

Développement d'un capteur virtuel de déformation d'aile d'avion basé sur des modèles d'apprentissage profond

Antoine Goichon, Martin Ghienne, Anita Dehoux, Valentin Tschannen,

Nicolas Peyret

▶ To cite this version:

Antoine Goichon, Martin Ghienne, Anita Dehoux, Valentin Tschannen, Nicolas Peyret. Développement d'un capteur virtuel de déformation d'aile d'avion basé sur des modèles d'apprentissage profond. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610920

HAL Id: hal-04610920 https://hal.science/hal-04610920v1

Submitted on 3 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Développement d'un capteur virtuel de déformation d'aile d'avion basé sur des modèles d'apprentissage profond

A. Goichon^{1,2}, M. Ghienne¹, A. Dehoux², V. Tschannen², N. Peyret¹

 Quartz, ISAE-Supméca, Institut supérieur de mécanique de Paris, Saint-Ouen-sur-Seine, France {antoine.goichon, martin.ghienne, nicolas.peyret}@isae-supmeca.fr
 Aquila Data Enabler, Courbevoie, France {agoichon, adehoux, vtschannen}@aquiladata.fr

Résumé — La caractérisation des chargements subis par les structures aéronautiques en vol réel permet d'améliorer les modèles de sollicitations, le dimensionnement des aéronefs ou l'optimisation des plans de maintenance. Les données acquises sur avions d'essais, équipés de capteurs additionnels tels que des jauges d'extensométrie, permettent le développement de capteurs virtuels reliant l'instrumentation de bord d'un avion aux chargements structurels. Cette étude explore plusieurs architectures d'apprentissage profond pour la mise en place de capteurs virtuels prédisant la déformation d'aile en vol à partir des données issues de l'instrumentation de bord.

Mots clés — capteurs virtuels, apprentissage machine, structures aéronautiques.

1 Introduction

La caractérisation des chargements réels subis en vol par les structures aéronautiques est important pour les fabricants. Elle permet la certification de leurs appareils, la validation de modèles numériques et l'élaboration de plans de maintenance efficaces. Pour obtenir ces chargements, les avionneurs exploitent des avions équipés de capteurs additionnels dédiés à l'analyse structurelle, tels que des accéléromètres ou des jauges d'extensométrie. Équipés également de l'instrumentation de bord, ces avions permettent, lors des vols d'essai, d'obtenir des bases de données reliant l'instrumentation de bord aux chargements structurels. Pour des raisons de coûts ou de compléxité, les avions commerciaux disposent uniquement de l'instrumentation de bord, mais l'estimation des contraintes subies par l'avion au cours de sa vie pourrait permettre d'améliorer les plans de maintenance et le dimensionnement de la structure de l'avion.

En exploitant les données issues des vols d'essais, il est possible de créer des modèles capables d'estimer les chargements structurels uniquement à partir de l'instrumentation de bord. Ces modèles peuvent alors se substituer aux capteurs physiques pour estimer ces chargements et constituent ainsi des capteurs virtuels. Cette problématique était au cœur du challenge *AI for Industry 2020*, proposé par la région Île-de-France et Dassault Aviation [1]. Dans le secteur aéronautique, d'autres applications de capteurs virtuels ont été proposées, notamment pour la restitution de l'angle d'attaque [2] ou la restitution de l'altitude [3].

Pour parvenir à la constitution de capteurs virtuels, des approches basées sur des modèles physiques offrent de bonnes performances et une bonne interprétabilité [4], mais peuvent être limitées par l'état des connaissances scientifiques et métier ou la puissance de calcul nécessaire à la simulation. À l'inverse, avec suffisamment de données, les approches d'apprentissage machine offrent de bonnes performances et sont capables de capturer des phénomènes complexes. Suite au challenge *AI for Industry 2020*, une preuve de concept d'un capteur virtuel d'état de contrainte structurel avion, basée sur des techniques d'apprentissage, a été proposée par le consortium Aquila Data Enabler et ISAE-Supméca [5]. Les performances de ce capteur virtuel ont permis de démontrer l'intérêt de l'approche. Néanmoins, ces modèles, souvent qualifiés de "boîte noire", souffrent d'un manque d'interprétabilité. Ce travail entre dans la continuité de la solution de capteur virtuel proposée lors de ce challenge.

Pour tirer parti des avantages des approches basées sur des modèles physiques et celles basées sur des techniques d'apprentissage machine, de nouveaux modèles "hybrides" ont récemment fait l'objet d'une attention particulière de la communauté scientifique. Parmi eux, on peut citer les réseaux de neurones

informés par la physique (PINN) [6], apprenant à partir des données et des équations différentielles définissant le problème physique, ou encore les équations différentielles ordinaires neuronales (Neural ODE)[7] qui, lors de l'apprentissage, exploitent des méthodes numériques classiques de résolution d'équations différentielles.

Dans un premier temps sont présentés les objectifs du capteur virtuel considéré, les données d'entrée et de sortie du problème, et les architectures d'apprentissage profond envisagées. Ensuite, un simulateur de déformation d'aile sous chargement aérodynamique est proposé. Il permet notamment de générer des données maîtrisées, basées sur des modèles physiques connus, favorisant le développement d'approches hybrides. Enfin, nous examinerons les performances obtenues par différents modèles d'apprentissage profond sur différentes bases de données synthétiques générées par ce simulateur.

2 Définition d'un capteur virtuel de déformation d'aile

Dans cette étude, l'objectif est de construire un capteur virtuel capable de restituer les déformations d'une aile d'avion à partir de l'instrumentation de bord de l'avion. Dans un premier temps, on considère un problème simplifié. La structure considérée est une aile encastrée à une extrémité et représentée par un modèle éléments finis de type poutre. Le chargement considéré est un chargement aérodynamique. En se basant sur [8][9], on suppose que ce chargement dépend de cinq paramètres : l'angle d'attaque $\alpha^{\infty}(t)$, la densité de l'air $\rho(t)$, la vitesse de l'avion par rapport au fluide $V^{\infty}(t)$, l'action des ailerons $\delta^{a}(t)$ et le taux de rotation p(t). à chaque instant t du vol. Les sorties du problème sont les déformations $\varepsilon^{j}(t)$ à chaque instant t et en tout point $j \in [1, N]$ le long de l'aile de l'avion, où N est le nombre de capteurs.

On définit X comme l'espace des données d'entrée, tel que pour tout *i* appartenant à l'ensemble des instants de vol T et $\mathbf{x}_i \in X$,

$$\mathbf{x}_i = (\alpha_i^{\infty}, \rho_i, V_i^{\infty}, \delta_i^a, p_i) \tag{1}$$

On définit également \mathcal{Y} l'espace des données de sortie tel que $\forall i \in \mathcal{T}, \mathbf{y}_i \in \mathcal{Y}$,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2, \dots, \varepsilon_i^N) \tag{2}$$

Le capteur virtuel a donc pour objectif d'approximer la fonction $f : X \mapsto \mathcal{Y}$, et les estimations des $\mathbf{\varepsilon}_i$ seront notées $\mathbf{\widehat{\varepsilon}}_i$. Afin d'approximer la fonction f et construire nos capteurs virtuels, trois modèles d'apprentissage profond sont envisagés : un perceptron multicouche (MLP) point à point, un MLP séquence à point que nous appellerons MLP temporel (TMLP), et un réseau de neurones récurrents à mémoire longue et courte (LSTM). Le MLP point à point, approxime la fonction f en prédisant \mathbf{y}_i à partir de \mathbf{x}_i uniquement. Le TMLP ou le LSTM, quant à eux, prédisent \mathbf{y}_i à partir des données ($\mathbf{x}_{i-\mathbf{k}}, \mathbf{x}_{i-\mathbf{k}+1}, ..., \mathbf{x}_i$) avec k la taille de la séquence. Ils sont donc capables de capturer les dépendances temporelles dans les données, à l'inverse du premier modèle.

Pour chaque modèle, les hyperparamètres ont été optimisés à l'aide des librairies Ray-tune et Optuna, respectivement utilisées pour la parallélisation haute performance et l'optimisation d'hyperparamètres. Les hyperparamètres retenus pour chaque modèle sont présentés dans la table 1 ci-dessous.

modèle	nombro do coucho	nombra da naurana par coucha	taille des lots	taux d'apprentissage	
	nombre de couche nombre de neurone par couche		(batch size)	(learning rate)	
MLP	2	64	512	7e-3	
TMLP	3	16	1024	3e-3	
LSTM	1	32	512	6e-3	

TABLE 1 – Hyperparamètres retenus pour chacun des modèles d'apprentissage profond.

3 Constitution d'une base de données synthétique

3.1 Simulateur de déformation d'aile sous chargements aérodynamiques

Le simulateur proposé dans le cadre de ce travail vise à calculer les déformations subies par une aile sous chargements aérodynamiques. Il comprend un modèle de comportement aérodynamique basé sur la théorie des lignes de portances de Prandtl et un modèle de comportement structurel basé sur un modèle éléments finis de type poutre. Ils sont connectés par couplage faible. Les entrées nécessaires sont le plan de vol et les caractéristiques aérodynamiques et mécaniques de l'aile. L'architecture de ce simulateur peut être résumée par la figure 1.



FIGURE 1 - Schéma du simulateur de déformation d'aile sous chargements aérodynamiques.

3.2 Modèle de chargement aérodynamique

Les chargements aérodynamiques subie par l'aile à chaque instant *t* du vol sont calculés à l'aide de la théorie des lignes portantes de Prandtl[8].

On définit la loi de Kutta-Joukowski

$$\tilde{C}_L(z) = \frac{2\Gamma(z)}{V^{\infty} \cdot c(z)},\tag{3}$$

où $\tilde{C}_L(z)$ représente le coefficient de portance local le long de l'aile au point z, $\Gamma(z)$ est la circulation autour de l'aile au point z, V^{∞} est la vitesse de l'écoulement et c(z) est la corde de l'aile au point z. On suppose également que le coefficient de portance varie linéairement avec l'angle

$$\tilde{C}_L(z) = \tilde{C}_{L,\alpha} \cdot (\alpha_{eff}(z) - \alpha_0(z)), \tag{4}$$

où $\alpha_{eff}(z)$ est l'angle effectif, $\alpha_0(z)$ est l'angle de portance nulle en z et $\tilde{C}_{L,\alpha}$ représente la pente de portance.

L'influence des ailerons et du taux de rotation de l'avion [9] aura un effet sur l'angle effectif $\alpha_{eff}(z)$,

$$\alpha_{eff}(z) = \alpha^{\infty} + \delta^a(z) + \frac{2p \cdot z}{b},$$
(5)

où δ^a est la contribution des ailerons, p est le taux de rotation de l'avion et b est l'envergure de l'aile. Les contributions des ailerons ou du taux de rotation de l'avion, peuvent être pondérées par des coefficients en fonction de l'aile considérée.

Enfin, nous cherchons à résoudre l'équation fondamentale de la théorie des lignes portantes de Prandtl

$$\alpha_{eff}(z_0) = \frac{2\Gamma(z_0)}{V^{\infty} \cdot c(z_0) \cdot \tilde{C}_{L,\alpha}(z_0)} + \alpha_0(z_0) + \frac{1}{4\pi V^{\infty}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz}}{z_0 - z} dz, \tag{6}$$

où z_0 est un point spécifique sur l'aile et seule la circulation Γ est inconnue. Pour la résolution, on effectue un changement de variable en coordonnées polaires, une décomposition en série de Fourier. On obtient

$$\Gamma(\theta) = 2bV^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta), \tag{7}$$

où θ est la position le long de l'aile en coordonnées polaires, A_n sont les coefficients de Fourier . Enfin, en dérivant Γ à partir de (7) et en intégrant cette formulation dans (6), on obtient l'équation suivante :

$$\alpha_{eff}(\theta) = \frac{4b}{c(\theta)\tilde{C}_{L,\alpha}(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta + \alpha_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)},\tag{8}$$

où seuls les coefficients de Fourier A_n sont inconnus. Ils peuvent être déterminés en résolvant un système d'équations linéaires en chaque point de l'aile θ . Une fois les coefficients de Fourier obtenus, on peut calculer Γ et remonter au chargement aérodynamique grâce à l'équation

$$\tilde{L}(z) = \rho \cdot V^{\infty} \Gamma(z), \tag{9}$$

où $\tilde{L}(z)$ représente la charge aérodynamique locale sur l'aile en tout point z.

3.3 Modèle de comportement structurel

Le comportement structurel de l'aile est modélisé par un modèle éléments finis de type poutre . On définit l'équation de la dynamique

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t)$$
(10)

où U représente le vecteur des degrés de liberté dont on cherche les valeurs lors du vol. F est le vecteur force appliqué à chaque élément du modèle, il dépend dans notre étude des résultats obtenus avec le modèle de comportement aérodynamique. M et K sont respectivement les matrices de masse et de raideur, construites à partir de la géométrie de l'aile, des propriétés matériaux et du type d'élément fini considéré. Enfin, C est la matrice d'amortissement calculée à l'aide du modèle d'amortissement de Rayleigh :

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \tag{11}$$

où α et β sont des paramètres influençant l'amortissement du système.

L'équation de la dynamique (10) sera résolue à l'aide d'un schéma de Newmark inconditionnellement stable.

3.4 Données de vol

Les données de vol utilisées pour générer les bases de données synthétiques proviennent d'une campagne de vol appelée *Megha-Tropiques*. Elles sont disponibles sur le portail SAFIRE, une infrastructure de recherche française qui regroupe les moyens humains, financiers et les trois avions de recherche du CNRS, de Météo-France et du CNES. Les données sont issues de l'instrumentation de bord d'un Falcon 20. Au total, 5 vols ont été prélevés pour un total de 17 heures, avec des données échantillonnées à 1 Hz. Dans cette campagne de vol, seule la trajectoire, $\rho(t)$ et $V^{\infty}(t)$ sont disponibles. Afin d'obtenir les variables d'intérêt $\delta^a(t)$, $\alpha^{\infty}(t)$ et p(t), un simulateur de mécanique du vol a été utilisé [9]. Il permet de parcourir de nouveau les plans de vol et ainsi d'obtenir la totalité des informations nécessaires au simulateur.

Un exemple de plan de vol est représenté sur la figure 2.



FIGURE 2 – Signaux temporels de l'angle d'attaque α^{∞} , de la densité de l'air ρ , de la vitesse air V^{∞} , de l'angle des ailerons δ^a et du taux de rotation *p* lors d'un vol.

Afin de permettre la résolution de l'équation dynamique (10), ces données de vol ont été suréchantillonées à 100Hz avec une méthode d'interpolation quadratique.

3.5 Bases de données synthétiques

Pour évaluer les performances des différents algorithmes d'apprentissage, trois bases de données synthétiques ont été générées à l'aide du simulateur. Elles partagent la même aile (caractéristiques aérodynamiques et mécaniques identiques), ainsi que les mêmes données de vol. Les signaux temporels de déformations générés sont sous-échantillonnés à 5 Hz. Chaque base de données est différentes par la méthode de résolution du modèle structurel et par l'ajout ou non de bruit. Les trois bases de données synthétiques sont présentées dans la table 2 ci-dessous :

TABLE 2 – Tableau récapitulatif des bases de doi	nnées synthétiques générées à l'aide du simulateur.
--------------------------------------------------	-----------------------------------------------------

base de données synthétique	équation résolue	entrées	sorties	bruits	fréquence d'échantillonage
quasi-statique	$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$	$\mathbf{x}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i^{\infty}, \boldsymbol{\rho}_i, V_i^{\infty}, \boldsymbol{\delta}_i^a, p_i)$	$\mathbf{y}_i = \mathbf{\epsilon}_i$	X	5hz
dynamique	$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$	$\mathbf{x}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i^{\infty}, \boldsymbol{\rho}_i, V_i^{\infty}, \boldsymbol{\delta}_i^a, p_i)$	$\mathbf{y}_i = \mathbf{\epsilon}_i$	X	5hz
dynamique avec bruits	$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$	$\mathbf{x}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i^{\infty}, \boldsymbol{\rho}_i, V_i^{\infty}, \boldsymbol{\delta}_i^a, p_i)$	$\mathbf{y}_i = \mathbf{\epsilon}_i$	bruits gaussiens	5Hz

4 Résultats préliminaires

Chaque modèle d'apprentissage profond retenu a été entraîné sur chacune des bases de données. L'évaluation de leurs performances repose sur le calcul de l'erreur moyenne absolue (MAE) et de l'erreur quadratique moyenne (MSE) entre la prédiction des déformations de l'aile et les déformations réelles. Ces métriques sont calculées sur un vol non utilisé lors de l'entraînement des modèles. Les performances sont résumées dans la table 3 :

TABLE 3 – Métric	jues des différents	capteurs virtuels	s sur les bases de	données sy	ynthétiques	générées.

base de données synthétique	quasi-	statique	dyna	mique	dynamique avec bruits		
métrique	MAE MSE		MAE	MSE	MAE	MSE	
MLP	5e-4	2.3e-06	4e-4	1.8e-6	2e-3	2.8e-5	
TMLP	2e-4	8.6e-07	1e-4	5.5e-07	4e-4	2.4e-6	
LSTM	7.2e-5	8.2e-7	4.1e-5	1.1e-7	7e-4	2.6e-6	

Les trois modèles offrent de bonnes performances sur l'ensemble des bases de données. Cependant, le TMLP et le LSTM offrent de bien meilleures performances dès lors que les données intègrent une certaine dynamique ou sont bruitées. Ces résultats s'expliquent par la capacité de ces deux modèles à capturer les dépendances temporelles dans les données.

La figure 3 montre une comparaison entre la déformation réelle en bout d'aile dans le cas dynamique et les prédictions d'un capteur virtuel basé sur un MLP ou un LSTM. On constate que les deux modèles offrent de bonnes prédictions, mais en présence de dynamique et de manière générale, le LSTM séries à points est plus performant, comme illustré dans cette figure 3 et par les métriques de la table 3.



FIGURE 3 – Comparaison entre la déformation réelle en bout d'aile et les prédictions d'un capteur virtuel basé sur un MLP (3a) ou un LSTM (3b) dans le cas dynamique.

La figure 4 montre l'erreur moyenne en pourcentage (MAPE) pour chaque point de l'aile avec les capteurs virtuels MLP et LSTM. On constate que l'erreur moyenne est faible pour les deux modèles, mais que le LSTM offre de meilleures prédictions sur chaque point de l'aile. On constate également qu'aucun point particulier le long de l'aile pause problème.



(a) Schéma de l'aile de type poutre encastrée avec les points de mesure de déformation.

	$\hat{\epsilon}^1 - \epsilon^1$	$\hat{\epsilon}^2 - \epsilon^2$	$\hat{\epsilon}^3 - \epsilon^3$	$\hat{\epsilon}^4 - \epsilon^4$	$\hat{\epsilon}^5 - \epsilon^5$	$\hat{\epsilon}^6 - \epsilon^6$	$\hat{\epsilon}^7 - \epsilon^7$
MAPE MLP	2.16%	1.91%	2.06%	1.89%	2.74%	2.50%	1.96%
MAPE LSTM	0.25%	0.19%	0.21%	0.17%	0.24%	0.22%	0.18%

(b) Erreur moyenne en pourcentage (MAPE) pour chaque point de l'aile avec les capteurs virtuels MLP et LSTM.

FIGURE 4 – Schéma de l'aile (4a) et erreur moyenne en pourcentage (MAPE) pour chaque point et pour un capteur virtuel de type MLP ou LSTM (4b).

Enfin, sur la figure 5, la matrice de corrélation entre les erreurs de prédictions du LSTM sur chaque point de l'aile montre des correlations croisées très proches de 1. Les variations d'erreur sont donc fortement similaires au cours du temps, quelque soit le point de l'aile considéré.

	- ε ¹	- ε ²	₃	– ε ⁴	- ε ²	<u>-</u> ε	– ε ⁷	
	ε_1°	$\hat{\epsilon}^2$	έş	έ4	έ	ε°	έŢ	1 00
$\hat{\varepsilon}^1 - \varepsilon^1$		1.00	0.99	0.98	0.98	0.98	0.98	- 0.75
$\hat{\varepsilon}^2 - \varepsilon^2$	•		1.00	0.99	0.99	0.99	0.99	-0.50
$\hat{\varepsilon}^3 - \varepsilon^3$	-	-		1.00	1.00	1.00	1.00	-0.25
$\hat{\varepsilon}^4 - \varepsilon^4$	-	-	-		1.00	1.00	1.00	- 0.00
$\hat{\varepsilon}^5 - \varepsilon^5$	•	•	•			1.00	1.00	0.25
$\hat{\varepsilon}^6 - \varepsilon^6$					•		1.00	0.50
² ج ⁷								- –0.75
								L_1.00

FIGURE 5 – Matrice de corrélation entre les erreurs de prédiction du LSTM sur chaque point de l'aile.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté le développement d'un simulateur de déformation d'aile sous chargements aérodynamiques. Ce simulateur a permis la génération de trois bases de données synthétiques, obtenues à partir de cinq vols d'avions réels et des propriétés aérodynamiques et mécaniques d'une aile. Une base de données a été générée avec une résolution structurelle en quasi-statique et deux autres avec une résolution dynamique, dont une avec ajout de bruits sur les entrées et les sorties.

Pour constituer des capteurs virtuels de déformation d'aile en vol, trois modèles d'apprentissage profond ont été entraînés et évalués sur chacune des bases de données synthétiques générées : un MLP point par point, un MLP séquence à point (TMLP) et un LSTM séquence à point. Chacun des trois modèles a montré de bonnes performances sur l'ensemble des bases de données synthétiques, mais les modèles TMLP et LSTM ont été nettement plus performants sur les données bruitées et dynamiques, montrant leur capacité à capturer la dépendance temporelle dans les données et à gérer les problématiques de bruits.

Néanmoins, ces architectures basées sur les réseaux de neurones artificiels, bien que performantes,

restent difficiles à interpréter. Les développements futurs se tourneront donc vers l'application d'approches hybrides afin de tirer parti des avantages des approches orientées données et des approches physiques, dans l'objectif de proposer de nouveaux capteurs virtuels plus performants et plus interprétables.

Références

- [1] Pavão et al, *Aircraft Numerical "Twin" : A Time Series Regression Competition*, 20th International Conference on Machine Learning and Applications, IEEE, 2021.
- [2] M. Oosterom and R. Babuska. *Virtual Sensor for the Angle-of-Attack Signal in Small Commercial Aircraft*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp. 1396-1403, 2006.
- [3] Tomczyk, Andrzej. *Simple Virtual Attitude Sensors for General Aviation Aircraft.*, Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 310-314, 2006.
- [4] T. Shen, F. Wan, W. Cui and B. Song, Application of Prognostic and Health Management technology on aircraft fuel system, Prognostics and System Health Management Conference, Macao, 2010, pp. 1-7, doi : 10.1109/PHM.2010.5413340.
- [5] M. Ghienne and A. Limare, *Learning structural stress virtual sensors from on-board instrumentation of a commercial aircraft*, Computers & Structures, 2023, doi: 10.1016/j.compstruc.2023.107155
- [6] M.Raissia ,P.Perdikarisb and G.E.Karniadakisa,*Physics-informed neural networks : A deep learning frame-work for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*, Journal of Computational Physics, 2019.
- [7] Ricky T. Q. Chen and Yulia Rubanova and Jesse Bettencourt and David Duvenaud, *Neural Ordinary Differential Equations*, arXiv, 2019.
- [8] Prandtl, L., *Tragflugel Theorie*, Nachricten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu G ottingen, Gesch aeftliche Mitteilungen, Klasse,
- [9] Phillips, Alley, and Goodrich, *Lifting-Line Analysis of Roll Control and Variable Twist.*, Applied Aerodynamics Conference, 2012.
- [10] Robert F. Stengel Flight Dynamics, Princeton University Press.