



**HAL**  
open science

## Développement de la TVRC pour le couplage vibro-acoustique en moyenne fréquence

Raphael Thevenot, Guillaume Puel, Andrea Barbarulo

► **To cite this version:**

Raphael Thevenot, Guillaume Puel, Andrea Barbarulo. Développement de la TVRC pour le couplage vibro-acoustique en moyenne fréquence. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610925

**HAL Id: hal-04610925**

**<https://hal.science/hal-04610925v1>**

Submitted on 3 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Développement de la TVRC pour le couplage vibro-acoustique en moyenne fréquence.

R. Thévenot<sup>1</sup>, G. Puel<sup>1</sup>, A. Barbarulo<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France

**Résumé** – La théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC) est une méthode de résolution de problèmes dynamiques dans le domaine des moyennes fréquences. Cette méthode sans maillage permet de remplacer celle des éléments finis qui s'avère inefficace dans le domaine des moyennes fréquences. L'idée est d'approximer la solution d'une équation d'Helmholtz par une somme d'ondes planes définies sur un ensemble de sous-domaines, ce qui permet de supprimer l'erreur de dispersion due à la discrétisation du domaine étudié. Après une présentation générale de la TVRC appliquée aux problèmes acoustiques, la méthode sera développée dans le contexte d'un couplage vibro-acoustique entre une paroi et des cavités acoustiques.

**Mots clés** – TVRC, moyenne fréquence, couplage vibro-acoustique, pyVTCR.

## 1 Introduction et contextes

L'Agence européenne de l'environnement rapporte que la pollution sonore engendre 43 000 hospitalisations par an en Europe et identifie cette pollution comme la deuxième plus dangereuse pour la santé humaine après la pollution de l'air. Parmi les différentes causes de cette pollution sonore on trouve le transport ferroviaire qui, dans le contexte de la transition écologique et de la décarbonisation des mobilités, est voué à se développer dans de nombreux pays européens, tout particulièrement dans les zones urbaines. C'est dans ce contexte que la SNCF a lancé de nombreux projets afin de réduire la pollution sonore à bord des trains et aux abords de ses infrastructures. Parmi eux, une collaboration avec le LMPS a pour objectif de développer les outils nécessaires à la résolution de problèmes vibro-acoustiques dans les gammes de fréquences audibles pour l'homme (20Hz-20kHz).

La principale difficulté est due à l'impossibilité d'utiliser les méthodes usuelles dans ce contexte. De-raemaeker [4] montre l'existence d'une erreur de pollution, en plus de l'erreur de discrétisation de la méthode des éléments finis appliquée à l'équation de Helmholtz, ce qui limite son utilisation dans le domaine des hautes et moyennes fréquences. Une méthode haute fréquence couramment utilisée est l'analyse statistique de l'énergie (SEA) : elle permet de rendre compte du comportement global de la structure en haute fréquence tout en intégrant certaines incertitudes ; cependant elle ne permet pas d'obtenir une information locale des champs étudiés et n'est donc pas utilisable en moyennes et basses fréquences. On constate donc l'existence d'une zone dite de moyenne fréquence pour laquelle aucune méthode usuelle n'est satisfaisante. C'est pourquoi de nombreuses techniques ont été développées au cours des dernières comme résumé dans le livre *Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics* [1]. On peut distinguer trois approches différentes : le développement de la FEM aux hautes fréquences par enrichissement des fonctions de forme ; l'extension de la SEA aux basses fréquences par extrapolation d'information locale ; et les méthodes de Trefftz dont la TVRC fait partie.

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes est introduite pour la première fois par P. Ladevèze en 1996 [5]. Elle a ensuite été appliquée à de nombreux problèmes différents : assemblage de plaques hétérogènes, assemblage de coques orthotropes [2], dynamique transitoire, acoustique 2D [3], etc. La méthode peut être résumée en quatre étapes : décomposition du domaine en sous-domaines étoilés ; choix des fonctions de forme pour chaque sous-domaine qui vérifient *a priori* l'équation d'équilibre ; formulation faible du problème aux conditions limites ; reconstruction du champs solution.

Dans un premier temps, nous résumons la formulation mathématique de la TVRC dans le cas de l'acoustique 2D telle qu'elle a été implémentée dans le code *pyVTCR*, puis nous présentons les travaux menés

sur l'application de la méthode au couplage vibro-acoustique entre une paroi et une cavité 2D. Pour finir, nous illustrons le code *pyVTCR* utilisé pour simuler le couplage entre deux cavités séparées par une paroi fine.

## 2 Formulation mathématique de la TVRC appliquée à l'acoustique 2D

Cette section présente la formulation mathématique de la TVRC dans le cas de l'acoustique 2D, nous n'aborderons pas les théorèmes mathématiques sur lesquels elle repose. Dans un premier lieu, nous présenterons la formulation classique d'un problème d'acoustique classique tout en introduisant les notations nécessaires. Ensuite nous développerons la formulation TVRC de ce problème, pour finir sur un bilan des propriétés de la TVRC.

### 2.1 Problème de référence et notations

La figure 1 présente un cas de référence de problème acoustique où le domaine  $\Omega$  étudié est scindé en 2 sous-domaines. Dans la suite, nous considérerons un domaine partitionné en  $E$  sous-domaines différents.

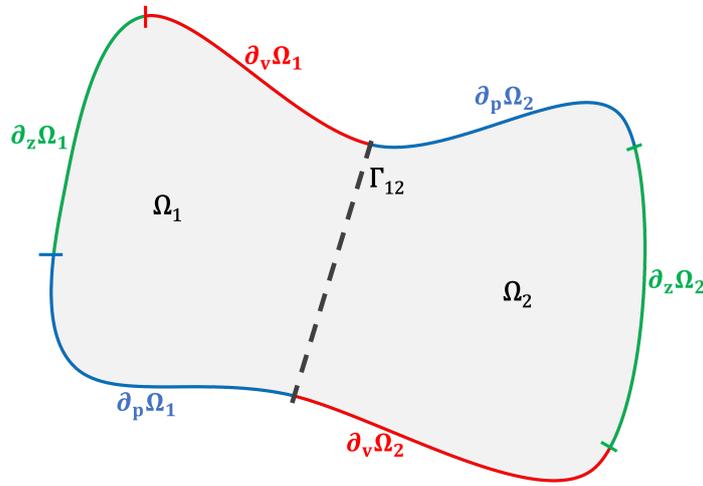


FIGURE 1 – Illustration d'un problème typique d'acoustique 2D.

Une première étape nécessaire à la TVRC est la partition du domaine étudié en  $E$  sous-domaines dits étoilés :

Soit  $\Omega$  le domaine étudié et  $\{\Omega_e\}_{1 \leq e \leq E}$  une partition de  $\Omega$  telle que chaque sous-domaine  $\Omega_e$  est étoilé.

$$\Omega = \bigcup_{1 \leq e \leq E} \Omega_e, \Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset \text{ if } e \neq f$$

Un domaine  $\Omega_e$  est dit étoilé si et seulement si :

$$\exists a \in \Omega_e \mid \forall x \in \Omega_e, \{(1-t)a + tx \mid t \in [0, 1]\} \subset \Omega_e$$

La méthode TVRC étant une méthode de résolution fréquentielle, on fixe une fréquence d'étude  $f$  et le champ de pression acoustique  $p_e$ , défini sur  $\Omega_e$ , vérifie l'équation d'Helmholtz suivante :

$$\Delta p_e + k^2 p_e = 0 \quad \text{dans } \Omega_e \quad (1)$$

Avec  $k = (1 + i\eta) \frac{2\pi f}{c_0}$  le nombre d'onde supposé homogène,  $\eta$ ,  $c_0$  sont le facteur d'amortissement et la vitesse du son dans le milieu étudié.

Chaque sous-domaine peut être soumis à 3 types de conditions limites différentes :

- Condition de Dirichlet :  $p_e = p_{imp}$  sur  $\partial_p \Omega_e$
- Condition de Neumann :  $\frac{i}{\rho_0 2\pi f} \frac{\partial p_e}{\partial n_e} = v_{imp}$  sur  $\partial_v \Omega_e$
- Condition de Robin :  $p_e - \frac{iZ_{imp}}{\rho_0 2\pi f} \frac{\partial p_e}{\partial n_e} = 0$  sur  $\partial_z \Omega_e$

De plus, la décomposition en sous-domaines introduit des conditions limites de continuité à la frontière  $\Gamma_{ef}$  entre les 2 sous-domaines  $\Omega_e$  et  $\Omega_f$  :

$$p_e - p_f = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ef} = \partial\Omega_e \cap \partial\Omega_f \quad (2)$$

$$\frac{i}{\rho_0 2\pi f} \frac{\partial p_e}{\partial \underline{n}_e} + \frac{i}{\rho_0 2\pi f} \frac{\partial p_f}{\partial \underline{n}_f} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ef} = \partial\Omega_e \cap \partial\Omega_f \quad (3)$$

Les normales  $n_e$  et  $n_f$  sont sortantes de leur sous-domaine respectif.

## 2.2 Formulation TVRC du problème de référence

Une fois le problème de référence correctement défini, on peut montrer que pour chaque sous-domaine étoilé  $\Omega$ , la solution au problème peut s'écrire sous la forme d'une fonction d'Herglotz [6] :

$$p_e(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} A_e(\theta) e^{ik_e(\theta)\underline{x}} d\theta \quad (4)$$

Il s'agit d'une somme continue d'ondes planes de vecteur d'onde  $\underline{k}_e(\theta)$  tel que  $\|\underline{k}_e\| = k$ . Afin de résoudre numériquement ce problème, la méthode TVRC propose d'approximer cette somme continue par une somme discrète et finie. Plusieurs choix ont été étudiés, mais le choix retenu est d'approximer la fonction d'amplitude  $A_e$  par une somme de dirac, on obtient donc l'approximation suivante :

$$p_e(\underline{x}) \approx \sum_{n=1}^N a_n e^{ik_e(\theta_n)\underline{x}} \quad (5)$$

Cette formulation a l'avantage de faciliter l'implémentation numérique et d'accélérer les temps de calcul en permettant un calcul analytique des intégrales de la forme faible 6.

De par ce choix, la pression  $p_e$  vérifie *a priori* l'équation d'équilibre 1, il suffit donc de trouver les amplitudes  $a_n$  qui satisfont au mieux les conditions limites. Pour ce faire, on introduit la formulation faible du problème aux conditions limites :

Trouver  $(p_1, \dots, p_E) \in S_{1,ad} \times \dots \times S_{E,ad}$ , tel que :

$$\sum_{e=1}^E \Re \left( \int_{\partial_p \Omega_e} (p_e - p_{imp}) \overline{\delta v_e} dS + \int_{\partial_v \Omega_e} (v_e - v_{imp}) \overline{\delta p_e} dS + \int_{\partial_Z \Omega_e} (p_e - Z_{imp} v_e) \overline{\delta v_e} dS \right. \\ \left. + \sum_{f=1, f \neq e}^E \int_{\Gamma_{ef}} (p_e - p_f) \overline{\delta v_e} + (v_e + v_f) \overline{\delta p_e} dS \right) = 0 \quad (6)$$

$$\forall (\delta p_1, \dots, \delta p_E) \in S_{1,ad} \times \dots \times S_{E,ad}$$

Avec  $v_e = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_e}{\partial \underline{n}_e}$ ,  $\delta v_e = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \delta p_e}{\partial \underline{n}_e}$  et  $\overline{(\square)}$  qui correspond au conjugué complexe de  $\square$ .

A partir de cette forme, on peut introduire les sous-opérateurs suivants :

$$\mathcal{B}_p^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\partial_p \Omega_e} p_e \overline{\delta v_e} dS \quad ; \quad \mathcal{B}_v^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\partial_v \Omega_e} v_e \overline{\delta p_e} dS \quad ; \quad \mathcal{B}_Z^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\partial_Z \Omega_e} (p_e - Z_{imp} v_e) \overline{\delta v_e} dS$$

$$\mathcal{B}_{\Gamma_f}^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\Gamma_{ef}} p_e \overline{\delta v_e} + v_e \overline{\delta p_e} dS \quad ; \quad \mathcal{B}_f^e(p_f, \delta p_e) = \int_{\Gamma_{ef}} -p_f \overline{\delta v_e} + v_f \overline{\delta p_e} dS$$

$$\mathcal{L}_p(\delta p_e) = \int_{\partial_p \Omega_e} p_{imp} \overline{\delta v_e} dS \quad ; \quad \mathcal{L}_v(\delta p_e) = \int_{\partial_v \Omega_e} v_{imp} \overline{\delta p_e} dS$$

Ce qui permet de réécrire l'équation 6 sous la forme suivante :

$$\sum_{e=1}^E \Re \left( \mathcal{B}_p^e(p_e, \delta p_e) + \mathcal{B}_v^e(p_e, \delta p_e) + \mathcal{B}_Z^e(p_e, \delta p_e) + \mathcal{L}_p(\delta p_e) + \mathcal{L}_v(\delta p_e) + \sum_{f=1, f \neq e}^E (\mathcal{B}_{\Gamma_f}^e(p_e, \delta p_e) + \mathcal{B}_f^e(p_f, \delta p_e)) \right) = 0 \quad (7)$$

Ce qui donne le système linéaire suivant après discrétisation :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_p^1 + \mathbf{B}_v^1 + \mathbf{B}_Z^1 + \mathbf{B}_{\Gamma_f}^1 & \cdots & \mathbf{B}_1^E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_E^1 & \cdots & \mathbf{B}_p^E + \mathbf{B}_v^E + \mathbf{B}_Z^E + \mathbf{B}_{\Gamma_f^E} \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_E \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}_p^1 + \mathbf{L}_v^1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_p^E + \mathbf{L}_v^E \end{bmatrix}}_{\mathbb{L}} \quad (8)$$

### 2.3 Quelques propriétés de la TVRC

La première propriété de la TVRC est qu'elle ne nécessite pas de maillage. Elle demande beaucoup moins de degrés de liberté pour résoudre un problème. De plus, l'utilisation des ondes planes comme fonctions de forme permet d'obtenir une solution  $C^\infty$  et ne nécessite aucune interpolation. Ces ondes planes permettent un calcul analytique des intégrales nécessaire à la création du système à résoudre, ce qui permet de réduire significativement les temps de calcul.

Comme de nombreuses autres méthodes de Trefftz, le système à résoudre est mal conditionné, on peut noter les propriétés suivantes :

- La matrice  $\mathbb{B}$  dépend fondamentalement de la fréquence étudiée et elle est mal conditionnée.
- La matrice  $\mathbb{B}$  est dense par bloc (Cf. figure 2), elle est non symétrique, et à valeurs complexes.
- Les sous-matrices de couplage  $\mathbf{B}_e^f$  sont nulles si les domaines  $e$  et  $f$  sont séparés, sinon elles sont pleines.
- Les sous-opérateurs  $\mathcal{B}_o^e$  sont hermitiens.

Valeurs des modules des coefficients de  $\mathbb{B}$ .  
cond=8.3e+19

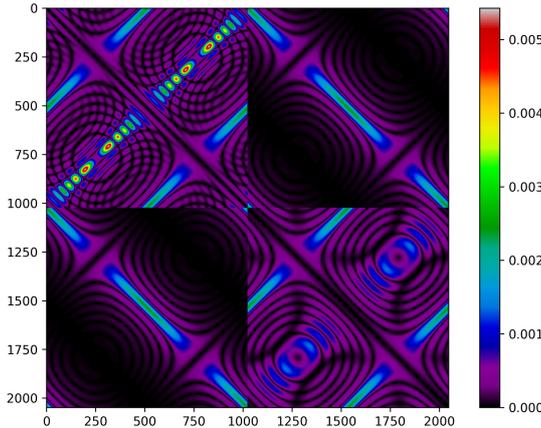


FIGURE 2 – Exemple d'une matrice TVRC pour l'exemple présenté figure 1.

## 3 Extension de la TVRC au couplage vibro-acoustique

Dans cette partie, on souhaite décrire la formulation TVRC du problème de couplage vibro-acoustique 2D, puis on présente son implémentation numérique sur un exemple de couplage entre deux cavités acoustiques 2D séparées par une paroi. Nous reprenons l'exemple présenté figure 1, en remplaçant la frontière  $\Gamma_{12}$  par une paroi mince couplée aux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Le couplage vibro-acoustique est décrit par la flexion de la paroi séparant les cavités  $e$  et  $f$ . En notant  $u$  le déplacement normal de la paroi on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d^4 u}{ds^4} - \frac{\rho_s h}{D} \omega^2 u = \frac{p_e - p_f}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9)$$

$$v_e = i\omega u \quad ; \quad v_f = -i\omega u \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (10)$$

$$u(0) = 0 = u(L) \quad u'(0) = 0 = u'(L) \quad (11)$$

Avec  $\rho_s$  la densité de la paroi,  $h$  son épaisseur,  $E$  le module d'élasticité et  $\nu$  le coefficient de poisson.

En appliquant la TVRC, on décrit la pression comme une somme d'ondes planes :

$$p_e(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_e} a_n e^{ik_e(\theta_n)\underline{x}} = \phi_e^T \mathbf{a}_e \quad (12)$$

On cherche à exprimer la solution  $u$  du problème de vibration à partir des amplitudes  $\mathbf{a}_e$  et  $\mathbf{a}_f$ . On commence par décomposer la solution en solution homogène et en solution particulière :  $u(s) = \tilde{u}(s) + u_p(s)$ . La solution particulière peut être déterminée à partir de la forme des pressions imposées :

$$u_p(s) = \sum_{n=1}^{N_e} \frac{a_{n,e}}{D[(k_e(\theta_n) \cdot \tau)^4 - K^4]} e^{ik_e(\theta_n)\underline{x}(s)} - \sum_{n=1}^{N_f} \frac{a_{n,f}}{D[(k_f(\theta_n) \cdot \tau)^4 - K^4]} e^{ik_f(\theta_n)\underline{x}(s)} \quad (13)$$

$$= \psi_{e,p}^T \mathbf{a}_e - \psi_{f,p}^T \mathbf{a}_f \quad (14)$$

La solution homogène peut s'exprimer sous la forme suivante :  $\tilde{u}(s) = Ae^{iKs} + Be^{-iKs} + Ce^{Ks} + De^{-Ks} = \tilde{\psi}^T [A \ B \ C \ D]^T$ . En appliquant les conditions limites de la paroi on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ iK & -iK & K & -K \\ e^{iKL} & e^{-iKL} & e^{KL} & e^{-KL} \\ iKe^{iKL} & -iKe^{-iKL} & Ke^{KL} & -Ke^{-KL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_p(0) \\ u_p'(0) \\ u_p(L) \\ u_p'(L) \end{bmatrix}$$

$$\iff \mathbb{M}_{BC} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = -\mathbb{M}_e^\Psi \mathbf{a}_e + \mathbb{M}_f^\Psi \mathbf{a}_f \quad \text{avec } K = \sqrt[4]{\frac{\rho_s h}{D}} \omega^2$$

Ainsi, on peut exprimer la flexion de la paroi à partir des amplitudes des pressions des cavités adjacentes :

$$u(s) = \underbrace{\left[ \psi_{e,p}^T - \tilde{\psi}^T \mathbb{M}_{BC}^{-1} \mathbb{M}_e^\Psi \right] \mathbf{a}_e}_{u_e(s)} - \underbrace{\left[ \psi_{f,p}^T - \tilde{\psi}^T \mathbb{M}_{BC}^{-1} \mathbb{M}_f^\Psi \right] \mathbf{a}_f}_{u_f(s)} \quad (15)$$

On remarque les propriétés suivantes pour les opérateurs introduits :

- $\mathbb{M}_{BC}$  dépend du choix des conditions limites appliquées à la paroi, des propriétés de la paroi et de la fréquence étudiée.
- $\tilde{\psi}$  ne dépend que des propriétés de la paroi et de la fréquence étudiée.
- $\psi_{e,p}$  dépend des fonctions de forme choisies pour le champ de pression acoustique.
- $\mathbb{M}_e^\Psi$  dépend des fonctions de forme du champ de pression et des conditions limites choisies pour la paroi.

Maintenant que le déplacement  $u$  est exprimé en fonction des amplitudes du champ de pression, il nous est possible d'exprimer l'équation 10 de continuité des vitesses sous forme faible :

$$\forall (\delta p_e, \delta p_f) \in \mathcal{S}_{e,ad} \times \mathcal{S}_{f,ad},$$

$$\Re \left( \int_{\Gamma_c} (v_e - i\omega u) \delta p_e ds + \int_{\Gamma_c} (v_f + i\omega u) \delta p_f ds \right) = 0 \quad (16)$$

$$\iff \Re \left( \int_{\Gamma_c} (v_e - i\omega u_e) \delta p_e ds + \int_{\Gamma_c} (v_f - i\omega u_f) \delta p_f ds + i\omega \int_{\Gamma_c} u_f \delta p_e ds + i\omega \int_{\Gamma_c} u_e \delta p_f ds \right) = 0$$

On peut ainsi, définir deux nouveaux opérateurs :

$$\mathcal{B}_c^e(p_e, \delta p_e) = \int_{\Gamma_c} (v_e - i\omega u_e) \delta p_e ds \quad ; \quad \mathcal{B}_c^{ef}(p_f, \delta p_e) = i\omega \int_{\Gamma_c} u_f \delta p_e ds$$

**Remarque :** Dans cette partie, il a été fait le choix de caractériser le couplage vibro-acoustique de manière implicite avec une formulation primale sur la pression acoustique mais on aurait pu choisir de résoudre un problème mixte entre la pression acoustique  $p_e$  et la flexion de la paroi  $u$ . Cependant, cette méthode n'a pas été retenue car le conditionnement de la matrice ainsi créée explosait à cause d'une grande différence d'ordres de grandeur entre les différents blocs acoustiques et vibratoires de la matrice. On notera que la méthode retenue est équivalente à utiliser le complément de Schur du problème mixte.

## 4 Deux exemples de la TVRC appliquée au couplage vibro-acoustique

### 4.1 Exemple d'une cavité acoustique couplée avec une paroi

Le modèle utilisé est présenté figure 3a, les résultats seront comparés au cas de réflexion parfaite qui est une bonne approximation de la situation pour une paroi suffisamment rigide.

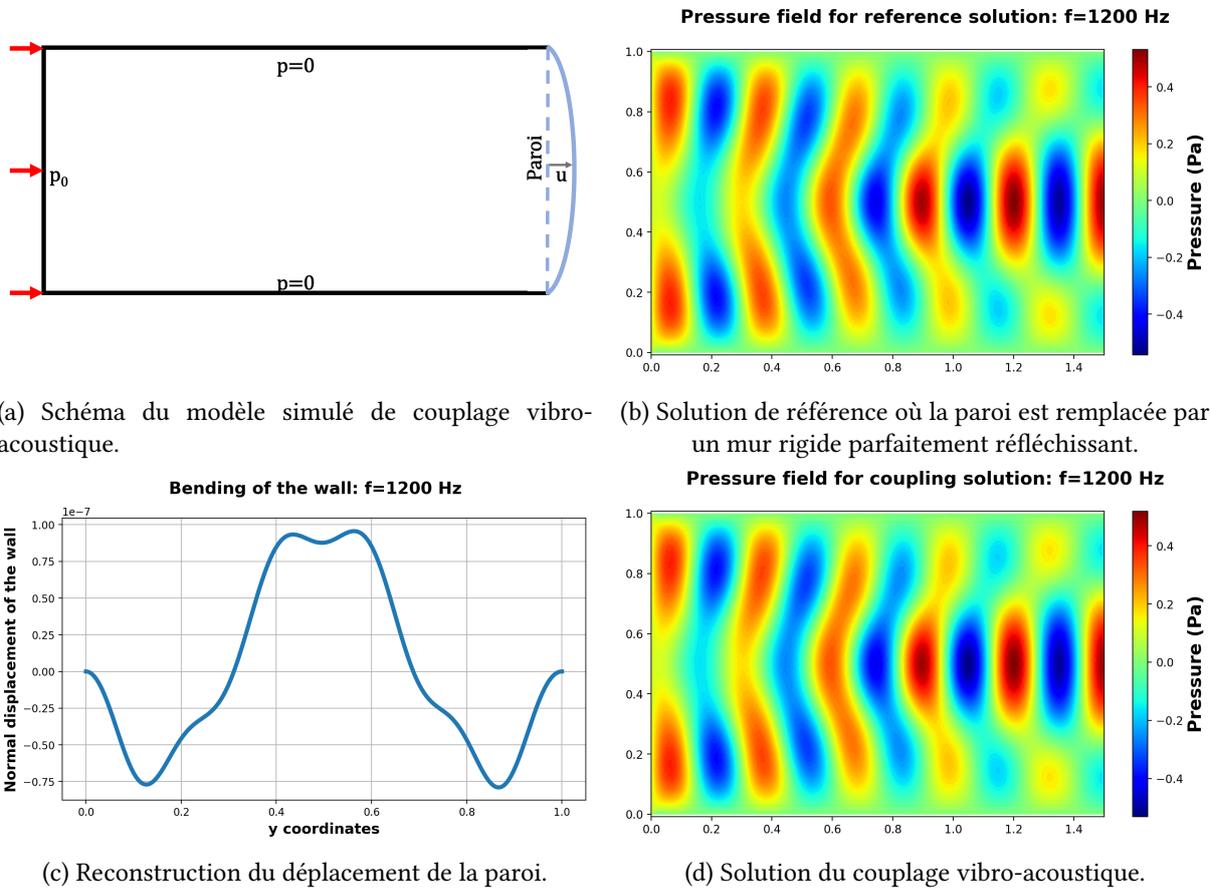
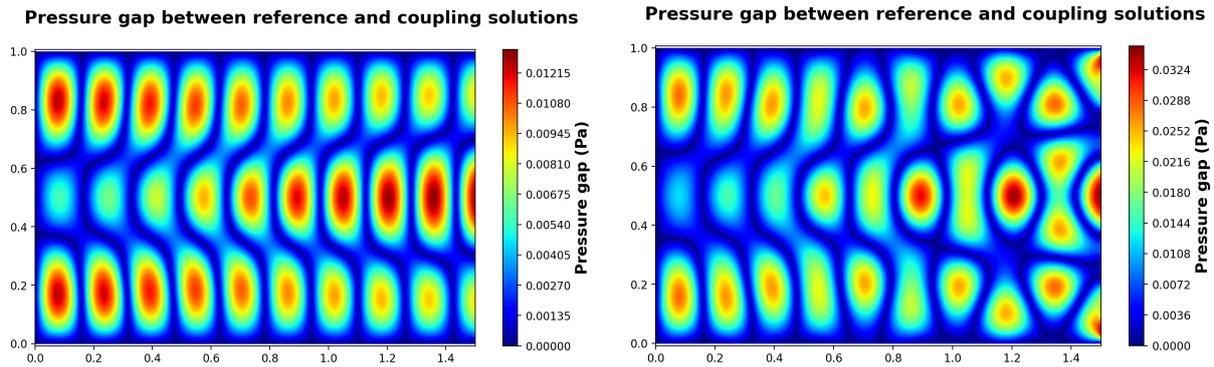


FIGURE 3 – Résultats de la première étude de couplage vibro-acoustique. Le milieu acoustique correspond à de l'air ( $c = 344m/s$ ,  $\rho = 1.2kg/m^3$ ), la paroi est en verre ( $h = 4mm$ ,  $\rho = 2320kg/m^3$ ,  $E = 75 GPa$ ,  $\nu = 0.25$ ).

On constate figure 3, comme attendu, que la solution de référence et celle du couplage vibro-acoustique sont quasiment identiques. Une analyse plus précise (voir figure 4) montre que la solution couplée présente des amplitudes légèrement inférieures à celle de référence, on constate un écart maximal d'environ 2.5% pour la paroi en verre et 6.5% pour celle en plexiglas. Le plexiglas étant plus léger et moins raide, il est normal que l'approximation de réflexion totale soit moins bonne que dans le cas du verre.

La reconstruction du déplacement normal de la paroi montre qu'on satisfait bien les conditions limites

choisies (déplacement et rotation nuls). De plus, on observe bien un déplacement positif au centre de la paroi où la pression est positive et un déplacement négatif aux bords où la pression est négative. Ces deux simulations semblent confirmer la bonne implémentation du code de couplage vibro-acoustique.



(a) Écart de pression entre la solution de référence et la solution vibro-acoustique pour une paroi en verre ( $\rho = 2320\text{kg/m}^3$ ,  $E = 75\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.25$ ).

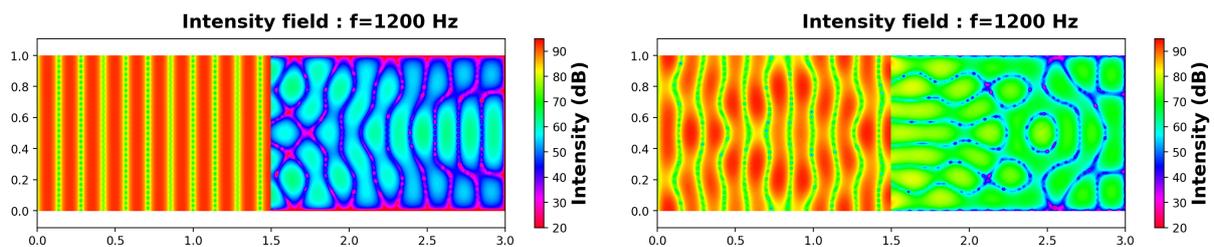
(b) Écart de pression entre la solution de référence et la solution vibro-acoustique pour une paroi en plexiglas ( $\rho = 1180\text{kg/m}^3$ ,  $E = 3\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.4$ ).

FIGURE 4 – Comparaison de la solution couplée à la solution de référence pour différentes parois.

## 4.2 Exemple de couplage entre deux cavités acoustiques séparées par une paroi

La méthode de couplage vibro-acoustique mise en place permet aussi de coupler 2 cavités entre elles lorsqu'elles sont séparées par une paroi fine. La figure 5 présente les résultats de deux simulations avec dans un cas une paroi en verre et dans le second cas en plexiglas. La première cavité est soumise à une pression constante sur son bord de gauche et les bords en haut et en bas sont parfaitement réfléchissants. La seconde cavité a ses bords de droite, en haut et en bas parfaitement absorbants pour éviter une onde réfléchi qui reviendrait dans la première cavité, l'objectif est d'isoler le comportement de la paroi.

Il est important de noter que le couplage des cavités présenté est exclusivement du à la mise en mouvement de la paroi par les efforts de pression, le modèle ne prend pas en compte la transmission de l'onde acoustique entre deux milieux. Ce modèle n'est donc valide que pour des longueurs d'onde supérieures à l'épaisseur de la paroi.



(a) Intensité acoustique dans les cavités séparées par une paroi en verre ( $\rho = 2320\text{kg/m}^3$ ,  $E = 75\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.25$ ).

(b) Intensité acoustique dans les cavités séparées par une paroi en plexiglas ( $\rho = 1180\text{kg/m}^3$ ,  $E = 3\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.4$ ).

FIGURE 5 – Comparaison du couplage entre deux cavités séparées par une paroi.

Dans le cas de la paroi en verre on observe une atténuation de 30 dB tandis que pour la paroi en plexiglas seulement de 10 dB. Le plexiglas transmet mieux l'onde acoustique comme attendu. En plus de mieux transmettre l'onde, on observe que dans le cas de la paroi en plexiglas, l'onde incidente est aussi bien plus perturbée que dans le cas de la paroi en verre qui se comporte quasiment comme une paroi parfaitement réfléchissante pour la première cavité.

## 5 Conclusion

Dans ce résumé, nous avons présenté une nouvelle formulation du couplage vibro-acoustique utilisant la TVRC. La méthode a été illustrée sur deux exemples afin de valider son implémentation.

Nous avons commencer par présenter le contexte de ces travaux qu'est l'analyse moyenne fréquence pour l'acoustique et les vibrations. Nous avons ensuite présenté un problème d'acoustique typique ainsi que sa formulation TVRC. Puis, nous avons développé la formulation mathématique d'un problème de couplage vibro-acoustique dans le cadre de la TVRC. Nous avons pu finalement présenté l'implémentation de cette méthode dans le code *pyVTCR* à l'aide de deux exemples.

La TVRC, et son application au couplage vibro-acoustique, permet de répondre à un besoin grandissant de simulation des phénomènes moyennes, les travaux en cours ont pour objectifs de développer la TVRC afin de simuler de plus en plus de situations différentes (sources ponctuelles à l'intérieur du domaine, conditions limites non constantes, intégration sur bords quelconques, estimateur d'erreur...). De même, nous travaillons à l'élaboration d'une méthode de simulation et d'aide à la conception pour les méta-matériaux acoustiques utilisant la TVRC.

## Références

- [1] O. Atak, B. Pluymers, W. Desmet et al., *CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics*, 2012.
- [2] A. Cattabiani, A. Barbarulo, et al, *Variational theory of complex rays applied to shell structures : in-plane inertia, quasi-symmetric ray distribution, and orthotropic materials*, *Computational Mechanics*, 983-997, 2015.
- [3] R. Cettour-Janet, *Modelling the vibrational response and acoustic radiation of the railway tracks*, Thèse de doctorat, Université Paris Saclays, 2019.
- [4] A. Deraemaeker, I. Babuska, P. Bouillard. *Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 471-499, 1999.
- [5] P. Ladevèze, *Une nouvelle approche pour le calcul des vibrations moyennes fréquences*, *compte rendu de l'académie des sciences de Paris*, 849-856, 1996.
- [6] R. L. Ochs, *A version of Runge's theorem for the Helmholtz equation with applications to scattering theory*, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 107-119, 1989