



# Régularisation du problème de frottement et résolution par Méthode Asymptotique Numérique

Fabien Béchet, Arnaud Lejeune, Michel Potier-Ferry

## ► To cite this version:

Fabien Béchet, Arnaud Lejeune, Michel Potier-Ferry. Régularisation du problème de frottement et résolution par Méthode Asymptotique Numérique. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. <hal-04611030>

**HAL Id: hal-04611030**

**<https://hal.science/hal-04611030v1>**

Submitted on 3 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Régularisation du problème de frottement et résolution par Méthode Asymptotique Numérique

F. Béchet<sup>1 2</sup>, A. Lejeune<sup>3</sup>, M. Potier-Ferry<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Univ. Polytechnique Hauts-de-France, CNRS, UMR 8201 - LAMIH, F-59313 Valenciennes, France, fabien.bechet@uphf.fr

<sup>2</sup> INSA Hauts-de-France, F-59313 Valenciennes, France.

<sup>3</sup> Département Mécanique Appliquée, Institut FEMTO-ST UMR 6174, CNRS / Université de Franche Comté, 24 rue de l'épitahe 25000 Besançon, France, arnaud.lejeune@univ-fcomte.fr

<sup>4</sup> LEM3, UMR CNRS 7239, Université de Lorraine, 57045 Metz, France, michel.potier-ferry@univ-lorraine.fr

**Résumé** — Cette communication a pour but de présenter une nouvelle méthode de régularisation de l'équation de frottement sec et l'algorithme de résolution associé dans le contexte de la Méthode Asymptotique Numérique. Cette nouvelle méthode est comparée à une méthode précédemment développée en terme de précision et en terme de nombres de pas utilisés sur un problème modèle de type masse-ressort. La performance de la méthode nous encourage à l'appliquer à des exemples plus complexes.

**Mots clés** — frottement sec, méthode asymptotique numérique, régularisation.

## 1 Introduction

Les simulations numériques en mise en forme ont une importance cruciale dans les phases de définition des produits et des processus de fabrication associés. Afin de prendre en compte les effets de pression et de frottement intervenant à l'interface avec l'outil lors de la mise en forme, des conditions unilatérales de contact et une loi de frottement doivent être incluses dans le modèle. Le modèle ainsi défini contient des non-linéarités liées aux grands déplacements, à la loi de comportement utilisée, aux contacts avec les outils et au frottement associé. Ces dernières années, la Méthode Asymptotique Numérique a permis de résoudre efficacement de nombreux problèmes non-linéaires rencontrés en mise en forme des matériaux [5]. Toutefois, la prise en compte du frottement reste un verrou.

En présence de contact frottant entre le solide considéré et un obstacle (par exemple un outil), la force de contact  $\vec{R}$  est classiquement séparée en une composante normale et une composante tangentielle :

$$\vec{R} = R^N \vec{n} + \vec{R}^T \quad \text{avec} \quad R^N = \vec{R} \cdot \vec{n} \quad (1)$$

avec  $\vec{n}$  la normale extérieure à l'obstacle au point de contact. La réaction normale  $R^N$  suit la loi de Signorini. La réaction tangentielle suit par exemple la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} \vec{v}^s = \vec{0} & \text{si } \|\vec{R}^T\| < f R^N \\ \vec{R}^T = -f R^N \frac{\vec{v}^s}{\|\vec{v}^s\|} & \text{si } \|\vec{R}^T\| = f R^N \end{cases} \quad (2)$$

où  $\vec{v}^s$  est la vitesse de glissement. Une variante à cette loi est une loi de type Norton-Hoff [4] :

$$\vec{R}^T = -f R^N \|\vec{v}^s\|^q \frac{\vec{v}^s}{\|\vec{v}^s\|} \quad (3)$$

Pour  $q \neq 0$ , l'intensité de la force de frottement  $\vec{R}^T$  dépend du module de la vitesse. Avec la loi (11), les efforts de réaction peuvent se trouver en dehors du cône de frottement (au sens de Coulomb) quand la vitesse de glissement est supérieur à 1. Pour  $q = 0$ , on retrouve le modèle de Coulomb (voir Fig. 1).

La Méthode Asymptotique Numérique (MAN) est une méthode qui consiste, en partant d'une solution initiale  $(\vec{U}^j, \lambda^j)$ , à calculer une branche solution du problème considéré en cherchant sa représenta-

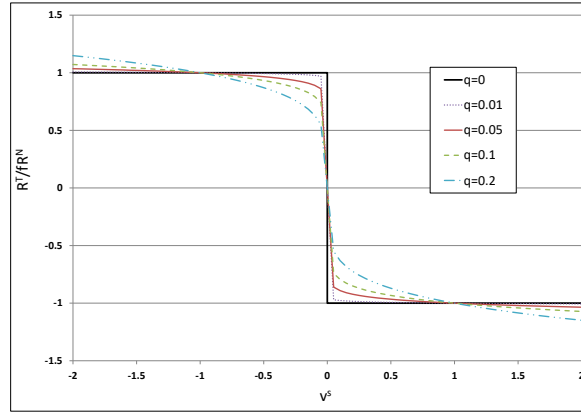


FIGURE 1 – Loi de frottement pour différentes valeurs de  $q$

tion en séries entières par rapport à un paramètre de chemin  $a$  [5] :

$$\vec{U}(a) = \vec{U}^j + \sum_{p=1}^{\infty} \vec{U}_p a^p \quad (4)$$

Cette méthode permet de transformer un problème non-linéaire en une séquence de problèmes linéaires. En pratique, les séries sont prises jusqu'à un ordre  $N$ . L'avantage de cette méthode est que cette séquence de problèmes linéaires fait intervenir la même matrice tangente et ne demande donc qu'une inversion de matrice pour calculer une branche. Une valeur maximale  $a_{max}$  de  $a$  est déterminée à partir d'un critère de convergence. La solution obtenue pour  $a = a_{max}$  sera le point de départ de la branche suivante.

Pour pouvoir développer les inconnues puis les équations du système en série, il faut que les différentes équations constituant le problème soient analytiques. Cela demande de régulariser certaines équations, en particulier celles relatives au contact frottant.

L'équation (2) décrivant les effets de frottement fait intervenir la vitesse de glissement  $\vec{v}^s$  qui dépend de la vitesse  $\vec{v}$  du point en contact, dérivée temporelle du déplacement  $\vec{u}$ . Le système formé avec les équations d'équilibre est donc un système algébrique différentiel de la forme  $f(\vec{U}, \dot{\vec{U}}, \vec{R}, \lambda) = 0$ .

Pour résoudre ce système, nous prendrons dans la suite le paramètre de chemin comme étant le temps physique  $a = t$ . Ainsi, nous avons la relation suivante entre les termes de la série du déplacement  $\vec{u}$  d'un point et les termes de la série de la vitesse  $\vec{v}$  de ce point :

$$\vec{v}_p = (p+1)\vec{u}_{p+1} \quad (5)$$

Un modèle a été proposé dans [2] pour prendre en compte le frottement. Ce modèle a été appliqué avec succès sur des cas de systèmes masse-ressorts mais a cependant du mal à converger quand il s'agit de traiter des problèmes éléments finis plus complexes. Dans [3], les auteurs ont remplacé dans (2) la vitesse de glissement par le déplacement de glissement pour s'affranchir du décalage d'ordre dû à la présence de la dérivée du déplacement. Les résultats sont validés sur un cas où le signe de la vitesse de glissement ne varie pas.

On propose donc dans la suite de cette communication une nouvelle régularisation de la loi de frottement qui repose sur la vitesse de glissement, et l'algorithme de résolution correspondant. Dans une première partie, le problème modèle considéré est décrit. Dans une seconde partie, nous rappelons les régularisations utilisées dans le premier modèle proposé dans [2] puis la nouvelle régularisation. Enfin, dans la dernière partie, nous comparerons les résultats obtenus avec les 2 méthodes.

## 2 Problème modèle considéré

Dans la suite, nous considérons le cas simple d'un système masse-ressort soumise à une force verticale croissant linéairement. La masse entre en contact avec un plan horizontal se déplaçant horizontalement à une vitesse constante  $\vec{V}$  (Fig. 2).

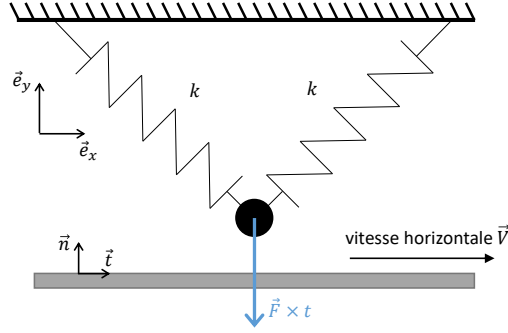


FIGURE 2 – Problème considéré

Afin de pouvoir résoudre ce système algébrique différentiel, le déplacement  $\vec{u}$  de chaque point en contact est décomposé en parties normale et tangentielle :

$$\vec{u} = u^N \vec{n} + \vec{u}^T \quad \text{avec} \quad u^N = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (6)$$

Cela permet de découpler parties algébrique et différentielle du problème. Dans ce cas 2D, la normale extérieure est la même en tout point de la surface de contact  $\vec{n} = \vec{e}_y$ . De ce fait, on a dans la suite :  $u^x = u^T$  et  $u^y = u^N$ . Le problème quasi-statique est modélisé par le système suivant :

$$\begin{cases} -ku^T + R^T = 0 \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} -ku^N + R^N = Ft \end{cases} \quad (7b)$$

$$\begin{cases} R^N h = 0 \quad \text{avec} \quad R^N \geq 0 \quad \text{et} \quad h \geq 0 \end{cases} \quad (7c)$$

$$\begin{cases} \vec{R}^T = -f R^N \|\vec{v}^s\|^q \frac{\vec{v}^s}{\|\vec{v}^s\|} \end{cases} \quad (7d)$$

où  $h$  est la distance entre la masse ponctuelle et l'obstacle. Pour cet exemple :

$$h = \delta + u^N \quad \text{avec} \quad \delta = h_{\text{initiale}} \quad (8)$$

Pour ce problème, la vitesse de glissement est :

$$v^s = v^x - V = v^T - V \quad (9)$$

Afin de résoudre ce système avec la MAN, il faut régulariser les équations (7c) et (7d).

## 3 Régularisation de la loi de frottement

La régularisation de la partie normale peut se faire avec pénalisation comme présenté dans [1] :

$$R^N \left( \frac{R^N}{K} + h \right) = \eta (\delta - h) \quad (10)$$

où  $K$  est un coefficient de pénalisation,  $\eta$  un paramètre de régularisation. D'autres régularisations basées sur la fonction tanh peuvent être utilisées.

### 3.1 Première régularisation (méthode 1)

Une première régularisation a été proposée dans [2] :

$$\vec{R}^T = -fR_{reg}^N \frac{w^{q-1}}{V_c^q} \vec{v}^s \quad (11)$$

où, pour éviter la singularité en  $\vec{v}^s = 0$ , la norme de  $\vec{v}^s$  est régularisée :

$$w = |\vec{v}^s|_{reg} = \sqrt{\vec{v}^s \cdot \vec{v}^s + \omega^2 V_c^2} \quad (12)$$

$\omega$  étant un paramètre de régularisation et  $V_c$  une vitesse caractéristique du problème.

Par ailleurs, comme  $R^N = 0$  au départ d'après (10), il est nécessaire de régulariser l'effort normal pour éviter d'avoir un système non-inversible au départ :

$$R_{reg}^N = \sqrt{(R^N)^2 + (\eta_R R_C^N)^2} \quad (13)$$

où  $\eta_R$  est un paramètre de régularisation et  $R_C^N$  une valeur caractéristique du problème pour les réactions normales.

Nous avons ainsi le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} -ku^T + R^T = 0 \end{cases} \quad (14a)$$

$$\begin{cases} -ku^N + R^N = Ft \end{cases} \quad (14b)$$

$$\begin{cases} R^N \left( \frac{R^N}{K} + h \right) = \eta(\delta - h) \quad \text{avec } h = \delta + u^N \end{cases} \quad (14c)$$

$$\begin{cases} R^T = -fR_{reg}^N w^{q-1} v^s \end{cases} \quad (14d)$$

Le système (14) est composé de 3 équations algébriques (14a)-(14b)-(14c) et d'une équation différentielle ordinaire (14d). Les différentes inconnues sont développées en série et un système est obtenu pour chaque ordre. L'algorithme de résolution est le suivant :

#### ► Ordre 0 :

##### 1. L'état initial :

- un temps nul :  $t = 0$
- une force  $Ft$  nulle
- un déplacement normal nul :  $u_0^N = 0$
- une réaction normale nulle :  $R_0^N = 0$

Le reste de l'état initial peut être choisi de 2 façons :

##### Solution 1

- un déplacement tangentiel nul :  $u_0^T = 0$
- une réaction tangentielle nulle :  $R_0^T = 0$
- l'équation (14d) donne donc  $v_0^s = 0$

##### Solution 2

- une vitesse de glissement physique :  $v_0^s = V$
- l'équation (14d) donne donc  $R_0^T \neq 0$
- l'équation (14a) donne donc  $u_0^T \neq 0$

La première solution donne une vitesse de glissement  $v_0^s = 0$  : la vitesse de la masse est donc imposée à  $v^T = V$  avant même le contact et quels que soient les efforts appliqués. Dans la seconde solution, la vraie vitesse  $v^T = 0$  est imposée et donc la vitesse de glissement  $v_0^s = V$ . La réaction  $R_0^T$  est donc non-nulle et en conséquence le déplacement  $u_0^T$  aussi pour assurer l'équilibre.

##### 2. Dans les deux cas, d'après (5), $\vec{u}_1^T$ (déplacement tangentiel à l'ordre 1) est donc connu.

► **Ordre  $n \geq 1$  :**

1. Le système de 3 équations (14a)-(14b)-(14c) est résolu à l'ordre  $n$  pour déterminer 3 inconnues  $(u_n^T, R_n^N, R_n^T)$  en prenant le déplacement tangentiel  $\vec{u}_n^T$  comme donnée.
2. Le déplacement tangentiel  $\vec{u}_{n+1}^T$  est évalué à partir de l'équation (14d).

Le système d'inconnues  $(u_n^N, u_n^T, R_n^N, R_n^T)$  est résolu à chaque ordre avec la matrice tangente  $[K]$  définie par (15).

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 & 1 \\ -k & 0 & 1 & 0 \\ (R_0^N + \eta) & 0 & \left(\frac{2R_0^N}{K} + \delta\right) & 0 \\ 0 & fR_{reg0}^N w_0^{q-1} [1 + (q-1)w_0^{-2}(u_1^T - V)^2] & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

On voit bien dans la dernière ligne de (15) que l'équation (14d) peut-être résolue indépendamment du reste du système (14) avec les résultats des ordres précédents. On voit également que la réaction  $R^N$  doit obligatoirement être non-nulle et donc régularisée dans (14d) pour que  $[K]$  soit inversible.

Cette méthode fonctionne sur le cas présenté ici et des cas avec obstacle non-plan [2] mais a du mal à converger sur un exemple Éléments Finis non-élémentaire.

### 3.2 Nouvelle régularisation (méthode 2)

Afin d'avoir une meilleure convergence, on fait en sorte de ne pas avoir ce décalage entre force de réaction tangentielle  $\vec{R}^T$  et le déplacement tangentiel  $u^T$ . Un terme de relaxation est ajouté à l'équation de frottement (11) :

$$\tau \dot{\vec{R}}^T + \vec{R}^T = -fR^N \frac{w^{q-1}}{V_c^q} \vec{v}^s \quad (16)$$

où  $\tau$  représente un temps caractéristique qui introduit une sorte de retard dans l'évolution de  $\vec{R}^T$ . Avec ce terme supplémentaire, il n'est plus nécessaire de régulariser  $R^N$  dans (16). Avec la formulation (16), réaction tangentielle et déplacement tangentiel interviennent au même ordre par l'intermédiaire de leur dérivée. Il n'y a donc plus ce décalage d'ordre entre ces deux grandeurs. Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} -ku^T + R^T = 0 \end{cases} \quad (17a)$$

$$\begin{cases} -ku^N + R^N = Ft \end{cases} \quad (17b)$$

$$\begin{cases} R^N \left( \frac{R^N}{K} + h \right) = \eta(\delta - h) \quad \text{avec } h = \delta + u^N \end{cases} \quad (17c)$$

$$\begin{cases} \tau \dot{\vec{R}}^T + \vec{R}^T = -fR^N w^{q-1} v^s \end{cases} \quad (17d)$$

Le système (17) est alors résolu avec la MAN de la façon suivante :

► **Ordre 0**

1. On suppose au premier pas :
  - un temps nul :  $t = 0$
  - une force  $Ft$  nulle
  - un déplacement donné nul :  $u_0^N = u_0^T = 0$
  - une réaction nulle :  $R_0^N = R_0^T = 0$

2. Les équations d'équilibre et de contact normal sont satisfaites. Dans l'équation de frottement,  $R^N$  est nul mais il n'y a plus besoin de régulariser. En effet, l'équation (17d) permet de prendre :
- la dérivée de réaction tangente nulle  $\dot{R}_0^T = R_1^T = 0$
  - la vitesse tangente  $v_0^T = u_1^T$  quelconque et qui sera déterminée à l'ordre 1.

### ► Ordre 1

$$\begin{cases} -ku_1^T + R_1^T = 0 \end{cases} \quad (18a)$$

$$\begin{cases} -ku_1^N + R_1^N = F \end{cases} \quad (18b)$$

$$\begin{cases} \left( \frac{2R_0^N}{K} + h_0 \right) R_1^N + (R_0^N + \eta) u_1^N = 0 \end{cases} \quad (18c)$$

$$\begin{cases} \tau R_2^T + f R_0^N \left[ w_0^{q-1} + (q-1)w_0^{q-3}(u_1^T - V)^2 \right] u_2^T = -\frac{1}{2} \left( R_1^T - f w_0^{q-1} v_0^s R_1^N \right) \end{cases} \quad (18d)$$

Le terme  $R_1^T$  est connu de l'ordre 0 et on peut donc résoudre le sous-système (18a)-(18b)-(18c) qui nous donne  $u_1^T$ ,  $u_1^N$  et  $R_1^N$ . Cela revient à résoudre l'ordre 1 (au premier pas) en ne tenant pas compte du contact tangent. En particulier ici, on obtient :  $u_1^T = 0$  qui représente la "vitesse tangentielle physique" (car obtenue sans effets de contact tangentiel). Avec l'algorithme associé à la méthode 1, on devait imposer  $u_1^T = V$  ou prendre  $u_0^s \neq 0$ . L'équation (18d) interviendra en fait à l'ordre 2.

### ► Ordre $n > 1$

$$\begin{cases} -ku^n n + R_n^T = 0 \end{cases} \quad (19a)$$

$$\begin{cases} -ku_n^N + R_n^N = 0 \end{cases} \quad (19b)$$

$$\begin{cases} \left( \frac{2R_0^N}{K} + h_0 \right) R_n^N + (R_0^N + \eta) u_n^N = \dots \end{cases} \quad (19c)$$

$$\begin{cases} \tau R_n^T + f R_0^N \left[ w_0^{q-1} + (q-1)w_0^{q-3}(u_1^T - V)^2 \right] u_n^T = -\frac{1}{n} (\dots) \end{cases} \quad (19d)$$

A partir de l'ordre 2, on a un système de 4 équations à 4 inconnues : les équations (17a)-(17b)-(17c) à l'ordre  $n$  et l'équation (17d) à l'ordre  $n-1$ . Le système d'inconnues  $(u_n^N, u_n^T, R_n^N, R_n^T)$  est résolu à chaque ordre avec la matrice tangente  $[K]$  définie par (20).

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 & 1 \\ -k & 0 & 1 & 0 \\ (R_0^N + \eta) & 0 & \left( \frac{2R_0^N}{K} + \delta \right) & 0 \\ 0 & f R_0^N w_0^{q-1} [1 + (q-1)w_0^{-2}(u_1^T - V)^2] & 0 & \tau \end{bmatrix} \quad (20)$$

Cette matrice tangente est forcément inversible même si  $R^N = 0$ . Dès que  $R_0^N \neq 0$  (ce qui est vrai à partir du deuxième pas), la dernière ligne ne peut plus être résolue indépendamment du reste du système comme c'est le cas avec la méthode 1.

## 4 Résultats

Les calculs sont effectués avec les données suivantes :

$$k = 1 \quad \delta = 1 \quad f = 0.3 \quad F = 1 \quad V(t) = 1 \quad q = 0.05$$

et les paramètres de régularisation :

$$K = 10^6 \quad \eta = 0.1 \quad V_c = 1 \quad \omega = 0.1 \quad \eta_R = 0.02 \quad R_C^N = 1$$

Les résultats obtenus avec la méthode 2 sont présentés sur la figure 4.

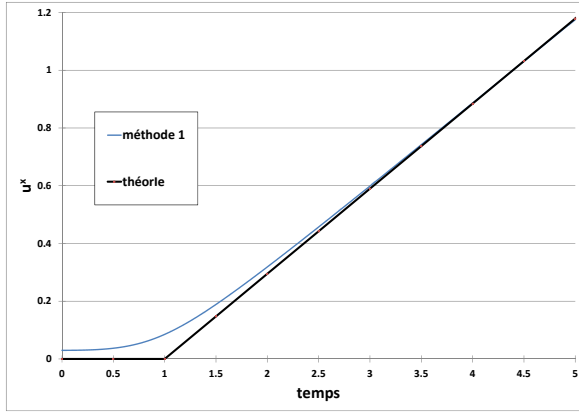


FIGURE 3 – Déplacement tangentiel  $u^T$  obtenu avec la méthode 1

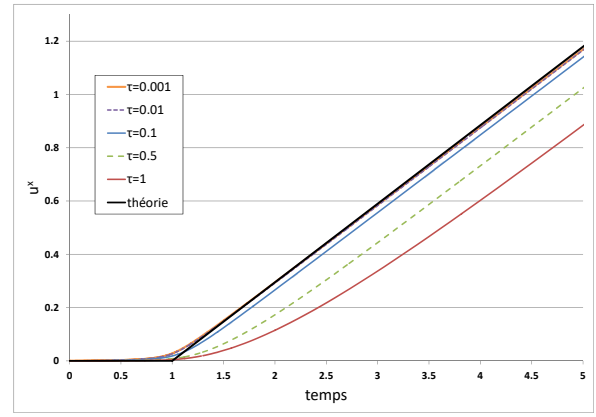


FIGURE 4 – Déplacement tangentiel  $u^T$  obtenu avec la méthode 2 pour différents  $\tau$

Les séries ont été tronquées à l'ordre 19 avec une précision égale à  $10^{-4}$  pour le critère de convergence. Les équations ont été implémentées dans le logiciel Manitoo utilisant la différentiation automatique [6]. De ce fait, il n'est pas nécessaire de calculer spécifiquement les matrices tangentielles et seconds membres et il est ainsi possible de faire varier les différentes lois et régularisations en changeant uniquement l'équation concernée dans le programme.

Dans les deux cas, la vitesse  $v^T$  est prise nulle au départ. Cela implique un déplacement initial non-nul pour la méthode 1 pour satisfaire l'équation de frottement (14d). Ce décalage initial est visible sur la figure 3.

L'influence du paramètre  $\tau$  utilisé dans la méthode 2 est illustrée sur la figure 4. Le paramètre  $\tau$  agit comme un temps de retard pour que la courbe de  $u^T$  atteigne la pente finale. Le décalage temporel obtenu entre les différentes courbes par rapport à la courbe théorique est approximativement égale à  $\tau$ . Les résultats deviennent assez précis pour  $\tau < 10^{-2}$ .

La méthode 2 est plus précise dans l'évaluation de  $u^T$  surtout autour de l'instant de contact ( $t = 1s$ ). Après le contact, les résultats de la méthode 1 tendent vers la solution exacte tandis que les résultats de la méthode 2 avec  $\tau = 0.01$  sont plus rapidement proche de la solution théorique : à 1,5s il y a un écart de 29,5% pour la méthode 1 contre 1,4% pour la méthode 2 avec  $\tau = 10^{-2}$ . Cette précision ne se fait pas au détriment du nombre de pas (voir tableau 4) : la méthode 2 avec  $\tau = 10^{-2}$  demande environ 3 fois moins de pas que la méthode 1. Cette différence de pas est principalement due au surplus du nombre de pas de la méthode 1 avant le contact à  $t = 1s$ .

TABLE 1 – Nombre de pas en fonction de  $\tau$

méthode utilisée	Valeur de $\tau$	t = 1 s	t = 2 s	t = 10 s
1	-	49	60	72
2	0.001	96	108	121
2	0.01	14	21	33
2	0.1	3	7	13
2	0.5	3	6	11
2	0.1	2	6	11

Cette comparaison a été faite pour une régularisation de la partie normale identique. La précision des résultats peut être améliorée en changeant les paramètres de cette régularisation mais le nombre de pas en serait augmenté.



## 5 Conclusion

Dans cette communication, nous avons présenté un nouveau type de régularisation pour traiter l'équation de frottement dans le cadre de la Méthode Asymptotique Numérique. Cette régularisation repose sur l'ajout de la dérivée de la force tangentielle dans l'équation de frottement. Cela permet de traiter déplacement tangentiel et force tangentielle au même ordre dans le développement en séries. Les résultats obtenus sont plus précis que la méthode précédente tout en demandant moins de pas. Cependant, il reste à étendre cette méthode à des problèmes plus complexes, avec des obstacles non-plans et des structures modélisées par éléments finis.

## Références

- [1] W. Aggoune, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, *High-order prediction-correction algorithms for unilateral contact problems*, J. Comput. App. Math., Elsevier, 168 : 1–9, 2004.
- [2] F. Béchet, A. Lejeune, M. Potier-Ferry, *Taylor series to solve friction problems* Comptes Rendus Mécanique, Elsevier, 338 : 327-332, 2010.
- [3] Y. Belaasilia, B. Braikat, M. Jamal, *High order mesh-free method for frictional contact*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier, 94 : 103-112, 2018.
- [4] J. L. Chenot, *New trends in finite element modelling of metal forming processes*, Computational Plasticity, 1997, Barcelone, CIMNE, Fundamentals and Applications, 804-809.
- [5] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, *Méthode Asymptotique Numérique : une technique de résolution des équations non-linéaires*, Hermès Science Publishing, Paris, Londres, 2007.
- [6] A. Lejeune, F. Béchet, H. Boudaoud, N. Mathieu, M. Potier-Ferry, *Object-oriented design to automate a high order non-linear solver based on asymptotic numerical method*, Advances in Engineering Software, Elsevier, 48 : 70-88, 2012.