



HAL
open science

Une modélisation poutre enrichie des structures lattices en fabrication additive

Thomas Cadart, Thibaut Hirschler, Slim Bahi, Sébastien Roth, Frédéric Demoly, Nadhir Lebaal

► **To cite this version:**

Thomas Cadart, Thibaut Hirschler, Slim Bahi, Sébastien Roth, Frédéric Demoly, et al.. Une modélisation poutre enrichie des structures lattices en fabrication additive. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04611059

HAL Id: hal-04611059

<https://hal.science/hal-04611059v1>

Submitted on 3 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une modélisation poutre enrichie des structures lattices en fabrication additive

T. Cadart¹, T. Hirschler¹, S. Bahi², S. Roth¹, F. Demoly^{1,3}, N. Lebaal¹

¹ ICB UMR 6303 CNRS, Université de Technologie de Belfort Montbéliard, UTBM, Belfort France
{thomas.cadart, sebastien.roth, frederic.demoly, thibaut.hirschler, nadhir.lebaal}@utbm.fr

² Laboratoire d'Études des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3), Université de Lorraine
{mohamed-slim.bahi}@univ-lorraine.fr

³ Institut universitaire de France (IUF), Paris, France

Résumé — L'intérêt croissant pour la conception/fabrication de structures lattices réside en grande partie dans leurs excellentes performances mécaniques. Pour étudier leurs caractéristiques, l'utilisation d'un modèle éléments finis de type poutre peut fournir des résultats rapides et fiables. Cependant, la présence fréquente de poutres ayant de faibles rapports d'aspect nécessite une stratégie de rigidification au niveau des nœuds pour représenter la concentration de matière. Ce travail introduit une nouvelle stratégie de rigidification visant à réduire les erreurs provoquées par une modélisation poutre.

Mots clés — Structures Lattices, Formulation poutre, Fabrication additive.

1 Contexte et objectifs

Ces dernières années, les progrès considérables dans le domaine de la fabrication additive ont ouvert de nouvelles perspectives en ce qui concerne le développement de structures innovantes. Les recherches ont mis en évidence des structures lattices conférant, entre autres, des propriétés d'absorption d'énergie, de réduction des vibrations ouvrant ainsi la voie à de nombreuses applications tels que dans les domaines du stockage d'énergie, du transport ou encore des équipements sportifs. Cependant, la conception de ces structures complexes nécessite l'utilisation de modèles et de méthodes numériques avancés, souvent adaptés à des applications particulières. L'utilisation des éléments finis 3D en simulation entraîne des coûts de calcul importants en raison du nombre très élevé de degrés de liberté associé à un maillage volumique de la structure lattice. Pour pallier à cette problématique et réduire l'utilisation intensive des ressources numériques, deux stratégies de simulation existent :

- La première approche consiste à modéliser le comportement mécanique des structures à différentes échelles en utilisant des techniques d'homogénéisation [1, 2]. Ce type d'approche permet de déterminer les propriétés mécaniques homogènes équivalentes à partir de volumes élémentaires représentatifs (VER). Ces propriétés mécaniques sont ensuite utilisées dans des simulations à l'échelle macroscopique ;
- La seconde approche considère la structure dans son ensemble par l'utilisation de formulation de type poutre reposant sur des cinématiques particulières conduisant à réduire les coûts de calcul [3, 4].

Parmi les formulations existantes, on peut citer la théorie « barre Cosserat » [5], la théorie de « poutre Euler-Bernoulli » [6] ou encore la théorie de « poutre Timoshenko » [7]. Les modèles de barres ne tiennent compte que des charges axiales, tandis que les modèles de poutres, mieux adaptés aux structures complexes, prennent également en compte la flexion et la torsion. Le modèle de poutre de Timoshenko semble répondre aux exigences des structures lattices, car contrairement au modèle d'Euler-Bernoulli, les effets de cisaillements transverses sont pris en compte [8]. En effet, les structures lattices poutres ont généralement des travées peu élancées rendant le cisaillement non négligeable. Néanmoins, une source potentielle d'erreur demeure dans la représentation limitée du comportement aux jonctions entre les poutres. [9-14]. La représentation simplifiée (cellule modèle poutre), illustrée à la Figure 1(a), ne prend pas en compte la concentration de matière aux nœuds (cellule modèle 3D), ce qui peut engendrer des variations dans les résultats de simulation. Sans un traitement spécifique, la modélisation poutre a tendance

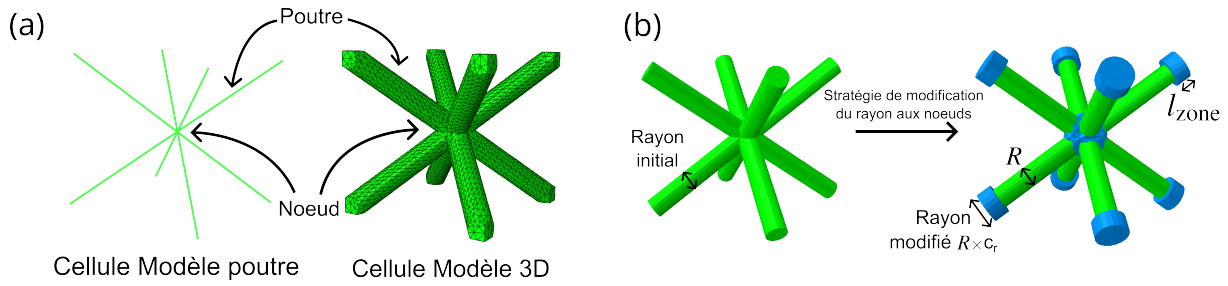


FIGURE 1 – (a) Comparaison des dimensions d’un nœud selon le modèle de poutre et le modèle 3D pour la cellule Body Centered Cubic (BCC) (b) Stratégie de modification appliquée à la cellule BCC.

à sous-estimer la rigidité de la structure, en comparaison à la modélisation en éléments finis 3D.

Plusieurs stratégies ont été proposées pour enrichir et améliorer la précision des modèles de poutres pour les structures lattices en apportant des modifications aux nœuds [9-14]. L’approche consiste à modifier la rigidité des ligaments dans une région proche des jonctions inter-poutres, afin de mieux représenter le comportement global de la structure. La stratégie de rigidification aux nœuds se compose de deux parties :

- La première consiste à définir la longueur considérée comme zone nodale l_{zone} à la figure 1(b) ;
- La deuxième consiste à augmenter artificiellement la rigidité dans la zone nodale, pour cela deux possibilités, à savoir augmenter le module d’Young ou augmenter le rayon. Le coefficient d’augmentation de la rigidité avec modification du rayon c_r est défini tel que $R_{zone} = R \cdot c_r$ et le coefficient d’augmentation de la rigidité avec modification du module d’Young c_E est défini tel que $E_{zone} = E \cdot c_E$ (voir figure 1(b)).

Le tableau 1 recense les études de la littérature utilisant le coefficient c_E [9, 10] et le coefficient c_r [11-14]. Cependant, chaque approche se concentre généralement sur un nombre limité de géométrie lattice dans des plages restreintes de densité relative (le rapport entre la quantité de matière et le volume contenant

TABLE 1 – Récapitulatif des stratégies de simulation pour structures lattices issues de la littérature. SC : Simple Cubic / GA : Gibson Ashby / BCC : Body Centered Cubic / RBCC : Reinforced Body Centered Cubic / BCCZ : Body Centered Cubic with beam on Z axis / F2FCCZ : Face Centered Cubic with beam on Z axis

Auteur	Paramètre modifié	Longueur de modification	Lattice étudié	Densité relative	Commentaire
Luxner et al. [9]	$c_E = 1000$	Rayon de la poutre	SC GA BCC RBCC	[0,1 ;0,15]	Modification uniquement pour les nœuds liant quatre poutres ou plus
Gümrik et al. [10]	$c_E = 1,5$	Rayon de la poutre	BCC	[0,04 ;0,15]	Micro lattice
Smith et al. [11]	$c_r = 1,4$	1/10 de la longueur de la poutre	BCC BCCZ	[0,03 ;0,15]	Plasticité et flambement
Labeas et al. [12]	$c_r = 1,4$	1/10 de la longueur de la poutre	BCC BCCZ F2FCCZ	[0,08 ;0,12]	Plasticité et flambement
Guo et al. [13]	$c_r = 1,4$	Extraction de la découpe du nœud	BCC	[0,05 ;0,2]	Etude des géométries à densités élevées et plasticité
Tahmasebimoradi et al. [14]	$c_r = 1$, car stratégie hybride	Rayon de la poutre	BCC BCCZ	0,05	Modélisation de la jonction avec un modèle solide et défauts

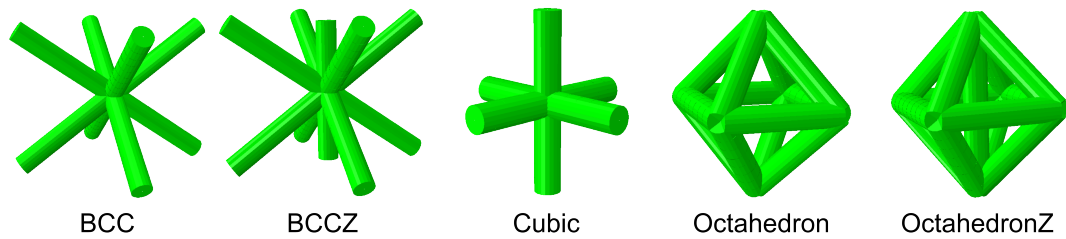


FIGURE 2 – Cellules élémentaires représentatives des structures lattices étudiées.

la cellule). De plus, certaines études ont complexifié leurs simulations en introduisant des non-linéarités matériaux (plasticité [13]) ou géométriques (défauts [14], flambement [11]). Cette diversité de méthodes rend la reproductibilité et la comparabilité des résultats complexes, ce qui entrave l'identification d'une stratégie générique pouvant être appliquée à l'ensemble des structures lattices réalisables par fabrication additive.

L'objectif de ce travail est d'évaluer le domaine de validité des différentes stratégies de simulation présentes dans la littérature. De plus, une nouvelle approche visant à renforcer les jonctions en tenant compte des angles entre les ligaments dans la structure sera développée. Cette nouvelle méthode permettra de traiter un large éventail de structures lattices présentant des densités relatives variées. Pour ce faire, la section 2 exposera la méthodologie employée afin d'analyser les paramètres indépendamment. Ensuite, les résultats obtenus en section 2 permettront de déterminer les paramètres appropriés pour la stratégie de simulation. Enfin, la conclusion mettra en avant la stratégie privilégiée et précisera son domaine d'application.

2 Méthodologie

La stratégie de rigidification nécessite de déterminer les paramètres optimaux. Une première partie porte sur l'étude des effets du paramètre l_{zone} , suivie de celle du coefficient d'augmentation de la rigidification c_r . Plusieurs géométries de structures lattices ont été sélectionnées, comme illustré à la Figure 2, afin d'étudier les domaines de validité des stratégies de rigidification.

2.1 Comparaison entre modèle éléments finis 3D et modèle éléments finis de type poutre

Afin de quantifier les performances des stratégies de simulation par éléments poutres, la méthode consiste à comparer les résultats d'un modèle éléments finis solide 3D et de modèles éléments finis poutres. La modélisation avec des éléments finis 3D, ne faisant pas appel à des hypothèses cinématiques particulières (comme c'est le cas pour les formulations poutres), est utilisée comme référence. Ainsi tous les résultats sont issus de comparaisons entre des modèles numériques. Pour chaque géométrie et chaque densité relative, six simulations sont réalisées afin de prendre en compte le comportement de la cellule en traction uni-axiale et en cisaillement pur (voir Figure 3). Pour chaque cas de chargement, une déforma-

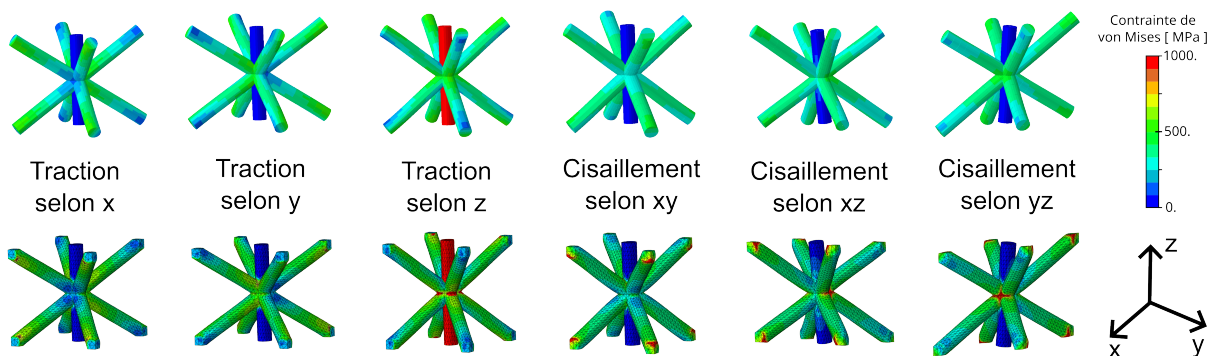


FIGURE 3 – Contraintes de von Mises pour les six cas de chargement sur la cellule BCCZ. En haut, approche par élément poutre, en bas, approche solide 3D

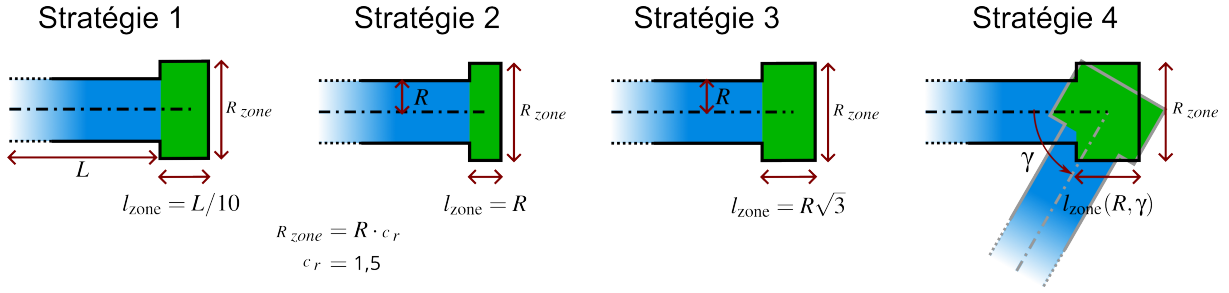


FIGURE 4 – Stratégies de rigidification des approches poutres traitées.

tion macroscopique (unitaire) est appliquée. Un matériau considéré purement élastique, correspondant à l’alliage de titane (Ti-6Al-4V), est utilisé, avec un module d’Young $E = 1040 \text{ MPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0,35$. Afin d’éviter les effets d’échelle, les simulations ont été effectuées sur une cellule unique avec des conditions aux limites périodiques [15]. La mesure de l’écart ϵ_{rel} entre un modèle de poutre et la référence (modèle solide 3D) est ensuite calculée sur l’ensemble des six cas de chargements unitaires comme suit :

$$\epsilon_{rel} = \frac{\|\mathbf{S}^{3D} - \mathbf{S}^{\text{Poutre}}\|_F}{\|\mathbf{S}^{3D}\|_F}, \quad (1)$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius, et $\mathbf{S}^{3D} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ et $\mathbf{S}^{\text{Poutre}} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ contiennent les contraintes moyennes, pour les six cas de chargement, obtenues avec les modèles solide 3D et de poutre, respectivement. Ainsi :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11}^{\#1} & \hat{\sigma}_{11}^{\#2} & \dots & \hat{\sigma}_{11}^{\#6} \\ \hat{\sigma}_{22}^{\#1} & \hat{\sigma}_{22}^{\#2} & \dots & \hat{\sigma}_{22}^{\#6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{23}^{\#1} & \hat{\sigma}_{23}^{\#2} & \dots & \hat{\sigma}_{23}^{\#6} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

où $\hat{\sigma}_{ij}^{\#k}$ est la ij -ième contrainte moyennée sur le domaine Ω (espace cubique contenant le motif élémentaire) pour le $\#k$ -ième cas de chargement :

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\#k} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\#k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Le logiciel de simulation numérique Abaqus [Abaqus] a été couplé avec un script Python permettant d’extraire les résultats pour chaque simulation.

2.2 Rigidification des zones de jonctions

Les stratégies de rigidification privilégiées dans ces travaux s’appuient sur l’augmentation du rayon par rapport à l’augmentation du module d’Young. Ce choix a été motivé par son utilisation répandue dans la littérature récente [11-13]. Trois stratégies, définissant la longueur l_{zone} , tirées de la littérature sont présentées en détails ci-dessous et à la Figure 4 :

- Stratégie 1 : $l_{zone} = L/10$, avec L la longueur de la poutre d’après [12] ;
- Stratégie 2 : $l_{zone} = R$, avec R le rayon de la poutre d’après [10] ;
- Stratégie 3 : $l_{zone} = R\sqrt{3}$, d’après [13].

Parmi ces stratégies, aucune ne tient compte de la disposition des poutres dans l’espace 3D. Toutefois, l’angle entre les poutres influence le recouvrement au niveau du nœud (voir la stratégie 4 à la Figure 4). En effet, un angle faible implique une distance de contact nodale élevée. Des relations trigonométriques permettent de lier la longueur l_{zone} à modifier, l’angle γ formé par les vecteurs directeurs des fibres neutres de deux ligaments (dans le cas où plus de deux poutres se rejoignent au même nœud, pour chaque ligament l’angle le plus faible avec les autres poutres est utilisé) et le rayon R des poutres :

$$l_{zone} = \frac{R\sqrt{2(1+\cos\gamma)}}{\sin\gamma}. \quad (4)$$

Cette relation permet de définir l_{zone} potentiellement différent pour chaque poutre dans la structure. Une méthode similaire a été mentionnée dans la littérature [16]. Cependant, leurs résultats ne sont pas comparés avec un modèle 3D solide ou des essais, ainsi la précision de la stratégie reste inconnue.

Toutes les structures ont été étudiées dans le domaine de rayon compris entre 0,025 mm et 0,2 mm avec un pas de 0,025 mm. En agissant sur le rayon, le domaine de densité relative sera différent en fonction de la structure, car des caractéristiques telles que le nombre de poutres, le nombre de nœuds influencent la répartition de la matière dans la cellule [17]. La théorie des poutres nécessite des ligaments élancés pour représenter correctement le comportement mécanique. Ainsi, le domaine est réduit en calculant le rapport entre la longueur la plus petite de la poutre dans la structure et le rayon de celle-ci. Pour le modèle poutre de Timoshenko, la limitation du rapport est fixée à des valeurs supérieures à 4 (ce qui dépasse déjà les préconisations standards pour ces éléments poutres).

En résumé, la première partie de l'étude se compose de quatre stratégies, dont trois sont issues de la littérature et la quatrième a été déterminée grâce à un calcul géométrique (voir Equation (4)). Pour chaque cellule étudiée, toutes les méthodes seront appliquées sur une plage de densité relative (fraction volumique). Pour simplifier la description des résultats, chaque stratégie sera appelée grâce à son chiffre associé précédemment. Dans la première partie, la longueur de modification est analysée avec le paramètre d'augmentation du rayon fixé à $c_r = 1,5$. Dans la deuxième partie, une optimisation du coefficient d'augmentation du rayon c_r est menée afin de déterminer la valeur satisfaisant le plus de cas possible.

3 Résultats

3.1 Étude du paramètre l_{zone} : longueur de modification aux nœuds

Les résultats, compilés à la Figure 5, montrent les erreurs relatives de chaque stratégie dans la gamme de densité relative étudiée. Dans un premier temps, la cellule BCC est étudiée en détail, car c'est une cellule simple et souvent utilisée dans la littérature. Dans le cas de la stratégie poutre sans modification, l'erreur relative augmente rapidement avec la densité relative, confirmant la nécessité d'une stratégie prenant en considération la concentration de matière aux nœuds si l'on souhaite s'intéresser à des structures lattices avec des travées peu élancées. Les résultats de la stratégie 1 sont intéressants, car la courbe comporte un point minimum situé à la densité relative de 0,05. De plus, à cette densité, les résultats sont équivalents avec la stratégie 3 et la stratégie 4. Il apparaît donc que la stratégie 1 n'est performante uniquement avec des densités relatives avoisinant 0,05. La stratégie 2 présente de plus faibles erreurs que la stratégie sans modification, mais pour cette cellule, la stratégie 3 et la stratégie 4 sont les meilleures.

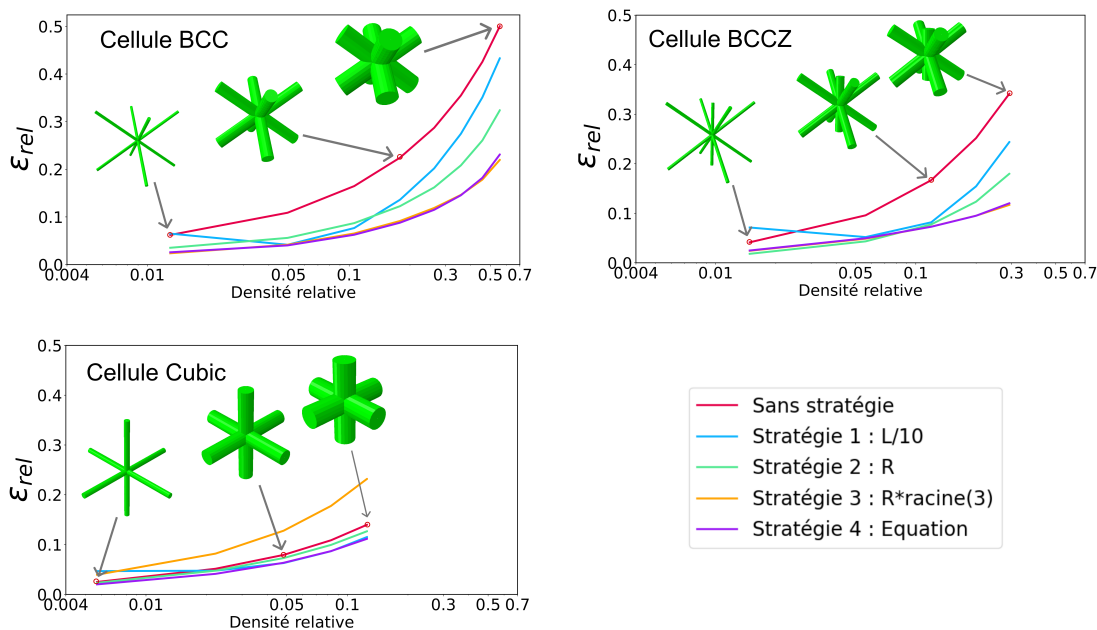


FIGURE 5 – Comparaison des stratégies de simulation pour la cellule BCC, BCCZ et Cubic.

De plus, ces deux dernières stratégies donnent des résultats équivalents. Cela s'explique par le fait que l'angle est le même pour toutes les poutres dans la cellule BCC. Avec cet angle, l'équation (4) donne un résultat proche de $R\sqrt{3}$ correspondant à la stratégie 3.

En incorporant une poutre verticale centrale à la cellule BCC, on obtient la configuration de la cellule BCCZ. Dans l'ensemble, les différentes stratégies produisent des résultats présentant des tendances similaires à celles de la cellule BCC. Ce qui est important d'observer sur le deuxième graphique de la Figure 5, c'est que la stratégie 2 est nettement plus performante pour la cellule BCCZ que pour la cellule BCC dans une plage de faibles densités. Les stratégies 3 et 4 se révèlent à nouveau équivalentes et très performantes, pour la même raison que précédemment.

La troisième cellule présentée est la structure Cubic. Par rapport aux cellules précédentes, elle se distingue par un nombre de poutres plus faible et des angles entre les poutres plus élevés. Les résultats issus de l'analyse de la cellule Cubic à la Figure 5 révèlent que la stratégie 4 se démarque en affichant les performances les plus élevées, tandis que la stratégie 3 est moins performante que pour les cellules précédentes. Les erreurs engendrées par la stratégie 3 sont plus significatives que le modèle sans aucune modification, celle-ci surestime la longueur à modifier. Dans ce cas, l'équation (4) donne une longueur de modification inférieure à $R\sqrt{3}$. La stratégie permettant d'obtenir des résultats stables indépendamment de la cellule étudiée et de la densité relative est la stratégie 4, car celle-ci est la plus complète, prenant en compte le rayon des poutres ainsi que les angles dans la structure.

3.2 Étude du paramètre c_r : coefficient d'augmentation du rayon

Dans un second temps, le coefficient d'augmentation du rayon a été étudié pour plusieurs cellules et sur le même domaine de densité relative que la section précédente. Pour cela, le paramètre d'augmentation du rayon aux jonctions a été optimisé, dans le but de minimiser l'écart entre le modèle solide 3D et le modèle poutre. L'algorithme d'optimisation de Brent a été utilisé [18, 19]. Pour le paramètre de longueur de modification, la stratégie 4, qui a montré les meilleures performances dans la section précédente, est utilisée.

Les résultats en Figure 6 montrent que la méthode d'optimisation du coefficient d'augmentation du rayon permet de réduire les erreurs entre le modèle solide et le modèle poutre sur toute la gamme de densité relative. Les résultats sont similaires quelle que soit la structure.

Les coefficients optimisés, pour toutes les cellules et sur la gamme de densité relative étudiée, sont également compilés à la Figure 6. Les coefficients d'augmentation du rayon optimaux sont regroupés entre 1,3 et 1,63 pour l'ensemble des cellules. Les variations du paramètre sur la gamme de densité relative sont très différentes selon la géométrie étudiée. Par exemple, le coefficient optimal varie peu pour la cellule Octahedron alors qu'il varie beaucoup pour la cellule BCCZ. Par conséquent, il n'est pas possible de déterminer une relation, entre coefficient de rigidification et densité relative, généralisée pour toutes les cellules. Le plus important est de réduire les erreurs relatives les plus élevées, cela correspond aux cas de densité relative élevée. La moyenne des coefficients optimaux pour les densités maximales de chaque cellule est de $c_r = 1,496$. Ce résultat est finalement proche du paramètre de la littérature $c_r = 1,4$ [11-13].

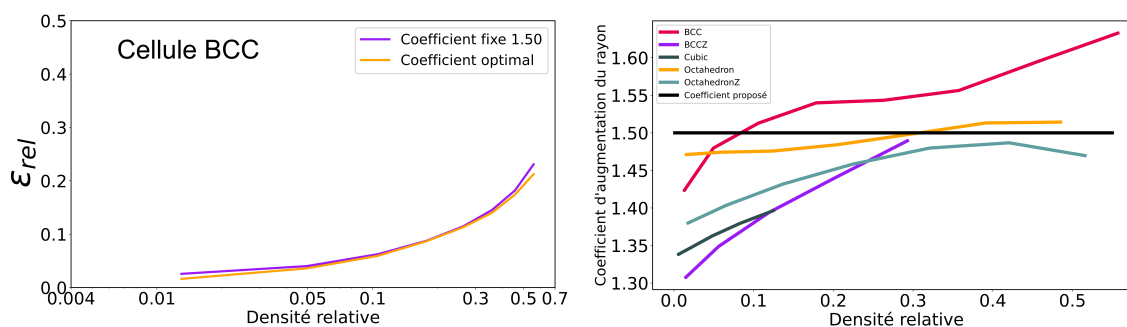


FIGURE 6 – Résultats de la méthode d'optimisation du coefficient.

4 Conclusions et perspectives

En résumé, trois stratégies de la littérature et une nouvelle stratégie de modélisation par éléments finis de type poutre pour les structures lattices ont été étudiées sur une gamme de densité relative étendue et pour diverses géométries. Les deux paramètres permettant de compenser la différence de rigidité apparaissant entre une simulation solide 3D et poutre ont été étudiés afin de comprendre leur impact sur l'erreur relative. Cette étude converge vers une méthode utilisant les deux paramètres suivants :

- Le paramètre de longueur de modification aux nœuds est défini par une équation prenant en compte l'angle entre les poutres et le rayon ;
- Le paramètre de coefficient d'augmentation du rayon est défini à $c_r = 1,5$.

Cette stratégie est efficace sur toute la gamme de densité étudiée, elle permet de réaliser des simulations de structure lattice avec un coût calculatoire plus faible qu'avec un modèle élément fini solide 3D. Cependant, l'erreur relative varie en fonction de la structure lattice. Par exemple, l'écart entre la méthode proposée utilisant une approche poutre avec rigidification et la méthode solide 3D atteint 10% pour une densité relative de :

- 0,3 pour la cellule BCC ;
- 0,25 pour la cellule BCCZ ;
- 0,1 pour la cellule Cubic.

Ainsi, la stratégie proposée doit être utilisée de manière précautionneuse pour éviter d'atteindre des erreurs trop élevées (densité relative plutôt faible, rarement au-delà de 0,25).

La stratégie de simulation proposée est applicable non seulement aux structures lattices connues, mais aussi aux géométries présentant des dimensions cellulaires variables ou des gradients de densité relative. En effet, les angles entre les poutres varient en fonction de la fonction de gradient utilisée, ce qui n'est pas pris en compte dans les stratégies utilisant un paramètre de longueur de zone l_{zone} constant. Les gradients ont montré de solides performances, notamment en termes d'absorption d'énergie [20-22]. Une phase expérimentale en cours vise à valider les performances de la stratégie proposée. Par la suite, cette approche sera mise en œuvre dans des géométries de structures lattices intégrant des gradients de densité relative et des dimensions cellulaires. De plus, l'incorporation de plusieurs matériaux dans la composition des structures lattices renforcera davantage leurs capacités d'absorption d'énergie. L'ambition est d'intégrer ces architectures au sein d'équipements de protection sportifs, tels que les casques ou les dispositifs de sauvegarde dorsale, dans le but d'améliorer la sécurité des zones corporelles critiques chez les athlètes.

Références

- [1] Jacobs SOMNIC et Bruce W. JO. « Status and Challenges in Homogenization Methods for Lattice Materials ». In : *Materials* 15.2 (2022), p. 605.
- [2] Sajad ARABNEJAD et Damiano PASINI. « Mechanical Properties of Lattice Materials via Asymptotic Homogenization and Comparison with Alternative Homogenization Methods ». In : *International Journal of Mechanical Sciences* 77 (1^{er} déc. 2013), p. 249-262.
- [3] Oliver WEEGER et al. « Inelastic Finite Deformation Beam Modeling, Simulation, and Validation of Additively Manufactured Lattice Structures ». In : *Additive Manufacturing Letters* 4 (2023), p. 100111.
- [4] Ludovico MUSENICH, Alessandro STAGNI et Flavia LIBONATI. « Hierarchical Bioinspired Architected Materials and Structures ». In : *Extreme Mechanics Letters* 58 (2023), p. 101945.
- [5] S FOREST, G CAILLETAUD et R SIEVERT. « A Cosserat Theory for Elastoviscoplastic Single Crystals at Finite Deformation ». In : *Archives of Mechanics* (1997), p. 705-736.
- [6] O. A. BAUCHAU et J. I. CRAIG. « Euler-Bernoulli Beam Theory ». In : *Structural Analysis*. Sous la dir. d'O. A. BAUCHAU et J. I. CRAIG. Réd. par G. M. L. GLADWELL. T. 163. Dordrecht : Springer Netherlands, 2009, p. 173-221.

- [7] A. DÍAZ-DE-ANDA et al. « Experimental Study of the Timoshenko Beam Theory Predictions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 331.26 (2012), p. 5732-5744.
- [8] A. LABUSCHAGNE, N. F. J. van RENSBURG et A. J. van der MERWE. « Comparison of Linear Beam Theories ». In : *Mathematical and Computer Modelling* 49.1 (2009), p. 20-30.
- [9] Mathias H. LUXNER, Juergen STAMPFL et Heinz E. PETTERMANN. « Finite Element Modeling Concepts and Linear Analyses of 3D Regular Open Cell Structures ». In : *Journal of Materials Science* 40.22 (2005), p. 5859-5866.
- [10] R. GÜMRÜK et R. A. W. MINES. « Compressive Behaviour of Stainless Steel Micro-Lattice Structures ». In : *International Journal of Mechanical Sciences* 68 (2013), p. 125-139.
- [11] M. SMITH, Z. GUAN et W. J. CANTWELL. « Finite Element Modelling of the Compressive Response of Lattice Structures Manufactured Using the Selective Laser Melting Technique ». In : *International Journal of Mechanical Sciences* 67 (2013), p. 28-41.
- [12] G. N. LABEAS et M. M. SUNARIC. « Investigation on the Static Response and Failure Process of Metallic Open Lattice Cellular Structures ». In : *Strain* 46.2 (2010), p. 195-204.
- [13] Honghu GUO et al. « Finite Element Simulation of the Compressive Response of Additively Manufactured Lattice Structures with Large Diameters ». In : *Computational Materials Science* 175 (2020), p. 109610.
- [14] Ahmadali TAHMASEBIMORADI, Chetra MANG et Xavier LORANG. « A NUMERICAL HYBRID FINITE ELEMENT MODEL FOR LATTICE STRUCTURES USING 3D/BEAM ELEMENTS ». In : *ASME 2021 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. Virtuel, France : American Society of Mechanical Engineers, 2021.
- [15] Petr HENYŠ, Lukáš ČAPEK et Jan BŘEZINA. « Comparison of Current Methods for Implementing Periodic Boundary Conditions in Multi-Scale Homogenisation ». In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 78 (2019), p. 103825.
- [16] Oliver SCHWAHOFER et al. « Tailored Elastic Properties of Beam-Based Lattice Unit Structures ». In : *International Journal of Mechanics and Materials in Design* (2023).
- [17] Zeyao CHEN et al. « Novel Negative Poisson's Ratio Lattice Structures with Enhanced Stiffness and Energy Absorption Capacity ». In : *Materials* 11.7 (2018), p. 1095.
- [18] Richard P. BRENT et Thomas J. WATSON. *Algorithms for Minimization without Derivatives*. George Forsythe. Prentice-Hall, 1973.
- [19] Kendall E. ATKINSON. *An Introduction to Numerical Analysis*. 2. ed. New York : Wiley, 1989.
- [20] Da CHEN, Sritawat KITIPORNCHAI et Jie YANG. « Dynamic Response and Energy Absorption of Functionally Graded Porous Structures ». In : *Materials & Design* 140 (2018), p. 473-487.
- [21] Lijun XIAO, Weidong SONG et Xiao XU. « Experimental Study on the Collapse Behavior of Graded Ti-6Al-4V Micro-Lattice Structures Printed by Selective Laser Melting under High Speed Impact ». In : *Thin-Walled Structures* 155 (2020), p. 106970.
- [22] Charles M. DWYER et al. « Impact Performance of 3D Printed Spatially Varying Elastomeric Lattices ». In : *Polymers* 15.5 (2023), p. 1178.