



**HAL**  
open science

## Modélisation numérique du comportement statique des stacks de tôles

Guilhem Drouet, Delphine Brancherie, Pierre Feissel, Ferdinand Frabolot

► **To cite this version:**

Guilhem Drouet, Delphine Brancherie, Pierre Feissel, Ferdinand Frabolot. Modélisation numérique du comportement statique des stacks de tôles. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610995

**HAL Id: hal-04610995**

**<https://hal.science/hal-04610995v1>**

Submitted on 3 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation numérique du comportement statique des stacks de tôles

Guilhem DROUET<sup>1,2</sup>, Delphine BRANCHERIE<sup>1</sup>, Pierre FEISSEL<sup>1</sup>, Ferdinand FRABOLOT<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Technologie de Compiègne, Laboratoire Roberval (Mécanique énergie et électricité), centre de recherche Royallieu, CS 60319, 60203 Compiègne, France

<sup>2</sup> Technocentre Renault, 1 avenue du Golf, 78288 Guyancourt, France

**Résumé** — L'objectif des travaux présentés est de proposer une démarche de modélisation du comportement mécanique d'un empilement de tôles minces utilisé dans la fabrication de machines électriques. Nous présentons les modèles de contact utilisés ainsi que leur implémentation éléments finis. Le modèle est ensuite appliqué sur un exemple de compression, soulignant l'effet de l'état de surface des tôles sur le comportement de l'assemblage. La modélisation proposée permet de reproduire le comportement normal de l'empilement en tenant compte du caractère irréversible dû à la plasticité locale.

**Mots clefs** — Empilement de tôles, Contact élasto-plastique, Transition d'échelle, Machine électrique.

## 1. Contexte et objectif

Dans un contexte d'électrification des véhicules, les constructeurs sont à la recherche de solutions optimales afin d'améliorer l'efficacité énergétique pour garantir une autonomie acceptable vis-à-vis des usages. Dans le cas des moteurs électriques, l'objectif est d'obtenir un moteur avec un rendement le plus élevé possible, ce qui nécessite de réduire les différentes pertes au sein de celui-ci, parmi lesquelles : les pertes mécaniques liées au frottement entre les pièces en contact, les pertes joules ou encore les pertes fers dues à la création de courants de Foucault non souhaités dans des éléments conducteurs du fait de la présence de champs magnétiques.

Un axe d'amélioration pour réduire les pertes fers passe par le fractionnement des parties actives des moteurs (au niveau du rotor comme au niveau du stator). Les composants sur lesquels viennent se fixer les éléments essentiels d'un moteur (bobine stator, aimants ou bobines au rotor) ne sont plus monolithiques, mais sont constitués d'un stack, empilement de plusieurs tôles électriques isolées entre elles (Figure 1). Cette solution est très intéressante pour la réduction des pertes fers, cependant, elle réduit considérablement la raideur mécanique de l'ensemble et introduit par la même occasion des non-linéarités mécaniques dues au contact entre les tôles. La caractérisation du comportement mécanique du stack devient alors essentielle afin d'optimiser les étapes d'assemblage de la machine.

La majorité des études réalisées sur le comportement mécanique du stack traitent de l'aspect dynamique du moteur en fonctionnement : G. Mogenier et al. [1] et P. Millithaler et al. [4] proposent de recalibrer les paramètres matériaux d'un modèle de stack simplifié à partir d'une analyse modale, M. Topenot [2] se concentre sur le comportement dynamique d'un rotor ou encore, J.-B. Dupont et al. [3] modélisent le comportement vibro-acoustique d'une machine électrique avec une étape de recalage afin de déterminer les propriétés matériau.

Peu d'études se concentrent sur la caractérisation statique d'un stack : V. Luchscheider [5] caractérise des tôles en contact et définit une stratégie de modélisation multi-échelle pour la simulation de structures, tandis que M.V. Baloglu [6] propose une caractérisation de tôles collées et en contact à partir d'essais expérimentaux.

Nous proposons dans ces travaux une méthodologie permettant de construire un modèle mécanique du comportement statique du stack. Dans un premier temps, nous développons une stratégie de modélisation multi-échelle afin de décrire les phénomènes mécaniques au niveau des différentes

échelles impactant le comportement du stack. Ensuite, nous définissons les modèles de contact utilisés à l'échelle des tôles, puis leurs implémentations dans un modèle éléments finis. Enfin, nous proposons une application du modèle au cas de compression d'un empilement de tôles.

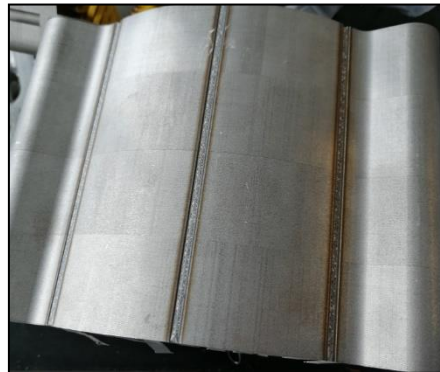


Figure 1 – Photo d'un stack de tôles - Renault Megane E-Tech (2022)

## 2. Stratégie de modélisation

La complexité du stack (en particulier le nombre important de tôles en contact) ne permet pas d'envisager une modélisation à l'échelle des tôles. Nous avons choisi d'adopter une approche multi-échelle où le comportement élémentaire est décrit par un modèle à l'échelle du contact entre deux tôles. Ce comportement est ensuite intégré dans une approche de type transition d'échelle afin d'obtenir le comportement macroscopique du stack. Nous allons donc adopter une stratégie de modélisation à trois échelles (illustrée Figure 2) :

- l'échelle microscopique correspond à l'échelle du contact entre les aspérités des surfaces rugueuses des tôles en contact. Dans ce travail, cette échelle n'est considérée que pour construire une loi d'interface rendant compte de l'évolution de la rigidité de contact avec l'effort de contact.
- l'échelle intermédiaire ou mésoscopique correspond à un volume élémentaire représentatif du comportement du stack, composé de deux demi-épaisseurs de tôles en contact. Le comportement de l'interface de contact entre les tôles est construit à partir du comportement issu de l'échelle inférieure.
- l'échelle macroscopique est celle où les simulations sur le stack complet sont menées. Un comportement volumique équivalent est construit par une approche de transition d'échelle à partir du comportement établi à l'échelle mésoscopique.

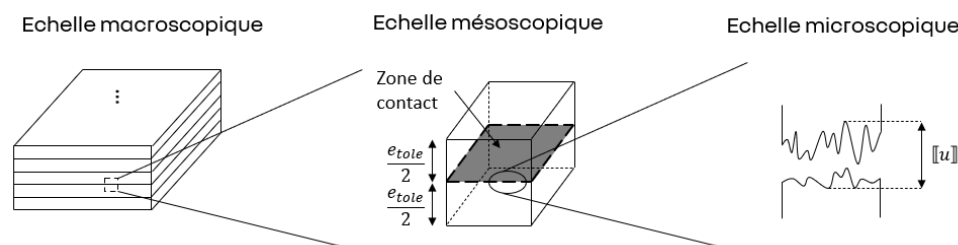


Figure 2 – Stratégie de modélisation

### 3. Modélisation de deux tôles en contact à l'échelle mésoscopique

Une étude présentée dans [7] met en évidence, lors d'essais de compression de deux barres d'aluminium en contact normal avec différentes finitions de surface, l'influence de l'état de surface des tôles en contact sur le comportement mécanique de l'éprouvette. Nous allons donc nous intéresser au cas de contact entre deux surfaces rugueuses. Nous définissons, dans un premier temps le comportement de la zone de contact, puis nous discuterons de son implémentation dans un modèle éléments finis. Dans ce travail, à ce stade, nous ne considérons que le comportement dans la direction normale.

#### 3.1 Modèle de contact normal

Il est possible de modéliser le contact de différentes manières, la plus directe étant un modèle éléments finis à l'échelle des surfaces en contact. Outre le besoin de l'information sur les états de surface et la prise en compte de sa variabilité, l'implémentation de ce type de modèle conduit à des coûts de calcul prohibitifs. Afin de réduire ces temps de calculs tout en conservant les paramètres nécessaires à la description du contact entre deux surfaces rugueuses, plusieurs étapes de simplification du contact sont possibles : dans un premier temps, le contact entre deux surfaces rugueuses peut être approché par un contact entre un plan rigide et une surface rugueuse reprenant toutes les aspérités [14], ensuite, nous pouvons définir le contact à partir d'une part, d'un contact « unitaire » entre une sphère déformable et un plan rigide et d'autre part, d'une distribution des hauteurs des aspérités décrivant l'état de surface (dans la direction normale à la surface des tôles). En suivant les hypothèses de Greenwood et al. [10], nous supposons que la distribution des hauteurs des aspérités suit une loi Gaussienne  $\Phi$  de moyenne  $\mu$  et de dispersion  $\sigma_a$ , chaque sommet d'aspérité est considéré sphérique de rayon moyen  $R$ . Sous ces hypothèses, le comportement du contact normal présente deux phases :

- une phase élastique dont le comportement est défini dans la littérature, nous pouvons notamment citer les travaux de Greenwood & Tripp [16], Greenwood & Williamson [10] ou encore Bush-Gibson-Thomas [13]. Tous ces modèles se basent, d'une part, sur la théorie de Hertz afin de caractériser le comportement du contact entre une aspérité et un plan, et d'autre part sur une distribution de hauteur des aspérités suivant une loi normale.
- une phase plastique dont le comportement dépend du couple de matériau en contact ainsi que du choix du modèle de plastification. Nous supposons que la plasticité se concentre sur certaines aspérités uniquement.

Un modèle de contact élasto-plastique entre deux surfaces rugueuses a été proposé par [9]. Lorsque deux tôles sont en contact, trois groupes d'aspérités peuvent être distingués (Figure 3) :

- le premier groupe rassemble les aspérités qui ne sont pas en contact ;
- le second groupe rassemble les aspérités qui se déforment dans le domaine élastique ;
- le troisième groupe rassemble les aspérités subissant des déformations plastiques.

Le contact élastique est défini dans un premier temps à partir des travaux de Greenwood et al. [10], le comportement élastique du contact relie la pression mésoscopique  $p_{el}$  à la distance  $d$  entre le plan moyen de la surface rugueuse et le plan rigide (Figure 3) par la relation :

$$p_{el}(d) = \int_d^{z_{max}} p_{el,sp}(z-d) \Phi(z) dz \quad (1)$$

où :  $p_{el,sp}(z-d) = \frac{4E'}{3\pi} \left(\frac{z-d}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$  est la pression de contact entre une aspérité et un plan,  $E' = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1}$  est le module élastique de contact et  $z_{max} = 3\sigma_a$  est la distance à partir de laquelle le contact est supposé initié (la pression de contact est supposée négligeable au-delà de  $3\sigma_a$ ).

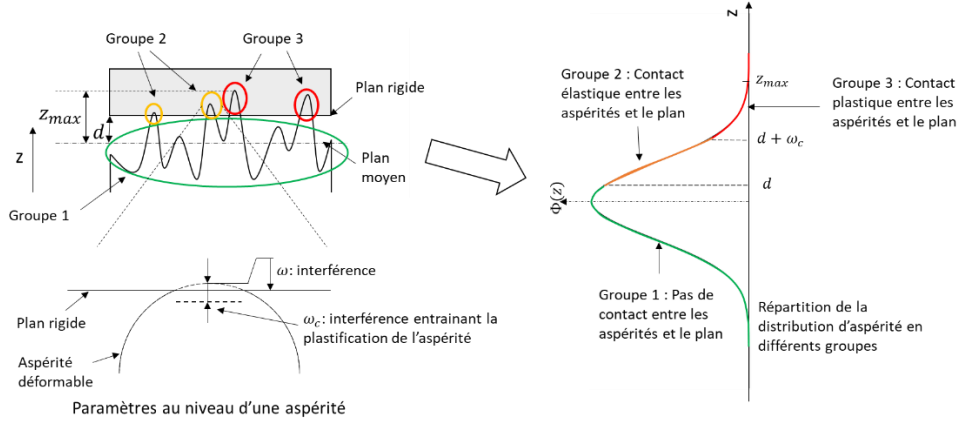


Figure 3 – Différents groupes d'aspérités en contact

Le contact plastique apparaît lorsque les aspérités les plus hautes subissent une pression supérieure à la pression limite élastique. Cette limite élastique est construite dans [15] à partir d'une distance d'écrasement d'une aspérité par rapport à sa configuration initiale, appelée interférence limite  $\omega_c$  [8], [15] (Figure 3, en bas à gauche). La pression limite élastique est déduite de cette interférence limite via le modèle de contact élastique :

$$p_{el, lim} = \int_{d'}^{z_{max}} p_{el, sp}(z - d) \Phi(z) dz \quad (2)$$

$$\omega_c = R \left( \frac{\pi KH}{2E'} \right)^2 \text{ d'après [15].}$$

où :  $d' = z_{max} - \omega_c$  est la distance entraînant la plastification,  $K$  est un facteur de dureté [15] et  $H$  est la dureté de la sphère.

La modélisation de la phase plastique se fait de la même manière que pour la phase élastique, nous utilisons les résultats du modèle de contact élasto-plastique entre une sphère et un plan développé par [8], auquel nous combinons la contribution de la distribution d'aspérités. La pression plastique de contact entre deux surfaces rugueuses est alors donnée par :

$$p_{pl}(d) = \int_{d+\omega_c}^{z_{max}} p_{pl, sp}(z - d) \Phi(z) dz \quad (3)$$

où  $p_{pl, sp}(z - d)$  est la pression de contact plastique entre une sphère et un plan rigide, d'après [8].

Finalement, la pression de contact entre une surface rugueuse et un plan rigide s'écrit comme la contribution de la pression de contact élastique et plastique :

$$p_n(d) = \int_d^{d+\omega_c} p_{el, sp}(z - d) \Phi(z) dz + \int_{d+\omega_c}^{z_{max}} p_{pl, sp}(z - d) \Phi(z) dz \quad (4)$$

### 3.2 Implémentation

Dans la suite de cette étude, nous nous intéressons au cas de deux tôles élastiques en contact modélisées en 2D Figure 4, nous présentons uniquement la modélisation de la zone de contact. L'implémentation du contact entre les tôles se fait via l'introduction d'éléments d'interface, utilisés notamment dans la résolution de problèmes de géomécanique [11] ou d'amorce de fissure dans un matériau [12]. Le choix de cet élément nous permet d'intégrer localement des hétérogénéités au niveau de la zone de contact, ou bien, selon l'interprétation qui est faite de la distance entre les tôles, de tenir compte, sans modification géométrique de la structure, de défauts géométriques type défaut de planéité ou défauts de grande longueur d'onde. Dans notre cas, l'élément d'interface est modélisé par un élément

sans épaisseur à 4 nœuds avec des fonctions de forme d'élément de barre linéaire (Figure 4, zoom à droite). Au niveau de chaque nœud de l'élément d'interface, l'information sur le déplacement entre un nœud de la tôle supérieure et un nœud de la tôle inférieure sera transmise. Nous pouvons alors définir le saut de déplacement de la façon suivante :

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \underbrace{\begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix}}_{N_{int}} \begin{Bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ \vdots \\ u_4^x \\ u_4^y \end{Bmatrix} \quad (5)$$

où :  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  est le saut de déplacement dans le repère global,  $N_1$  et  $N_2$  sont les fonctions de forme pour un élément barre linéaire et  $\{u_1^x, u_1^y, \dots, u_4^x, u_4^y\}^T$  est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément.

Nous notons  $N_{int}$ , la matrice des fonctions de forme de l'élément d'interface.

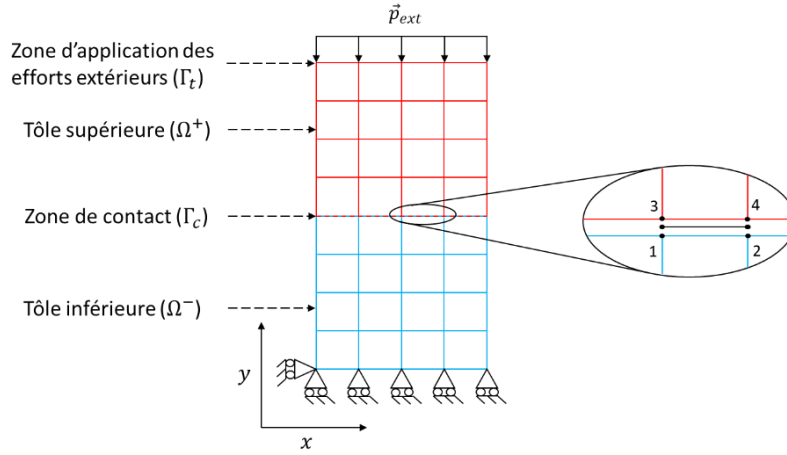


Figure 4 – Représentation éléments finis de deux tôles et de l'interface (contact) entre les tôles

Nous définissons la densité surfacique de l'effort de contact ainsi que la matrice de raideur tangente du contact au niveau de chaque élément d'interface avec une composante dans la direction normale et une composante dans la direction tangentielle dans le repère local de l'interface ( $\vec{n}, \vec{t}$ ) :

$$\mathbf{p}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n,t}) = \begin{Bmatrix} p_n(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n,t}) \\ p_t(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n,t}) \end{Bmatrix}, D(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n,t}) = \begin{bmatrix} k_n(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n,t}) & 0 \\ 0 & k_t(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n,t}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

avec :  $k_n = \frac{\partial p_n}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n}$  est la raideur de contact dans la direction normale  $\vec{n}$ ,  $p_t$  est la contrainte issue du contact dans la direction tangentielle,  $k_t = \frac{\partial p_t}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_t}$  est la raideur de contact dans la direction tangentielle  $\vec{t}$  et  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n,t}$  est le saut de déplacement dans le repère local du contact.

La formulation faible de l'équilibre du volume élémentaire représentatif considéré (contact entre deux demi-épaisseurs de tôles, voir Figure 4) s'écrit :

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{contact}(\mathbf{u}) = 0 \quad (7)$$

où :  $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega$ , le vecteur des efforts internes aux tôles ( $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ , Figure 4),

$\mathbf{f}_{ext} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{p}_{ext} d\Gamma_t$ , le vecteur des efforts extérieurs appliqué au système et

$\mathbf{f}_{contact}(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}_{int}^T \mathbf{Q} \mathbf{p}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n,t}) d\Gamma_c$ , le vecteur des efforts au niveau de la zone de contact.

avec :  $B$  est la matrice de passage du champ de déplacement au champ de déformation élémentaire,  $\sigma$  est le vecteur des contraintes,  $N$  est la matrice correspondant à la trace des fonctions de forme sur la frontière du domaine,  $p_{ext}$  est l'effort surfacique exercé sur le domaine et  $Q$  est la matrice de passage du repère local de l'interface  $(\vec{n}, \vec{t})$  au repère global de travail.

Nous considérons ici, dans un premier temps, que les non-linéarités sont concentrées au niveau du contact. Les deux demi-tôles sont ainsi considérées comme élastiques, on peut donc écrire :

$$f_{int}(u) = Ku \quad (8)$$

où  $K$  est la matrice de rigidité des tôles.

Étant donné la nature non-linéaire du problème au niveau du contact, la résolution se fait de manière itérative avec la linéarisation de l'équation (7). Pour un incrément de pseudo-temps  $n + 1$ , l'actualisation du déplacement est obtenue en résolvant le problème linéarisé :

$$\left[ K - K_{contact} \left( u_{n+1}^{(i)} \right) \right] \Delta u_{n+1}^{(i)} = -r \left( u_{n+1}^{(i)} \right) \quad (9)$$

où :  $K_{contact} \left( u_{n+1}^{(i)} \right) = \int_{\Gamma_c} N_{int}^T Q D \left( \left[ u_{n+1}^{(i)} \right]_{n,t} \right) Q^T N_{int} d\Gamma_c$  est la matrice tangente de linéarisation du contact,  $\Delta u_{n+1}^{(i)} = u_{n+1}^{(i+1)} - u_{n+1}^{(i)}$  est la variation du champ de déplacement.

## 4. Cas d'application : compression de deux tôles en contact

### 4.1 Comportement élastique

Nous considérons, dans un premier temps, un contact purement élastique. Le modèle présenté précédemment est implémenté dans Matlab. Le Volume Élémentaire Représentatif, composé de deux demi-tôles et d'une zone de contact est représenté Figure 5, le VER est défini par une longueur  $L$ , une hauteur notée  $h$  et une profondeur de 1 mm. Les déformations sont supposées planes. Les déplacements dans la direction  $y$  sont bloqués en  $y = 0$ , les déplacements dans la direction  $x$  sont bloqués en  $(0,0)$ . Une pression uniforme variant de 0 à 10 MPa est appliquée au système sur la face  $y = h$ . Le déplacement moyen est calculé sur la face  $y = h$ .

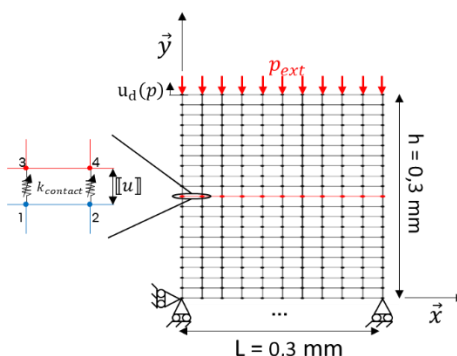


Figure 5 – Conditions aux limites appliquées au système

Différentes nuances d'acier sont utilisées pour ce calcul dont les propriétés sont définies Table 1. Étant donné la difficulté de mesure du rayon des aspérités, nous prenons de manière arbitraire un rayon moyen des aspérités  $R = 10 \mu m$  pour chaque nuance de tôle.

Les résultats en termes de pression appliquée / déplacement obtenu sont présentés Figure 6. Cette étude met en avant l'influence du paramètre de l'état de surface sur le comportement du VER (comparaison des Tôles n°2 et n°3). On peut également constater que la sensibilité au module élastique semble moins importante que celle à la rugosité (Tôles n°1 et n°2).

Table 1 – Propriétés mécaniques des nuances d’acier

Nom de la tôle	Module d’élasticité [GPa]	Rugosité $\sigma_a$ [ $\mu\text{m}$ ]
Tôle n°1	154	0,93
Tôle n°2	208	0,93
Tôle n°3	208	1,26

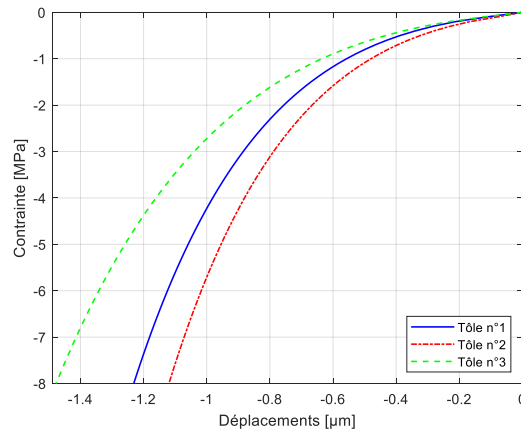


Figure 6 – Comportement élastique de deux demi-tôles en compression

#### 4.2 Comportement élasto-plastique

Pour cette étude, le contact élasto-plastique défini section 3 est implémenté dans le modèle (Figure 5). Les paramètres matériaux utilisés sont issus de la Tôle n°1 (Table 1). Les conditions aux limites sont identiques à celles de la partie 4.1. La pression est appliquée avec un cycle de charge-décharge comme suit (Figure 7 (b)) : une charge de 0 MPa à 6 MPa, une décharge de 6 MPa à 0,05 MPa et une charge de 0,05 MPa à 7,8 MPa. Les résultats sont présentés Figure 7 (a).

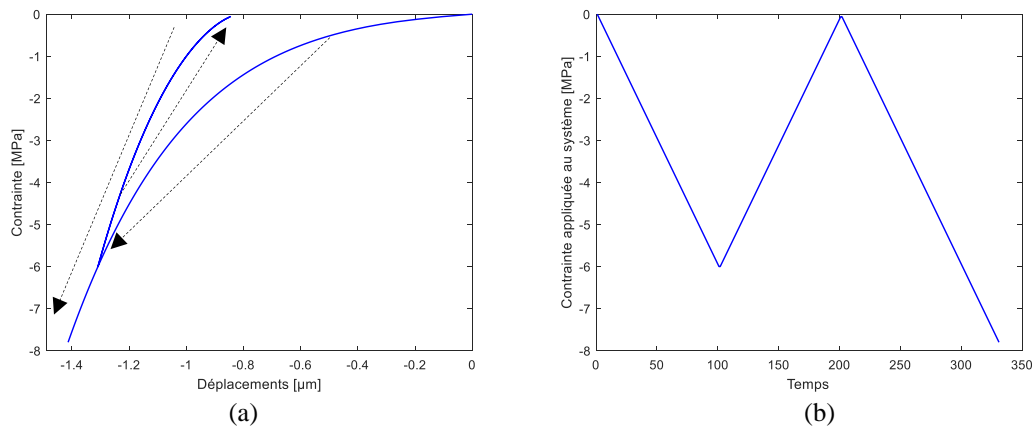


Figure 7 – Comportement élasto-plastique (à gauche) et cycle de charge-décharge appliqué au système (à droite)

Sur la Figure 7 (a), nous remarquons l’apparition d’un déplacement résiduel lors de la décharge, typique du comportement plastique implémenté. En comparant le comportement élasto-plastique de la Figure 7 avec la courbe associée à la Tôle n°1 de la Figure 6, nous obtenons des comportements de même nature avec, pour une pression de 7,8 MPa, un déplacement maximum du modèle élasto-plastique légèrement plus élevé que pour le comportement purement élastique (environ 0,2  $\mu\text{m}$  d’écart).



## 5. Conclusion

Nous avons, dans ces travaux, proposé une stratégie de modélisation d'empilement de tôles en se concentrant sur un Volume Élémentaire Représentatif de la géométrie du stack. Nous nous sommes focalisés dans un premier temps sur la définition du modèle de contact pour ensuite définir son implémentation dans un modèle éléments finis. Enfin, un cas d'étude sur le volume élémentaire modélisé est présenté afin d'illustrer les différents modèles utilisés.

Les perspectives envisagées sont, dans un premier temps, de finaliser les modèles de contact avec l'ajout du contact dans la direction tangentielle, puis de proposer une méthode de transition d'échelle pour construire un modèle de comportement macro équivalent. Ces éléments seront présentés lors du congrès. Il s'agira ensuite de recalibrer le modèle développé via une campagne d'essai comprenant d'une part, des essais de compression avec décharges sur plusieurs cycles et d'autre part, des essais de frottement. Ces essais seront réalisés sur plusieurs nuances d'acier et permettront de mener l'identification des modèles aux échelles méso et macroscopique. Les résultats issus des essais pourront être comparés aux modèles issus de l'analyse micro des états de surface des tôles étudiées. Enfin, nous envisageons le passage du modèle en 3D afin de considérer la complexité géométrique d'un stack ainsi que son comportement anisotrope.

## Références

- [1] G. Mogenier, R. Dufour, G. Ferraris-Besso & all. *Identification of lamination stack properties : application to high-speed induction motors*, IEEE Transaction on industrial electronics, pp.1-8, 2010.
- [2] M. Topenot. *Dimensionnement et tenue dynamique de pièces de rotors électriques sous excitations MLI*. Mécanique [physics]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2021.
- [3] J.-B. Dupont, P. Bouvet, L. Humbert, *Vibroacoustic simulation of an electric motor: methodology and focus on the structural FEM representativity*, IEEE, pp. 3027-3033, 2012.
- [4] P. Millithaler, E. Sadoulet-Reboul, M. Ouisse, & all. *Identification of representative anisotropic material properties accounting for friction and preloading effects: A contribution for the modelling of structural dynamics of electric motor stators*. Journal of Vibration and Control, SAGE Publications, pp. 1-29. 2016.
- [5] V. Luchscheider. *Experimentelle und Numerische Identifikation eines homogenisierten Materialmodells für Blechpakete elektrischer Maschinen*. Dissertation, Technischen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2015.
- [6] M.V. Baloglu. *Identifikation eines Materialmodells geschichteter Blechpakete im Rahmen einer Zwei-Skalen-Modellierung*. Dissertation, Technischen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2021.
- [7] D. Görke. *Experimentelle und numerische Untersuchung des Normal- und Tangentialkontaktverhaltens rauher metallischer Oberflächen*. Dissertation, Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg, pp. 51-61. 2010.
- [8] J.H. Zhao, S. Nagao, Z.L. Zhang, *Loading and unloading of a spherical contact: From elastic–perfectly plastic materials*, International Journal of Mechanical Sciences 56. pp. 70–76. 2012.
- [9] Y. Kadin, Y. Kligerman, I. Etsion, *Unloading an elastic–plastic contact of rough surfaces*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 54. pp. 2652–2674. 2006.
- [10] J.A. Greenwood, B.P. Williamson, *Contact of nominally flat surfaces*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 295, No. 1442. pp. 300-319. 1966.
- [11] Y.L. Lee, *Application of the zero-thickness interface element approach to the upper bound limit analysis of shallow tunnel excavation*, IOP Conference Series: Material Science and Engineering 657 012004, 2019.
- [12] V.P. Nguyen, *An open-source program to generate zero-thickness cohesive interface elements*, Advance in Engineering software 74. pp.27-39. 2014.
- [13] A.W. Bush, R.D. Gibson, T.R. Thomas, *The elastic contact of a rough surface*, Wear 35, pp.87-111. 1975.
- [14] R.S. Sayles, T.R. Thomas, *Computer simulation of the contact of rough surfaces*, Wear 49, pp.273-296. 1978.
- [15] L. Kogut, I. Etsion, *Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat*, Journal of Applied Mechanics, 2002, Vol. 69, pp.657-662
- [16] J.A. Greenwood, J.H. Tripp, *The contact of two nominally flat rough surfaces*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1970, Vol 185, pp. 625-633.