



HAL
open science

Intégration d'équations d'état dans un contexte de simulation discrète de chocs hypervéloces

Alexandre Vicaud, Jérémie Girardot

► **To cite this version:**

Alexandre Vicaud, Jérémie Girardot. Intégration d'équations d'état dans un contexte de simulation discrète de chocs hypervéloces. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610963

HAL Id: hal-04610963

<https://hal.science/hal-04610963v1>

Submitted on 3 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Intégration d'équations d'état dans un contexte de simulation discrète de chocs hypervéloces

A. Vicaud¹, J. Girardot¹

¹ Arts et Métiers Science et Technologie, I2M, UMR CNRS 5295, 33400 Talence, {alexandre.vicaud, jeremie.girardot}@ensam.eu

Résumé — Une nouvelle approche de modélisation d'un comportement mécanique sous choc utilisant la méthode des éléments discrets est présentée. Elle implique une modification des propriétés des liaisons au cours de la simulation, permettant de considérer le couplage induit par l'expression d'une équation d'état. Deux essais ont été modélisés : la compression isotrope d'une sphère et la propagation d'une onde dans une plaque soumise à un choc. Confrontés aux résultats expérimentaux, les résultats numériques obtenus sont encourageants et renvoient aux perspectives d'intégrer un comportement élasto-plastique.

Mots clés — Méthode des Éléments Discrets, Impact, Hypervéloce, Équation d'état

1 Introduction

Les structures spatiales sont directement exposées au risque de collision avec des objets en orbite. Ces chocs se produisent généralement à la vitesse de plusieurs kilomètres par seconde, appelés impacts hypervéloces. Dans ce cadre, les conditions de températures et pressions générées sont extrêmes, pouvant atteindre facilement la température de fusion du matériau et plusieurs GPa. Plus de 8 000 satellites sont actuellement actifs autour de la Terre, un nombre en croissance exponentielle, par conséquent, le risque de collision l'est également. À de telles vitesses, les débris produits sont nombreux, devenant source additionnelle de danger. La tenue de ces structures face à de tels chocs est primordiale. La collecte de ces débris en orbite s'avère extrêmement difficile, voire impossible, mettant en évidence la nécessité de prévenir le problème en amont. Le dimensionnement de structures spatiales est essentiel pour garantir leur fonctionnement et minimiser la génération de nouveaux débris à la suite d'un impact.

Les phénomènes physiques mis en jeu lors de tels chocs sont nombreux et complexes, peuvent être cités la fragmentation, la plasticité, la rupture, l'endommagement, le changement d'état du matériau par sa vaporisation ou sa liquéfaction [6]. La modélisation de ces phénomènes est difficile et les méthodes numériques utilisées sont diverses. Ces méthodes s'appuient sur la résolution des équations de conservation de la physique, dans un contexte de mécanique des milieux continus. Lorsque la fissuration est atteinte, de multiples débris sont générés et des discontinuités apparaissent, ces méthodes deviennent alors limitantes. Des initiatives de recherche sont menées dans le but de contourner ces limitations. Une approche numérique différente est étudiée ici, il s'agit de la *Méthode des Éléments Discrets* (MED).

La MED n'a que très peu été utilisée pour la simulation d'impacts hypervéloces, bien que ces dernières années, quelques travaux ont émergées dans ce cadre d'application [19, 20, 7]. Le caractère discontinu et la représentation de chemins de fissuration complexes [14] permettent à la MED de se positionner en méthode cohérente pour prétendre à la modélisation d'impacts hypervéloces. Les enjeux liés à l'utilisation de cette méthode sont la modélisation et la compréhension des effets structurels engendrés lors de ces impacts.

L'objet de cette étude est l'implémentation et l'utilisation d'équations d'état en MED dans le but de pouvoir simuler ces impacts hypervéloces. Les actuels codes de calcul par éléments discrets ne le permettent pas encore. Dans une première partie, une proposition de modélisation est présentée. La seconde partie concerne la validation de cet algorithme par un cas-test de compression isotrope d'une sphère. Enfin, un essai compression de plaque est modélisé et les résultats de la simulation sont comparés avec des résultats expérimentaux issus de la littérature.

2 Intégration d'équations d'état par la méthode des éléments discrets

2.1 Méthode des Éléments Discrets (MED)

La MED est une méthode de simulation numérique, dont le principe repose sur la représentation d'un continuum par un ensemble de particules, généralement sphériques, appelées éléments discrets. La cohésion entre les particules est assurée par des liaisons : ressorts, poutres, liaisons interatomiques. La fissuration est, elle, modélisée par la suppression de ces liens à partir de critères de rupture, il peut s'agir d'une simple limite en élongation ou d'une loi d'endommagement. Le traitement de ces discontinuités permet à la MED d'être une méthode cohérente dans la prédiction d'amorces de fissures et de la représentation de leur propagation.

Divers codes de calcul existent pour réaliser des simulations en MED, celui utilisé dans cette étude est GranOO [4]. La cohésion entre les éléments discrets modélisant un continuum est assurée par des liaisons poutres [2, 17]. Les équations de mouvements sont calculées à chaque pas de temps par le schéma d'intégration de Verlet, et la théorie de Euler-Bernoulli est utilisée dans le calcul des forces et des moments résultants. Chaque poutre possède des propriétés microscopiques propres : un module de Young E_μ et un coefficient de Poisson ν_μ . Elles diffèrent des propriétés macroscopiques du système E_M et ν_M et sont déterminées à travers une étude paramétrique [8]. Suite à cette étude, une relation est établie entre E_M et E_μ :

$$\frac{E_M}{E_\mu} = \alpha, \quad (1)$$

où α est un coefficient qui varie en fonction du rapport entre le rayon moyen des éléments et le rayon de la poutre cylindrique.

2.2 Équation d'état

Dans le cadre de la modélisation d'essais hypervéloces en MED, il est essentiel de définir l'état thermodynamique d'un système, à savoir la relation entre sa pression, son volume et sa température. Cette relation est appelée équation d'état. Sous faible régime de pression et de vitesse, la relation entre la pression hydrostatique P et le taux de compression η est linéaire :

$$P(\eta) = K\eta = \frac{E}{3(1-2\nu)}\eta, \quad (2)$$

avec K le module de compressibilité, E le module de Young, ν le coefficient de Poisson et $\eta = \frac{V_0 - V}{V_0}$ le taux de compression, V_0 étant le volume initial du système. Par convention, la pression est positive en compression et négative en traction.

Lorsque la pression devient significative, la contribution de l'énergie interne due à la variation de température n'est plus négligeable et le matériau exhibe alors un comportement mécanique complexe, il convient d'utiliser une équation d'état appropriée. Les équations d'état sont diverses et leurs utilisations varient selon le cadre d'étude. Pour un solide en état de choc sous compression sans changement d'état, l'équation d'état de Mie-Grüneisen [9] est généralement utilisée :

$$P_{MG}(\eta, E_m) = \frac{\rho_0 C_0^2 \eta}{(1 - S\eta)^2} \left(1 - \frac{\Gamma_0 \eta}{2}\right) + \Gamma_0 \rho_0 E_m, \quad (3)$$

E_m est l'énergie interne et S, C_0 et Γ_0 sont des constantes liées au matériau.

2.3 Intégration d'une équation d'état

L'équation d'état de Mie-Grüneisen (3) concerne un modèle de calcul de la pression hydrostatique en fonction du volume et de l'énergie interne d'un système. Par souci de simplification, cette étude se focalise sur la réponse en pression suite à une variation de volume du système, la dépendance énergétique n'est pas prise en compte. Afin d'introduire dans le code MED la relation entre la pression et le volume induite par une équation d'état, un modèle basé sur la modification du module de Young des poutres E_μ a été développé.

Un modèle de poutres élastiques est utilisé dans le code de calcul. Les propriétés d'un domaine élastique E_M et ν_M peuvent être déterminées en fonction du rapport entre la variation de pression ΔP et la variation de son taux de compression $\Delta \eta$:

$$\frac{\Delta P}{\Delta \eta} = \frac{E_M}{3(1 - 2\nu_M)}. \quad (4)$$

Dans le but de quantifier une variation de volume à l'échelle élémentaire, un volume effectif Ω_i^* associé à chaque élément est considéré suivant Jebahi [11]. Ce volume effectif Ω_i^* correspond au volume d'une sphère ayant pour rayon la moitié des longueurs moyennes l_{ij} des poutres liées à i :

$$\Omega_i^* = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{l_{ij}}{2} \right)^3, \quad (5)$$

avec N_i le nombre de poutres connectées à i . Un volume effectif V_{ij}^* associé à chaque poutre ij reliant les éléments i et j est alors calculé :

$$V_{ij}^* = \frac{\Omega_i^* + \Omega_j^*}{2}. \quad (6)$$

Le taux de compression η_{ij}^* résultant associé à la poutre ij est :

$$\eta_{ij}^* = \frac{V_{ij}^* - V_{ij0}^*}{V_{ij0}^*}, \quad (7)$$

où V_{ij0}^* est le volume effectif initial associé à la poutre ij . Le module de Young microscopique $E_{\mu_{ij}}$ de chaque poutre est mis à jour à chaque pas de temps selon la variation de son taux de compression η_{ij}^* . Il est calculé à l'aide des équations (1), (4) et (7) :

$$E_{\mu_{ij}} = \frac{3(1 - 2\nu_M)}{\alpha} \frac{\Delta P(\eta_{ij}^*)}{\Delta \eta_{ij}^*}. \quad (8)$$

$P(\eta_{ij}^*)$ est une fonction en entrée de l'algorithme, il correspond au calcul de la pression en fonction du taux de compression local η_{ij}^* . Cette fonction est l'équation d'état choisie, telle celle de Mie-Grüneisen (3).

Dans les travaux de Jebahi [11], le rapport entre la variation de pression et la variation de volume est modélisée à l'aide d'un algorithme de correction des efforts, basé sur l'évaluation de la pression sur les éléments. En MED, le calcul de la pression est une opération indirecte comme indiqué dans la partie 3.2, un temps de calcul supplémentaire significatif est requis. L'algorithme présenté dans ce travail ne nécessite pas d'évaluer la pression dans le système, mais seulement la variation de volume effectif à l'échelle élémentaire, permettant de réaliser des calculs plus rapides.

3 Cas test : Compression isotrope d'une sphère

La vérification de l'algorithme développé dans la partie précédente est réalisée à l'aide d'un essai de compression isotrope d'une sphère. L'objectif est de vérifier la réponse en pression de la sphère soumise à une variation de volume.

3.1 Paramètres de simulation

Le domaine étudié est une sphère dont la construction a été réalisée suivant la méthode décrite dans [5]. Elle est composée de 20 000 éléments, nombre déterminé par une étude de convergence du domaine. La compression de la sphère est générée par un déplacement de tous les éléments de sa face extérieure, imposé en direction du centre de cette dernière. L'équation d'état $P(\eta)$ utilisée est constituée par parties, graphiquement représentée dans la figure 1 :

$$P(\eta) = \begin{cases} K_1 \eta, & \text{si } P < P_{lim}, \\ K_2 \eta + P_{lim} (K_1 - K_2), & \text{si } P \geq P_{lim}. \end{cases} \quad (9)$$

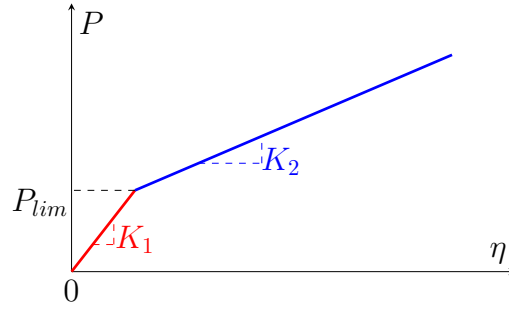


FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction (9).

P_{lim} est la valeur de la pression qui représente le changement de pente K de la fonction.

Le module de Young microscopique E_μ de chaque poutre est recalculé à chaque pas de temps en utilisant la fonction (9) dans l'équation (8).

3.2 Évaluation de la pression en MED

En mécanique discrète, les résultats sont donnés en termes de forces et de moments appliqués dans les poutres ij reliant chaque élément i à ses voisins j . Un tenseur des contraintes équivalent à celui de Cauchy est évalué de manière indirecte, appelé tenseur viriel. Utilisé dans un premier temps dans le cadre de simulations discrètes moléculaires [16], le tenseur fut généralisé pour des modèles de poutres concernant la MED [3]. Le tenseur viriel $\overline{\overline{\sigma}}^i$ associé à chaque élément i est de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}}^i = \frac{1}{2\Omega^i} \sum_{j \neq i}^{N_i} \frac{1}{2} (l^{ij} \otimes f^{ij} + l^{ji} \otimes f^{ji}), \quad (10)$$

avec l^{ij} la longueur de la poutre ij , f^{ij} les forces exercées sur chaque élément connecté par la poutre ij , N_i le nombre de poutres connectées à i et Ω^i le volume effectif de l'élément discret i . La pression hydrostatique \hat{P} dans un domaine homogène est considérée comme la moyenne de la trace du tenseur viriel de chaque élément :

$$\hat{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N tr(\overline{\overline{\sigma}}^i), \quad (11)$$

avec N , le nombre total d'éléments dans le domaine. *Note : Dans cette partie, la pression est seulement calculée dans le but de post traiter les résultats et valider l'algorithme.*

3.3 Analyse des résultats

Dans un premier temps, il est crucial de s'assurer qu'aucun effet de corps rigide ou dynamique n'est présent dans la sphère. Le champ de déplacement dans la sphère montre une compression graduelle, le déplacement d'un élément est proportionnel à sa position relative au centre de la sphère (fig. 2a). La pression est homogène dans le domaine, il n'est pas observé de phénomène de propagation d'ondes (fig. 2b). Ces réponses sont celles attendues dans un cas de compression quasi statique, sans effet parasite.

L'intégration du modèle développé partie 2.3 est vérifié en comparant l'équation d'état (9) en entrée de la simulation, à la pression hydrostatique moyenne \hat{P} obtenue en fonction du taux de compression de la sphère η_{sph} . Ce dernier est connu grâce au déplacement imposé. En l'absence d'activation de l'algorithme, E_μ reste constant pour chaque poutre et le comportement mécanique numérique est linéaire, la fonction théorique $P(\eta)$ est équivalente à (2). Lorsque celui-ci est activé, la pression hydrostatique $\hat{P}(\eta_{sph})$ moyenne dans la sphère, représentée par la courbe pleine bleue est en adéquation avec l'équation d'état $P(\eta)$ (9) représentée par une ligne pointillée rouge sur la figure 3.

Lors du relâchement des efforts appliqués à la sphère, le chemin de déchargement correspond au chemin inverse de celui suivi durant la phase de compression. Ce comportement est analogue à celui d'un matériau purement élastique, sans perte énergétique significative liée à une déformation permanente ou à une hystérésis.

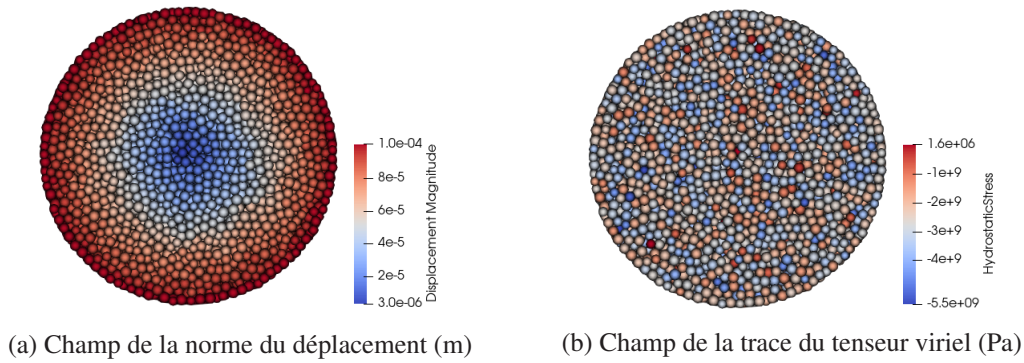


FIGURE 2 – Visualisation des champs dans une coupe de la sphère pour un taux de compression de 17%.

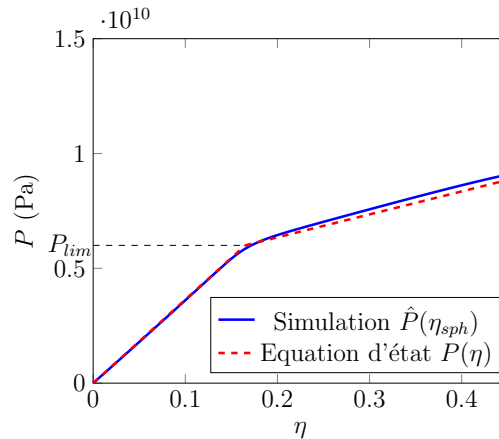


FIGURE 3 – Comportement décrit par l'équation (9).

Ce cas test de compression de sphère isotrope confirme l'intégration d'un comportement sous choc dans le code MED, intégré à travers une équation d'état de la forme $P(\eta)$. La réponse en pression suite à l'application d'un déplacement est contrôlée grâce à la modification de la rigidité des liens entre les éléments.

4 Impact de plaques

La modélisation d'un essai d'impacts de plaques est utilisée afin de comparer les résultats de la simulation avec des résultats expérimentaux obtenus par Sugiura en 1981 [15]. Dans cet essai, un ensemble de trois plaques cylindriques en verre de silice est impacté par une autre plaque du même matériau. Les épaisseurs de ces plaques sont respectivement 1, 2 et 0,5 millimètres. Des capteurs sont placés entre ces plaques afin d'évaluer la vitesse particulière de l'onde de choc générée. Par le passé, diverses modélisations ont été réalisées en lien avec cet essai, par la méthode des volumes finis [12], en MED [10] ou en dynamique moléculaire [21].

4.1 Paramètres de simulation

Dans la simulation, un choc uniaxial est appliqué à travers un milieu discret représenté par une plaque à section rectangulaire constituée de 50 000 éléments. Ce nombre est déterminé suite à une étude de convergence des résultats. Une vitesse de déplacement est appliquée aux éléments de la face supérieure selon la direction Z afin de générer une onde choc. Les bords de la plaque dans la direction Z d'application du choc sont libres, ceux dans les directions X et Y possèdent des conditions de symétrie. Une hypothèse est réalisée : les capteurs utilisés dans l'essai n'ont pas d'influence sur la propagation des ondes. En conséquence, l'ensemble de plaques est représenté tel un bloc monolithique.

Le choc est uniaxial, le taux de compression η est analogue à la déformation longitudinale ϵ_z , soit la

variation d'épaisseur de la plaque au cours de l'essai. Dans la figure 4, les données expérimentales issues d'essais de compression de verre de silice sont inscrites [15, 18, 13], ces données sont approximées par une fonction par parties. Le rapport entre ε_z et σ_z correspond à un module de Young macroscopique. À chaque pas de temps, E_μ est recalculé pour chaque poutre à chaque pas de temps suivant l'équation (1).

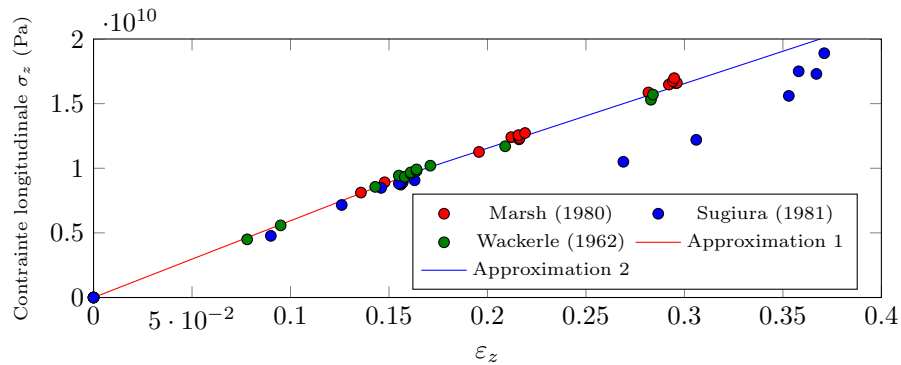


FIGURE 4 – Données expérimentales issues de divers essais sur verre de silice, les résultats sont approximés par une fonction par parties.

4.2 Analyse des résultats

Les champs de contrainte et de vitesse visibles dans les figures 5a et 5b témoignent de la propagation d'une onde de choc dans un cas de choc uniaxial.

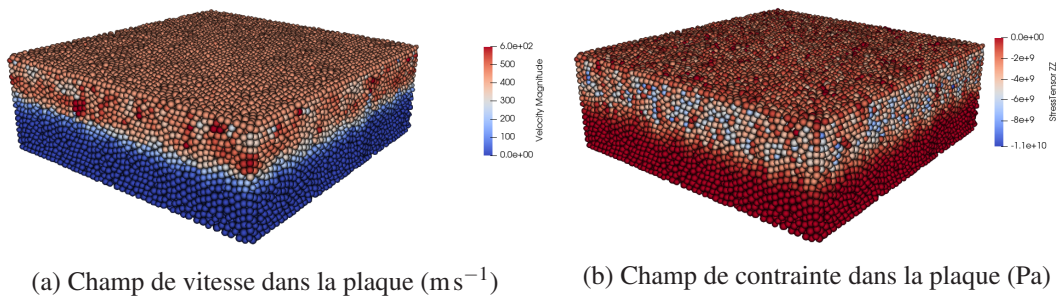


FIGURE 5 – Visualisation des champs de vitesse et de contrainte longitudinale dans la plaque à $t = 0,4 \mu\text{s}$.

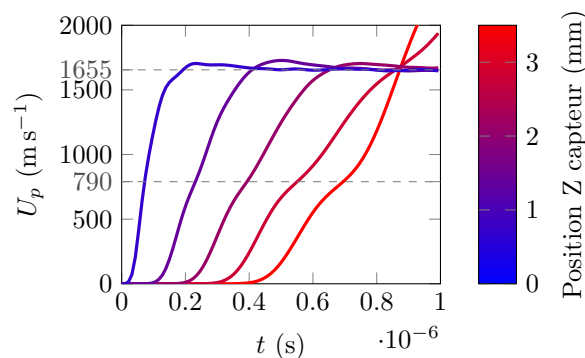


FIGURE 6 – Champs de vitesse particuliers dans la plaque, mesurés par des capteurs numériques.

Dans la figure 6, la propagation d'une onde de choc est suivie à l'aide de cinq capteurs numériques, placés à intervalles réguliers dans la plaque. La vitesse particulière U_p en fonction du temps est visible pour un impact à 1655 m s^{-1} . Cette vitesse est obtenue en calculant la moyenne des vitesses de tous les éléments situés à une position Z donnée. Un front de compression est observé, il se sépare en une partie élastique et une partie plastique. La vitesse à partir de laquelle la séparation apparaît est estimée à 790 m s^{-1} par Sugiura [15], le front de choc se scinde en deux pour des vitesses équivalentes dans la simulation.

Ce résultat est attendu en raison du changement de pente dans la fonction non-linéaire approximant les données expérimentales dans la figure 4. La contrainte équivalente est appelée Limite Élastique de Hugoniot (*LEH*), au-dessus de cette limite, l'onde plastique se propage à une vitesse plus lente que l'onde élastique, par conséquent le front de choc se scinde en deux. Expérimentalement, cette onde plastique est due à la déformation permanente du matériau. En effet, sous état de compression, apparaît un réarrangement de la structure cristalline de la silice de verre [1]. Dans les résultats de la simulation, une atténuation de la vitesse de propagation de l'onde élastique en lien avec le schéma numérique est observée, bien que les résultats expérimentaux montrent que la vitesse est supposée demeurer constante.

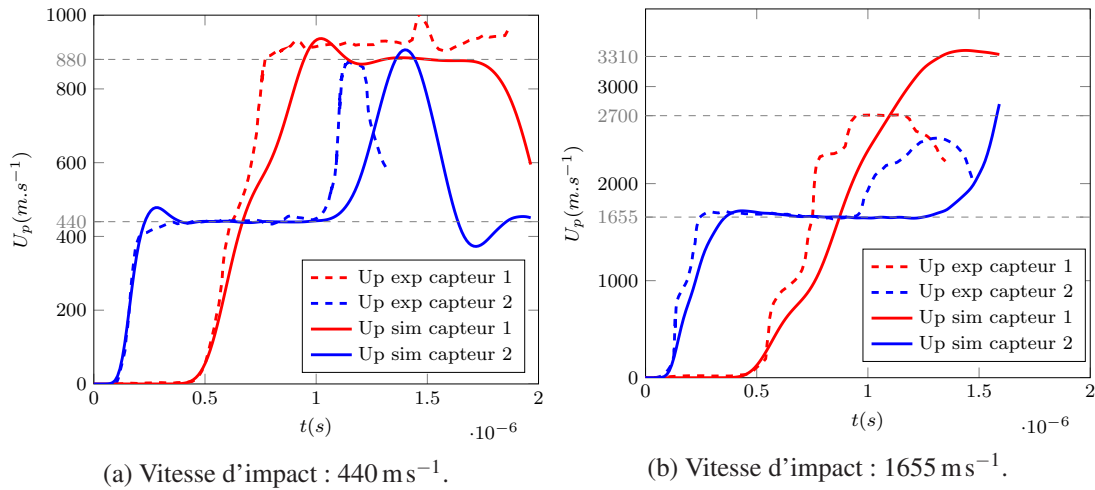


FIGURE 7 – Profil des vitesses particulières dans la plaque, comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs issues de la simulation.

Dans les figures 7a et 7b, les données expérimentales capturées par Sugiura [15] sont comparées aux données issues des simulations en MED. Il est important de noter que les vitesses particulières mesurées dans les capteurs par Sugiura ont été obtenues en volts. Afin d'obtenir une équivalence en vitesse, les courbes expérimentales sont alignées sur les courbes obtenues par simulation. Le premier module de Young a été obtenu à l'aide d'une étude paramétrique, afin que la distance entre les deux premières ondes dans les capteurs soient équivalentes en simulation et expérimentalement. La valeur de ce module de Young est représentée graphiquement dans la figure 4 en trait rouge plein, $E_1 = 59 \text{ GPa}$. Il approxime les résultats expérimentaux d'une façon satisfaisante, le module de Young de la seconde partie linéaire est donc également déterminé par une approximation des données expérimentales $E_2 = 50 \text{ GPa}$.

Les résultats de la figure 7a ont été obtenus pour une vitesse d'impact de 440 ms^{-1} . À cette vitesse, la LEH n'a pas encore été atteinte et seule une onde élastique se propage. L'onde de raréfaction correspond au second pic de la figure de la simulation, cette onde semble "en retard" par rapport à celle mesurée expérimentalement, il est supposé que cela résulte encore une fois du schéma numérique employé. Dans la figure 7b, la vitesse d'impact est de 1655 ms^{-1} , à cette vitesse la LEH est atteinte et le phénomène de séparation du front d'onde est visible. Cependant, la vitesse particulière de l'onde de raréfaction dans la simulation est de 3310 ms^{-1} , elle est bien au-dessus de celle obtenue expérimentalement qui atteint 2700 ms^{-1} . Il est probable que cela est dû à l'algorithme développé. En effet, dans ce dernier, la déformation permanente du matériau est absente, son comportement est élastique parfait et ne reflète pas le comportement mécanique du verre de silice.

5 Conclusion

Ce travail propose une nouvelle approche pour intégrer une équation d'état de la forme $P(\eta)$ en MED. L'algorithme modifie le module de Young des poutres cohésives afin de contrôler la réponse en pression d'un système suite à l'application d'un déplacement, évitant ainsi le calcul coûteux d'un tenseur des contraintes pour chaque élément à chaque pas de temps.

Dans un premier temps, l'algorithme a été utilisé sur un essai de compression isotrope de sphère, confir-

mant son implémentation sur le plan analytique. Par la suite, une modélisation MED d'un essai d'impact de plaques a été réalisée et les données issues de ces simulations ont été comparées aux résultats expérimentaux. Les résultats obtenus dans le cadre d'une propagation d'onde élastique sont satisfaisants. L'algorithme permet de modéliser avec succès le phénomène physique de séparation du front d'onde au-dessus d'une vitesse donnée. Cependant, des disparités importantes persistent dans l'évolution de sa vitesse de propagation, le schéma numérique utilisé peut ainsi être remis en cause.

Les développements futurs du projet se concentreront sur l'extension de l'algorithme en considérant une déformation permanente. Ces lois seront utiles pour représenter des impacts de projectiles sphériques sur cibles minces. Dans la modélisation de ces essais, des phénomènes plus complexes telles les modélisations de l'endommagement, la déformation permanente, l'amorce et la propagation de fissures seront pris en compte.

Références

- [1] C. Alexander et al. Changes to the shock response of fused quartz due to glass modification. *International Journal of Impact Engineering*, pages 1376–1385, 2008.
- [2] D. André et al. Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 113–125, 2012.
- [3] D. André et al. Using the discrete element method to simulate brittle fracture in the indentation of a silica glass with a blunt indenter. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 136–147, 2013.
- [4] D. André et al. The granoo workbench, a new tool for developing discrete element simulations, and its application to tribological problems. *Advances in Engineering Software*, pages 40–48, 2014.
- [5] D. André et al. *3D Discrete Element Workbench for Highly Dynamic Thermo-Mechanical Analysis : GranOO*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, 2015.
- [6] L. C. Chhabildas et al. Debris generation and propagation phenomenology from hypervelocity impacts on aluminum from 6 to 11 km/s. *International Journal of Impact Engineering*, pages 185–202, 2003.
- [7] R. Færgestad et al. Coupled finite element-discrete element method (fem/dem) for modelling hypervelocity impacts. *Acta Astronautica*, pages 296–307, 2023.
- [8] J. Girardot et al. Elastic calibration of a discrete domain using a proper generalized decomposition. *Computational Particle Mechanics*, pages 993–1000, 2021.
- [9] E. Grüneisen. Theorie des festen zustandes einatomiger elemente. *Annalen der Physik*, pages 257–306, 1912.
- [10] M. Jebahi. *Discrete-continuum coupling method for simulation of laser-induced damage in silica glass*. Theses, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013.
- [11] M. Jebahi et al. Virial stress based model to simulate the silica glass densification with the discrete element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages 1909–1925, 2017.
- [12] F. Malaise et al. Investigation of fused silica dynamic behaviour. *Journal de Physique IV France*, pages 929–934, 2006.
- [13] S. Marsh et al. *LASL Shock Hugoniot Data*. University of California Press, 1980.
- [14] M. Sage et al. A damaging beam-lattice model for quasi-brittle fracture. *International Journal of Solids and Structures*, page 111404, 2022.
- [15] H. Sugiura et al. Dynamic response of fused quartz in the permanent densification region. *Journal of Applied Physics*, pages 3375–3382, 1981.
- [16] D. H. Tsai. The virial theorem and stress calculation in molecular dynamics. *The Journal of Chemical Physics*, pages 1375–1382, 2008.
- [17] J. van Mier et al. An experimental and numerical study of mode i (tensile) and mode ii (shear) fracture in concrete. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, pages 179–190, 1993.
- [18] J. Wackerle. Shock Wave Compression of Quartz. *Journal of Applied Physics*, pages 922–937, 2004.
- [19] E. Watson et al. Simulating Hypervelocity Impact Phenomena with Discrete Elements. *Procedia Engineering*, pages 75–82, 2017.
- [20] E. Watson et al. Simulating hypervelocity impact with a discrete element approach. *Acta Astronautica*, pages 425–435, 2022.
- [21] Y. Xie et al. Molecular dynamics simulation of shock-induced structural change and permanent densification of silica glass : The effect of initial density. *Mechanics of Materials*, page 103913, 2021.