



**HAL**  
open science

# Analyse modale non linéaire de poutre sous sollicitation non-régulière

Pierre-Olivier Mattei, Laurent Sabatier

► **To cite this version:**

Pierre-Olivier Mattei, Laurent Sabatier. Analyse modale non linéaire de poutre sous sollicitation non-régulière. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610890

**HAL Id: hal-04610890**

**<https://hal.science/hal-04610890v1>**

Submitted on 3 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse modale non linéaire de poutre sous sollicitation non-régulière

P.-O Mattei, L. Sabatier

Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Méditerranée, LMA, Marseille, France, {mattei,sabatier}@lma.cnrs-mrs.fr

**Résumé** — Ce travail est dédié à une expérience qui concerne la dynamique non régulière d'une poutre élastique en compression. Cette poutre est soumise à un forçage au voisinage de son premier mode non-linéaire qui présente une ou plusieurs phases d'adhérence au cours de chaque cycle séparées par des impacts purement élastiques. Nous présentons ici la description de l'expérience et les techniques mises en œuvre ainsi que les premiers résultats. Nous mettons en évidence que, suivant les conditions de forçage, un très grand nombre d'harmoniques  $N$ ,  $N \gg 1$  et de sous harmoniques  $N/2$  ou  $N/3$ ,  $N \gg 1$  peuvent apparaître dans la réponse vibratoire de la poutre. Nous avons pu aussi observer que lorsque le contact entre l'impacteur et la poutre devient quasiment rasant les harmoniques d'ordre élevé montrent durant une brève durée une diminution significative de leur fréquence.

**Mots clés** — dynamique non-linéaire, sollicitation non régulière, systèmes à vibro-impacts, analyse spectrale.

## 1 Introduction

La dynamique non-linéaire de systèmes à  $N$  degrés de liberté ou de systèmes continus de type poutre en compression soumis à des excitation de type vibro-impact a fait l'objet de nombreux travaux numériques et théoriques littérature [1, 2, 3, 4]. Du point de vue expérimental, la littérature est moins riche et souvent limité à des vibrations de flexion [5], plus aisée à mettre en œuvre que les mesures sur une poutre en compression. Afin de pallier ce manque, le travail présenté ici est dédié à la mesure d'une poutre soumise à une excitation de type vibro-impact à un ou plusieurs impacts par cycles autour de la première résonance de compression de la poutre.

## 2 Description de l'expérience

### 2.1 Montage

La Figure 1 présente le schéma de principe de la mesure. Une poutre en téflon de longueur  $L = 119$  cm

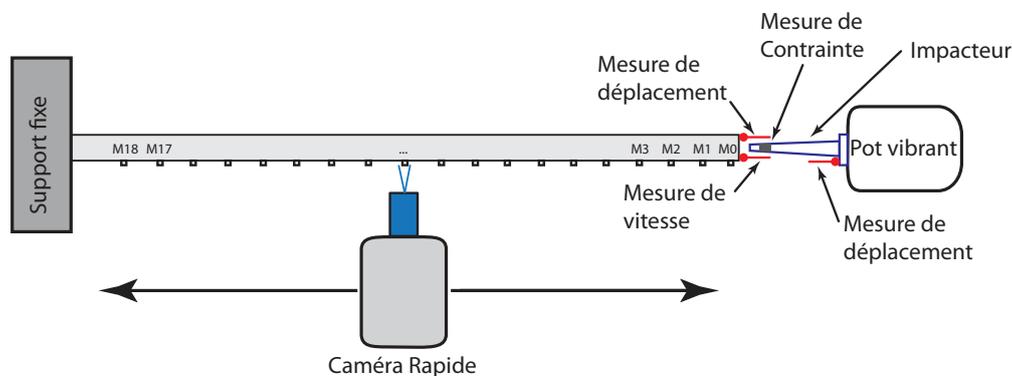


FIGURE 1 – Vue du dessus du montage expérimental

et de section carré de côté 3,1 cm est encastrée à une extrémité. Afin d'éviter qu'elle fléchisse sous son poids, elle est suspendue par un élastique à 22 cm de son extrémité libre. Une tige conique creuse en

aluminium de 10 cm de long et de section variant de 2 cm<sup>2</sup> à sa base à 1 cm<sup>2</sup> à son extrémité vient impacter l'extrémité libre de la poutre sur environ 1/9e de sa section. Cette tige (impacteur dans la suite) est mise en mouvement par un pot vibrant TIRA TV 51075 alimenté par un amplificateur TIRA BAA 120. L'impacteur est équipé d'une jauge d'extensométrie de 120 Ω reliée à un pont d'extensométrie à courant continu SEDEME TS205. L'impacteur a été modélisé préalablement par éléments finis afin de déterminer la position du maximum de déformation sous sollicitation de compression afin d'y placer la jauge de contrainte. Le résultat de ce calcul présenté Figure 2, montre que ce maximum est situé à proximité de son extrémité libre. La vitesse et le déplacement de compression de la poutre sont mesurés par deux

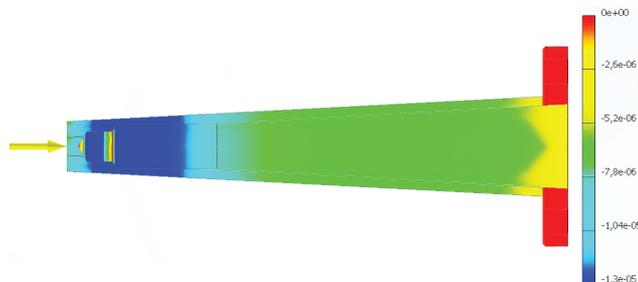


FIGURE 2 – Déformation statique de l'impacteur soumis à une compression axiale.

équipements différents. La vitesse vibratoire est mesurée par un vibromètre Polytec mono-point VibroFlex Neo connecté à un terminal VibroFlex Connect qui assure une largeur de bande de 20 kHz et un retard de signal fixe de 0,9 ms ; la mesure ne pouvant se réaliser dans l'axe du fait du montage, un angle de 28° est imposé au faisceau. Le déplacement vibratoire de la poutre est mesuré par un capteur Keyence LK-G32 placé à 30 mm de la poutre avec un angle de 22° et le déplacement vibratoire de l'impacteur est mesuré à sa base, fixée sur le pot vibrant, par un capteur Keyence LK-G82 placé à 80 mm de la base avec un angle de 16°. Les deux capteurs de déplacement sont reliés à un conditionneur Keyence LK-G3000 qui assure un retard fixe d'environ 0,35 ms. Tous les angles et retards ont été bien évidemment corrigés avant analyse des données. La Figure 3 est une photographie du montage expérimental à proximité de l'extrémité libre de la poutre où on voit l'impacteur avec sa jauge de contrainte, les deux capteurs de déplacement ; les deux points lumineux rouges sur la poutre correspondent aux mesures de déplacement effectuée par le capteur Keyence LK-G32 que l'on aperçoit sur l'image et de vitesse par le vibromètre Polytec situé hors champ. Sur la poutre, on note tracés trois groupes de neuf cercles. Ceux-ci correspondent aux emplacements des

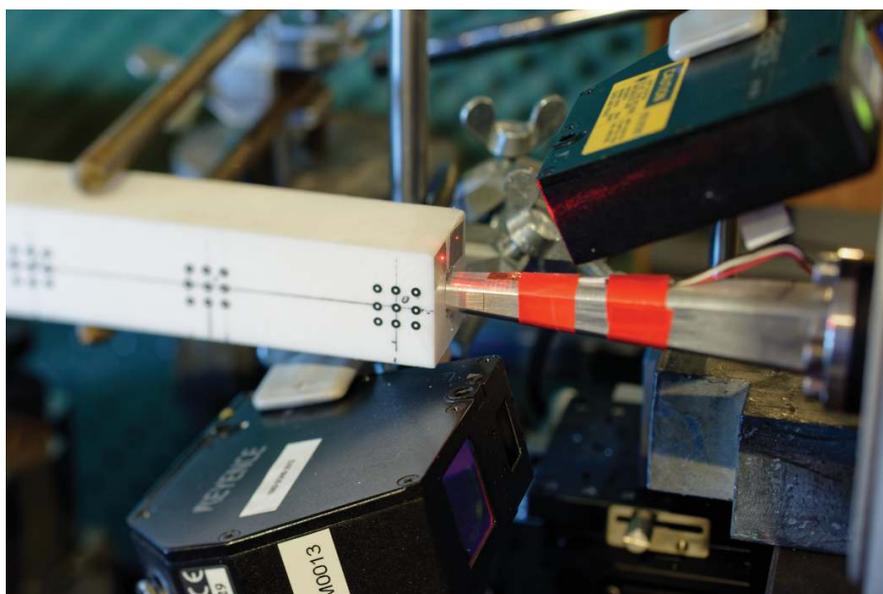


FIGURE 3 – Photographie du montage expérimental à proximité de l'extrémité libre de la poutre.

points de mesures M0, M1 et M2 indiqués sur la Figure 1 qui sont les points sur lesquels une mesure du déplacement de compression de la poutre est réalisé par caméra rapide. Cette caméra, une Photron

SA1.1, qui est équipée d'une optique Zeiss Milvus Macro 100 mm f :2, a été configurée pour acquérir un champ de 256×192 pixels à 20000 images par secondes pour une durée de 5,82 s (soit un peu plus de 116000 images). Le champ ainsi défini correspondait à une surface effective de 21,3 mm par 10,75 mm soit environ 12 pixels pour 1 mm. Cette caméra a été déplacée tout au long de la poutre pour relever le déplacement longitudinal (et vertical) en 19 points de la poutre séparés de 5 cm et ceci afin de reconstituer le champ vibratoire de la poutre sur toute sa longueur.

## 2.2 Grandeurs mesurées

Les signaux ont été numérisés par une chaîne d'acquisition à 51200 Hz et 24 bits. Les signaux enregistrés ont été : le déplacement et la vitesse de l'extrémité libre de la poutre, le déplacement et la contrainte de l'impacteur, le voltage et l'intensité envoyés au pot vibrant, le trigger de synchronisation des signaux mono-points (contrainte, vitesse et déplacement) et de la caméra, ainsi que les temps d'enregistrement et d'exposition des images acquises par la caméra. Comme nous avons répété ces mesures pour chaque enregistrement des points M0 à M18, cela nous a permis d'assurer que l'expérience était d'une grandeur stabilité.

### 2.2.1 Caractéristiques du matériau de la poutre

La limite du nombre d'images que la caméra pouvait acquérir (100000 images sur 5,82 s) nous a contraint à chercher un matériau avec la vitesse de propagation d'onde la plus faible possible afin d'assurer que le premier mode propre de compression de la poutre serait inférieur à 200 Hz ; en effet 20000 images par secondes assurent que l'on est capable d'imager un signal dont la plus haute composante spectrale avoisine 2000 Hz (la technique optique nécessite environ 10 images par période pour être fiable). Les mesures nous ont confirmé que le premier mode de compression de la poutre avoisinait 152 Hz, le second avoisinait 580 Hz, puis chaque mode était séparé du précédent par environ 351 Hz, ce qui correspondait à une vitesse de propagation des ondes de compression  $C_L = \Delta f 2L \approx 840$  m/s. Nous avons aussi effectué des mesures de dissipation en identifiant autour de chaque mode le comportement de la poutre par un système masse-ressort-amortisseur décrit par l'équation  $\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0$  où  $\zeta$  est le coefficient d'amortissement et  $\omega_0$  est la pulsation propre du mode correspondant. Les résultats, obtenus tant par la méthode de la largeur de bande à  $-3$  dB que par la méthode du décrément logarithmique, on montré que la poutre avait un coefficient d'amortissement  $\zeta \approx 2,8\% \pm 0,3\%$  constant sur la bande 0 – 1000 Hz.

### 2.2.2 Premier mode de compression de la poutre

Pour toutes les mesures, afin d'assurer leur répétabilité, l'impacteur était placé à une distance 0,1 mm de l'extrémité de la poutre, le contrôle était effectué au moyen d'une cale d'épaisseur, puis le support du port vibrant et de l'impacteur était déplacé d'une distance de 1 mm pour venir au contact de l'extrémité de la poutre ; la suspension du pot vibrant possédant une course maximale de 10 mm pic-à-pic, cela assurait d'un contact le moins contraint possible tout en autorisant des mouvements linéaires à faible amplitude. Nous avons ensuite excité la poutre par un sinus glissant autour de son premier mode (soit  $f \in [100; 200]$  Hz) pour différents niveaux de forçage puis, par une analyse spectrale élémentaire, nous avons déterminé la fréquence de résonance correspondante. Huit configurations expérimentales différentes ont pu ainsi être déterminées. Ces configurations sont résumées dans le Tableau 1.

TABLEAU 1 – Configurations expérimentales retenues pour le forçage.

Configurations	1	2	3	4	5	6	7	8
Puissance (W)	0,445	1,95	4,64	8,44	12,9	20,6	26,5	35,5
Fréquence du mode (Hz)	151,4	152,5	153,3	154	157,2	161,7	162,3	163,2

La puissance est calculée à partir du produit VA avec un facteur de puissance fournie de 1, ce qui est correct pour ce pot dont la première résonance est supérieure à 5500 Hz. La configuration 8 correspondait à la limite de rupture du matériel. La configuration 1 correspondait à la configuration expérimentale dont la puissance injectée assurait un comportement linéaire. Pour les autres configurations, les premiers chocs

apparaissaient. Cette première configuration a servi pour toutes les mesures à vérifier que notre dispositif n'était pas dégradé par la série de mesures précédentes. Chaque configuration a été répétée près de vingt fois, pour chaque position de la caméra plus une qui nous a servi à visualiser l'impacteur. Pour l'essentiel, les mesures qui ont été conduites sur près d'une semaine se sont avérées parfaitement répétables. On note dans le Tableau 1 qu'entre la fréquence du mode linéaire et le maximum observé pour la configuration 8 une augmentation de la résonance de près de 8 %, en accord avec les résultats de la littérature [6].

### 2.2.3 Procédure expérimentale

Pour chaque configuration de source et pour les 19 positions de mesures sur la poutre par la caméra rapide, nous avons répété la procédure suivante : chaque mesure durait environ 10 s et le principe était de débiter l'enregistrement, puis après 1 s ou 2 s, le générateur de signal émettait simultanément un signal TTL de début d'enregistrement pour la caméra et un signal de forçage pour le pot vibrant sous la forme d'une sinusoïde à la fréquence requise avec une amplitude linéairement croissante durant 5 s pour atteindre le niveau maximal requis pour chaque configuration puis restait à un niveau constant pour encore 1 s au niveau maximal requis pour chaque configuration puis était coupé afin de mesurer le transitoire d'extinction. La chaîne d'acquisition mesurait toutes les voies sur toute la durée de 10 s ; la caméra effectuait un enregistrement de 5,82 s synchronisé sur le début du signal de forçage du pot, ceci afin de mesurer toutes les phases du mouvement de la poutre pour une fréquence donnée. Après chaque mesure, le transfert des données de la caméra à l'ordinateur de contrôle prenait environ 15 minutes. Au total, nous avons acquis près de 1 To de données.

### 2.2.4 Analyse des images

Le traitement des images et le suivi du mouvement des cibles, et donc du mouvement de la poutre, est basé sur les fonctions de corrélation que l'on trouve dans OpenCV [7] et en particulier la fonction

```
cv.TM_CCORR_NORMED.
```

Ceci donne une carte de corrélation sur la zone de recherche, à une résolution de 1 pixel, ce résultat est amélioré par une fonction d'optimisation

```
scipy.optimize.curve_fit,
```

pour avoir une résolution qui avoisine typiquement 0,01 pixel en déplacement. Comme la caméra acquiert 12 pixels par millimètre, on obtient une résolution théorique de 1  $\mu$ m en déplacement.

La valeur maximale de corrélation ainsi que sa position sont extraites. Le calcul du déplacement est effectué en soustrayant la position du point de l'image à la position de ce même point dans l'image de référence. Dans notre cas, la cible recherchée mesure 21  $\times$  21 pixels et la zone dans laquelle cette cible est cherchée mesure 31  $\times$  31 pixels. Nous utilisons les cibles issues de la première image que l'on recherche dans toutes les images, l'une après l'autre. Pour chaque position mesurée M0 à M18, nous avons neuf cibles. Nous effectuons une moyenne sur chaque colonne de cible afin d'obtenir un déplacement moyen pour chacun des trois points centraux.

## 3 Résultats

La Figure 4 présente un exemple des premiers résultats d'analyse. Celui-ci correspond au déplacement obtenu par caméra rapide aux points M0, M9 et M18 pour la configuration 7 pour les images 100000 à 100200 qui correspondent au temps compris entre 5 s et 5,01 s (soit presque 2 périodes du signal). Sur chaque figure sont superposées trois courbes, chacune correspond aux déplacements moyens des trois points centraux horizontaux. Les courbes extrêmement proches assurent que le déplacement identifié est constant dans une section de mesure. L'amplitude qui est donnée en pixels se convertit aisément en mm. Pour le point 18, elle varie de  $-0,0833$  mm à  $+0,0625$  mm, pour le point 9, elle varie de  $-0,1667$  mm à  $+0,125$  mm et pour le point 0, elle varie de  $-0,25$  mm à  $+0,1667$  mm. On note une augmentation de l'amplitude des mouvements de compression lorsque l'on passe de l'encastrement à l'extrémité libre de

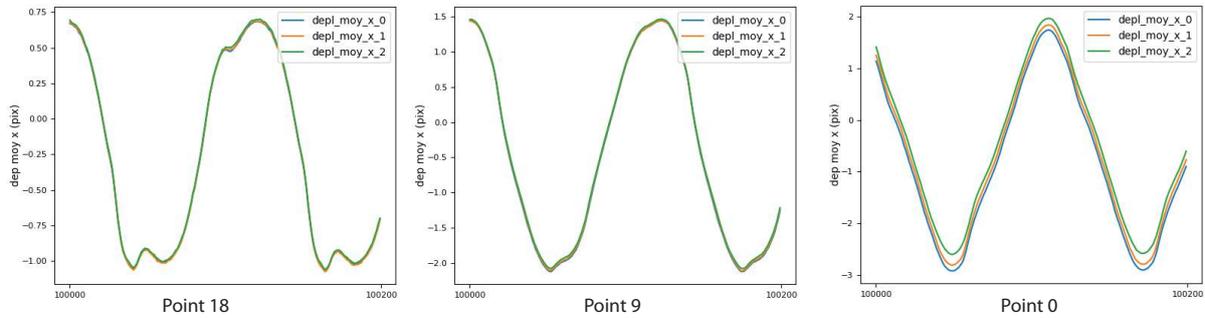


FIGURE 4 – Exemple de déplacement obtenu par caméra rapide aux points M0, M9 et M18 pour la configuration 7.

la poutre et une évolution de la forme de la réponse vibratoire du mouvement lorsque l'on s'éloigne de l'encastrement.

La Figure 5 présente un spectrogramme réassigné de la vitesse de l'extrémité de la poutre lors de la mesure par caméra rapide du point M13 pour la configuration 7 (ie 26,5 W et 162,3 Hz). Pour cet exemple, nous présentons toute la durée d'intérêt, à savoir, depuis le début du forçage à  $t = 0$  s jusqu'à la fin du signal autour de  $t = 7,5$  s. La fréquence maximale affichée est ici de 2000 Hz et on a représenté l'axe des fréquences par rapport à la fréquence de forçage  $f_0 = 162,3$  Hz. 4 bandes verticales grises permettent

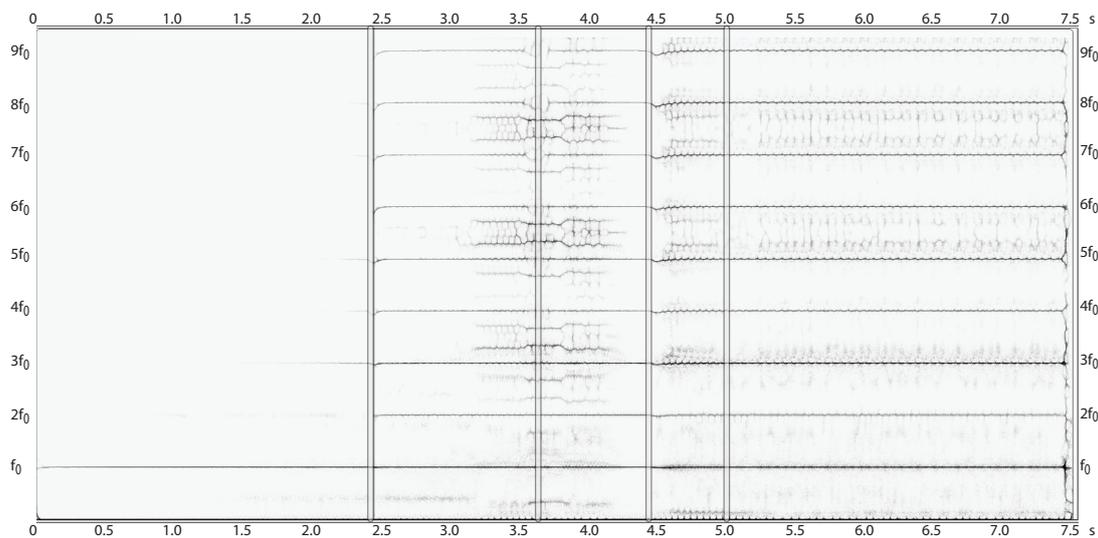


FIGURE 5 – Configuration 7 : spectrogramme de la vitesse de l'extrémité de la poutre.

de visualiser des configurations expérimentales intéressantes. Il est à noter que pour toutes les mesures réalisées, les spectrogrammes obtenus étaient similaires.

Sur la Figure 5, entre  $t = 0$  s et  $t = 2,4$  s, le forçage sinusoïdal augmente linéairement en amplitude et la vitesse mesurée reste globalement linéaire, même si on note quelques harmoniques autour de 2 s à  $t = 2,41$  s les impacts débutent sur la poutre. On voit clairement que de très nombreuses harmoniques apparaissent dès le début des impacts. La Figure 6 présente la contrainte et le déplacement de l'impacteur, la vitesse et le déplacement de poutre ainsi que le déplacement relatif de l'impacteur par rapport à la poutre autour de  $t = 2,41$  s. La contrainte n'a pas de dimension mais ses variations suffisent pour identifier clairement, qu'au cours d'un cycle, deux impacts de l'impacteur sur la poutre se produisent après une phase d'adhésion entre la poutre et celui-ci ; ces phénomènes sont indiqués par des cercles rouges pour les impacts et des ovales verts pour l'adhésion. Le déplacement relatif n'est pas rigoureusement nul du fait du léger déplacement des capteurs durant l'expérience (ceux-ci étaient attachés sur des tables micrométriques qu'il a été impossible de fixer).  $t_s$  correspond au temps du début du signal affiché,  $A$  correspond au voltage moyen imposé au pot vibrant sur la durée du signal affiché (ici deux périodes) et  $P$  correspond à la puissance moyenne imposée au pot vibrant sur la durée du signal affiché.

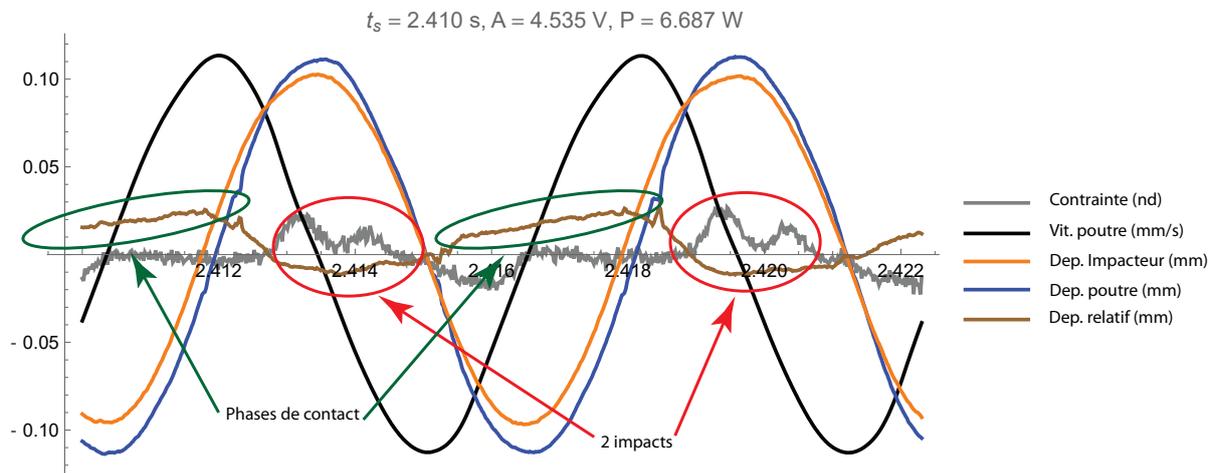


FIGURE 6 – Configuration 7 : contrainte et déplacement de l’impacteur, vitesse et déplacement de poutre et déplacement relatif de l’impacteur par rapport à la poutre pour  $t \approx 2,41$  s.  $t_s$  : temps du début du signal affiché,  $A$  : voltage moyen imposé au pot vibrant,  $P$  : puissance moyenne imposée au pot vibrant.

Sur la Figure 5, entre  $t = 2,4$  s et  $t = 3,5$  s, les impacts sont de plus en plus forts sur la poutre et on remarque l’apparition d’une harmonique  $2/5$  entre  $t = 2,4$  s et  $t = 3,1$  s puis après  $t = 3,1$  s une série d’harmoniques  $N/4$ ,  $N \gg 1$ . Autour de  $t = 3,68$  s, les harmoniques entière  $nf_0$  disparaissent quasiment et des harmoniques  $N/3$ ,  $N \gg 1$  très marquées apparaissent. Comme montré sur la Figure 7, on note un choc (repéré par un pic dans la contrainte) par période suivi d’une phase de contact qui occupe sensiblement la moitié d’un cycle (le décollement de l’impacteur peut s’observer sur la plupart des cycles par un pic dans la contrainte). On note aussi sur cette figure l’évidence d’harmoniques  $N/3$ .

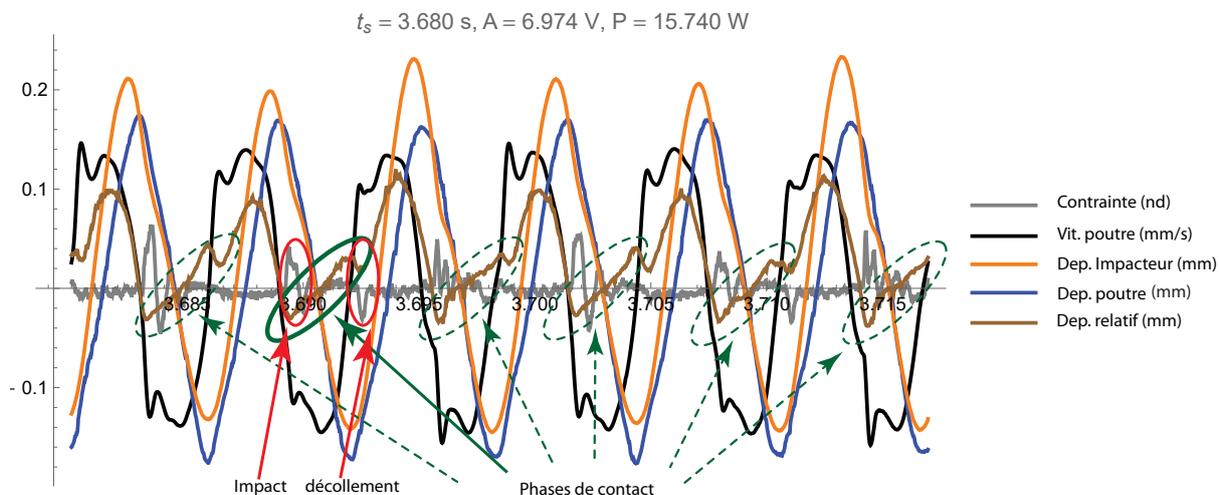


FIGURE 7 – Configuration 7 : contrainte et déplacement de l’impacteur, vitesse et déplacement de poutre et déplacement relatif de l’impacteur par rapport à la poutre pour  $t \approx 3,68$  s.  $t_s$  : temps du début du signal affiché,  $A$  : voltage moyen imposé au pot vibrant,  $P$  : puissance moyenne imposée au pot vibrant.

Comme on peut l’observer sur la Figure 5, à partir de  $t = 4,45$  s le comportement du système change. Cela s’observe aisément sur les Figures 8 et 9 où, durant la plupart de chaque période, l’impacteur et la poutre ne sont pas en contact et il y a un ou deux chocs. Comme le montre le spectrogramme de la Figure 5, au moment où l’amplitude de vol libre de l’impacteur devient très forte (elle atteint presque 1 mm), on remarque une diminution significative des fréquences de toutes les harmoniques puis une remontée à leurs valeurs initiales.

Sur la Figure 5, on note qu’à partir de  $t = 4,6$  s et au delà de  $t = 5$  s où l’amplitude du forçage est constante, on note un seul contact par cycle avec quasiment un contact rasant. On remarque aussi l’existence d’oscillations haute fréquence localisées uniquement sur l’impacteur

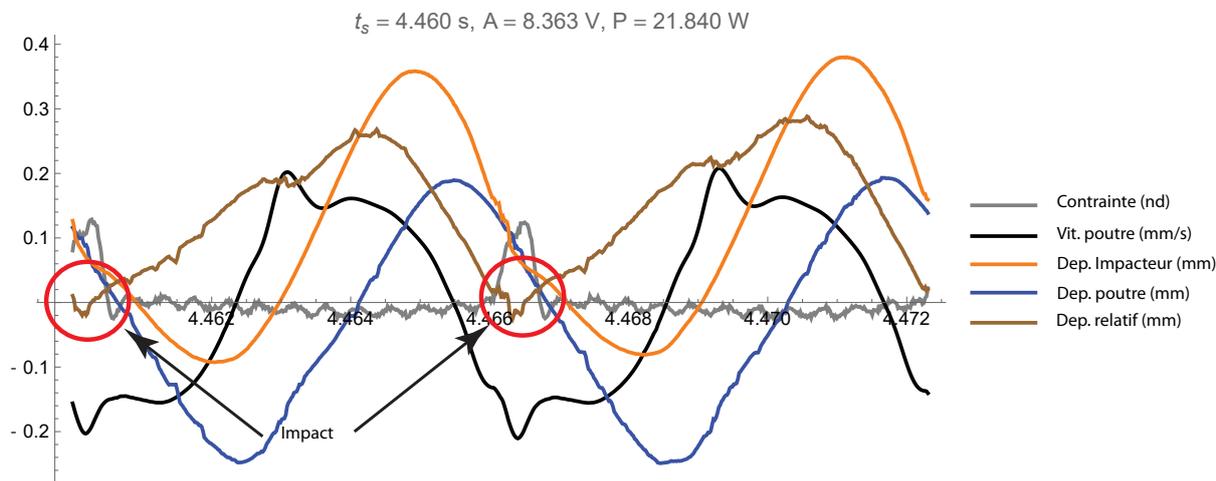


FIGURE 8 – Configuration 7 : contrainte et déplacement de l’impacteur, vitesse et déplacement de poutre et déplacement relatif de l’impacteur par rapport à la poutre pour  $t \approx 4,46$  s.  $t_s$  : temps du début du signal affiché,  $A$  : voltage moyen imposé au pot vibrant,  $P$  : puissance moyenne imposée au pot vibrant.

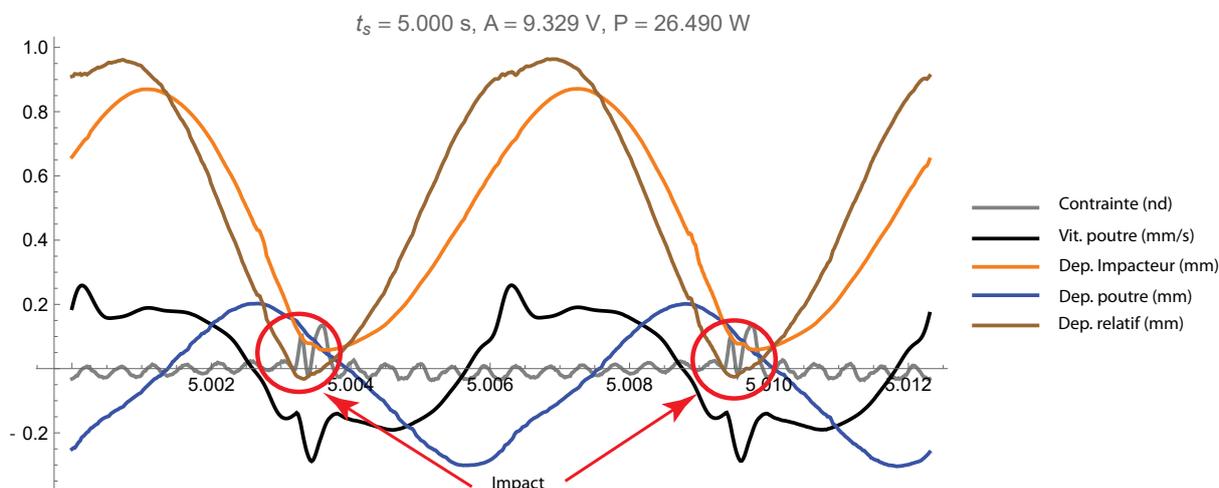


FIGURE 9 – Configuration 7 : contrainte et déplacement de l’impacteur, vitesse et déplacement de poutre et déplacement relatif de l’impacteur par rapport à la poutre pour  $t \approx 5$  s.  $t_s$  : temps du début du signal affiché,  $A$  : voltage moyen imposé au pot vibrant,  $P$  : puissance moyenne imposée au pot vibrant.

## 4 Conclusion

Ce travail a concerné la présentation du dispositif expérimental de mesure de la dynamique non régulière d’une barre élastique en compression. Cette barre, soumise à un forçage au voisinage de son premier mode non-linéaire, présente une ou plusieurs phases d’adhérence avec l’impacteur au cours de chaque cycle séparées par des impacts purement élastiques pour un certain nombre de configurations expérimentales. Nous avons présenté une première analyse de quelques résultats caractéristiques obtenus pour une configuration expérimentale. Il reste encore à analyser l’essentiel des configurations expérimentales ainsi que la reconstitution du déplacement en compression de la poutre sur toute sa longueur au cours des cycles de forçage. Les résultats des expériences seront mis à la disposition de la communauté dès que possible.

**Remerciements** Les auteurs tiennent à remercier Mathias Legrand du “Structural Dynamics and Vibration Laboratory”, McGill University à Montréal pour les nombreuses et riches discussions qui ont animé la préparation de cette expérience.

## Références

- [1] G. Lebeau, M. Schatzman, *A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary*, Journal of Differential Equations, 309-361, 1984.
- [2] M. Legrand, S. Junca, S. Heng, *Nonsmooth modal analysis of a N-degree-of-freedom system undergoing a purely elastic impact law*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 190-219, 2017.
- [3] A. Thorin, M. Legrand, *Spectre vibratoire d'un oscillateur discret à impacts*, CSMA 2017, 124466, 2017.
- [4] C. Yoong, A. Thorin, M. Legrand, *Nonsmooth modal analysis of an elastic bar subject to a unilateral contact constraint*. Nonlinear Dynamics, 2453-2476, 2018.
- [5] S. Peter, F. Schreyer, R.I. Leine, *A method for numerical and experimental nonlinear modal analysis of nonsmooth systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, 793-807, 2019.
- [6] D. Urman, M. Legrand, S. Junca, *D'Alembert function for exact nonsmooth modal analysis of the bar in unilateral contact*, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, 101115, 2021.
- [7] [https://docs.opencv.org/4.x/d4/dc6/tutorial\\_py\\_template\\_matching.html](https://docs.opencv.org/4.x/d4/dc6/tutorial_py_template_matching.html)