



HAL
open science

Analyse de la contrainte en pied de dent par une approche multicorps flexibles

Valentin Mouton, Emmanuel Rigaud, Joël Perret-Liaudet

► **To cite this version:**

Valentin Mouton, Emmanuel Rigaud, Joël Perret-Liaudet. Analyse de la contrainte en pied de dent par une approche multicorps flexibles. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04610889

HAL Id: hal-04610889

<https://hal.science/hal-04610889v1>

Submitted on 3 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse de la contrainte en pied de dent par une approche multicorps flexibles

V. Mouton, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet

Univ. Lyon, École centrale de Lyon, CNRS, ENTPE, Laboratoire de tribologie et dynamique des systèmes, UMR 5513, 36 avenue Guy de Collongue, 69130 Écully, France, {valentin.mouton,emmanuel.rigaud,joel.perret-liaudet}@ec-lyon.fr

Résumé — Ce travail propose une méthode originale pour déterminer les contraintes en pied de dent d'un engrenage à partir de modèles multicorps flexibles éléments finis. Les efforts de contact sont calculés par la méthode du lagrangien augmenté. Les simulations sont réalisées dans des conditions quasi statiques pour plusieurs périodes d'engrènement, sans faire d'hypothèse sur la répartition de charge, ainsi que sur la position instantanée et la forme des surfaces de contact. Le modèle prend en compte la flexibilité des dents et des corps de roue, ainsi que l'apparition éventuelle de contacts prématurés.

Mots clés — Engrenages droits, simulations multicorps flexibles, éléments finis.

1 Introduction

Les transmissions mécaniques par engrenages sont des éléments essentiels des industries du transport et de l'énergie. Leur conception doit intégrer des critères parfois antagonistes, comme la minimisation de la masse embarquée, des pertes de puissance, des pressions de contact et contraintes en pied de dent, ou encore des sources d'excitation à l'origine du comportement vibroacoustique, afin d'optimiser la consommation d'énergie, les performances NVH (*Noise, Vibration, Harshness*) ou bien la tenue en service. Dans la mesure où les ruptures du pied de dent en fatigue représentent la majorité des défaillances des transmissions par engrenages, la détermination précise des contraintes en pied de dent constitue une étape nécessaire à la prédiction de la durée de vie du système [1].

Dans la littérature, trois grandes méthodes sont proposées pour calculer la contrainte en pied de dent. La première approche est issue de la théorie des poutres. La dent est assimilée à une poutre encastree libre. Cette approche, particulièrement simple à mettre en œuvre, est néanmoins imprécise. Aussi, des études expérimentales complémentaires notamment issues de la photoélasticimétrie [10, 13] ont été réalisées, afin d'ajuster les résultats à l'aide de coefficients correctifs. Les normes de calcul de capacité de charge des engrenages, largement utilisées dans l'industrie telles l'ISO 6336, s'appuient sur cette approche semi-empirique [6].

La démocratisation de la méthode des éléments finis (EF) a permis de calculer la contrainte en pied de dent à partir d'un modèle de la dent sur lequel on applique les efforts extérieurs [16, 17], représentant les efforts de contact. Les méthodes EF sont également utilisées pour déterminer la matrice de souplesse de la dent, la problématique de contact entre les profils conjugués étant résolue *a posteriori* par des méthodes semi-analytiques ou numériques [14]. Ces méthodes « hybrides » permettent de limiter les ressources de calcul nécessaires, que ce soit pour les modèles en deux ou trois dimensions.

L'augmentation des puissances de calcul disponibles a par la suite permis de proposer des modèles éléments finis qui traitent simultanément les problèmes de déformation élastostatique de la denture et de contact entre les flancs actifs. En règle générale, les approches proposées s'appuient sur la cinématique théorique de l'engrenage et simulent le processus d'engrènement pour plusieurs positions angulaires discrètes successives, afin de reconstituer l'évolution de la contrainte au cours de l'engrènement [3, 12].

En conséquence, quelle que soit l'approche choisie, des hypothèses restrictives sur la situation instantanée des points de contact sont utilisées. Dans ce contexte, ce travail propose de déterminer l'évolution de la contrainte en pied de dent au cours de l'engrènement par une méthode multicorps flexibles en régime quasi statique [2], avec une résolution du contact par éléments finis.

La première partie (section 2) décrit la méthodologie de construction des modèles, de même que les principes des simulations, tandis que la seconde (section 3) porte sur les résultats en contrainte par la

méthode multicorps flexibles, et leur comparaison avec ceux issus d'un modèle de référence qui combine les approches ISO et EF.

2 Méthodologie de calcul et simulations

2.1 Formulation du contact

Les simulations proposées sont basées sur une approche de dynamique multicorps flexibles dans un contexte quasi statique, à savoir que les vitesses de rotation des engrenages sont très faibles. Chacun des solides élastiques est modélisé par la méthode des éléments finis, dans l'optique de décrire le comportement élastostatique des roues dentées en contact. Il convient de définir au préalable les zones potentielles de contact entre les surfaces actives au cours de l'engrènement. La détection du contact est réalisée aux points de Gauss des surfaces esclaves élémentaires. De même, les conditions de Signorini sont appliquées en chaque point de Gauss i (équation 1). d_i représente la distance entre les surfaces maîtres et esclaves, et F_i l'effort normal au point de Gauss considéré. La force de contact est alors calculée selon la méthode du lagrangien augmenté (équation 2). Le coefficient κ constitue la raideur de pénalité et λ_i le multiplicateur de Lagrange.

$$\forall i, \begin{cases} d_i \geq 0 \\ F_i \geq 0 \\ d_i F_i = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$F_i = \kappa d_i + \lambda_i \quad (2)$$

Les principaux verrous de la modélisation sont :

- La construction d'une géométrie décrivant les profils de denture à l'échelle micrométrique.
- Une résolution de maillage élevée afin de détecter les contacts étroits, et de prédire correctement la répartition de charge.

Il s'agit donc de trouver un compromis entre ces impératifs et les temps de calcul inhérents.

2.2 Définition des géométries des dentures

L'engrenage étudié est composé de deux roues cylindriques à denture droite. Les dentures présentent des corrections micro-géométriques de profil, de forme circulaire centrés sur le point milieu de la conduite, d'après [8]. Plusieurs techniques peuvent être employées pour décrire correctement ces profils. L'export de fichiers de points est exclu car il nécessite des capacités de calcul et de mémoire trop importantes. La solution retenue est alors basée sur des interpolations de type NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) moins coûteuses en ressources numériques. Elle permet une description des surfaces à l'échelle du micromètre. La géométrie des profils en développante de cercle et des raccordements en pied de denture dépend de la cinématique du point générateur de la crémaillère utilisée au cours de la fabrication [4]. Le type d'outil retenu correspond à une crémaillère de type A, qui présente des caractéristiques définies par la norme ISO 53 [5]. Le rayon de tête de l'outil et les corrections de déport sont prises en compte. La position des points de la développante théorique est par la suite modifiée afin de prendre en compte les modifications micro-géométriques de profil. Les profils définis et numérisés selon les standards NURBS sont ensuite importés dans le logiciel de conception assistée par ordinateur (CAO) SpaceClaim®, dans lequel une extrusion sur la largeur de denture et la répétition circulaire des dents sont réalisés, ce qui permet d'obtenir un modèle géométrique de l'engrenage considéré en trois dimensions.

2.3 Caractéristiques du maillage par éléments finis

Étant donné qu'un maillage très fin de l'ensemble des corps de roues et des dentures conduirait à des temps de calcul rédhibitoires, seuls les flancs actifs et les pieds des dents sont finement maillés. Des éléments finis linéaires de type hexaèdres à huit nœuds sont utilisés pour modéliser les zones d'intérêt. La taille des mailles doit être suffisamment fine pour rendre compte du contact et capter les déformations de type Hertz d'une part, et assurer une prédiction correcte de la contrainte en pied de dent d'autre part. Typiquement, la taille des mailles retenue dans les zones raffinées est de l'ordre de la dizaine de microns.

Le volume correspondant à la partie complémentaire des dents et au corps de roue sont maillés par des éléments finis tétraédriques. Les éléments finis choisis sont associés à une loi de comportement du type élasticité linéaire isotrope homogène standard. Le maillage n'est pas réactualisé au cours des simulations, dans la mesure où il a été constaté que cette méthode pénalise la résolution [2]. La figure 1 montre deux exemples de maillage de la denture.

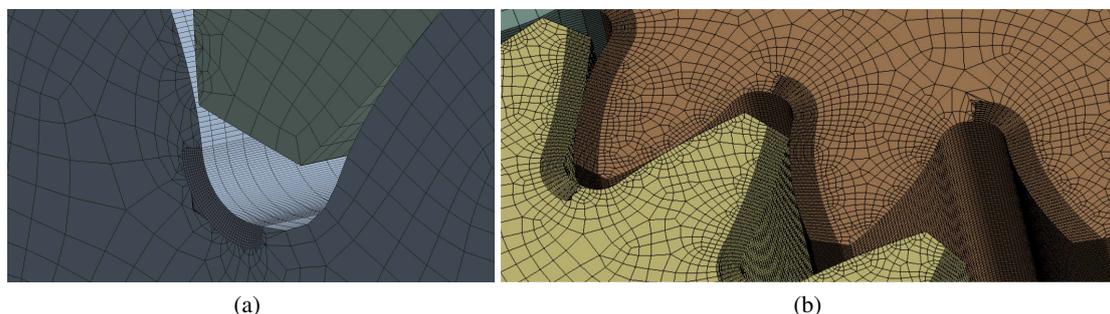


FIGURE 1 – Maillage simplifié à 1 million de degrés de liberté, où le flanc actif est finement maillé en surface, et le pied finement maillé en surface et dans la profondeur (a) et maillage complet à 30 millions de degrés de liberté, où le flanc actif et le pied sont finement maillés en surface et dans la profondeur (b).

2.4 Principe des simulations

Les conditions aux limites sont appliquées aux centres des deux roues dentées. La mise en œuvre des simulations se déroule comme suit :

- Dans un premier temps, on bloque la rotation de la roue menée et on introduit une rotation de la roue menante jusqu'à interpénétration des flancs actifs. Le schéma d'intégration converge pour atteindre une pénétration nulle.
- Dans un second temps, la rotation de la roue menée est libérée. On applique un couple constant pour toute la durée de la simulation. Une rotation est alors imposée à la roue menante afin de satisfaire aux conditions quasi statiques. La simulation s'arrête après trois périodes d'engrènement. La résolution est effectuée avec le solveur Ansys APDL®.

3 Résultats

3.1 Méthode ISO 6336-3 couplée à une approche éléments finis

Afin de comparer les résultats obtenus avec ceux issus des simulations multicorps flexibles, on met en œuvre une méthode combinant un calcul éléments finis en deux dimensions ainsi que le calcul de la contrainte maximale en pied de dent issu de la norme ISO 6336-3 [7]. La méthode proposée par la norme est un calcul de résistance des matériaux en deux dimensions d'une poutre encastree équivalente, corrigé par plusieurs coefficients issus de l'expérience. Un effort est appliqué selon un angle caractéristique sur la fibre neutre [9] en un point associé au point théorique le plus haut du profil correspondant à un contact entre une seule paire de dents en prise [15]. Ce point est appelé dernier point de contact unique haut. Par ailleurs, la contrainte en pied de dent σ_{F0} dite « de base » est supposée maximale au point de tangence entre le profil de raccordement et un cône à 30 degrés centré sur l'axe de symétrie de la dent. Dans cette étude, seule la contrainte de base σ_{F0} est considérée, hors coefficients correcteurs (coefficients K selon [7]). En complément, des calculs classiques par éléments finis en statique sont réalisés afin de construire l'évolution de σ_{F0} au cours de l'engrènement, sous l'hypothèse d'une distribution uniforme de la charge sur la largeur des dents, sans prise en compte d'une éventuelle correction de flanc de denture [8]. La figure 2 présente le modèle éléments finis 2D utilisé, constitué de 38 000 éléments quadrangulaires avec une taille caractéristique de maille de 20 μm .

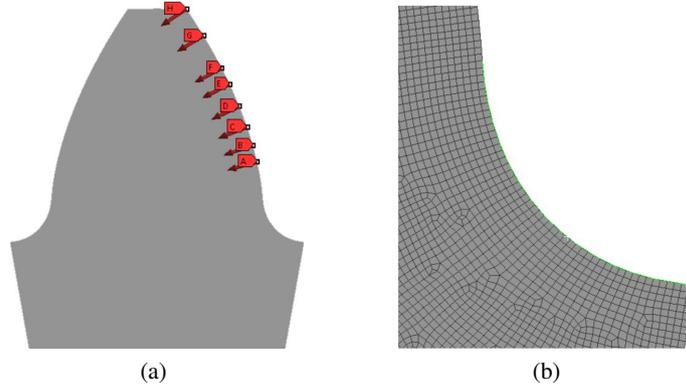


FIGURE 2 – Modèle 2D d’une dent encastrée pour différents points d’application de la force, de A à H (a), et vue rapprochée du congé de raccordement (b).

3.2 Approche multicorps flexibles

3.2.1 Distribution des contraintes principales maximales

La figure 3 représente la distribution des contraintes dans le congé de raccordement d’une dent à une position angulaire donnée correspondant au dernier point de contact unique haut issu de la simulation. Celui-ci peut être différent du point théorique. Le couple appliqué correspond à une valeur proche du couple nominal. Le congé est « déplié » pour en faciliter la représentation. La figure 3 s’articule comme suit :

- \tilde{b} correspond à la largeur de denture adimensionnée, telle que $\tilde{b} = (\pm b/2)/b$ avec b la largeur de denture, d’où $-0,50 \leq \tilde{b} \leq 0,50$.
- \tilde{r}_{M_1} représente le rayon adimensionné d’un point quelconque du profil de denture de la roue menante, tel que $\tilde{r}_{M_1} = (r_{M_1} - r_{f_1})/(r_{M_1} - r_{f_1})$ avec r_{M_1} le rayon d’un point du profil de la roue menante et r_{f_1} le rayon de pied de la roue menante. Le congé de raccordement, représenté sur la figure 3, correspond à l’intervalle $0 < \tilde{r}_{M_1} \leq 1,0$. La développante correspond à $\tilde{r}_{M_1} > 1,0$ tandis que le cercle de pied correspond à $r_{M_1} = r_{f_1}$, d’où $\tilde{r}_{M_1} = 0$.
- Le gradient de couleur montre l’évolution de la contrainte principale maximale adimensionnée $\tilde{\sigma}$ dans le pied de dent, telle que $\tilde{\sigma} = \sigma b m_n / F_n$ avec σ la contrainte principale maximale, m_n le module de taillage et F_n la force normale au profil.

On observe deux maximums locaux symétriques par rapport au centre de la dent ainsi qu’un fort gradient de contrainte entre ces maximums et les bords de la denture. Les lignes isocontraintes sont de forme elliptique, bien qu’elles soient déformées par la représentation plane du congé. Leurs foyers, à l’intersection des deux lignes continues bleues sur la figure 3, coïncident avec les deux maximums locaux mentionnés précédemment. Leur position est très proche de celle supposée par la norme, représentée par la ligne discontinue verte. Par suite, les maximums locaux sont représentés par la grandeur adimensionnée $\tilde{\sigma}_{F0}$, telle que $\tilde{\sigma}_{F0} = \sigma_{F0} b m_n / F_n$ avec σ_{F0} la contrainte principale maximale en pied de dent, définie dans [7] (voir figures 3 et 4).

3.2.2 Évolution du maximum de contrainte adimensionnée $\tilde{\sigma}_{F0}$

La figure 4 présente l’évolution de la contrainte maximale en pied de dent adimensionnée $\tilde{\sigma}_{F0}$ au cours de l’engrènement. \tilde{t} correspond à la période d’engrènement, tel que $\tilde{t} = z_1 f_{rot1} t$ avec z_1 le nombre de dents de la roue menante, f_{rot1} la fréquence de rotation de la roue menante et t la durée de la simulation. À $\tilde{t} = 0$, la dent précédant la dent étudiée entre en contact. L’abscisse $\tilde{t} = 1$ correspond à l’entrée théorique de la dent étudiée dans le contact. L’abscisse $\tilde{t} = 2$ coïncide avec l’entrée en contact théorique de la dent suivant la dent étudiée. L’abscisse $\tilde{t} = 1 + \varepsilon_{\alpha_{th}}$ correspond à la sortie théorique du contact de la dent étudiée, avec $\varepsilon_{\alpha_{th}}$ le rapport de conduite théorique. Il représente le nombre moyen de paires de dents en prise pour un engrènement rigide.

Pour un couple transmis adimensionné $\tilde{C} = 0,90$, où $\tilde{C} = C/C_{nom}$ avec C le couple transmis et C_{nom} le couple nominal, la figure 4(a) indique que la contrainte est maximale pour une position angulaire

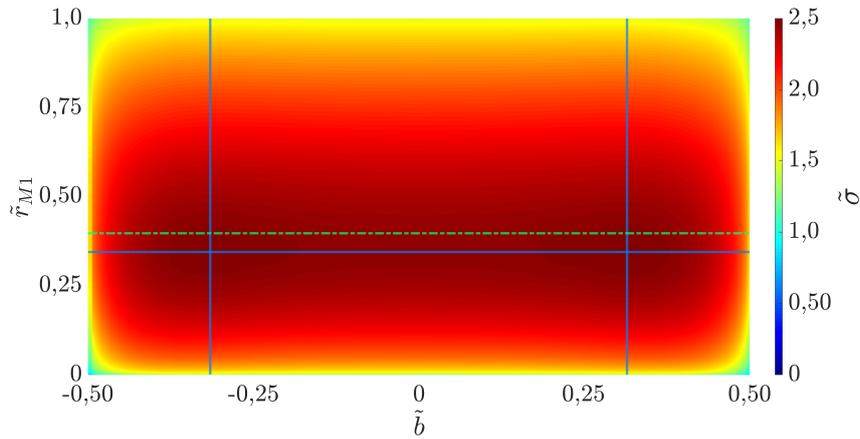


FIGURE 3 – Répartition de la contrainte maximale principale $\tilde{\sigma}$ dans le congé de raccordement d’une des dents de la roue menante au dernier point de contact unique haut théorique pour $\tilde{C} = 0,90$.

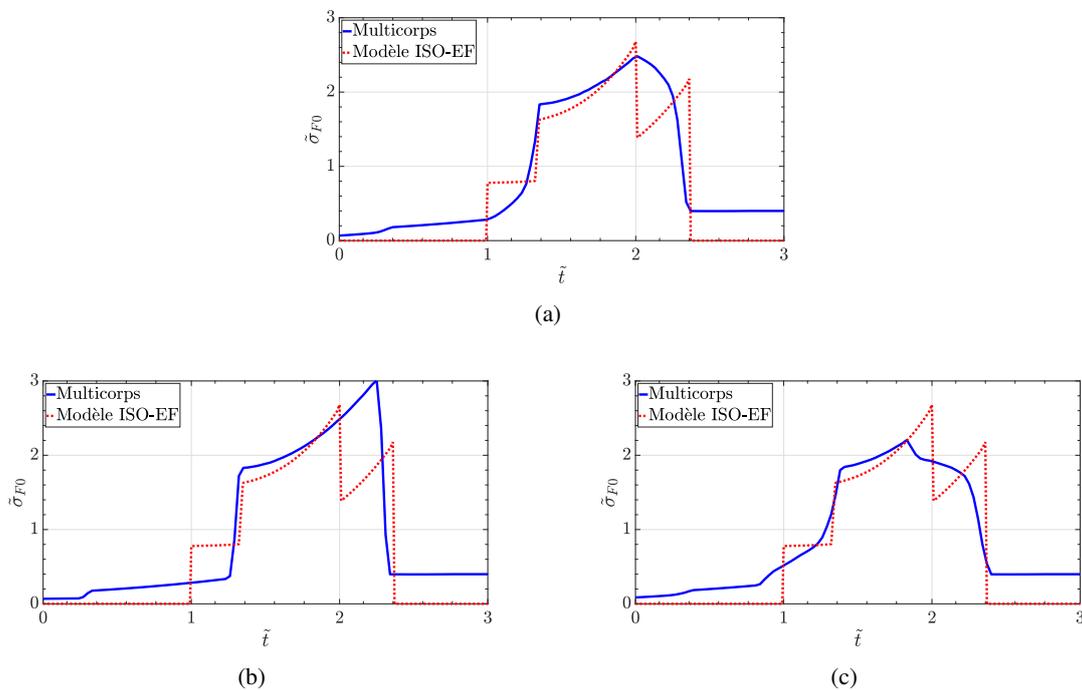


FIGURE 4 – Évolution de la contrainte en pied de dent maximale adimensionnée $\tilde{\sigma}_{F0}$ au cours de l’engrènement pour une des dents de la roue menante au couple adimensionné $\tilde{C} = 0,90$ (a), puis à $\tilde{C} = 0,25$ (b), et enfin pour $\tilde{C} = 2,2$ (c).

de l’engrenage proche de celle correspondant au dernier point de contact haut théorique. Néanmoins, la valeur maximale de contrainte est 10 % inférieure à celle calculée par la norme. Pour l’approche multicorps, on observe par ailleurs que les prises et ruptures de contact sont progressives, contrairement à l’approche théorique décrite précédemment. On observe également une contrainte non nulle alors que la dent étudiée n’est pas encore entrée dans le contact (respectivement alors qu’elle est sortie du contact). Cette contrainte est induite par les efforts sur les paires de dents précédentes (respectivement suivantes). Elle évolue par paliers au fur et à mesure que les périodes d’engrènement se succèdent avant ou après la dent étudiée.

3.2.3 Effet du couple transmis

Les figures 4(b) et 4(c) décrivent l’influence du couple transmis sur la position angulaire de l’engrènement correspondant au dernier point de contact unique pour chacune des simulations. Comme le montre la figure 4(b), la déflexion sous charge des dents est moindre à faible couple, ce qui explique que les

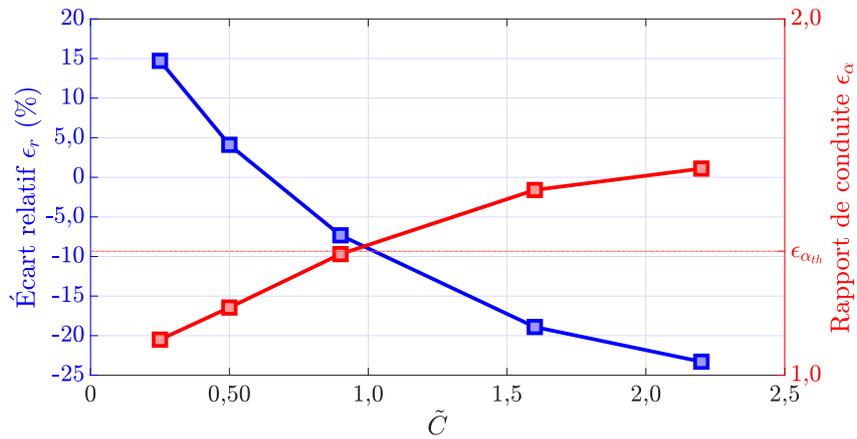


FIGURE 5 – Écart relatif entre les résultats en contrainte adimensionnée $\tilde{\sigma}_{F0}$ pour les méthodes multicorps et ISO-EF et évolution du rapport de conduite calculé par la méthode multicorps en fonction du couple transmis.

prises de contact sont retardées. Le dernier point de contact unique haut simulé apparaît alors plus tard que ne le prédit la cinématique théorique de l'engrenage. L'effort de contact étant appliqué plus haut sur la dent, la contrainte $\tilde{\sigma}_{F0}$ calculée par la méthode multicorps flexibles est supérieure à celle prédite par la norme. L'entrée de chaque paire de dents dans le contact est instantanée. Inversement, à fort couple, la déflexion sous charge des dents est accrue, ce qui induit des contacts prématurés, illustrés par la figure 4(c). Le dernier point de contact unique haut simulé apparaît donc en avance, ce qui a pour effet de diminuer la valeur maximale de $\tilde{\sigma}_{F0}$. L'entrée de chaque paire de dents dans le contact est progressive. Le couple transmis a ainsi une influence significative sur l'évolution de la contrainte maximale en pied de dent au cours de l'engrènement.

Ces effets du couple transmis sur $\tilde{\sigma}_{F0}$ sont synthétisés sur la figure 5. L'axe des abscisses représente le couple transmis adimensionné. En ordonnée gauche, on décrit l'erreur normalisée entre les contraintes maximales $\tilde{\sigma}_{F0}$ calculées par les méthodes multicorps flexibles et ISO. En ordonnée droite, on calcule le rapport de conduite ϵ_α calculé par la méthode multicorps flexibles. Ces deux paramètres sont exprimés en fonction du couple transmis. Pour un couple adimensionné $\tilde{C} = 0,90$, le rapport de conduite calculé par la méthode multicorps est sensiblement identique à sa valeur théorique. La méthode multicorps flexibles prédit une contrainte maximale inférieure de 10 % à celle de la norme. Les écarts entre la méthode multicorps flexible et la norme s'accroissent à mesure que le couple transmis s'éloigne de sa valeur nominale. Au couple minimal $\tilde{C} = 0,25$, la valeur de contrainte maximale est en effet supérieure de 15 % à la prédiction de la norme, et est inférieure de près de 25 % pour le couple maximal étudié $\tilde{C} = 2,2$. Par ailleurs, le rapport de conduite calculé augmente avec le couple transmis, en raison de la flexibilité des dentures. En définitive, la prise en compte de la déflexion des dents sous charge par la méthode multicorps permet de détecter l'apparition de contacts hors du plan théorique. Ceci constitue l'une de ses originalités fortes.

3.2.4 Effet de la micro-géométrie

La suppression de la correction de profil génère des contacts entre les arrêtes de tête des dents de la roue menante, et le flanc actif des dents de la roue menée, et inversement. Comme le montre la figure 6, les positions angulaires correspondantes de l'engrenage se matérialisent par un pic ou une chute de contrainte qui peuvent être reliés à des artefacts numériques lors des calculs. Les corrections appliquées limitent ainsi les contacts potentiels entre arrêtes lors de l'engagement. Elles permettent alors de réduire la fatigue subie par la denture en fonctionnement.

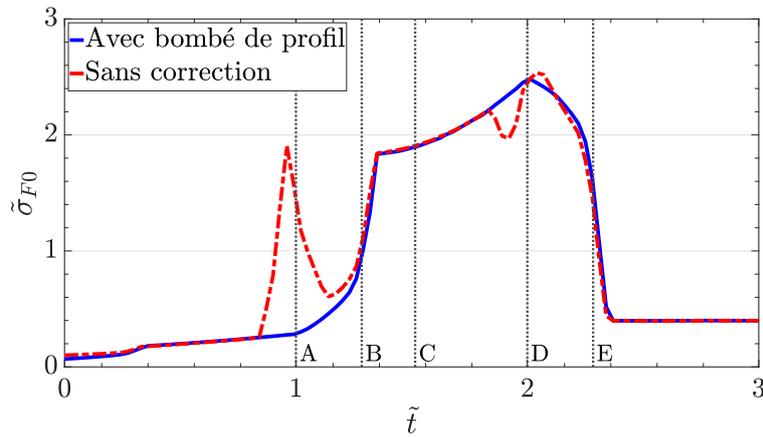


FIGURE 6 – Influence de la micro-géométrie sur l'évolution de la contrainte en pied de dent σ_{F0} de la roue menante. A, B, C, D et E sont respectivement les points théoriques suivants : premier point de contact, premier point de contact unique bas, point primitif, dernier point de contact unique haut, dernier point de contact.

4 Conclusion

Cette étude propose une approche multicorps flexibles quasi statique basée sur une résolution du contact par éléments finis pour calculer la distribution des contraintes en pied de dent et son évolution pendant l'engrènement. Cette méthode permet de prendre en compte avec précision la flexibilité des dents et des corps de roue, ainsi que l'influence des corrections de flanc de denture sur la contrainte exercée en pied, sans faire d'hypothèse sur la position et la forme des surfaces de contact. Ce travail montre des différences significatives entre les résultats de l'approche proposée et ceux d'un modèle EF à deux dimensions combiné à un calcul de contrainte basé sur la norme ISO 6336-3. La méthode multicorps flexibles conduit à une contrainte $\tilde{\sigma}_{F0}$ qui s'éloigne de la prédiction réalisée par la norme, en particulier lorsque le couple transmis s'écarte de sa valeur nominale. Elle permet la prise en compte des contacts réels qui sont éventuellement situés en dehors du plan théorique. Elle permet également de calculer la contrainte en pied de dent en prenant en compte l'influence des corrections micro-géométriques. Toutefois, la méthode multicorps flexibles requiert d'importantes ressources de calcul pour être mise en œuvre, et nécessite de construire un modèle géométrique avec une précision de l'ordre du micron afin de capturer convenablement le contact étroit, ainsi que l'influence de la micro-géométrie. Enfin, bien que le train d'engrenage sur lequel s'appuie cette étude soit constitué de deux roues extérieures cylindriques à denture droite, la méthode employée peut être étendue à tout type de géométrie de denture et de corps de roue.

Remerciements

Les auteurs remercient la société Redex pour son soutien financier ainsi que les données de conception fournies nécessaires à la mise en œuvre des simulations numériques réalisées.

Références

- [1] L. E. Alban. *Number 1 Gear Failure – Tooth Bending Fatigue*, SAE Transaction, 93, 1002-1008, 1984.
- [2] Y. Benaïcha, J. Perret-Liaudet, J.-D. Beley, E. Rigaud, F. Thouverez. *On a flexible multibody modelling approach using FE-based contact formulation for describing gear transmission error*, Mechanism and Machine Theory, 167, 104 505, 2022.
- [3] L. Bonaiti, A. B. M. Bayoumi, F. Concli, F. Rosa, C. Gorla. *Gear Root Bending Strength : A Comparison Between Single Tooth Bending Fatigue Tests and Meshing Gear*, Journal of Mechanical Design, 143(10), 103 402, 2021.
- [4] J. R. Colbourne. *The Geometry of Involute Gears*, Springer-Verlag, 1987.

- [5] Comité technique ISO/TC 60, Engrenages, *Engrenages cylindriques de mécanique générale et de grosse mécanique – Tracé de référence*, NF ISO 53, Organisation internationale de normalisation (ISO), 1998.
- [6] Comité technique ISO/TC 60, Engrenages, sous-comité SC2, Calcul de la capacité de charge des engrenages, *Calcul de la capacité de charge des engrenages cylindriques à dentures droite et hélicoïdale – Partie 1 : Principes de base, introduction et facteurs généraux d'influence*, NF ISO 6336-1, Organisation internationale de normalisation (ISO), 2020.
- [7] Comité technique ISO/TC 60, Engrenages, sous-comité SC2, Calcul de la capacité de charge des engrenages, *Calcul de la capacité de charge des engrenages cylindriques à dentures droite et hélicoïdale – Partie 3 : Calcul de la tenue en fatigue à la flexion en pied de dent*, NF ISO 6336-3, Organisation internationale de normalisation (ISO), 2020.
- [8] Comité technique ISO/TC 60, Engrenages, sous-comité SC1, Nomenclature et engrenages à vis, *Gears – Cylindrical involute gears and gear pairs – Concepts and geometry*, ISO 21 771, Organisation internationale de normalisation (ISO), 2007.
- [9] R. W. Cornell. *Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth*, Journal of Mechanical Design, 103(2), 447-459, 1981.
- [10] T. J. Dolan, E. L. Broghamer. *A Photoelastic Study of Stresses in Gear Tooth Fillets*, University of Illinois Engineering Experiment Station Bulletin Series, 335, 1942.
- [11] G. Henriot. *Engrenages : conception, fabrication, mise en œuvre*, 7e éd., Dunod, 1999.
- [12] A. Iñurritegui, J. Larrañaga, A. Arana, I. Ulacia. *Load distribution and tooth root stress of highly crowned spherical gear couplings working at high misalignment angles*, Mechanism and Machine Theory, 179, 105 104, 2023.
- [13] M. A. Jacobson. *Bending Stress in Spur Gear Teeth*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 169(1), 587-609, 1955.
- [14] A. Kahraman, S. Vijayakar. *Effects of Internal Gear Flexibility on the Quasi-Static Behavior of a Planetary Gear Set*, Journal of Mechanical Design, 123(3), 408-415, 2001.
- [15] W. Lewis. *Investigation of the Strength of Gear Teeth*, Proceedings of the Engineers' Club of Philadelphia, 16-23, 1893.
- [16] C. Spitas, V. Spitas, A. Amani, M. Rajabalinejad. *Parametric investigation of the combined effect of whole depth and cutter tip radius on the bending strength of 20° involute gear teeth*, Acta Mechanica, 225, 361-371, 2013.
- [17] L. Wilecox, W. Coleman. *Application of Finite Elements to the Analysis of Gear Tooth Root Stresses*, Journal of Engineering for Industry, 95(4), 1139-1148, 1973.