



**HAL**  
open science

# La Méthode des Points Matériels (MPM) couplée avec Galerkin discontinu et l'intégrateur temporel ADER

Alaa Lakiss, Thomas Heuze, Mikhael Tannous, Laurent Stainier

► **To cite this version:**

Alaa Lakiss, Thomas Heuze, Mikhael Tannous, Laurent Stainier. La Méthode des Points Matériels (MPM) couplée avec Galerkin discontinu et l'intégrateur temporel ADER. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610967

**HAL Id: hal-04610967**

**<https://hal.science/hal-04610967v1>**

Submitted on 28 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# La Méthode des Points Matériels (MPM) couplée avec Galerkin discontinu et l'intégrateur temporel ADER

A. Lakiss<sup>1</sup>, T. Heuzé<sup>1</sup>, M. Tannous<sup>2</sup>, L. Stainier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GeM, Ecole Centrale de Nantes, {alaa.lakiss,thomas.heuze,laurent.stainier}@ec-nantes.fr

<sup>2</sup> Lebanese University, Faculty of Engineering, Tripoli, Lebanon.

**Résumé** — La Méthode des Points Matériels couplée avec une approximation Galerkin discontinu [1] est une méthode prometteuse pour traiter des problèmes d'impact sur des solides subissant de grandes déformations. On présente dans ce travail une extension de cette méthode aux approximations d'ordre arbitrairement élevé. Ceci est réalisé grâce à l'intégrateur temporel ADER, qui d'une part permet de construire une projection particule vers grille de haut ordre, et d'autre part assure que les variables internes restent toujours définies aux points matériels en y définissant les degrés de liberté d'un champ "prédit" calculé au cours de la méthode.

**Mots clés** — Discontinuous Galerkin Material Point Method, Schéma ADER, Grandes déformations, Impact sur des solides, Problèmes hyperboliques

## 1 Introduction

Le dimensionnement de structures face à des chargements de type impact nécessite des méthodes de calcul permettant d'avoir accès à une bonne approximation autant des états transitoires que des états résiduels. D'une part, ces méthodes doivent pouvoir offrir une approximation correcte des ondes continue ou discontinue se propageant dans le milieu. D'autre part, elle doivent pouvoir être suffisamment robustes et précises pour s'adapter aux grandes transformations subies par la pièce.

La construction de méthodes numériques couplant une approximation non-oscillante des champs à une capacité de décrire des grandes déformations avec une approche lagrangienne reste un problème non fermé. Des exemples prometteurs viennent de certaines méthodes particulières, dont l'approximation a été adaptée à la capture d'ondes discontinues. La Discontinuous Galerkin Material Point Method (DGMPM) [1] a par exemple couplé la Méthode des Points Matériels [2] avec une approximation Galerkin discontinu [3]. Cette méthode s'est montré prometteuse pour traiter des problèmes d'impact sur des solides, notamment pour des problèmes d'élastoplasticité [4]. Cependant le potentiel du cadre Galerkin discontinu n'a jusqu'à présent pas été exploité puisque son approximation est précise à l'ordre un [5].

L'objet de ce travail est d'étendre la DGMPM à des approximations d'ordre arbitrairement élevé. L'objectif est que cette méthode puisse disposer d'une approximation plus régulière dans les zones où la solution l'est, de sorte à y être moins diffuse, tout en capturant correctement les solutions discontinues de façon non-oscillante là où elles apparaissent. À cet effet, on adapte l'approche ADER (Arbitrary high order DERivative Riemann problem) [6] à la discrétisation spatiale de la DGMPM au travers de deux nouveautés [7]. D'une part le champ "prédit" (ou prédicteur) calculé lors de cette approche inclut une projection des contraintes et des vitesses des points matériels vers la grille de calcul, via une approximation de type moindres carrés mobiles précise à un ordre arbitrairement élevé. D'autre part, les degrés de liberté de ce prédicteur sont à présent définis aux points matériels, de sorte que les variables internes au modèle utilisé et donc leur actualisation y restent toujours définis au cours du calcul.

La méthode est illustrée avec une description cinématique lagrangienne totale comme cela était déjà le cas dans les versions précédentes [1, 5, 4], et sans perte de généralité, au travers d'un problème modèle hyperélastodynamique. En particulier, un cas test simple permet d'illustrer le bon accord entre des solutions numériques calculées avec les méthodes RK-DGFEM, ADER-DGFEM et ADER-DGMPM pour différents ordres d'approximation.

## 2 Problème aux valeurs limites et initiales hyperélastodynamique

### 2.1 Lois de conservation

On considère un milieu continu régi par le système de lois de conservation suivant

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \text{DIV } \mathcal{F} = 0, \quad (1)$$

rassemblant  $M$  équations scalaires, où l'opérateur DIV est défini par rapport aux coordonnées matérielles, et où  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{F}$  sont les vecteurs des quantités conservées et les flux associés, définis tels que

$$\mathcal{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} ; \quad \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{v} \otimes \mathbf{1} \\ -\mathbf{P} \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

La première équation du système (1) exprime la compatibilité géométrique entre le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  et le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ ; la seconde est la conservation de la quantité de mouvement. Les flux peuvent être avantageusement exprimés en fonction d'un vecteur de quantités auxiliaires  $\mathcal{Q} = \langle \mathbf{P} \quad \mathbf{v} \rangle$ , contenant notamment le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$ . Des conditions aux limites et initiales appropriées sont ajoutées au système (1). Par ailleurs, on peut observer que le système (1) se réduit aux conditions de Rankine-Hugoniot au travers de discontinuités des champs

$$S[\mathcal{U}] = [\mathcal{F}] \cdot \mathbf{N}, \quad (3)$$

où  $\mathbf{N}$  est la normale à la surface de discontinuité se propageant à la vitesse  $S$ , et  $[\bullet]$  décrit le saut de la quantité  $(\bullet)$  au travers de la discontinuité, tel que  $[\bullet] = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$ .

### 2.2 Modèle de comportement hyperélastique

On considère un modèle hyperélastique néo-Hookéen dans ce travail, dont l'énergie est donnée par

$$W(\mathbf{F}) = W^H(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{C}}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W^H(J) = \frac{\kappa}{2}(J-1)^2, \\ \bar{W}(\bar{I}_1) = \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3), \end{cases} \quad (4)$$

avec les définitions usuelles

$$\bar{\mathbf{F}} = (J)^{-1/3} \mathbf{F}, \quad \det \bar{\mathbf{F}} = 1 \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = (\bar{\mathbf{F}})^T \cdot \bar{\mathbf{F}}, \quad \bar{I}_1 = \text{tr } \bar{\mathbf{C}}, \quad (6)$$

où  $J$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{I}_1$  sont le jacobien de la transformation, le tenseur de Cauchy-Green droit réduit et son premier invariant respectivement. Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff se déduit de l'expression de l'énergie (4) comme

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}. \quad (7)$$

Il contient des contributions associées aux parties hydrostatique et déviatorique, i.e.  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_H + \mathbf{P}_s$ , qui s'expriment de la façon suivante

$$\mathbf{P}_H = p \mathbf{H}, \quad p = \frac{\partial W^H}{\partial J} = \kappa(J-1) \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_s = \mu \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}}, \quad (9)$$

où  $p$  est la pression hydrostatique, et  $\mathbf{H}$  le co-facteur du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$ .

### 3 Discrétisation Galerkin discontinu du problème et résolution sur la grille de calcul

La configuration initiale  $\Omega_0$  est discrétisée en une collection de points matériels plongés dans une grille de calcul arbitraire, voir la figure 1. Considérons un élément  $\Omega_e$  et un incrément de temps de calcul  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  : étant donné le vecteur des quantités conservées  $\mathbf{U}_p(t_n)$  et le vecteur des quantités auxiliaires  $\mathbf{Q}_p(t_n)$  connus à *chaque point matériel*  $p = 1, \dots, N_p$  de coordonnées initiales  $\mathbf{X}_p$  placés dans la cellule  $e$  à l'instant  $t_n$ , plus éventuellement des variables internes associées, l'objectif est de calculer ces quantités actualisées à l'instant  $t_{n+1}$ .

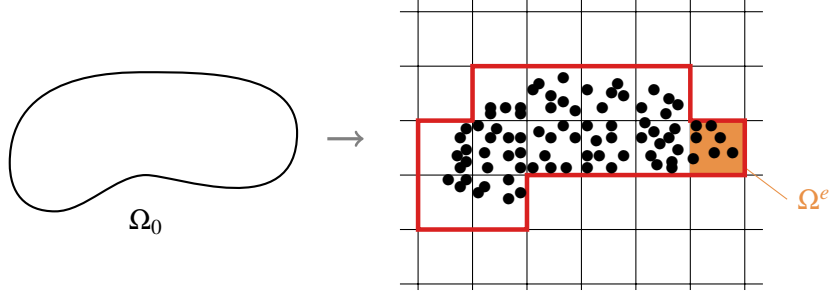


FIGURE 1 – Discrétisation de la configuration initiale  $\Omega_0$  par une collection de particules dans une grille arbitraire.

On considère une approximation Galerkin discontinu (DG) nodale sur chaque élément  $\Omega_e$  de la grille

$$\mathcal{U}_h(\mathbf{X}, t_n)|_{\Omega_e} = \sum_{b=1}^{N_n} \Phi_b(\mathbf{X}) \hat{U}_b^n, \quad (10)$$

qui est *a priori* discontinue au travers des bords d'un élément. Les degrés de liberté  $\hat{U}_b^n$  sont définis à l'instant  $t_n$  et la fonction de forme  $\Phi_b(\mathbf{X})$  est associée au point d'interpolation  $b$ . La forme faible du système (1) intégrée sur  $\Omega_e \times [t_n, t_{n+1}]$ , une fois discrétisée et combinée avec l'approximation DG (10), s'écrit

$$\mathcal{M}(\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{R}(\mathcal{Q}_h) dt, \quad (11)$$

où  $\mathcal{M}$  est la matrice de masse, et  $\mathcal{R}(\mathcal{Q}_h) = \mathbf{F}_v(\mathcal{Q}_h) - \mathbf{F}_s(\mathcal{Q}_h^-, \mathcal{Q}_h^+)$  sont les flux résiduels qui s'écrivent comme la soustraction de flux volumiques et surfaciques, et dépendent du vecteur des quantités auxiliaires  $\mathcal{Q}_h$ . En premier lieu, les flux volumiques  $\mathbf{F}_v(\mathcal{Q}_h)$  s'expriment de façon linéaire en fonction de leur évaluation à chaque point d'interpolation  $b$

$$(\mathbf{F}_v)_{ia} = \mathbf{K}_\alpha^{ab} \mathcal{F}_{i\alpha}(\mathcal{Q}_h(\mathbf{X}_b, \tau_s)); \quad \mathbf{K}_\alpha^{ab} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Phi_a}{\partial X_\alpha} \Phi_b dV \quad (12)$$

où  $\mathcal{F}_{i\alpha}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante des flux  $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F} \cdot \mathbf{E}_\alpha$ , avec  $\mathbf{E}_\alpha$  un vecteur de base,  $\mathcal{Q}_h(\mathbf{X}_b, \tau_s)$  est l'approximation DG du vecteur des quantités auxiliaires évaluée au point d'interpolation spatial  $b$  et à l'instant intermédiaire  $\tau_s$ , et  $\mathbf{K}_\alpha^{ab}$  sont les composantes d'une matrice de pseudo-raideur. En second lieu, les flux surfaciques discrets  $\mathbf{F}_s(\mathcal{Q}_h^-, \mathcal{Q}_h^+)$  sont calculés à chaque interface entre cellules tels que

$$(\mathbf{F}_s)_{ia} = \int_{\partial\Omega_e} \Phi_a \mathcal{F}_{i\alpha}(\mathcal{Q}_h^-, \mathcal{Q}_h^+) \cdot \mathbf{n} da, \quad (13)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega_e$ . Les flux d'interface  $\mathcal{F}_{i\alpha}(\mathcal{Q}_h^-, \mathcal{Q}_h^+)$  sont calculés (à chaque point d'intégration) à partir de la solution d'un problème de Riemann. Des solveurs approximatifs permettent d'en donner des solutions approchées à un coût de calcul raisonnable [8].

Le calcul de l'intégrale temporelle des flux résiduels (11) est effectuée par une quadrature de Gauss

$$\hat{U}_{n+1} = \hat{U}_n + \sum_s \omega_s [\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}(\mathcal{Q}_h(\tau_s), \mathcal{Q}_h^-(\tau_s), \mathcal{Q}_h^+(\tau_s))], \quad (14)$$



où  $\omega_s$  et  $\tau_s \in [0, 1]$  sont les poids et les coordonnées parentes des points d'intégration temporels, respectivement. L'actualisation par quadrature (14) repose sur la capacité à fournir une évaluation du vecteur des quantités auxiliaires  $\mathcal{Q}_h$  aux instants intermédiaires  $\tau_s$ , de sorte à pouvoir calculer  $\mathcal{R}$  de façon explicite à ces instants. *L'approche ADER revient à remplacer l'approximation DG  $\mathcal{Q}_h$  du vecteur des quantités auxiliaires, argument des flux résiduels  $\mathcal{R}$ , par une autre approximation espace-temps  $\mathbf{q}_h(\mathbf{X}, t)$  du même vecteur défini sur le volume de contrôle  $\Omega_e \times [t_n, t_{n+1}]$ , qu'on appelle le prédicteur. Ce prédicteur est solution d'un problème aux valeurs initiales auxiliaire, décrit en section 4. Par conséquent, l'actualisation (14) est aussi appelée le correcteur.*

## 4 Le prédicteur ADER-DGMPM

### 4.1 Problème de Cauchy local auxiliaire et approximation espace-temps

La construction d'une approximation espace-temps permettant de fournir des évaluations de la solution à tout instant intermédiaire requis par le correcteur (14) passe par la résolution du problème de Cauchy auxiliaire suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{DIV } \mathcal{F} &= 0, \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in (\mathbb{R}^d \times [0, \Delta t]) \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) &= \mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t = t_n)|_{\Omega_e} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \quad (15)$$

qu'on suppose résolu dans un milieu infini, sans bords. De façon pratique, le problème aux valeurs initiales (15) est résolu sur le volume de contrôle  $\Omega_e \times [t_n, t_{n+1}]$ , avec des conditions initiales  $\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t_n)|_{\Omega_e}$  reconstruites à partir du vecteur des quantités conservées  $\mathbf{U}_p(t_n)$  connu à l'instant  $t_n$  à *chaque point matériel*  $p = 1, \dots, N_p$ . *Tout se passe comme si le correcteur (14) permettait de raccorder à une échelle "macroscopique" des solutions définies à petites échelles dans un milieu infini (solutions du problème (15)) via les flux volumiques (12) et les flux surfaciques (13) définis sur la grille de calcul. L'approximation spatio-temporelle suivante est généralement fournie dans le cadre de la méthode ADER [6] au problème (15)*

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{X}, t) = \sum_{l=1}^{N_{\text{dofs}}} \theta_l(\mathbf{X}, t) \hat{\mathbf{u}}_l, \quad (16)$$

où  $N_{\text{dofs}} = (N + 1)^{d+1}$  est le nombre de degrés de liberté de chaque composante du système (1),  $d$  la dimension spatiale, et le multi-indice  $l = (l_0, l_1, l_2)$  (si  $d = 2$ ) décrit les degrés de liberté associés à diverses positions spatiales et temps intermédiaires. Les fonctions de forme espace-temps  $\theta_l(\mathbf{X}, t)$  sont généralement construites par une tensorisation espace-temps de polynômes de Lagrange 1D de degré  $N$  dans le contexte ADER-DGFEM. Cependant, seule une tensorisation entre l'espace et le temps demeure valide dans notre cas d'analyse puisque la position des points matériels est censée pouvoir être définie de façon arbitraire :

$$\theta_l(\mathbf{X}, t) = \varphi_{l_0}(\tau) \chi_p(\boldsymbol{\xi}), \quad (17)$$

où  $\chi_p(\boldsymbol{\xi})$  sont des fonctions de forme spatiales associées à un *point matériel*  $p$  placé dans la cellule  $\Omega_e$ , et  $\boldsymbol{\xi}$  sont des coordonnées parentes spatiales. Par conséquent, les degrés de liberté  $\hat{\mathbf{u}}_l$  apparaissant dans l'approximation espace-temps (16) sont à présent définis *aux points matériels*, à un instant intermédiaire de l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ .

Les fonctions de forme  $\chi_p(\boldsymbol{\xi})$  permettent de reconstruire une approximation spatiale à partir de données définies en une collection de points. Elles permettent donc de construire le projecteur des points matériels vers la grille de calcul. Parmi plusieurs méthodes possibles, la méthode des moindres carrés mobiles [9] est ici choisie, et permet de reconstruire l'approximation suivante

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{X}, t_n) = \sum_{p=1}^{N_p} \chi_p(\mathbf{X}) \mathbf{U}_p^n, \quad (18)$$

laquelle fournit les conditions initiales au problème de Cauchy local (15). On renvoie le lecteur à la référence [9] pour une écriture détaillée des fonctions de forme  $\chi_p(\boldsymbol{\xi})$ .

## 4.2 Résolution du prédicteur ADER-DGMPM

La résolution du problème aux valeurs initiales (15) est effectuée de façon faible sur le volume de contrôle  $\Omega_e \times [t_n, t_{n+1}]$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_e} \theta_k \left( \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \text{DIV } \mathcal{F} \right) dV dt = 0. \quad (19)$$

Considérant localement le milieu comme infini, aucune intégration par parties en espace n'est requise. En revanche, une intégration par partie en temps du premier terme de l'équation (19) permet de s'affranchir de la dérivée temporelle écrite sur le champ solution  $\mathbf{u}_h(\mathbf{X}, t)$ . Après quelques développements (voir [7] pour plus de détails), on peut montrer que les degrés de liberté du prédicteur sont solution du système d'équations non linéaires suivant

$$\mathbf{S}_\tau \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_0 \mathbf{U}^n - \Delta t \sum_{\alpha} \mathbf{S}_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}(\hat{\mathbf{q}}), \quad (20)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}$  et  $\hat{\mathbf{q}}$  représentent des vecteurs regroupant tous les degrés de liberté spatio-temporels de toutes les composantes du système (1) associés aux approximations des vecteurs des quantités conservées  $\mathbf{u}_h(\mathbf{X}, t)$  et des quantités auxiliaires  $\mathbf{q}_h(\mathbf{X}, t)$ . Les matrices  $\mathbf{S}_\tau$ ,  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{S}_{\alpha}$  sont définies par blocs associés à chaque composante du système (1), et contiennent les fonctions de forme spatio-temporelles  $\theta_l(\mathbf{X}, t)$  et leurs dérivées spatiales et temporelles. La résolution du système non linéaire (20) est itérative, et résolue sur  $\hat{\mathbf{u}}$  via une méthode de point fixe (ou itérations de Picard [6]), de sorte que chaque itéré s'écrive à une itération  $r$  comme

$$\hat{\mathbf{u}}^{(r+1)} = \mathbf{S}_\tau^{-1} \mathbf{R}_0 \mathbf{U}^n - \Delta t \sum_{\alpha} \mathbf{S}_\tau^{-1} \mathbf{S}_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}(\hat{\mathbf{q}}^{(r)}). \quad (21)$$

La résolution implicite itérative du prédicteur représente ici le prix à payer de la méthode. Cependant, puisque cette résolution est *locale*, elle est compatible avec une parallélisation massive de la méthode. Il est important de noter que ce coût d'une résolution locale implicite est à mettre en regard de nombreux gains de l'approche, en particulier la méthode permet de combiner (i) le découplage entre une collection de points matériels et une grille de calcul (laquelle devient donc arbitraire), (ii) une approximation d'ordre arbitrairement élevé et (iii) une absence de projection des variables internes d'un support géométrique à un autre.

Une fois la solution actualisée sur la grille de calcul via le correcteur (14), elle est projetée aux points matériels. La projection la plus simple est une basique interpolation utilisant l'approximation DG nodale

$$\mathcal{U}_h(\mathbf{X}_p, t_{n+1}) = \sum_{b=1}^{N_n} \Phi_b(\mathbf{X}_p) \hat{\mathcal{U}}_b^{n+1} \quad (22)$$

pour chaque point matériel  $p = 1, \dots, N_p$  placé dans chaque cellule  $e$ . Cette projection est aussi connue sous le nom de méthode PIC (Particle-In-Cell).

## 5 Résumé de la méthode et schéma d'implémentation

Une fois la configuration initiale  $\Omega_0$  discrétisée avec une collection de points matériels, et qu'une correspondance a été construite avec chaque cellule d'une grille de calcul arbitraire, une étape de pré-processing est effectuée en premier lieu. Cette étape consiste principalement à calculer les approximations géométrique du maillage, Galerkin discontinu (10), du prédicteur (17) et les gradients de ces approximations, toutes et tous évalués aux différents points d'intégration nécessaires. Sont aussi calculées les différentes matrices  $\mathbf{K}_{\alpha}^{ab}$  (12),  $\mathcal{M}$ ,  $\mathbf{S}_\tau$ ,  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{S}_{\alpha}$  (20). Grâce à la description lagrangienne totale (1) effectuée sur la configuration initiale, toutes ces quantités sont calculées une fois pour toute et stockées pour la suite du calcul. Ensuite, à chaque pas de temps, les étapes suivantes sont suivies

1. Calcul du pas de temps critique avec une condition CFL pour DG [3].
2. Calcul du prédicteur dans chaque cellule  $\Omega_e$ ,  $\forall e$ . À chaque itération  $r$  :
  - (a) Calcul de l'itéré  $\hat{\mathbf{u}}^{(r+1)}$  avec l'équation (21).
  - (b) Actualisation du vecteur des quantités auxiliaires  $\hat{\mathbf{q}}^{(r+1)}$  : intégration de la loi de comportement pour chaque degré de liberté  $l = 1, \dots, N_{\text{dofs}}$ , pour chaque point matériel  $p = 1, \dots, N_p$ .

3. Étape correctrice
  - (a) À chaque instant intermédiaire  $\tau_s$  dicté par la règle d'intégration temporelle,
    - i. Calcul des flux volumiques  $\mathbf{F}_v(\mathbf{q}_h(\tau_s))$  (12).
    - ii. Calcul des flux d'interface  $\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{q}_h^-(\tau_s), \mathbf{q}_h^+(\tau_s))$  par un solveur de Riemann approximé, puis des flux surfaciques discrets  $\mathbf{F}_s(\mathbf{q}_h^-(\tau_s), \mathbf{q}_h^+(\tau_s))$  avec l'équation (13) de chaque côté de chaque interface entre éléments du maillage.
  - (b) Actualisation des degrés de liberté  $\hat{\mathbf{u}}_{n+1}$  avec la quadrature temporelle (14).
  - (c) Appliquer éventuellement un limiteur de pente pour construire une approximation non-oscillante.
4. Projection de la solution actualisée aux points matériels (22), et intégration de la loi de comportement à chaque point matériel  $p = 1, \dots, N_p$ .
5. Si nécessaire, destruction de la grille de calcul et reconstruction d'une nouvelle. Cela nécessite cependant d'effectuer à nouveau l'étape de pré-processing.

## 6 Illustration numérique

On considère à titre d'illustration numérique un domaine de calcul bidimensionnel carré de côté  $l = 3m$  montré sur la figure 2, traité dans le cadre des déformations planes. Ce domaine est animé initialement d'une vitesse uniforme  $-\bar{v}\mathbf{e}_1$ ,  $\bar{v} = 200 \text{ m.s}^{-1}$ , et impacte un plan rigide (sans frottement) sur son côté gauche. Par ailleurs, une condition de symétrie est imposée sur le bord bas, et des conditions de bord libre sont considérées sur les côtés droit et haut. On considère la réponse constitutive hyperélastique présentée en section 2.2, avec les paramètres matériaux  $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$  et  $\nu = 0.3$  liés au couple  $(\kappa, \mu)$  par les relations usuelles.

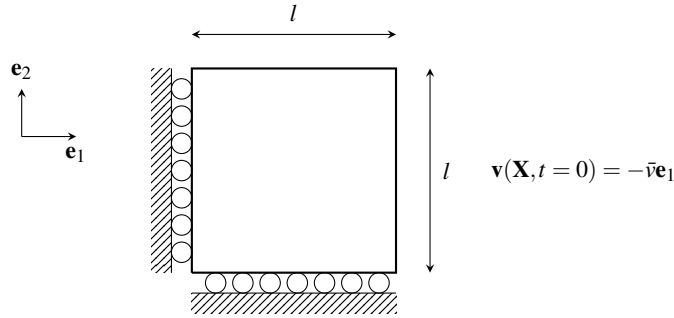


FIGURE 2 – Schéma d'un domaine de calcul bidimensionnel carré de côté  $l$ .

Les simulations numériques sont réalisées avec les méthodes RK-DGFEM, ADER-DGFEM and ADER-DGMPM, avec un nombre CFL défini à 0.4. Des approximations bilinéaire (S1) ou biquadratique (S2) en espace et des approximations linéaire (T1) ou quadratique (T2) en temps sont aussi considérées. Pour la méthode RK-DGFEM, un intégrateur RK2 est utilisé pour l'approximation T1, et un RK4 pour T2. Le domaine de calcul spatial parent pour chaque élément est défini sur l'intervalle  $[0, 1]^2$ , à partir duquel des points d'interpolation de type Gauss-Legendre sont utilisés pour les méthodes DGFEM, et des points matériels de coordonnées  $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}^2$  ou  $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}^2$  sont définis pour des approximations spatiales bilinéaire ou biquadratique respectivement.

La figure 3 montre les cartographies de la composante de contrainte  $\sigma_{11}$  à l'instant  $t \approx 1.77 \times 10^{-3}$  secondes après plusieurs aller-retours d'ondes calculées avec les différentes méthodes pour des approximations S1T1 et S2T2, afin d'illustrer les capacités de la méthode à pouvoir monter en ordre d'approximation. Les solutions numériques sont extraites soit aux points d'interpolation, soit aux points matériels. Un bon accord est observé entre les différentes solutions numériques.

On observe le même accord entre les différentes solutions numériques sur les figures 4 et 5, sur lesquelles les graphes superposés des composantes de contrainte  $\sigma_{11}$  et de vitesse  $V_1$  sont respectivement tracés le long de la ligne du bas du domaine, pour chaque ordre d'approximation.

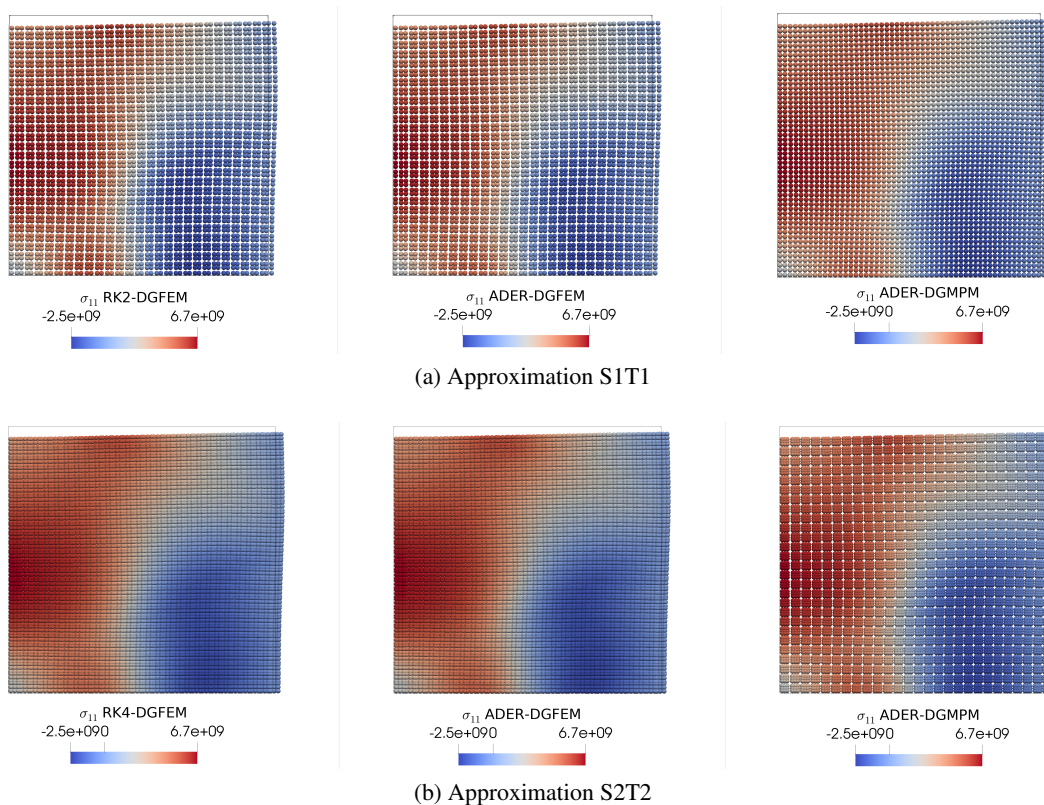


FIGURE 3 – Cartes de la composante de contrainte  $\sigma_{11}$  calculées à l’instant  $t \approx 1.77 \times 10^{-3}$  secondes avec les méthodes RK-DGFEM, ADER-DGFEM et ADER-DGMPM.

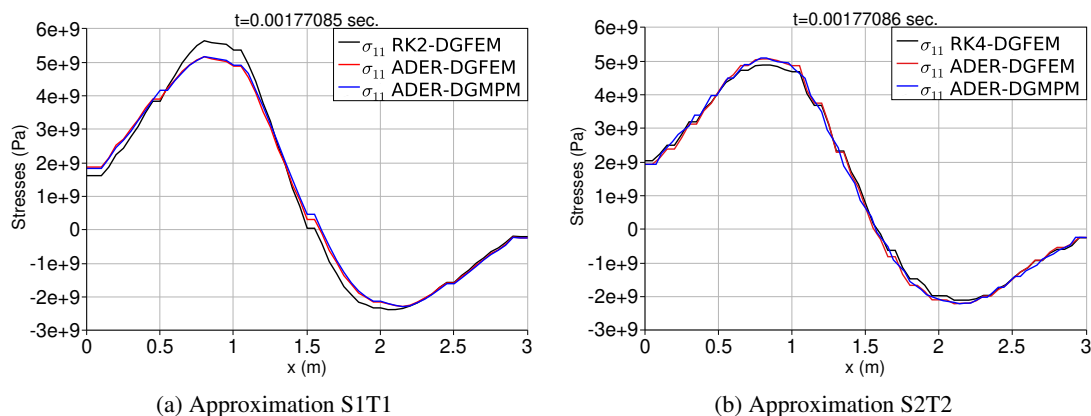


FIGURE 4 – Tracé de la composante de contrainte  $\sigma_{11}$  à l’instant  $t \approx 1.77 \times 10^{-3}$  secondes le long de la ligne du bas.

## 7 Conclusion

L’approximation de la Méthode des Points Matériels couplée avec une approximation Galerkin discontinu, ou DGMPM, a été étendue dans ce travail à des ordres de précision arbitrairement élevés. Cette extension repose sur l’intégrateur ADER, dont l’objet est simplement de fournir une solution prédite sur le pas de temps par élément (résolue implicitement) de sorte à pouvoir intégrer les équations discrètes de la méthode Galerkin discontinu définies sur une grille de calcul par une quadrature temporelle explicite. L’adaptation du cadre ADER à la DGMPM a porté sur deux points. En premier lieu, les degrés de liberté espace-temps du prédicteur sont à présent définis aux points matériels, de sorte que les variables internes au modèle utilisé et donc leur actualisation y restent toujours définis au cours du calcul. En second lieu, la contribution spatiale de l’approximation espace-temps du prédicteur est utilisée pour la projection des contraintes et des vitesses des points matériels vers la grille de calcul. Elle est par ailleurs réalisée via

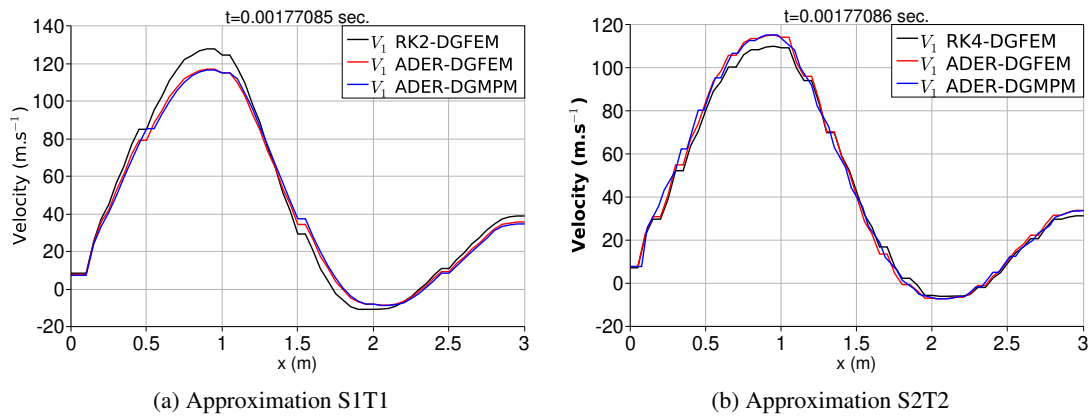


FIGURE 5 – Tracé de la composante de vitesse  $V_1$  à l’instant  $t \approx 1.77 \times 10^{-3}$  secondes le long de la ligne du bas.

une approximation de type moindres carrés mobiles précise à un ordre arbitrairement élevé, qui est une façon parmi d’autres de reconstruire une approximation spatiale continue à partir de données définies en une collection de points. Enfin, un cas test portant sur l’impact d’un domain de calcul bidimensionnel carré a permis de montrer un bon accord entre des solutions numériques calculées avec les méthodes RK-DGFEM, ADER-DGFEM et ADER-DGMPM pour des approximations linéaire et quadratique.

## Références

- [1] A. Renaud, T. Heuzé, L. Stainier. *A Discontinuous Galerkin Material Point Method for the solution of impact problems in solid dynamics*, Journal of computational physics, Elsevier, 80-102, 2018.
- [2] D. Sulsky, Z. Chen, H. Schreyer. *A particle method for history-dependent materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 179-196, 1994.
- [3] B. Cockburn, C.H. Shu. *Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems*, Journal of Scientific Computing, 173-261, 2001.
- [4] A. Renaud, T. Heuzé, L. Stainier. *The Discontinuous Galerkin Material Point Method for variational hyperelastic-plastic solids*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 112987, 2020.
- [5] A. Renaud, T. Heuzé, L. Stainier. *Stability properties of the Discontinuous Galerkin Material Point Method for hyperbolic problems in one and two space dimensions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 664-689, 2020.
- [6] S. Busto, S. Chiochetti, M. Dumbser, E. Gaburro, I. Peshkov. *High order ADER schemes for continuum mechanics*, Frontiers in Physics, Frontiers Media SA, 32, 2020.
- [7] A. Lakiss, T. Heuzé, M. Tannous, L. Stainier. *ADER Discontinuous Galerkin Material Point Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 2023, DOI : 10.1002/nme.7365.
- [8] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer, 2013.
- [9] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl. *Meshless methods : An overview and recent developments*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 3-47, 1996.