



**HAL**  
open science

# Formulation stochastique des matériaux standards généralisés

Jérémy Bleyer

► **To cite this version:**

Jérémy Bleyer. Formulation stochastique des matériaux standards généralisés. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610941

**HAL Id: hal-04610941**

**<https://hal.science/hal-04610941v1>**

Submitted on 3 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Formulation stochastique des matériaux standards généralisés

Jérémy Bleyer<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Navier, Ecole des Ponts, Univ Gustave Eiffel, CNRS, jeremy.bleyer@enpc.fr

**Résumé** — Cette contribution présente une formulation stochastique du comportement des matériaux dissipatifs dans le cadre des matériaux standards généralisés en présence d'incertitude. Celle-ci se base sur les concepts de la programmation stochastique et du principe variationnel incrémental associé à l'évolution des matériaux standards. On obtient alors des potentiels d'énergie et de dissipation convexes représentant le comportement effectif du matériau du point de vue statistique. Ces potentiels sont ensuite étendus via l'introduction d'une mesure de risque permettant d'obtenir un comportement, soit optimiste, soit pessimiste, pour un niveau de confiance donné.

**Mots clés** — matériaux standards, incertitude, stochastique, plasticité, convexité, mesure de risque.

## 1 Introduction

Afin d'améliorer le dimensionnement et l'optimisation des structures, la modélisation des matériaux doit pouvoir tenir compte des incertitudes inhérentes aux propriétés matérielles et les propager jusqu'à l'échelle de la structure. Habituellement, les modèles de matériaux sont calibrés de manière déterministe en utilisant des données expérimentales, en ignorant souvent la distribution statistique des données.

Les techniques avancées de quantification de l'incertitude visent à propager ces incertitudes des propriétés matérielles à l'échelle structurelle. Deux catégories de méthodes, intrusives et non intrusives, sont utilisées à cet effet [1–3]. Les méthodes non intrusives permettent de propager les incertitudes sans modifier les modèles existants, tandis que les méthodes intrusives modifient directement les modèles de simulation. Les méthodes intrusives, bien que plus coûteuses en temps de calcul, peuvent être plus précises que les méthodes non intrusives, souvent utilisées en boîtes noires.

Ce travail vise à développer une formulation du comportement effectif des matériaux et des structures en présence d'incertitudes pour des comportements matériels non linéaires, non lisses, potentiellement dépendants de la vitesse et de l'histoire de chargement. On cherche notamment à pouvoir tenir compte de l'incertitude en représentant la réponse moyenne attendue mais également les réponses extrêmes qui seraient associées à une vision très optimiste ou, au contraire, très pessimiste des propriétés incertaines du matériau. L'objectif ultime est de fournir aux ingénieurs des outils pour caractériser la réponse structurelle dans des conditions incertaines et d'aider à la conception sécurisée de structures, prenant en compte les incertitudes matérielles associées à des niveaux de confiance spécifiques.

Afin de garantir de bonnes propriétés thermodynamiques, notre approche repose sur le cadre des matériaux standards généralisés [4] qui décrivent des comportements non linéaires complexes en utilisant des variables d'état internes, une énergie libre et un pseudo-potentiel de dissipation permettant de couvrir diverses relations constitutives telles que la viscoplasticité, l'élastoplasticité, l'endommagement, etc. De plus, nous utilisons les concepts de la programmation stochastique [5] pour formuler un principe variationnel stochastique incrémental décrivant l'évolution de ces matériaux en présence d'incertitude. Enfin, pour accéder aux réponses optimistes et pessimistes du matériau, ce travail introduit également les notions de mesures de risque telles que la Conditional Value-at-Risk (CVaR) très utilisée en finance. Pour le cas pessimiste, nous introduisons une mesure duale (dCVaR) complètement originale à notre connaissance.

### 1.1 Problème variationnel incrémental

La solution du problème d'évolution (discrétisé en temps entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ ) d'une structure composée d'un matériau standard généralisé (indépendant du temps physique) peut s'obtenir en résolvant le

problème variationnel incrémental suivant [6–8] :

$$(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = \arg \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{\text{ad}}, \boldsymbol{\alpha}} \int_{\Omega} (\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \phi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_n)) \, d\Omega - W_{\text{ext}, n+1}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

où  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  est l'espace des déplacements cinématiquement admissible,  $W_{\text{ext}, n+1}$  le travail des efforts extérieurs et  $\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\alpha}_n$  les variables d'état à l'instant précédent  $t_n$ . Le problème variationnel précédent fait notamment intervenir la densité volumique du potentiel incrémental :

$$j(\boldsymbol{\varepsilon}; \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) + \phi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_n) \quad (2)$$

dont l'expression est obtenue par minimisation implicite sur les variables d'états internes  $\boldsymbol{\alpha}$  en fonction de la variable d'état observable  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . On notera que ce potentiel est *paramétré* par l'état à l'instant  $t_n$  et est convexe de la variable  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

## 1.2 Cas incertain et potentiel effectif

Nous supposons maintenant que le potentiel incrémental dépend de paramètres incertains  $\zeta$ , c'est-à-dire que  $j(\boldsymbol{\varepsilon}; \zeta)$  est désormais une fonction convexe stochastique. En pratique, l'incertitude peut affecter les paramètres matériaux décrivant le comportement, par ex. module de Young, limite d'élasticité, etc. L'incertitude est encodée via le vecteur de paramètres aléatoires  $\zeta$ , censés suivre une distribution de probabilité que l'on suppose connue.

Notre objectif est d'être en mesure de décrire le *comportement effectif* du matériau par rapport à l'incertitude  $\zeta$ . En d'autres termes, nous aimerions formuler un comportement *déterministe* qui capture de manière essentielle les caractéristiques sous-jacentes des incertitudes. Pour cela, nous introduisons formellement le potentiel effectif suivant :

$$j^{\text{eff}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathcal{R}[j(\boldsymbol{\varepsilon}; \zeta)] \quad (3)$$

où  $\mathcal{R}$  fait référence à une *mesure effective* de  $j$  sur toutes les réalisations  $\zeta$ . Étant donné que  $j$  est défini comme un problème de minimisation impliquant une fonction objective incertaine, le calcul de  $j^{\text{eff}}$  relève donc du domaine de la *programmation stochastique*. Travailler avec un cadre de programmation stochastique se révélera en effet extrêmement fructueux pour définir de manière cohérente l'état effectif et les évolutions associées au comportement effectif du matériau. Nous étudions maintenant différentes formulations suivant le choix de la mesure effective  $\mathcal{R}$ .

## 2 Comportement effectif moyen $\mathcal{R} = \mathbb{E}$

Considérons tout d'abord le choix naturel  $\mathcal{R}[j] = \mathbb{E}[j]$  dans l'objectif d'obtenir comme comportement effectif le comportement statistique *moyen* du matériau. Dans le contexte de la programmation stochastique, la première question qui se pose concerne la dépendance des différentes variables d'état par rapport à l'incertitude. Étant donné que nous cherchons à calculer un comportement effectif du matériau, nous considérons que la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est *imposée par l'observateur externe*. Dans un calcul de structure,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sera par exemple obtenu en minimisant le potentiel effectif associé à  $j^{\text{eff}}$  par rapport à un champ de déplacement indépendant de la réalisation. Dans le langage de la programmation stochastique,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est désignée comme une *variable de premier niveau* car sa valeur est choisie indépendamment de la réalisation exacte de l'incertitude  $\zeta$ . En revanche, les variables d'état implicites  $\boldsymbol{\alpha}$  sont appelées *variables de deuxième niveau*, c'est-à-dire que leur valeur dépend directement de la réalisation de l'incertitude. Pour rendre cette dépendance plus explicite, nous utiliserons désormais la notation subscriptée  $\boldsymbol{\alpha}_{\zeta}$ .

De manière similaire au cadre de l'homogénéisation des milieux aléatoires, nous montrons qu'il existe deux façons possibles de définir un comportement effectif moyen, basées soit sur une approche en déformation ou sur une approche en contrainte. Pour illustrer cela, considérons le cas de l'élasticité.

## 2.1 Elasticité aléatoire

Dans le cadre de l'élasticité linéaire caractérisée par un tenseur de rigidité incertain  $\mathbb{C}_\zeta$ , l'énergie libre est donnée par :

$$\Psi(\varepsilon; \zeta) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_\zeta : \varepsilon \quad (4)$$

de sorte que le potentiel effectif s'obtient par :

$$j^{\text{eff}}(\varepsilon) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_\zeta : \varepsilon \right] = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{E}[\mathbb{C}_\zeta] : \varepsilon \quad (5)$$

De plus, le potentiel dual, obtenu par transformée de Legendre-Fenchel, s'exprime comme :

$$j^{\text{eff},*}(\sigma) = \sup_{\varepsilon} \sigma : \varepsilon - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_\zeta : \varepsilon \right] = \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{E}[\mathbb{C}_\zeta]^{-1} : \sigma \quad (6)$$

$$= \inf_{\sigma_\zeta \text{ t.q. } \mathbb{E}[\sigma_\zeta] = \sigma} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \sigma_\zeta : \mathbb{C}_\zeta^{-1} : \sigma_\zeta \right] \quad (7)$$

où  $\sigma_\zeta = \mathbb{C}_\zeta : \varepsilon$ . On voit alors que dans la situation où la déformation totale est imposée *pour chaque réalisation*, la contrainte  $\sigma_\zeta$  issue de la loi de comportement est incertaine et est égale en moyenne uniquement à la contrainte "macroscopique"  $\sigma$  associée à  $\varepsilon$ . Le comportement élastique effectif est ainsi caractérisé par la moyenne des modules élastiques  $\mathbb{E}[\mathbb{C}_\zeta]$ .

En revanche, si l'on impose la valeur de la contrainte pour chaque réalisation, on a dans ce cas pour le potentiel dual :

$$j^{\text{eff},*}(\sigma) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{C}_\zeta^{-1} : \sigma \right] = \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{E}[\mathbb{C}_\zeta^{-1}] : \sigma \quad (8)$$

auquel est associé le potentiel primal :

$$j^{\text{eff}}(\varepsilon) = \sup_{\sigma} \sigma : \varepsilon - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{C}_\zeta^{-1} : \sigma \right] = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{E}[\mathbb{C}_\zeta]^{-1} : \varepsilon \quad (9)$$

$$= \inf_{\varepsilon_\zeta \text{ t.q. } \mathbb{E}[\varepsilon_\zeta] = \varepsilon} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_\zeta : \mathbb{C}_\zeta : \varepsilon_\zeta \right] \quad (10)$$

Ainsi, dans la situation où la contrainte est imposée *pour chaque réalisation*, la déformation  $\varepsilon_\zeta$  issue de la loi de comportement est incertaine et est égale en moyenne uniquement à la déformation "macroscopique"  $\varepsilon$  associée à  $\sigma$ . Le comportement élastique effectif est ainsi caractérisé par la moyenne harmonique des modules élastiques  $\mathbb{E}[\mathbb{C}_\zeta^{-1}]^{-1}$ . On retrouve ici des résultats proches des approches en déformation/contrainte homogènes de l'homogénéisation (bornes de Voigt et Reuss).

## 2.2 Comportement élastoplastique avec écrouissage

On considère à présent le cas d'un comportement élastoplastique 1D avec écrouissage isotrope non-linéaire décrit par les variables d'état internes  $\alpha = (\varepsilon^p, p)$  où  $p$  est la déformation plastique cumulée et les potentiels suivants :

$$\Psi(\varepsilon, \varepsilon^p, p; \zeta) = \Psi_{\text{el}}(\varepsilon, \varepsilon^p) + \Psi_{\text{h}}(p) = \frac{1}{2} E(\zeta) (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 + \frac{1}{1 + 1/m} H(\zeta) p^{1+1/m} \quad (11)$$

$$\Phi(\dot{\varepsilon}^p, \dot{p}; \zeta) = \begin{cases} \sigma_0(\zeta) \dot{p} & \text{si } |\dot{\varepsilon}^p| \leq \dot{p} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

où l'on suppose que le module d'Young  $E(\zeta)$ , d'écrouissage  $H(\zeta)$  et la limite d'élasticité  $\sigma_0(\zeta)$  sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à une loi log-normale. L'exposant  $m$  est supposé constant.

L'extension de la formulation (5) dans cette situation s'écrit alors :

$$j^{\text{eff}}(\varepsilon) = \inf_{\varepsilon_\zeta^p, p_\zeta} \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ E(\zeta) (\varepsilon - \varepsilon_\zeta^p)^2 \right] + \frac{1}{1 + 1/m} \mathbb{E} \left[ H(\zeta) p_\zeta^{1+1/m} \right] + \mathbb{E} [\sigma_0(\zeta) (p_\zeta - p_{n,\zeta})] \quad (13)$$

s.t.  $|\varepsilon_\zeta^p - \varepsilon_{n,\zeta}^p| \leq p_\zeta - p_{n,\zeta}$

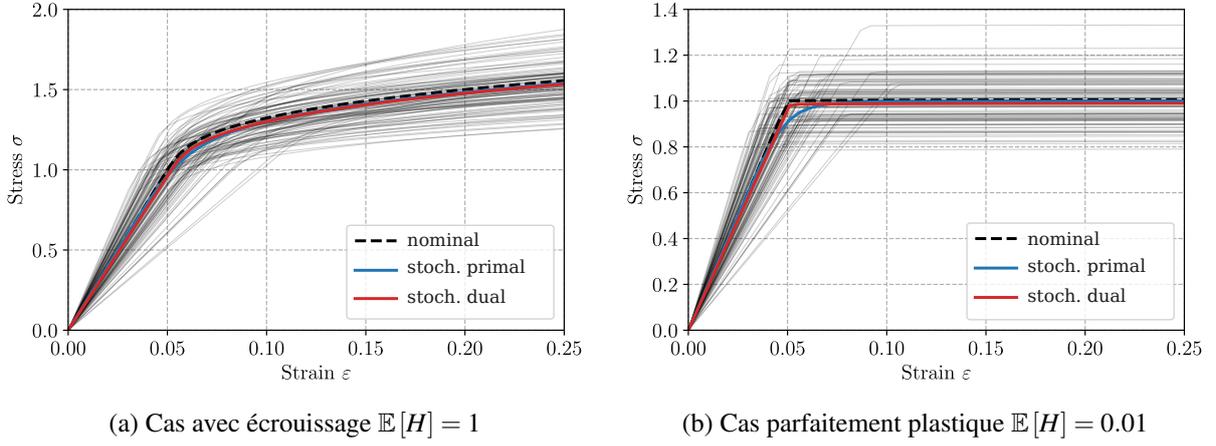


FIGURE 1 – Comportement effectif d'un matériau élastoplastique avec incertitude : formulation stochastique primale (13) et duale (14)

Pour des raisons qui apparaîtront plus clairement dans la suite, l'extension de la formulation (10) dans cette situation s'écrit quant à elle :

$$j^{\text{eff}}(\varepsilon) = \inf_{\varepsilon_{\zeta}, \varepsilon_{\zeta}^p, p_{\zeta}} \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ E(\zeta) (\varepsilon_{\zeta} - \varepsilon_{\zeta}^p)^2 \right] + \frac{1}{1 + 1/m} \mathbb{E} \left[ H(\zeta) p_{\zeta}^{1+1/m} \right] + \sup_{\zeta} [\sigma_0(\zeta) (p_{\zeta} - p_{n,\zeta})] \quad (14)$$

s.t.  $|\varepsilon_{\zeta}^p - \varepsilon_{n,\zeta}^p| \leq p_{\zeta} - p_{n,\zeta}$   
 $\mathbb{E}[\varepsilon_{\zeta}] = \varepsilon$

où l'on notera le choix de l'opérateur sup au lieu de  $\mathbb{E}$  dans le potentiel de dissipation.

La Figure 1a représente le comportement effectif correspondant pour les deux formulations dans le cas où  $\mathbb{E}[E] = 20$ ,  $\mathbb{E}[H] = 1$  et  $\mathbb{E}[\sigma_0] = 1$ , avec un écart-type de 20% pour  $E$  et  $H$ , et de 10% pour  $\sigma_0$ . Le comportement effectif est obtenu en discrétisant la déformation totale imposée en 30 incréments. Chaque incrément est obtenu en résolvant soit la formulation (13) (en bleu) soit (14) (en rouge). Dans les deux cas, les espérances ont été calculées en utilisant une approximation par échantillonnage de Monte-Carlo avec une taille d'échantillon  $N = 500$ . La minimisation sur les  $N$  réalisations des variables d'état différentes est effectuée en utilisant la librairie d'optimisation convexe `cvxpy` [9, 10].

On peut constater que les deux approches conduisent à un comportement très similaire, la formulation duale (14) étant légèrement plus souple dans le régime élastique. Il est intéressant de noter que le comportement effectif obtenu est proche du comportement déterministe nominal, à l'exception du fait qu'il présente un début de plasticité plus précoce et progressif, car il tient compte d'une distribution de contraintes de rupture avec différentes valeurs.

Cela est confirmé plus en détail dans la Figure 1b, qui correspond à un comportement presque parfaitement plastique avec  $\mathbb{E}[H] = 0.01$ . On peut observer que le comportement effectif correspondant à la formulation primale (13) présente une phase initiale de durcissement avant d'atteindre un plateau parfaitement plastique. Cette phase de durcissement témoigne du fait que le comportement effectif correspond à une moyenne de réalisations plastifiant à des niveaux de contraintes différentes. De plus, dans le régime parfaitement plastique ultime, le terme élastique s'annule de sorte que  $\varepsilon_{\zeta}^p = \varepsilon$ . On peut alors voir que (13) donne approximativement  $j^{\text{eff}}(\varepsilon) \approx \mathbb{E}[\sigma_0] |\varepsilon - \varepsilon_n|$  dans le régime asymptotique du cas parfaitement plastique. Le plateau plastique final est donc donné par la contrainte moyenne de rupture  $\mathbb{E}[\sigma_0] = 1$ . À l'inverse, on peut montrer en analysant le problème en contrainte dual de (14) que le comportement effectif est parfaitement plastique et de limite égale à  $\mathbb{E}[\sigma_0^{-1}]^{-1}$ . On notera que pour une variable lognormale on a

$$\mathbb{E}[X^{-1}]^{-1} = \mathbb{E}[X] \left( 1 + \frac{\text{var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2} \right)^{-1} \approx \mathbb{E}[X] \quad (15)$$

lorsque la variance est faible, comme c'est le cas ici.

### 3 Comportements effectifs optimistes et pessimistes obtenus par mesures de risque

#### 3.1 Mesures de risque et CVaR

Contrairement à la section précédente, nous cherchons à présent à formuler un comportement effectif représentatif des queues de distribution, c'est-à-dire une version *optimiste* et une version *pessimiste* du comportement d'un tel matériau en présence d'incertitude. Pour cela, nous nous reposons sur l'utilisation pour la mesure  $\mathcal{R}$  de la notion de *mesure de risque* fréquemment utilisée en mathématiques financières.

Supposons que la variable aléatoire  $X$  soit associée à un coût, de sorte qu'une estimation d'un tel coût soit donnée par  $\mathcal{R}[X]$ . Pour qu'une telle estimation soit pessimiste, on cherche donc une mesure telle que  $\mathcal{R}[X] > \mathbb{E}[X]$ . Une possibilité est donnée par la *marge de sécurité*  $\mathcal{R}[X] = \mathbb{E}[X] + k \text{std}[X]$  où  $k > 0$  est sans dimension. Cependant, depuis [11], on a pu identifier une classe particulière de mesures de risques appelées *mesures de risques cohérentes* et possédant de bonnes propriétés mathématiques (par ex. convexité, monotonie, homogénéité). La marge de sécurité n'en fait cependant pas partie.

Une mesure de risque cohérente très souvent utilisée est la *valeur conditionnelle au risque* (*Conditional Value-At-Risk*, CVaR). Elle se définit à partir de la *valeur à risque* (*Value-at-Risk*, VaR) qui représente, pour un niveau de confiance  $\beta$  donné, la valeur maximale du coût atteint pour une probabilité  $\beta$  ( $\beta$ -quantile) :

$$\text{VaR}_\beta(X) = \inf\{Z \text{ s.t. } \mathbb{P}[Z \geq X] \geq \beta\} \quad (16)$$

La CVaR se définit simplement comme l'espérance de la queue de distribution au-delà de la VaR.

$$\text{CVaR}_\beta(X) = \mathbb{E}[X \text{ s.t. } X \geq \text{VaR}_\beta(X)] \quad (17)$$

Elle bénéficie notamment de la représentation convexe suivante [12]

$$\text{CVaR}_\beta(X) = \inf_\lambda \lambda + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[\langle X - \lambda \rangle_+] \quad (18)$$

où  $\langle \star \rangle_+ = \max\{\star, 0\}$  est la partie positive. On voit ainsi que  $\text{CVaR}_0(X) = \mathbb{E}[X]$  et  $\text{CVaR}_\beta(X) \geq \mathbb{E}[X]$  pour tout  $\beta \in [0; 1]$ . De plus, cette définition s'étend directement pour toute fonction convexe  $f(\mathbf{x}; \zeta)$  de sorte que :

$$\text{CVaR}_\beta(f)(\mathbf{x}) = \inf_\lambda \lambda + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[\langle f(\mathbf{x}; \zeta) - \lambda \rangle_+] \quad (19)$$

est une fonction convexe de  $\mathbf{x}$ .

#### 3.2 Formulation optimiste du comportement

Une formulation optimiste du comportement effectif du matériau incertain est alors obtenue en utilisant la CVaR comme mesure effective  $\mathcal{R}$  pour les deux potentiels d'énergie libre et de dissipation :

$$j^{\text{eff}}(\varepsilon) = \inf_{\alpha_\zeta} \text{CVaR}_\beta(\psi(\varepsilon, \alpha_\zeta)) + \text{CVaR}_\beta(\phi(\varepsilon - \varepsilon_n, \alpha_\zeta - \alpha_{n,\zeta})) \quad (20)$$

qui dégénère en la formulation (13) lorsque  $\beta = 0$ . En considérant des niveaux de confiance élevés, par ex.  $\beta = 0.95$ , on évaluera de manière optimiste les deux potentiels, conduisant, dans le cas de l'élasto-plasticité, à un comportement présentant une raideur et une limite d'élasticité élevées.

#### 3.3 Formulation pessimiste du comportement

Dans l'optique d'une application à l'ingénierie, on préférerait cependant disposer d'une estimation pessimiste du comportement permettant de se prémunir du risque par souci de sécurité. Malheureusement, il n'existe aucune proposition dans la littérature des mathématiques financières d'une mesure de risque cohérente telle que  $\mathcal{R}[X] \leq \mathbb{E}[X]$ .

Nous proposons pour cela une mesure de risque originale, basée sur la dualité des potentiels convexes. Nous la nommons *CVaR duale* ( $d\text{CVaR}$ ) et la définissons ainsi :

$$d\text{CVaR}_\beta(f)(\mathbf{x}) = (\text{CVaR}_\beta(f^\circ))^\circ(\mathbf{x}) \quad (21)$$

où la notation  $f^\circ$  représente, pour les fonctions convexes positives s'annulant en zéro, la *fonction polaire* définie par [13, Th. 15.4] :

$$f^\circ(\mathbf{x}) = \inf\{\mu \geq 0 \text{ s.t. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mu f(\mathbf{y}) \leq 1 \quad \forall \mathbf{y}\} \quad (22)$$

$$= \inf\{\mu \geq 0 \text{ s.t. } \mu f^*(\mathbf{x}/\mu) \leq 1\} \quad (23)$$

On montre facilement que dCVaR est une mesure de risque cohérente et qui vérifie pour toute fonction convexe de la forme  $f(\mathbf{x}; \zeta) = k(\zeta)g(\mathbf{x})$  la relation suivante :

$$\text{dCVaR}_\beta(f)(\mathbf{x}) = \text{CVaR}_\beta(k^{-1})^{-1}g(\mathbf{x}) \quad (24)$$

On voit donc facilement que  $\text{dCVaR}_\beta(f) \leq \mathbb{E}[f^\circ] \leq \mathbb{E}[f]$  pour tout  $\beta$ .

Une formulation pessimiste du comportement effectif du matériau incertain est alors obtenue en utilisant la dCVaR comme mesure effective  $\mathcal{R}$  pour les deux potentiels d'énergie libre et de dissipation :

$$j^{\text{eff}}(\varepsilon) = \inf_{\alpha_\zeta} \text{dCVaR}_\beta(\psi(\varepsilon, \alpha_\zeta)) + \text{dCVaR}_\beta(\phi(\varepsilon - \varepsilon_n, \alpha_\zeta - \alpha_{n,\zeta})) \quad (25)$$

dont on peut montrer qu'elle dégénère en une formulation très proche de la formulation (14) lorsque  $\beta = 0$ . En considérant des niveaux de confiance élevés, par ex.  $\beta = 0.95$ , on évaluera de manière pessimiste les deux potentiels, conduisant, dans le cas de l'élastoplasticité, à un comportement présentant une raideur et une limite d'élasticité faibles.

### 3.4 Application au comportement élastoplastique 1D

Nous appliquons à présent les formulations précédentes (20) et (25) à l'exemple élastoplastique 1D précédent. La Figure 2 représente le comportement effectif optimiste et pessimiste pour différentes valeurs du niveau d'aversion au risque  $\beta$ . Compte-tenu de la représentation convexe de la CVaR et de la dCVaR, la résolution repose à nouveau sur l'utilisation de `cvxpy` comme précédemment.

Tout d'abord, comme prévu, le cas  $\beta = 0$  produit des réponses effectives très similaires à celles de la Figure 1. Deuxièmement, nous observons que, pour  $\beta = 0.5$  et  $\beta = 0.95$ , nous obtenons bien des comportements effectifs averses au risque, soit du côté optimiste avec la CVaR, soit du côté pessimiste avec la dCVaR. Le comportement résultant présente un comportement élastoplastique similaire caractérisé par une première étape élastique suivie d'une étape d'écrouissage. Avec un niveau d'aversion au risque modéré de  $\beta = 0.5$ , nous obtenons des réponses qui se situent entre les comportements extrêmes et nominaux. En revanche, pour un niveau d'aversion au risque plus élevé de  $\beta = 0.95$ , le comportement résultant est beaucoup plus proche des comportements extrêmes (notons que seules 250 réalisations sur 500 ont été tracées pour une meilleure lisibilité des graphiques). Les deux estimations capturent donc le comportement effectif des deux queues de la distribution des contraintes à un niveau de déformation fixe, mais sans être associées à une seule réalisation du pire cas ou du meilleur cas. En effet, aucune réalisation n'est nécessairement à la fois la moins raide et la moins résistante. La CVaR et la dCVaR permettent donc d'effectuer une moyenne partielle sur un sous-ensemble de réalisations, ce sous-ensemble pouvant être différent d'un niveau de déformation à un autre.

## 4 Conclusions

Ce travail propose une approche novatrice pour modéliser le comportement des matériaux en présence d'incertitudes en utilisant la programmation stochastique, le formalisme des matériaux standards généralisés et les notions de mesures de risque en mathématiques financières. La méthodologie développée s'applique à des comportements matériaux dépendant de paramètres incertains. Elle conduit à des estimations optimistes et pessimistes du comportement effectif du matériau tout en préservant la convexité des potentiels, garantissant ainsi des propriétés thermodynamiques cohérentes. Cette approche ouvre des perspectives pour la propagation de l'incertitude à différentes échelles spatiales. Néanmoins, l'utilisation d'une telle approche dans un calcul de structure soulève des défis numériques en raison du coût associé à un grand nombre de variables d'état internes, coût qu'il conviendrait de réduire via des méthodes de réduction de modèle par exemple.

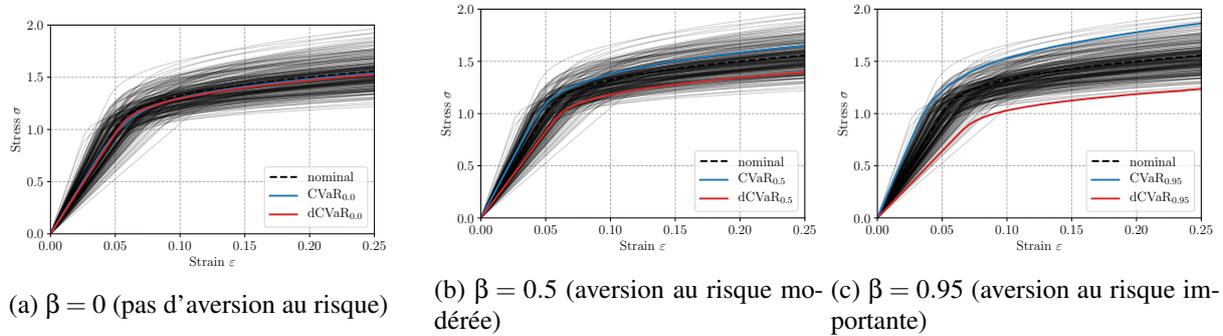


FIGURE 2 – Comportement effectif optimiste (CVaR) et pessimiste (dCVaR) du matériau élastique incertain (cas avec écrouissage  $\mathbb{E}[H] = 1.0$ ) pour différents niveaux d'aversion au risque  $\beta$ .

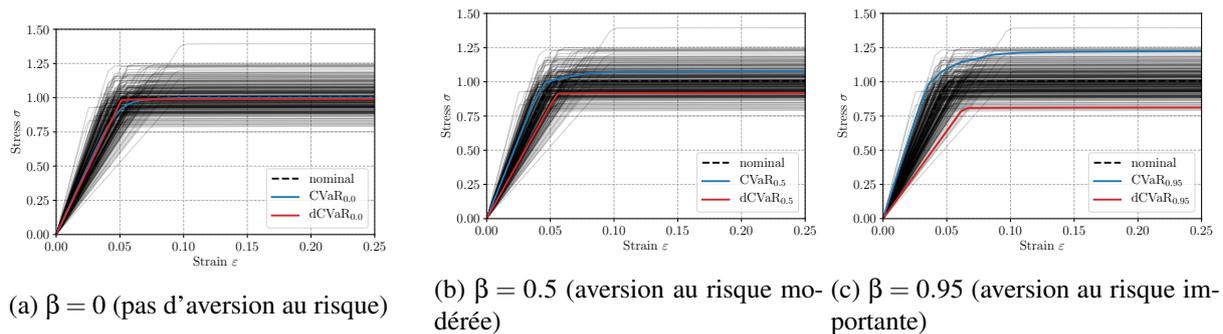


FIGURE 3 – Comportement effectif optimiste (CVaR) et pessimiste (dCVaR) du matériau élastique incertain (cas parfaitement plastique  $\mathbb{E}[H] = 0.01$ ) pour différents niveaux d'aversion au risque  $\beta$ .

## Références

- [1] Roger Ghanem, David Higdon, Houman Owhadi, et al. *Handbook of uncertainty quantification*, volume 6. Springer, 2017.
- [2] Timothy John Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63. Springer, 2015.
- [3] Bruno Sudret. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. *Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France*, 147 :53, 2007.
- [4] Bernard Halphen and Quoc Son Nguyen. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de mécanique*, 14(1) :39–63, 1975.
- [5] Alexander Shapiro and Andy Philpott. A tutorial on stochastic programming. *Manuscript. Available at [www2.isye.gatech.edu/ashapiro/publications.html](http://www2.isye.gatech.edu/ashapiro/publications.html)*, 17, 2007.
- [6] Michael Ortiz and Laurent Stainier. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 171(3-4) :419–444, 1999.
- [7] Christian Miehe. Strain-driven homogenization of inelastic microstructures and composites based on an incremental variational formulation. *International Journal for numerical methods in engineering*, 55(11) :1285–1322, 2002.
- [8] Alexander Mielke. Evolution of rate-independent systems. *Evolutionary equations*, 2 :461–559, 2005.
- [9] Steven Diamond and Stephen Boyd. CVXPY : A Python-embedded modeling language for convex optimization. *Journal of Machine Learning Research*, 17(83) :1–5, 2016.

- [10] Akshay Agrawal, Robin Verschueren, Steven Diamond, and Stephen Boyd. A rewriting system for convex optimization problems. *Journal of Control and Decision*, 5(1) :42–60, 2018.
- [11] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3) :203–228, 1999.
- [12] R Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev, et al. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2 :21–42, 2000.
- [13] R Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*, volume 18. Princeton university press, 1970.