



HAL
open science

Méthode espace-temps pour la fissuration en élastodynamique

Fabrice Kevine Feutang, Stéphane Lejeunes, Dominique Eyheramendy

► **To cite this version:**

Fabrice Kevine Feutang, Stéphane Lejeunes, Dominique Eyheramendy. Méthode espace-temps pour la fissuration en élastodynamique. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610970

HAL Id: hal-04610970

<https://hal.science/hal-04610970v1>

Submitted on 3 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode espace-temps pour la fissuration en élastodynamique

F. Feutang¹, S. Lejeunes¹, D. Eyheramendy¹

¹ LMA, Aix-Marseille Université, Centrale-Marseille, CNRS, {feutang,lejeunes.eyheramendy}@lma.cnrs-mrs.fr

Résumé — Nous proposons dans cette communication une extension de l'approche présentée en 2022, voir [1], au cas de l'élastodynamique. L'originalité principale consiste à construire un potentiel espace-temps, en Galerkin discontinu (en temps), adapté à l'approche champs de phase avec des termes de stabilisation bien choisis vis à vis de l'élastodynamique. La stationnarité de ce potentiel permettant d'obtenir une forme faible espace-temps que l'on peut discrétiser avec des éléments-finis classique (Lagrange) ou NURBS (analyse isogéométrique). Nous appliquons ce type d'approche à différents problèmes de fissuration.

Mots clés — champs de phase, espace-temps, élastodynamique, analyse isogéométrique.

1 Introduction

Dans [1], nous avons proposé une première approche espace-temps pour la fissuration fragile en quasi-statique. Pour ce faire nous avons repris la formulation variationnelle incrémentale proposée par [2] pour un modèle de champs de phase. Les travaux de Christian Miehe et de ces co-auteurs étant eux-même fortement inspirés des travaux originaux de Francfort et Marigo et de Frémond et Nedjar (cf. [3, 4]). Le lien entre principe variationnel incrémental et formulation espace temps étant assez naturel d'autant plus dans le cas d'une formulation en Galerkin discontinue en temps. Cependant, dans nos travaux précédent nous n'avions pas encore su exprimer correctement le potentiel espace-temps nous permettant de retrouver la structure des équations d'Euler du problème de champs de phase, les termes de continuité en temps n'étaient pas motivés énergétiquement (ce qui nous imposait de faire intervenir des paramètres numériques supplémentaires) et nous avons utilisé une forme de type visqueuse pour introduire le champs de phase et pour garantir l'irréversibilité, qui est de loin la moins bonne solution pour traiter cette irréversibilité dans le cas de la fissuration fragile.

Sur le plan numérique il est connu que les modèles de champs de phase sont tout à la fois très intéressants pour leur capacité à traiter des situations complexes (bifurcation de fissures, contact unilatéral dans le cas de chargement cycliques, etc) et très techniques et gourmand en calcul car il faut des maillages localement assez fins (à minima deux fois plus fin que la longueur caractéristique introduite dans le champs de phase) et des solveurs adaptés (à cause de la non-convexité intrinsèque de la formulation) de type minimisation alternée ou monolithique mais avec une gestion particulière de l'opérateur tangent. Dans le cadre de l'élastodynamique ces contraintes numériques se combinent également avec celles liées à la propagation des ondes. La question de la gestion de l'irréversibilité de l'endommagement est également une problématique particulière dans les approches en champs de phase et l'on distingue différentes techniques dans la littérature : des méthodes pénalisées ou en lagrangien perturbé (voir par exemple [5]), des méthodes de minimisations spécifiques (aussi basées sur une formulation en Lagrangien, voir par exemple [6]) et la formulation basée sur la fonction d'histoire proposée par Miehe et ses co-auteurs. Cette dernière solution n'étant pas strictement équivalente au problème de départ mais elle représente un moyen simple et efficace sur le plan numérique. Nous utilisons cette stratégie dans ce travail.

Enfin les approches espace-temps sont de nouveau largement investiguées (les premiers travaux datant du début des années 70) dans la littérature. Il existe ainsi aujourd'hui une vaste littérature sur le sujet et certaines équipes arrivent à traiter des problèmes d'intérêt industriel avec ce type de méthode (voir par exemple les travaux de [7]). Cependant, à notre connaissance, le cas de la fissuration fragile n'a pas fait l'objet d'études dans un cadre espace-temps. Pour le cas de l'élastodynamique (en petite et grandes déformations) nous avons étudié, dans un travail précédent, une formulation espace temps incluant des termes de stabilisation de type moindres carrés qui sont indépendants de loi de comportement utilisée

(voir [8]). Dans ce travail nous proposons d'intégrer ces termes dans la formulation afin d'investiguer leur intérêt sur un problème de propagation de fissures en dynamique.

2 Formulation du problème

2.1 Potentiel espace-temps

On note $Q = \Omega \times [0, T]$ le domaine espace temps d'intérêt et $P = \Gamma \times [0, T]$ une partie de son contour. Nous nous limitons ici au cas des comportements élastiques, isotropes en petites perturbations et nous proposons de considérer le potentiel espace-temps suivant (les champs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, d$ correspondant respectivement au déplacement, à la vitesse et à l'endommagement, \mathbf{f} et \mathbf{t} étant les forces extérieures volumiques et surfaciques) :

$$\bar{\Pi} = \int_Q \dot{k}_{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) + \rho \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) - \varphi(\dot{d}, \nabla d) - p_{GAC}(\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) dQ + \int_Q \dot{\mathbf{u}} \mathbf{f} dQ + \int_P \dot{\mathbf{u}} \mathbf{t} dP \quad (1)$$

ou, k_{HR} est une forme d'énergie cinétique de type Hellinger-Reisner (avec ρ la masse volumique qui est supposée constante) :

$$k_{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 - \rho \mathbf{v} \dot{\mathbf{u}} \quad (2)$$

et p_{GAC} est un terme de stabilisation de type moindre carré (qui correspond à une condition de consistance sur l'accélération) avec τ qui est un paramètre adimensionné de stabilisation :

$$p_{GAC}(\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \tau \rho (\ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}})^2 \quad (3)$$

l'énergie libre (ou ici l'énergie de déformation) est noté ψ et nous utilisons la décomposition compression (désignée par un exposant -)/traction (désignée par un exposant +) :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = g(d) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4)$$

avec $g(d)$ une fonction de dégradation. La dissipation est notée φ et s'exprime ici de la manière suivante :

$$\varphi(\dot{d}, \nabla d) = Y_d \dot{d} + \mathbf{Y}_{\nabla d} \nabla d + I_d \quad (5)$$

où Y_d et $\mathbf{Y}_{\nabla d}$ sont les forces thermodynamiques associées à l'endommagement et au gradient d'endommagement, I_d est la fonction indicatrice :

$$I_d = \begin{cases} 0 & \text{if } d \geq 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

qui peut éventuellement être approchée (régularisé) par la forme pénalisée suivante :

$$I_d^\gamma = \frac{\gamma}{p+1} < d >_-^{p+1} \quad (7)$$

avec p et γ des paramètres de pénalisation.

L'écriture de la stationnarité du potentiel espace temps nous amène au jeu d'équations suivant (après intégration par partie sur le domaine temporel) :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{u}} \bar{\Pi} &\equiv \int_Q \rho \dot{\mathbf{v}} \delta \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dQ - \int_Q \delta \dot{\mathbf{u}} \mathbf{f} dQ - \int_P \delta \dot{\mathbf{u}} \mathbf{t} dP \\ &\quad + \int_Q \rho \tau (\ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) \delta \ddot{\mathbf{u}} dQ = 0 \\ \delta_{\mathbf{v}} \bar{\Pi} &\equiv \int_Q \rho (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \delta \dot{\mathbf{v}} dQ + \int_Q \rho \tau (\ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) \delta \dot{\mathbf{v}} dQ = 0 \\ \delta_d \bar{\Pi} &\equiv \int_Q (\rho g'(d) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + Y_d - \gamma < d >_-^p) \delta d + \mathbf{Y}_{\nabla d} \delta \nabla d dQ = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

On peut en déduire donc les équations d'Euler suivantes (en prenant le cas non stabilisé et non régularisé : $\tau = 0$ et $\gamma = 0$ et en faisant l'hypothèse que $\mathbf{Y}_{\nabla d} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ) :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}} \\ \rho (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{div} \mathbf{Y}_{\nabla d} = \rho g'(d) \psi_0^+ + Y_d \end{cases} \quad (9)$$

où $\boldsymbol{\sigma} = g(d) \partial \psi_0^+ / \partial \boldsymbol{\varepsilon} + \partial \psi_0^- / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$ sur Γ . On reconnaît donc l'équation de conservation du premier moment, une équation de définition du champs de vitesse et une équation de champs de phase.

Dans ce travail nous avons principalement considéré le découplage proposé par [9] pour l'énergie de déformation, tel que (l'exposant D désignant la partie déviatorique) :

$$\rho \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu (\boldsymbol{\varepsilon}^D : \boldsymbol{\varepsilon}^D) + \frac{k}{2} (\langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+)^2, \quad \rho \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{k}{2} (\langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_-)^2 \quad (10)$$

avec μ et k les coefficients d'élasticité. Pour l'endommagement on utilise le modèle AT2 pour, qui conduit à prendre la fonction de dégradation suivante : $g(d) = (1-d)^2$ et pour les forces thermodynamiques nous faisons la même hypothèse que dans [2] :

$$Y_d = \frac{G_c}{l} d, \quad \mathbf{Y}_{\nabla d} = G_c l \nabla d \quad (11)$$

avec l une longueur caractéristique et G_c l'énergie critique de rupture.

La forme faible du système d'équations (8) pourrait être directement utilisée pour construire une forme discrétisée espace-temps de type Galerkin continue. Cependant il faut d'une part gérer la non convexité du système et d'autre part itérer, à l'aide d'une méthode de Newton, pour résoudre le système non-linéaire obtenu sur tout le domaine espace-temps. La recherche de solution dans le cadre de fissurations fragiles devenant extrêmement complexe et très sensible aux paramètres numériques (maillage, valeur des paramètres de pénalisation et tolérances numériques, etc).

Afin de pallier, partiellement, à ces problèmes nous proposons plutôt de considérer une forme de type Galerkin discontinue en temps

2.1.1 Forme en Galerkin discontinue en temps

On note Q_i le «slab» espace temps défini tel que : $Q_i = \Omega \times]t_i, t_{i+1}[$ (et $P_i = \Gamma \times]t_i, t_{i+1}[$). La discrétisation du domaine espace-temps s'écrit donc $Q_h = \cup_i Q_i$. Nous considérons également les sauts temporels (d'un slab espace temps à un autre) des champs primaires considérés défini par :

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)]] &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i^+) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i^-) \\ [[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i)]] &= \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i^+) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i^-) \\ [[d(\mathbf{x}, t_i)]] &= d(\mathbf{x}, t_i^+) - d(\mathbf{x}, t_i^-) \end{aligned} \quad (12)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i^+)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i^+)$, $d(\mathbf{x}, t_i^+)$, désignent les valeurs au temps t_i sur le slab Q_i et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i^-)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i^-)$, $d(\mathbf{x}, t_i^-)$ désignent les valeurs au même temps t_i mais sur le slab Q_{i-1} .

Le potentiel espace-temps précédent est donc modifié pour intégrer ces termes tel que nous proposons de considérer la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_{TDG} &= \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} (\dot{k}_{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) + \rho \dot{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) - \varphi(\dot{d}, \nabla d) - p_{GAC}(\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{v}})) dQ + \sum_{i=2}^N \int_{B_i} [[k_{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}})]] dB \\ &+ \sum_{i=2}^N \int_{B_i} [[\rho \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d)]] dB + \frac{1}{2} \int_{B_1} \alpha_u (u(\mathbf{x}, t_i^+) - u_0(\mathbf{x}))^2 dB + \frac{1}{2} \int_{B_1} \alpha_v (v(\mathbf{x}, t_i^+) - v_0(\mathbf{x}))^2 dB \\ &+ \frac{1}{2} \int_{B_1} \alpha_d (d(\mathbf{x}, t_i^+) - d_0(\mathbf{x}))^2 dB + \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} \dot{\mathbf{u}} \mathbf{f} dQ + \sum_{i=1}^N \int_{P_i} \dot{\mathbf{u}} \mathbf{t} dP \end{aligned} \quad (13)$$

Les termes de continuités correspondent donc à une continuité des énergies cinétique et de déformation entre slab espace-temps et à une forme faible des conditions initiales. Les paramètres α_u , α_v et α_d sont

ici introduits pour correctement dimensionner le potentiel mais seront par la suite pris égaux à 1 pour simplifier.

Nous pouvons ensuite écrire les conditions de stationnarité du potentiel espace-temps. Comme précédemment nous utilisons des intégrations par parties sur le domaine temporel, par ailleurs pour des raisons numériques nous proposons de remplacer la fonction de pénalisation par la fonction d'histoire, \mathcal{H} , proposée par C. Miehe et ses co-auteurs (voir [2]). Nous obtenons ainsi sur les slab Q_i avec $2 \leq i \leq N$:

$$\begin{aligned} \delta_u \Pi_{TDG} &\equiv \int_{Q_i} \rho \dot{\mathbf{v}} \delta \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dQ - \int_{Q_i} \delta \dot{\mathbf{u}} \mathbf{f} dQ - \int_{P_i} \delta \dot{\mathbf{u}} \mathbf{t} dP + \int_{Q_i} \rho \tau (\ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) \delta \dot{\mathbf{u}} dQ - \\ &\int_{B_i} [[\boldsymbol{\sigma}]] : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^+ dB = 0 \\ \delta_v \Pi_{TDG} &\equiv \int_{Q_i} \rho (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \delta \dot{\mathbf{v}} dQ + \int_{Q_i} \rho \tau (\ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) \delta \dot{\mathbf{v}} dQ - \int_{B_i} [[\rho \mathbf{v}]] \delta \mathbf{v}^+ dB = 0 \\ \delta_d \Pi_{TDG} &\equiv \int_{Q_i} [(\rho g'(d) \mathcal{H}(\psi_0^+(\varepsilon)) + Y_d) \delta d + \mathbf{Y}_{\nabla d} \delta \nabla d] dQ - \int_{B_i} \left[\left[\frac{\partial \Psi}{\partial d} \right] \right] \delta d^+ dB = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

pour le premier slab espace-temps, Q_1 , les conditions de continuité pour chaque champ sont remplacées par les conditions initiales. On constate donc que l'on obtient une forme itérative ou la solution est calculée en "avançant" sur les slab espace-temps. D'autre part, il n'est pas nécessaire dans cette formulation d'introduire des paramètres numériques supplémentaires pour les termes de continuité temporelle. La dérivation du système d'équations à discrétiser à partir d'un potentiel espace-temps permet d'obtenir très naturellement ces termes de manière systématique pour différents type de problèmes (fissuration ductile ou couplage thermomécanique par exemple).

2.2 Discrétisation éléments-finis (ou IGA) et résolution

Pour résoudre le système d'équations (14), nous utilisons tout d'abord une approximation éléments finis classique (ou IGA). Il suffit de mailler un slab espace-temps (ou dans cas de l'IGA l'espace paramétrique correspondant) et d'utiliser sur chaque élément une approximation espace-temps, tel que les champs sont définis à partir des expressions suivantes (idem pour les fonctions tests) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e^h(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_u(\mathbf{x}, t) \mathbf{d}_e^u \\ \mathbf{v}_e^h(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_v(\mathbf{x}, t) \mathbf{d}_e^v \\ \mathbf{d}_e^h(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_d(\mathbf{x}, t) \mathbf{d}_e^d \end{aligned} \quad (15)$$

ou \mathbf{d} est le vecteur global des degrés de libertés nodales (ou des points de contrôle dans le cas de l'IGA) et \mathbf{N} les matrices d'approximations construites à partir de polynômes de Lagrange ou de fonction NURBS. Ces approximations pouvant être choisies d'ordre polynomial différent ou identique pour chaque champ (et/ou d'ordre de continuité différent dans le cas IGA). On peut ensuite facilement définir tous les opérateurs de dérivations temporel, spatial ou mixte nécessaire. La formulation proposée nécessite à minima des fonctions d'ordre 2. D'autre part, le problème à résoudre n'est pas convexe mais peut-être traité par un algorithme de minimisation alternée avec des itérations de type point fixe. On résout ainsi successivement le problème non-linéaire déplacement/vitesse en figeant l'endommagement (avec une méthode de Newton) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}^u \\ \mathbf{d}^v \end{Bmatrix} \Leftarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^u \\ \mathbf{d}^v \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} \\ K_{vu} & K_{vv} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_u \\ \tilde{\mathbf{r}}_v \end{Bmatrix} \quad (16)$$

puis le problème (dans le cas présent linéaire) de l'endommagement en figeant le déplacement et la vitesse :

$$\{ \mathbf{d}^d \} = [K_{dd}]^{-1} \{ \mathbf{f}^d \} \quad (17)$$

avec K désignant les termes de la matrice tangente et \mathbf{r} le vecteur résidu. Les itérations de point fixe s'arrêtent pour un critère donné (ici nous utilisons un critère sur la norme infinie de l'incrément d'endommagement). Une fois la solution trouvée sur un slab espace-temps on peut passer au suivant. Dans

| | | | |
|--------|------------|------------|-------------|
| E | ρ | G_c | l |
| $1 Pa$ | $1 Kg/m^3$ | $0.05 N/m$ | $2.e - 3 m$ |

TABLE 1 – Paramètres matériaux

le cas ou la résolution alternée ne convergerait pas, on effectue une opération de réduction homotopique du domaine temps sur le maillage espace-temps et l'on re-teste la minimisation alternée avec un slab de plus petite taille en temps. La fonction d'histoire \mathcal{H} revient ici à chercher pour chaque point d'intégration concerné le maximum de son argument sur toute l'histoire précédente des slab espace-temps. En pratique il est donc juste nécessaire d'avoir en mémoire le maillage d'un seul slab et de stocker les valeurs courantes et précédentes des degrés de libertés au nœuds (ou points de contrôles) ainsi que le maximum de l'énergie de déformation précédemment atteint en chaque point d'intégration (comme on le ferait pour une variable interne).

3 Application numérique

Nous considérons à titre d'exemple le cas de la fragmentation d'une barre (1D) soumise à une vitesse de déformation initialement homogène. Cet exemple est notamment traité dans [10] avec une approche originale utilisant également une forme avec gradient d'endommagement. La solution attendue correspond à une fragmentation de la barre avec un nombre de fragment qui dépend de la vitesse de déformation. Afin de faciliter la recherche de solution, comme dans [10] nous adoptons une distribution statistique du module d'Young en chaque point de la barre, tel que :

$$E(\alpha) = E_0 \sqrt{(-\ln(\alpha))} + E_{min} \quad (18)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$ une variable aléatoire, E_0 et E_{min} qui sont définis par :

$$E_{min} = E(1 - 1.9130584e - 2), \quad E_0 = E(2.1586552e - 2) \quad (19)$$

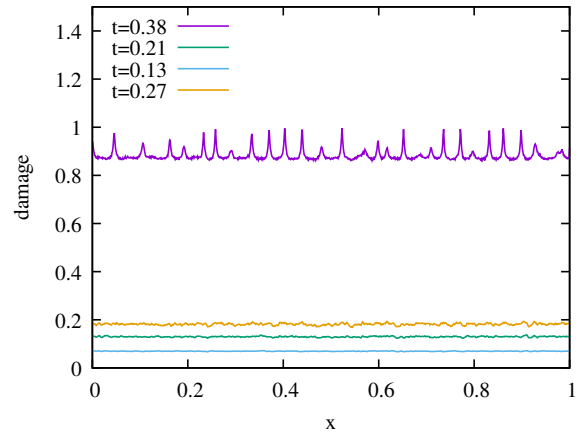
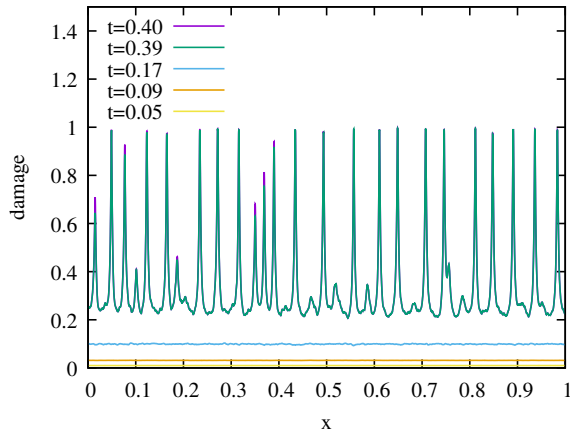
La barre et prise de longueur $L = 1 m$ et les paramètres utilisés sont donnés dans le tableau 1.

Sur la figure 1, nous présentons les résultats obtenus avec des éléments-finis standards quadratiques ou des éléments NURBS quadratiques. On obtient donc bien les solutions attendues de multiples localisation des fissures (fragmentation). Nous remarquons cependant que ce type de résultat est plus difficile à obtenir avec des éléments-finis standard qu'avec l'IGA et qu'il faut en général une discrétisation spatiale plus fine en éléments-finis pour obtenir une solution avec de multiples fissures. On peut émettre l'hypothèse que l'ordre de continuité inter-éléments plus élevé avec l'IGA est à l'origine de ce comportement.

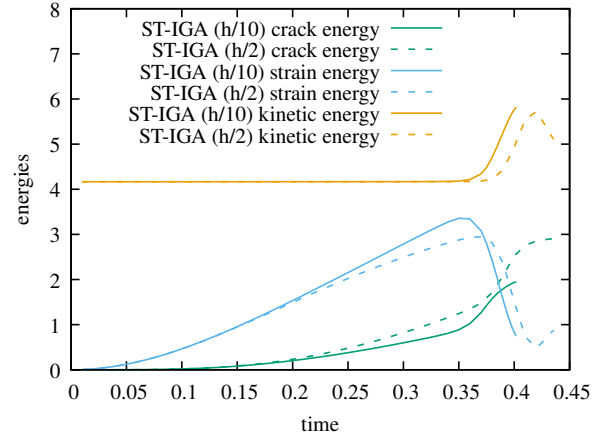
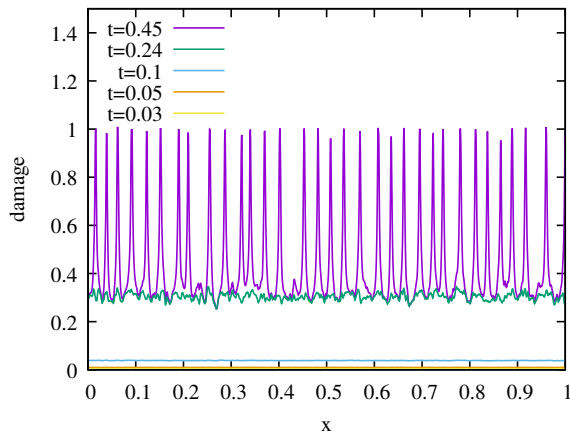
La figure 1(d) montre que les énergies obtenues avec l'IGA pour $\Delta x = l/2$ et $\Delta x = l/10$ sont similaires même si l'énergie de déformation est plus faible et que l'énergie de fissuration est surestimée avec le maillage le plus grossier. La même figure montre également que pour le taux de déformation initialement choisi, l'apparition de fissures libère de l'énergie cinétique (localement) qui a un impact sur l'énergie cinétique totale de la barre.

La figure 2 montre les résultats obtenus à un taux de déformation plus élevé (avec l'IGA). Comme le montre la littérature, le nombre de fragments augmente avec la vitesse de déformation. Il est également intéressant de remarquer que le bilan énergétique est différent. L'énergie cinétique n'est plus affectée par l'apparition de fissures. L'énergie de fissuration augmente également jusqu'à la fragmentation totale, même si l'énergie de déformation a commencé à diminuer. On peut donc supposer qu'une augmentation supplémentaire de la vitesse de déformation (tout en maintenant les paramètres du modèle d'endommagement inchangés) n'augmentera pas outre mesure le nombre de fragments, mais modifiera seulement l'énergie cinétique totale et le temps d'apparition des fissures.

D'autres exemples (essentiellement académiques) seront présentés afin de discuter les propriétés numériques de ce type de formulation.

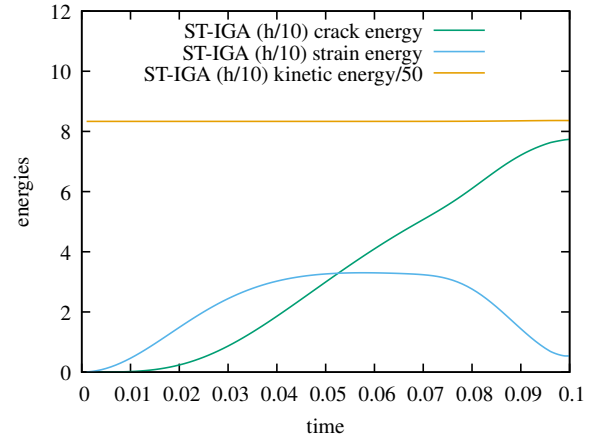
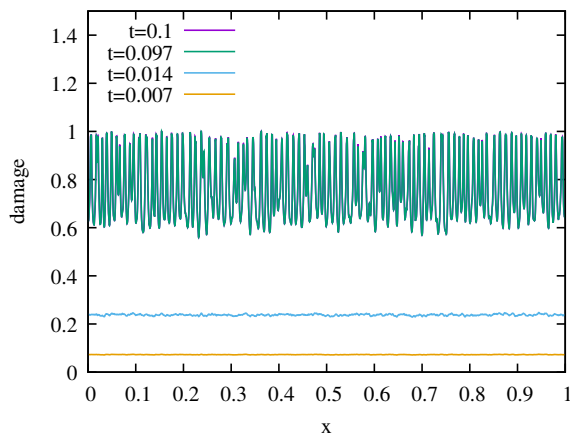


(a) Endommagement le long de la barre à différents instants, IGA p2 avec $\Delta x = l/10$ (b) Endommagement le long de la barre à différents instants, ST-FE p2 avec $\Delta x = l/10$



(c) Endommagement le long de la barre à différents instants, IGA p2 avec $\Delta x = l/2$ (d) Énergies en fonction du temps, IGA p2

FIGURE 1 – Résultats du test de fragmentation de la barre pour différentes réalisations du module d'Young et pour un taux initial de déformation $\dot{\epsilon} = 10$, avec $\tau = 1.e - 3$ et $\Delta t_0 = 1.e - 2$ (x correspond à la position le long de la barre)



(a) Endommagement le long de la barre à différents instants, IGA p2 avec $\Delta x = l/10$ (b) Énergies en fonction du temps, IGA p2

FIGURE 2 – Résultats du test de fragmentation de la barre pour un taux initial de déformation $\dot{\epsilon} = 100$, avec $\tau = 1.e - 3$ et $\Delta t_0 = 1.e - 3$, IGA p2 avec $\Delta x = l/10$

4 Conclusion

L'approche proposée permet de traiter des problèmes de fissuration en dynamique dans un cadre original qui ouvre sur plusieurs perspectives. Tout d'abord, la construction de la formulation à l'aide d'un potentiel espace-temps est suffisamment générique pour pouvoir être étendue à d'autres problématique comme la fissuration ductile ou le couplage thermo-mécanique. D'autre part, les termes de stabilisations qui permettent bien de limiter les phénomènes d'oscillations numériques indésirables, permettent d'obtenir des performances numériques intéressantes pour des applications de type fragmentation solide lorsqu'elles sont utilisées conjointement avec une approche IGA (au moins sur un cas 1D). Il reste à étendre ces premiers résultats sur des configurations plus complexes (2D et 3D). Enfin, on peut certainement jouer sur la grille (ou les grilles si elles sont différentes pour chacun des champs considérés) temporelle de manière à combiner forme en Galerkin continue et discontinue de manière à mettre en place des méthodes de parallélisation espace-temps efficaces y compris sur des problèmes fortement non-linéaires comme dans le cas présent.

4.1 Références bibliographiques

Références

- [1] F. Feutang, S. Lejeunes, D. Eyheramendy. *Sur une approche espace-temps isogéométrique des modèles à gradient d'endommagement*, CSMA, 2022.
- [2] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker. *Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations*. International journal for numerical methods in engineering, 1273–1311, 2010.
- [3] G.A. Francfort, J.J. Marigo, *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1319–1342, 1998.
- [4] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage, gradient of damage and principle of virtual power*. International journal of solids and structures, 1083–1103, 1996.
- [5] M. Ambati, T. Gerasimov, L. De Lorenzis, L., *Phase-field modeling of ductile fracture*. Computational Mechanics, 1017–1040, 2015.
- [6] K. Pham, H. Amor, J.J. Marigo, C. Maurini., *Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture*. International Journal of Damage Mechanics, 618–652, 2011.
- [7] T.E. Tezduyar, K. Takizawa, *Space–time computational flow analysis : Unconventional methods and first-ever solutions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023.
- [8] C. Saadé, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, R. Saad, *Space-Time Isogeometric Analysis for linear and non-linear elastodynamics*. Computers and Structures. 2021
- [9] H. Amor, J.J. Marigo, C. Maurini, *Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1209–1229, 2009
- [10] N. Moës, B. Lé, A. Stershic, A., *Fragmentation analysis of a bar with the lip-field approach*, Mechanics of Materials. 2022