar{\Omega} = \cup_{j=1}^{N_d} \bar{\Omega}_j \text{ avec } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \quad (15)$$

Nous avons également la partition habituelle de  $\delta\Omega$  par rapport aux conditions aux limites :

$$\delta\Omega = \delta\Omega_D \cup \delta\Omega_N \text{ avec } \delta\Omega_D \cap \delta\Omega_N = \emptyset \quad (16)$$

où  $\delta\Omega_D$  représente le sous-ensemble de  $\delta\Omega$  sur lequel les conditions aux limites de Dirichlet ont été déclarées, et  $\delta\Omega_N$  correspond à la condition aux limites de Neumann. Comme nous aurons une source de chaleur surfacique, nous subdivisons également  $\delta\Omega_N$  :

$$\delta\Omega_N = \delta\Omega_s \cup \delta\Omega_h \text{ avec } \delta\Omega_s \cap \delta\Omega_h = \emptyset \quad (17)$$

où  $\delta\Omega_h$  correspond à la condition aux limites de Neumann homogène et  $\delta\Omega_s$  est la frontière sur laquelle nous avons la source de chaleur, autrement dit, le trajet du laser. Par conséquent, nous avons :

$$\theta(x, t) = T_d \quad \forall x \in \delta\Omega_D, \forall t \in I, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \delta\Omega_h, \forall t \in I, \quad (19)$$

et

$$\lambda_c \frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) = S(x, t) \quad \forall x \in \delta\Omega_s, \forall t \in I, \quad (20)$$

Avec  $\theta(x,t)$  représentant le champ thermique complet. Une partition d'activation peut également être réalisée sur l'intervalle de temps  $I$ , avec

$$\forall j \in \llbracket 1, N_d \rrbracket, I_j = ]t_j, t_{j+1}] \text{ avec } t_1 = 0, t_{N_d+1} = T \text{ et } \{t_2 < \dots < t_{N_d}\} \in ]0, T[^{N_d-1} \quad (21)$$

En ce qui concerne le terme source de chaleur, notre objectif est à nouveau de maintenir la simplicité. Par conséquent, nous n'allons pas prendre en compte de source de chaleur volumétrique, qui est la plus représentative du processus réel [8]. Au lieu de cela, nous utiliserons uniquement un terme de flux de chaleur constant sur la subdivision récemment activée de  $\delta\Omega_s$ , simulant la progression d'un laser :

$$\begin{cases} \mathcal{S}(x,t) = Q & \forall x \in \delta\Omega_{s,j} \\ \mathcal{S}(x,t) = 0 & \forall k \in \mathbb{N}^* | k < j \quad \forall x \in \delta\Omega_{s,k} \end{cases} \quad \forall j \in \llbracket 1, N_d \rrbracket, \forall t \in I_j \quad (22)$$

avec  $\delta\Omega_{s,j} = \delta\Omega_s \cap \Omega_j$ . Notez qu'il n'est pas nécessaire de définir une source de chaleur sur le domaine qui n'a pas encore été activé. Pour initialiser correctement le problème, à chaque activation, le nouveau matériau sera considéré à une température fixe  $T_{new}$  plus une perturbation  $\varepsilon_T$  qui veillera à la conservation de l'énergie moyenne interne lors de l'activation. Les conditions aux limites de Dirichlet (18) ainsi que  $T_{new}$  sont combinées dans un terme de relèvement que nous appelons  $T_{BC}$ , qui vérifie :

$$\begin{cases} T_{BC}(x) = T_d & \forall x \in \delta\Omega_D, \forall t \in I \\ T_{BC}(x) = T_{new} & \forall j \in \llbracket 1, N_d \rrbracket, \forall x \in \Omega_j \end{cases} \quad (23)$$

Enfin, à l'intérieur des domaines activés, nous respectons l'équation de la chaleur suivante avec une capacité calorifique spécifique constante  $c_p$ , une densité  $\rho$  et une conductivité thermique  $\lambda_c$  :

$$c_p \rho \frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t) - \lambda_c \Delta \theta(x,t) = 0 \quad \forall j \in \llbracket 1, N_d \rrbracket, \quad \forall t \in I_j, \quad \forall x \in \cup_{i=1}^j \Omega_i \quad (24)$$

A partir de ces équations on peut maintenant construire tous les opérateurs nécessaires à la résolution PGD de ce problème à domaine variable et déterminer l'approximation du champ thermique  $T_N(t)$ .

### 3.2 Résultats

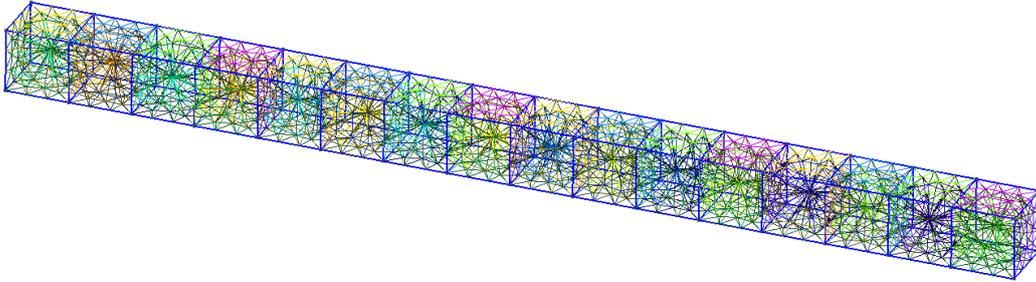


FIGURE 2 – Maille utilisée pour nos simulations

Tous les calculs ont été réalisés sur Matlab avec ROMLab, le logiciel de réduction de modèle interne au laboratoire LMPS et les maillages dans Gmsh (voir figure 2) dans l'idée de comparer les performances du solveur PGD et du solveur FEM classique. Les résultats présentés ici vont être pour le cas à 4 sous domaines,  $N_d = 4$ . On étudie la convergence avec la norme suivante :

$$\mathcal{E}_{PGD} = \frac{\|\theta_{PGD} - \theta_{FEM}\|_{L^2(\cup_{k=1}^{N_d} \{I_k \times \cup_{i=1}^k \Omega_i\})}}{\|\theta_{FEM}\|_{L^2(\cup_{k=1}^{N_d} \{I_k \times \cup_{i=1}^k \Omega_i\})}} \quad (25)$$

On retrouve bien une convergence monotone pour notre nouvelle formulation sur la figure 3. On retrouve les mêmes propriétés sur la convergence que pour les solveurs PGD classiques : accélération du temps de calcul avec une phase de mise à jour, impact de plus d'itérations de l'algorithme du point fixe sur la convergence,...etc ([6][7]).

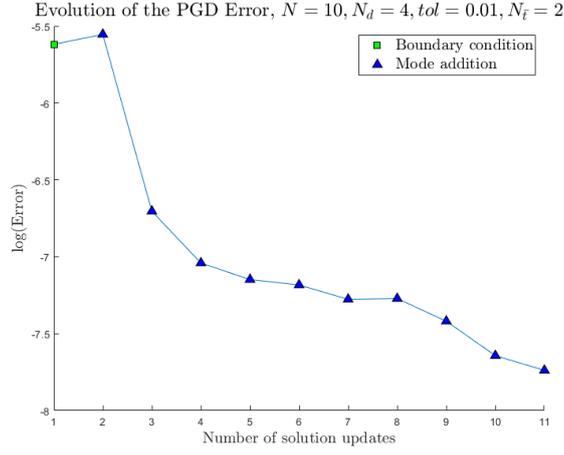


FIGURE 3 – Vérification de la convergence pour notre nouvelle méthode

Nous avons aussi pu, grâce à cette méthode, définir des opérateurs d'interpolations  $\mathcal{H}_k$  qui imposent les perturbations des températures d'activation  $\varepsilon_T$ , veillant ainsi à la conservation de l'énergie moyenne interne dans notre domaine aux instances d'activation. A savoir que cette énergie moyenne interne s'écrit :

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle_V = c_p \rho \int_{\Omega} \{\theta(x, t) - T_{BC}(x)\} dV \quad \forall t \in I, \quad (26)$$

On peut alors calculer avec cette dernière l'énergie dissipée interne (27) et regarder la convergence de l'algorithme avec et sans les opérateurs  $\mathcal{H}_k$  veillant à l'interpolation (respectivement figures 4a et 4b).

$$\varepsilon_r(t) = \frac{\mathcal{E}_{in}(t) - \langle \mathcal{E}(T_N(t)) \rangle_V}{\mathcal{E}_{in}(t)} = \frac{Qt - \langle \mathcal{E}(T_N(t)) \rangle_V}{Qt} \quad (27)$$

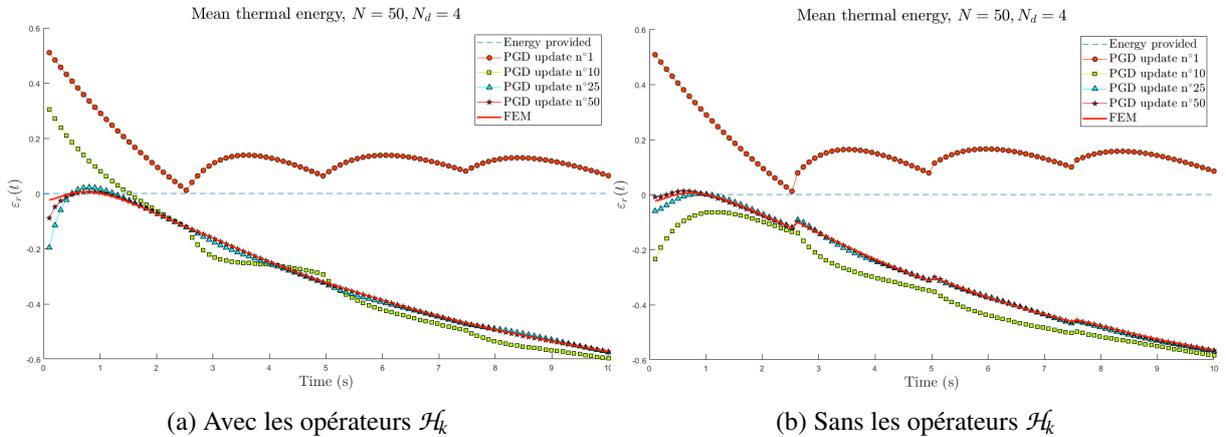


FIGURE 4 – Convergence PGD de l'énergie moyenne dissipée

On peut tout d'abord confirmer une nouvelle fois la convergence de la méthode, les deux cas étudiés convergent en effet vers une même quantité d'énergie dissipée à travers la surface à température fixe. Enfin, on confirme que les opérateurs d'interpolation fonctionnent car les courbes sont continues quand ils sont utilisés et ne le sont pas sinon. La continuité est non seulement préservée à chaque activation, mais aussi pour tout nombre de mode  $N$ .

## 4 Conclusion

Nous avons dans ce résumé introduit une nouvelle formulation pour la méthode de réduction de modèles PGD qui permet de traiter les problèmes à domaines et maillages variables. La méthode a été illustrée à l'aide d'un exemple thermique linéaire ressemblant au procédé de fabrication additive dans

lequel des éléments sont ajoutés petit à petit.

Nous avons tout d'abord remis en contexte la problématique en réintroduisant le projet de recherche qui a inspiré ce résumé et en réexpliquant les enjeux derrière ces travaux. Puis, nous avons introduit les idées principales de la nouvelle formulation mathématique. Nous avons ensuite présenté l'exemple simplifié de fabrication additive et montré que ce cas d'étude converge avec la nouvelle méthode. L'exemple a aussi mis en évidence que la méthode permet de préserver la continuité de quantités d'intérêt à l'aide d'opérateurs d'interpolation aux instances de remaillage. Cette continuité est non seulement présente à convergence mais pour tout nombre de mode.

Même si elle présente quelques nouvelles difficultés, la méthode semble très prometteuse pour de nombreux domaines d'étude. En effet, elle permet de grandement élargir les possibilités d'utilisation de la PGD tout en préservant ses propriétés principales de réduction. Cette méthode sera appliquée dans le cadre de ce projet aux fluides en description Lagrangienne. Cet aspect n'a pas été abordé dans le cadre de ce résumé car il nécessite du travail supplémentaire mais pourra être présenté lors du congrès. De même, nous travaillons en parallèle à l'élaboration d'un autre projet adaptant la méthode à des problèmes de fabrication additive non linéaire.

## Références

- [1] M. Cremonesi, A. Franci, S. Idelsohn, E. Oñate. *A State of the Art Review of the Particle Finite Element Method (PFEM)*, Archives of Computational Methods in Engineering, 1709-1735, 2020.
- [2] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueto. *A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition*, Archives of Computational Methods in Engineering, 1134-3060, 2011.
- [3] F. Chinesta, R. Keunings, A. Laygue. *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations : A Primer*, 2014.
- [4] D. Néron, P. Ladevèze. *Proper Generalized Decomposition for Multiscale and Multiphysics Problems*, Archives of Computational Methods in Engineering, 351-372, 2010.
- [5] A. Nouy. *A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1603, 2010
- [6] J. Fernandes, R. Sanches, A. Barbarulo. *A stabilized mixed space-time Proper Generalized Decomposition for the Navier–Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 114102, 2021
- [7] B. Favoretto, C. A. de Hillerin, O. Bettinotti, V. Oancea, A. Barbarulo. *Reduced order modeling via PGD for highly transient thermal evolutions in additive manufacturing*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 405-430, 2019.
- [8] H. Bikas, P. Stavropoulos, G. Chryssolouris, *Additive manufacturing methods and modelling approaches : a critical review*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 389-405, 2016.
- [9] Y. Zhang, Y. Chou. *Three-dimensional finite element analysis simulations of the fused deposition modelling process*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B : Journal of Engineering Manufacture, 1663-1671, 2006.