



HAL
open science

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES

Situaciones Conceptos, Annie Bessot, Jean-Luc Dorier, Quien Inició Amor

► **To cite this version:**

Situaciones Conceptos, Annie Bessot, Jean-Luc Dorier, Quien Inició Amor. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES. 2024. hal-04610836

HAL Id: hal-04610836

<https://hal.science/hal-04610836v1>

Submitted on 13 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INTRODUCCIÓN
A
LA TEORÍA DE LAS
SITUACIONES

*Conceptos fundamentales
de la didáctica de las matemáticas.*

Annie Bessot
Universidad de Grenoble-Alpes

Para lograr esta traducción al español, hice un primer borrador con la ayuda de la versión online gratuita del traductor automático Microsoft Translator, luego Pilar Orús Báguena corrigió y/o pulió algunos pasajes. La mayoría de las referencias en este texto están en francés. Las citas han sido traducidas al español, pero el original francés siempre aparece en notas a pie de página. La obra de Brousseau se ha popularizado y difundido en español, gracias a traducciones de diversas autoras hispanoamericanas, principalmente argentinas y particularmente de Dilma Fregona, profesora de la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina), que ha publicado en la editorial Libros del Zorzal la traducción del libro de G. Brousseau (2007) “Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas” y un libro conjunto (Fregona D., Orús P., 2010) “La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas”. Así mismo hemos realizado conjuntamente en español (y francés) otras producciones, sobre los trabajos del entramado COREM creado y dirigido por Brousseau (Centre d’Observation pour la Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques; se pueden encontrar en el sitio del CRDM-Guy Brousseau, de la Universitat Jaume-I de Castelló (UJI). España), (<https://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/62668>).

El COREM, que funcionó como un gran dispositivo de confrontación de sus desarrollos teóricos, asociado a la escuela de educación infantil y primaria Jules Michelet (Talence, Francia). Por dedicar toda su vida a ese gran proyecto innovador que es la TSD y el COREM, así como por la ruptura que supuso con los paradigmas de enseñanza de las matemáticas existentes, le fue concedida la primera medalla Félix Klein de la ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) en 2003.

En 2010 Guy Brousseau cedió todos los materiales elaborados en el COREM, a la Universitat Jaume-I de Castelló, formando así la principal fuente de los fondos documentales del Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas que llevan su nombre (CDRM-Guy Brousseau), en reconocimiento de la importancia de estos fondos y del artífice de su diseño y elaboración. (<https://www.uji.es/institucional/estructural/instituts/imac/base/crdm/presentacio/>).

ÍNDICE

1. <i>Índice</i> _____	<i>i</i>
2. <i>Prólogo</i> _____	<i>ii</i>
3. 1. Pero ¿qué es el aprendizaje en una situación didáctica? _____	2
4. 2. Contrato didáctico _____	4
5. 2.1. El contrato didáctico representa los derechos y deberes implícitos de los estudiantes y del docente respecto de los objetos de conocimiento matemático enseñados _____	4
6. 2.2. Contrato didáctico y negociaciones entre estudiantes y docente sobre conocimientos _____	6
7. 2.3. Enseñanza e incumplimientos de contrato _____	8
8. 3. Situación adidáctica _____	8
9. 3.1. ¿Cuáles son las condiciones para que una situación sea vivida como adidáctica? _____	9
10. 3.2. ¿Qué elementos de la situación modelamos en el medio (<i>milieu</i>)? _____	10
11. 3.3. Ejemplo. Análisis <i>a priori</i> de una situación didáctica “Ampliación del rompecabezas” (Según G. y N. Brousseau 1987) _____	11
12. 4. Variables didácticas: definiciones y ejemplos _____	14
13. 5. Análisis del aprendizaje en una situación de enseñanza “ordinaria” _____	16
14. 6. Diferentes estatus del saber, diferentes tipos de situaciones adidácticas _____	16
15. 7. Situación fundamental _____	17
16. 7.1. Introducción _____	17
17. 7.2. Ejemplo - Análisis <i>a priori</i> de una situación fundamental: “El juego de la carrera hacia n” “¿(Quién dirá n”) Según Brousseau 1978) _____	18
18. 8. Complementos: concepciones, obstáculos _____	20
19. 9. Devolución/institucionalización (saber/conocimiento) _____	23
20. 9.1. Devolución _____	23
21. 9.2. Institucionalización _____	23
22. <i>Bibliografía</i> _____	24
23. <i>APÉNDICE I Construcción Matemática versus práctica</i> _____	27
24. <i>APÉNDICE II Actividad de trazar ejes de simetría (Grenier 1984) Erreur ! Signet non défini.</i>	
25. <i>ANEXO III Crónica “Informe sobre la actividad de trazado con instrumentos respecto a un trapecio” Extracto de (Grenier 1989)</i> _____	31

PRÓLOGO

En 1994 se creó en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble un Diploma de Estudios Avanzados de Investigación (DEA) en didáctica de disciplinas científicas. Luego, en relación con este diploma, se creó en esta universidad el segundo año de Maestría "EIAH y didáctica" ¹tras la implementación de la reforma LMD ².

El siguiente documento retoma los apuntes de un curso que impartí en el Máster 2 EIAH-Didáctica del año 2003 al 2007 como parte de la unidad didáctica (UE1: "Conceptos fundamentales de didáctica") de la que fui responsable.

En este curso presenté el marco teórico desarrollado por Guy Brousseau.

Originalmente titulé este curso "Introducción a la teoría de situaciones didácticas". En la revisión que presento aquí, he eliminado del título el adjetivo didáctico.

De hecho, muy recientemente, Brousseau (1997)³ estableció una distinción dentro de la teoría de situaciones entre teoría de situaciones matemáticas para uso didáctico (TSM o teoría de situaciones matemáticas) y teoría de situaciones didácticas propiamente dichas (TSD).

Esta distinción, muy esclarecedora desde mi punto de vista, pasó relativamente desapercibida: sólo me di cuenta de ella durante la preparación de mi curso en la 15ª escuela de verano de investigación en didáctica de las matemáticas en Clermont-Ferrand. Lo tomé en cuenta al escribir el curso para esta decimoquinta escuela de verano (Bessot 2011).

Por lo tanto, el presente texto es una revisión del curso de 2003. Esta revisión fue motivada en gran medida por el deseo de traducirlo al inglés y posiblemente a otros idiomas. De hecho, en nuestro trabajo con Claire Margolinas para el proyecto ICMI AMOR⁴, necesitábamos una referencia en inglés que representara una primera aproximación a la obra de Brousseau. Este curso parece cumplir nuestras expectativas.

Espero que esta obra y sus diversas traducciones permitan comprender mejor la teoría de situaciones, uno de los fundamentos esenciales de la didáctica de las matemáticas francesa, retomada en otras didácticas y más ampliamente en las Ciencias de la Educación y, también, fuera del ámbito particular contexto de Francia. Irónicamente, mientras estaba dando los últimos retoques a este prólogo, me acaban de anunciar la triste noticia de la muerte de Guy Brousseau. Esto me entristece enormemente, pero le concede una importancia mayor a esta empresa.

Finalmente, me gustaría agradecer calurosamente a Jean-Luc Dorier, quien inició AMOR, releyó atentamente este curso en francés, me ayudó a traducirlo al inglés y me motivó a traducirlo a otros idiomas. Me gustaría dar las gracias a Pilar Ors por traducir este curso al español.

Annie Bessot

Grenoble, febrero de 2024

annie.bessot@gmail.com

No dudes en ponerte en contacto conmigo ante cualquier duda sobre el contenido de este curso. ¡Gracias!

¹Entornos informáticos de aprendizaje humano

²La reforma licencia-máster-doctorado, o reforma LMD, es un conjunto de medidas que modifican el sistema de educación superior francés para adaptarlo a los estándares europeos de la reforma BMD. Los textos fundacionales de esta reforma aparecieron en 2002, pero su aplicación duró varios años.

³Brousseau, G. (1997). La teoría de situaciones didácticas. (Curso impartido durante la entrega del título de Doctor Honoris Causa por la Universidad de Montreal). <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>.

⁴ Ver <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>

En el origen del movimiento teórico bajo la etiqueta "didáctica de las matemáticas"⁵ en Francia está la idea de que es posible describir, explicar de manera racional los fenómenos de la enseñanza, fenómenos que generalmente suscitan más el empirismo o la opinión que el discurso razonado.

Una de las preocupaciones ampliamente compartida dentro de la comunidad francesa de didáctica de las matemáticas es la de establecer un marco teórico original que desarrolle sus propios conceptos... También se alcanza un amplio consenso sobre el requisito metodológico de recurrir a la experimentación en interacción con la teoría... (Laborde 1989, p.47)⁶.

Este marco teórico fue primero el de la teoría de situaciones de la que fue fundador Guy Brousseau y el de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud.

Inicialmente podríamos definir la didáctica de las disciplinas científicas, en el seno de las ciencias cognitivas, como la ciencia de las condiciones específicas para la difusión del conocimiento científico útil al funcionamiento de las instituciones humanas.

El sistema mínimo de estudio es el sistema didáctico *stricto sensu*, Profesor, Alumno, Saber: es decir las interacciones entre *profesor y alumnos* relativas al *saber*, en una situación con fines didácticos.

Los investigadores en didáctica de las matemáticas afirman la especificidad de su disciplina en comparación con otros campos relacionados:

Para producir, mejorar, reproducir, describir y comprender situaciones de enseñanza de las matemáticas, se ha vuelto necesario -y posible- teorizar esta actividad docente como un objeto original de estudio y no como una simple conjunción de hechos que sólo pueden teorizarse en campos autónomos como como la pedagogía, la sociología, la psicología, las matemáticas, la lingüística o la epistemología. (Brousseau 1986, p.2)⁷

La metáfora del laberinto puede permitirnos comprender mejor qué diferencia la problemática del didáctico de la del psicólogo:

El psicólogo [...] estudia el comportamiento de la rata en el laberinto; pero conoce la estructura del laberinto, que él mismo diseñó. El didáctico, en cambio, desconoce la

⁵Una conferencia reunió en Burdeos en 1975 a investigadores interesados en tratar este campo como un dominio científico que sugirieron que debería denominarse 'epistemología experimental'. Por sugerencia mía, preferimos asumir la etiqueta un tanto despreciada de "didáctica" para mostrar nuestro deseo de mejorar la enseñanza a través **de lo que podemos comprender**. » (Brousseau 1986, p. 28) (el énfasis es mío)

⁶ Traducción del original: Un des soucis largement partagés au sein de la communauté française de didactique des mathématiques est celui de l'établissement d'un cadre théorique original développant ses propres concepts... Un large consensus se fait aussi sur l'exigence méthodologique d'avoir recours à l'expérimentation en interaction avec la théorie... (Laborde 1989, p. 47).

⁷ Traducción del original: Pour produire, améliorer, reproduire, décrire et comprendre les situations d'enseignement des mathématiques, il est devenu nécessaire - et possible - de théoriser cette activité d'enseignement en tant qu'objet original d'étude et non pas en tant que simple conjonction. de faits théorisables uniquement dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie. (Brousseau 1986, p. 2)

estructura del laberinto en el cual se lanza al alumno. Por lo tanto, primero debe, lógicamente, intentar explorarlo. Para ello, invirtiendo la perspectiva del psicólogo, éste puede incluso observar el comportamiento de la ‘rata’ (¡el estudiante!) dentro del laberinto para deducir la estructura del laberinto... (Chevallard 1989, p.36)⁸

¿Los conceptos teóricos del campo de la didáctica de las matemáticas son específicos de las matemáticas? Actualmente asistimos en Francia a la utilización por parte de investigadores en didáctica de otras disciplinas (como, por ejemplo, la educación física y deportiva o la física) de algunos de estos conceptos. Tomaría como hipótesis que ciertos conceptos teóricos de la didáctica de las matemáticas tienen un carácter general: permiten en situaciones particulares generar preguntas y resultados específicos de un conocimiento particular.

Lo que define las posiciones “enseñante” y “alumnos” es el proyecto del sistema didáctico que es pasar de un estado inicial a un estado final en lo que respecta al saber, una cuestión de aprendizaje.

Desde el punto de vista de la relación con el saber, existe una *disimetría*, que es constitutiva del sistema didáctico. No diremos que el estudiante no tiene relación con el saber antes de la enseñanza, sino simplemente que en el estado inicial esta relación es poca o no adecuada. Sin la hipótesis de esta disimetría, el sistema didáctico no tiene razón de ser. (Margolinas 1993, p.227)⁹

El enseñante se distingue del alumno en lo que él o ella “se supone que sabe”, pero también en lo que se “supone que es capaz” de anticipar sobre lo que el alumno tendrá que aprender.

Además, el sistema didáctico tiene una característica particular, la de tener el objetivo de desaparecer: si el enseñante tiene éxito en su misión, debe poder retirarse, y *el alumno debe poder mantener su relación con el saber fuera de su presencia.*

1. Pero ¿qué es el aprendizaje en una situación didáctica?

El proyecto del estudiante es aprender.

Una ideología muy extendida supone una relación de simple transferencia de la enseñanza al aprendizaje: el estudiante registra lo que le comunica el profesor, quizás con cierta pérdida de información. (Laborde 1989, p.47)¹⁰

Numerosos trabajos han demostrado el carácter erróneo de este punto de vista: el aprendizaje no es un proceso de simple transferencia, ni tampoco un proceso lineal y continuo.

La comprensión del aprendizaje del alumno necesita precisar el punto de vista adoptado sobre el aprendizaje.

⁸ Traducción del original: Le psychologue [...] étudie le comportement du rat dans le labyrinthe ; plus il connaît la structure du labyrinthe, qu'il a lui-même conçu. Le didacticien, en revanche, ne connaît pas la structure du labyrinthe dans laquelle l'élève est lancé . Il devra donc d'abord, logiquement, chercher à l'explorateur. Pour cela renversant la perspective du psychologue, il pourra même observer le comportement du «rat» (l'élève!) à l'intérieur du labyrinthe pour en déduire la structure du labyrinthe... (Chevallard 1989, p. 36)

⁹ Traducción del original: Du point de vue de la relation au savoir, il y a une *dissymétrie*, qui est constitutive du système didactique. Nous ne dirons pas que l'élève n'entretient aucune relation au savoir avant l'enseignement, mais simplement que dans l'état initial, cette relation est peu ou pas adéquate. Sans l'hypothèse de cette dissymétrie, le système didactique n'a pas lieu d'être. (Margolinas 1993, p.227)

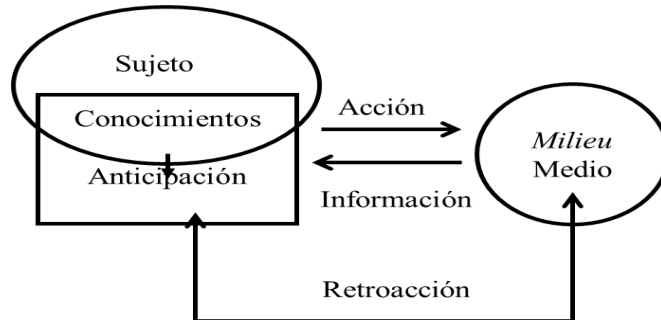
¹⁰ Traducción del original: Une idéologie très répandue suppose un lien de simple transfert de l'enseignement vers l'apprentissage : il a enregistré qu'il est mis en relation par l'enseignant avec les bons pour l'information. (Laborde 1989, p. 47)

Hipótesis psicológica (aprendizaje por adaptación):

El sujeto aprende adaptándose (asimilación y acomodación) a un entorno que le produce contradicciones, dificultades y desequilibrios.

Esta hipótesis hace referencia a la teoría psicogenética de Piaget.

Figura 1. Situación de aprendizaje no didáctico.



Ejemplo. Situación no didáctica de aprendizaje: la bicicleta (Brousseau 1988b)

Situación 1: bicicleta con 4 ruedas, una delante y tres detrás

Con estas pequeñas ruedas el niño aprende a pedalear y a girar el manillar según el siguiente modelo implícito:

- Quiero ir a la derecha, giro el manillar hacia la derecha;
- Quiero ir a la izquierda, giro el manillar hacia la izquierda.

D → D

G → G

Situación 2: bicicleta de dos ruedas (quitamos las dos ruedas pequeñas de la parte trasera).

[...] el niño quiere ir recto, pero la bicicleta se inclina hacia la derecha, y por tanto se dirige hacia la derecha, el niño por tanto quiere volver a la izquierda y gira su manillar hacia la izquierda siguiendo el modelo implícito adquirido. Gira el manillar hacia la izquierda y... ¡cae!

Para mantener el equilibrio [...] primero debe girar el manillar hacia el lado donde está inclinado para obtener un empujón que lo enderece, siguiendo por tanto un patrón invertido (momentáneo) pero esencial.

G → D

D → G

El cambio de esquema es característico del aprendizaje. (Brousseau 1988b, p.62)¹¹

Hipótesis didáctica

Un medio sin intenciones didácticas (es decir, no organizado voluntariamente para enseñar un saber) es insuficiente para inducir en un sujeto todos los conocimientos que la sociedad quiere que adquiera.

El profesor debe, por tanto, provocar en los alumnos las adaptaciones deseadas mediante una elección juiciosa de las situaciones que ofrece.

¹¹ Traducción del original: Le changement de schème est caractéristique de l'apprentissage. (Brousseau 1988, p.62)

La misión del enseñante no es lograr que los alumnos aprendan, sino más bien garantizar que *puedan aprender*. Su tarea no es hacerse cargo del aprendizaje -que por naturaleza permanece fuera de su alcance- sino hacerse cargo de la creación de *condiciones para hacer posible el aprendizaje*. (Chevallard 1986, p. 39)¹²

Las consecuencias de estas hipótesis llevan a la introducción de un modelo de situación didáctica: *situación didáctica / contrato didáctico*.

2. Contrato didáctico

2.1. El contrato didáctico representa ¹³los derechos y deberes implícitos de los alumnos y del enseñante respecto de los objetos de saber matemático enseñados.

Lo que cada uno tiene derecho a hacer o no hacer respecto del saber se basa en un conjunto de reglas explícitas, pero sobre todo implícitas. Brousseau llamó contrato didáctico al conjunto de reglas que reparten y limitan las responsabilidades de cada cual, alumnos y profesor, respecto de un saber matemático enseñado.

Propuso este concepto en 1978 y luego en 1980 para explicar el fracaso de los alumnos de escuela primaria que *tenían éxito en todas las disciplinas enseñadas excepto en matemáticas* (fracaso selectivo en matemáticas): los fracasos selectivos no vendrían de una incapacidad de los alumnos para aprender sino de contratos didácticos específicos respecto a tal o cual saber matemático que impide a ciertos estudiantes entrar en un proceso de aprendizaje de estos saberes.

Durante una sesión destinada a enseñar a un alumno un conocimiento específico (*situación didáctica*), el alumno interpreta la situación que se le presenta, las preguntas formuladas, la información que se le proporciona, las limitaciones que se le imponen, en función de lo que el maestro reproduce, conscientemente o no, *de manera repetitiva*¹⁴ en su práctica docente. Estamos particularmente interesados en lo que, en estos hábitos, es específico de los conocimientos enseñados. (Brousseau 1980, p.127)¹⁵

Ejemplo 1. Establecer relaciones al inicio de la escuela secundaria

Alrededor de la década de 1970, en Francia, a nivel de sexto grado (niños de 11 a 12 años), dábamos lecciones sobre las nociones de pertenencia e inclusión ¹⁶. Un ejercicio habitual sobre estas nociones fue el siguiente:

¿Entre los siguientes signos \in , \notin , \subset , $\not\subset$, cuál es el correcto?

$\{a\}$ $\{a, b, c\}$

12 Traducción del original: L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage – ce qui demeure par nature hors de son pouvoir - mais la prise en charge de la création de conditions de possibilité de l'apprentissage. (Chevallard 1986, p. 39)

13Es decir, un modelo construido por el investigador.

14 Énfasis de la autora.

15 Traducción del original: Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée (situation didactique), l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, Les contraintes qui lui sont imposées, fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, *de façon répétitive* dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressons plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est spécifique des connaissances enseignées. (Brousseau 1980, p.127)

16 Este tipo de ejercicios ha desaparecido de la enseñanza actual en Francia.

$b \dots \{a, b, c\}$

Un estudio de un cuestionario de este tipo (Duval y Pluvinage 1977, citado por Tonnelle 1979) muestra que la conducta de respuesta de los estudiantes estaba regulada por un árbol de elecciones que permitía tomar decisiones:

- sí hay llaves "a cada lado", esto es inclusión
 - sí solo hay llaves "a la derecha", se trata de pertenencia
- etc.

Luego, los alumnos podrían responder correctamente a la mayoría de los ejercicios sobre este tema en sexto grado sin que el *significado matemático* de las relaciones conjuntistas desempeñe un papel.

Los alumnos que se enfrentan a un cierto número de problemas repetitivos son llevados a aprender reglas implícitas (como la presencia o ausencia de llaves aquí) que les permiten responder económicamente al problema planteado.

Ejemplo 2. Factorización en secundaria¹⁷

El profesor esperará que un estudiante de secundaria que se enfrente a la pregunta "Factorizar $16x^2 - 4$ " él o ella, reconozca esto como una oportunidad para implementar la regla de factorización $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ y responder $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$, y que ante la cuestión "Factoriza $4x^2 - 36$ " el estudiante reconozca una factorización simple: .

Todas las respuestas correctas $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$ o $16x^2 - 4 = 3(\frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3})$ o $16x^2 - 4 = 16x^2(1 - 1/4x^2)$ con $x \neq 0$ ¹⁸ será eliminado o no tendrá oportunidad de aparecer, *no por no satisfacer una condición matemática previamente formulada¹⁹, sino como un acto que se desvía de un código de conductas.*

El poder del profesor en su clase no es *prohibir (más precisamente: prohibir directamente)* la respuesta $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$, sino *producir* la respuesta $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$. Su poder consiste menos en designar "respuestas incorrectas" que, en provocar *la* respuesta correcta, lo que implícitamente designa otras respuestas como incorrectas. (Chevallard 1985, p.74)²⁰

La existencia de reglas implícitas que estructuran fuertemente el comportamiento de los alumnos y el del profesor modifica el estatus del error: un error será una respuesta admisible y falsa. Por tanto, el error surge como una falta según un modelo de respeto al código de conducta: la respuesta $16x^2 - 4 = 16x^2(1 - \frac{1}{4x^2})$ es verdadera, pero no es admisible, la respuesta $16x^2 - 3 = (4x - 3)(4x + 1)$ es errónea, es decir *admisible y falsa*.

Lo que hemos mostrado sobre la factorización no es un caso patológico con respecto a la enseñanza del conocimiento, lo utilizamos para resaltar un mecanismo general involucrado en la comunicación didáctica de los saberes. El estudio del contrato didáctico relativo a un saber permite rastrear los límites del significado del saber enseñado al alumno.

¹⁷Según Tonnelle J. (1979) y Chevallard (1985).

¹⁸Lo cual será una respuesta adecuada en segundo lugar al aprender los límites de funciones polinómicas.

¹⁹Como factorizar $Z[X]$ (conjunto de polinomios con coeficientes enteros).

²⁰Traducción del original: Le pouvoir de l'enseignant dans sa classe, ça n'est pas d'interdire (plus précisément : d'interdire de manière directe) la réponse $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$, mais bien de produire la réponse $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$. Ils sont pouvoir consister moins à désigner les « mauvaises réponses », qu'à susciter la bonne réponse - qui désigne implicitement les autres réponses comme mauvaises. (Chevallard 1985, p.74)

2.2. Contrato didáctico y negociaciones entre estudiantes y profesor en relación al saber

Durante la enseñanza de un saber, las reglas de comunicación, entre los alumnos y el enseñante, sobre los objetos del saber, se establecen, cambian, se rompen y se renuevan a medida que avanzan las adquisiciones, su evolución y la historia producida. Estas normas no se presentan de forma única y fijada en el tiempo, sino que, por el contrario, son fruto de una negociación siempre renovable.

Por una parte, las interacciones entre el enseñante y el enseñado obedecen a reglas localmente estables y, por otra parte, éstas no son inmutables.

Esta negociación produce una especie de juego cuyas reglas provisionalmente estables permiten a los protagonistas y en particular al alumno tomar decisiones con una cierta seguridad, necesaria para garantizarle la independencia característica de la apropiación. (Brousseau 1986b, p. 55)²¹

El contrato es específico de los conocimientos implicados y, por tanto, necesariamente perecedero: los conocimientos e incluso el saber hacer evolucionan y cambian, mientras que el contrato didáctico tiende a ser estable. Los momentos de ruptura permiten demostrar experimentalmente el contrato didáctico. (Brousseau 1988a, p. 322)²²

Este proceso de negociación está sujeto a una serie de paradojas. Aquí sólo examinaremos uno: el enseñante no tiene derecho a decirle al alumno lo que quiere que él haga (de lo contrario, él o ella no desempeña su papel de enseñante) y sin embargo, él o ella debe asegurarse de que el estudiante produzca la respuesta esperada (de lo contrario, él o ella, no ha logrado enseñar).

Asimismo, sí el alumno acepta que el enseñante le enseñe los resultados, él o ella no los establece por sí mismo y por tanto no los aprende. Sí, por el contrario, él o ella rechaza cualquier información del enseñante, entonces rompe la relación didáctica.

Brousseau ha caracterizado diferentes procedimientos de negociación para obtener de los alumnos la respuesta esperada (que él o ella sabe y que el alumno no sabe). El efecto *Topaze*²³ es la unificación de estas formas: el profesor intenta que el significado de la respuesta sea lo más rico posible. En caso de fracaso, añade información que reduce el significado, hasta el punto de aceptar condiciones que provocan la respuesta del alumno sin que éste pueda asignar ningún significado.

Ejemplo 3. Trazar el eje de simetría con regla no graduada y escuadra

(Ver Apéndices II y III)

El proyecto pedagógico es que los alumnos utilicen las siguientes propiedades geométricas para justificar el trazado del eje de simetría:

²¹Traducción del original: Cette négociation produit une sorte de jeu dont les règles provisoirement stables permettent aux protagonistes et notamment à l'élève de prendre des décisions dans une certaine sécurité, nécessaire pour lui assurer l'indépendance caractéristique de l'appropriation. (Brousseau 1986)

²² Traducción del original : Le contrat est spécifique des connaissances en jeu et donc nécessairement périssable : les connaissances et même les savoirs évoluent et se transforment, tandis que le contrat pédagogique a tendance à être stable. Les moments de rupture permettent la mise en évidence expérimentale du contrat didactique. (Brousseau 1988a, p. 322)

²³En referencia a la obra de teatro "Topaze" del escritor Marcel Pagnol en la que un profesor añade cada vez más información para que el alumno no cometa faltas de ortografía hasta el punto de caricaturizar: "des Sheep estaban cazando juntos...".

P₂ (propiedad de ortogonalidad): el eje de simetría de una figura es ortogonal al segmento que une dos puntos simétricos.

P₃ (propiedad de incidencia): sean (A, A') y (B, B') dos pares de puntos simétricos: el punto de intersección de las rectas (A, B) y (A', B'), si existe, está en el eje de simetría

La elección de los instrumentos (regla no graduada y escuadra) debe impedir el uso de:

P₁ (propiedad del medio ambiente) El eje de simetría de una figura pasa por el punto medio de todos los segmentos que unen cualquier par de puntos simétricos.

El enseñante quiere un proceso de trazado geométrico (que no es una construcción matemática en el sentido de Félix Klein 1846²⁴), es decir que el docente no trabaja sobre el objeto material sino sobre el objeto geométrico que llamamos la figura. Porque es un problema teórico, el control del trazado se basa en las propiedades geométricas P₂ y P₃ (aquí) de la figura geométrica.

En los párrafos anteriores (primer grupo de figuras) los problemas fueron resueltos por P₁. La implementación de esta propiedad fue exitosa. Para los alumnos (al menos del grupo 3), se trata de un problema práctico y material: encontrar los puntos medios de los dos segmentos paralelos. Se busca por tanto realizar el trazado material del eje de simetría mediante la medida y el control se puede realizar con referencia al plegado, como de hecho sugiere un alumno, o comprobando la precisión de las mediciones.

El discurso sobre un dibujo es siempre ambiguo: puede relacionarse con la figura geométrica (que el dibujo representa) o con el dibujo mismo. Los discursos del enseñante y de los alumnos no escapan a esta ambigüedad.

La enseñante busca producir una respuesta que sea efectivamente la que corresponde a la implementación de las propiedades P₂ y P₃: debe descalificar las respuestas basadas en P₁. Por ello, en diversos intentos (9, 13, 17, 19, 36, 37, 41, 44, 46, 48, et 77), ella se refiere a la precisión para poner en duda las respuestas basadas en P₁, después (77) ¡Para concluir!

Se produce aquí una situación paradójica: la enseñante querría que la precisión fuera geométrica y ella no puede dar la solución. Para descalificar las soluciones propuestas por el grupo 3, utiliza un argumento de precisión, lo que tranquiliza a los estudiantes en la problemática de la medida: para ellas y ellos, una mejor precisión requiere un mayor cuidado en la operación material de medida (ver Grupo 3 y François). Este argumento se convierte en un argumento autorizado.

La enseñante, al buscar que los estudiantes produzcan la respuesta que ella desea, transforma la situación. La primera etapa consiste en forzar la producción de un elemento de respuesta y el porqué: responde de acuerdo con las expectativas de la enseñante. No hay explicación de por qué es cierto o falso.

Sin embargo, podemos referirnos al efecto Topaze: la respuesta ha sido producida como solución al problema inicial, con el fin de ser responsables de los problemas; el profesor se vio obligado a restringir las condiciones para producir la respuesta (reduciendo la incertidumbre del alumno) hasta obtener la respuesta esperada. El significado de esta respuesta es imposible, puesto que los elementos sobrepasan los límites.

Las condiciones impuestas por el investigador (elección de los instrumentos disponibles) no eran suficientes para que los estudiantes modificaran su procedimiento de base, coherente en buscar a través de la medida, la mitad de los segmentos: el procedimiento básico podría funcionar a un costo menor mediante la adaptación de los instrumentos.

²⁴Ver Apéndice I.

2.3. Docencia e incumplimientos de contrato

Cualquier enseñanza de un nuevo objeto de conocimiento provoca incumplimientos de contrato con respecto a antiguos objetos de conocimiento y la renegociación de nuevos contratos: el aprendizaje del alumno se produce al precio de estas rupturas que el profesor debe negociar.

Ejemplo 4. Estado de los dibujos en la enseñanza de la geometría.

En la escuela primaria, los estudiantes aprenden a utilizar instrumentos de dibujo para desarrollar habilidades gráficas. Los dibujos geométricos (llamados triángulos, rectángulos, etc.) son entonces calcos materiales sobre los que operamos y cuyas medidas verificamos: son los objetos estudiados.

En la escuela media y más particularmente a partir del cuarto grado (alumnos de 13 a 14 años) tendrá que haber un incumplimiento de este primer contrato: el estudiante deberá presentar pruebas no sobre el dibujo en sí sino sobre los objetos abstractos e ideales (también llamados triángulos, rectángulos, etc.) que representa el dibujo material (nuevo contrato didáctico sobre el dibujo). El ejemplo 3 es un ejemplo de la (difícil) negociación de este nuevo contrato.

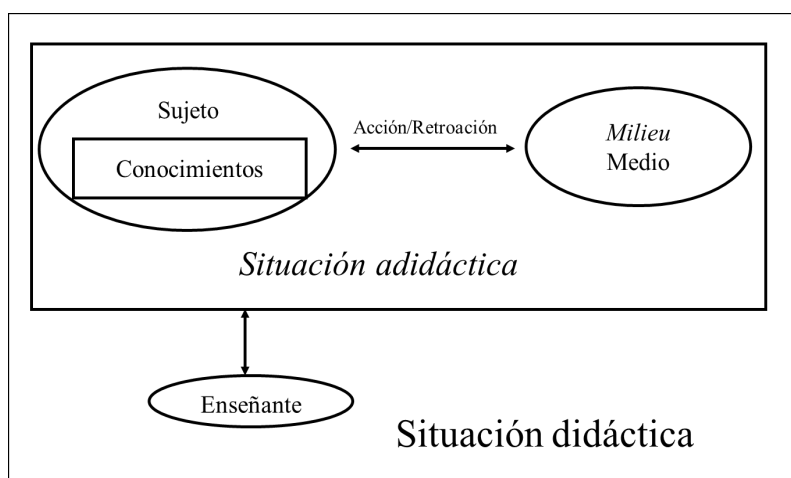
Considere la siguiente pregunta: "¿comprobar que los segmentos AB y CD sean iguales"? En el primer contrato, el alumno deberá realizar un dibujo cuidadoso y con su compás y regla graduada deberá realizar la verificación sobre los segmentos dibujados. En el segundo, tendrá que buscar propiedades geométricas de la "figura" (que representa el dibujo) para establecer la prueba de igualdad.

Este cambio de contrato didáctico, fuente de dificultades e incluso de fracaso para muchos estudiantes, es *necesario para el aprendizaje de la demostración en geometría*. Se puede caracterizar de la siguiente manera: de la eficacia exigida al estudiante-practicante (la geometría como lugar de calco *preciso* de los dibujos), se pasa al rigor del estudiante-teórico (la geometría como lugar de estudio racional de las figuras).

3. Situación didáctica

En referencia al punto de vista adoptado sobre el aprendizaje, el aprendizaje del alumno se modeliza mediante una situación adidáctica inmersa en la situación didáctica gestionada por el profesor (Figura 2).

Figura 2. Situación didáctica y situación adidáctica



2

Medio (Brousseau 1990): sistema antagónico (del alumno) en la situación didáctica que modifica los estados de conocimiento de una manera no controlada por el estudiante. El entorno se comporta como un sistema no finalizado. Tiene un carácter relativo.

Desempeña un papel central en el aprendizaje, como causa de adaptaciones y en la enseñanza como referente y objeto epistemológico. (Brousseau 1988a, p. 321).²⁵

Medio (*milieu*) (Chevallard 1992): los elementos que constituyen el medio son aquellos que subjetivamente, es decir para los sujetos de la institución, parecen evidentes, transparentes y no problemáticos.

El enseñante buscará proponer una situación tal que los alumnos construyan su relación con el objeto de conocimiento o modifiquen esta relación como respuesta a las exigencias del medio y no al deseo del enseñante. Semejante situación es aquella *en la que lo que se hace tiene un carácter de necesidad en relación con obligaciones que no son arbitrarias ni didácticas, sino del orden del saber*. El profesor debe lograr que el alumno elimine los presupuestos didácticos de la situación, de modo que la resolución del problema sea para el alumno independiente del deseo del profesor: la *devolución* que el profesor busca lograr para que el alumno aprenda es, por tanto, la de una *situación no didáctica* (sobre el modelo de la situación de la bicicleta).

Hay un desplazamiento en la responsabilidad con relación al saber del profesor al alumno: el alumno en una situación adidáctica se vuelve responsable de su relación con el saber.

Es importante comprender en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau las distinciones entre situaciones *didácticas*, *adidáctica* y *no didáctica* : una situación no didáctica específica de un saber es una situación sin *propósito didáctico* (oficial) para la cual la relación con el saber se desarrolla como un modo de acción económico (cf. la bicicleta); una situación pedagógica es una situación con finalidad didáctica (es decir organizada por el enseñante) en la cual, el sujeto responde *como si* la situación fuera no didáctica (es decir que el sujeto responde independientemente de las expectativas del enseñante): *hay entonces elementos en la situación didáctica que forman un medio adidáctico antagonista al alumno* .

El aprendizaje es una *modificación* de la relación con el conocimiento producido por el propio alumno, que el enseñante sólo puede provocar mediante la elección (voluntaria o involuntaria) de valores. de *variables* de la situación educativa: *variables didácticas*.

La modelización en términos de situación adidáctica permite la concepción de una ingeniería didáctica donde se han “calculado” las condiciones para provocar (en el mejor de los casos) el aprendizaje del alumno (ver la situación “Ampliación del puzle” más adelante).

3.1. ¿Cuáles son las condiciones para que una situación sea vivida como adidáctica?

Como mínimo, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- La persona puede plantearse una respuesta, pero esta respuesta inicial (*procedimiento básico que relaciona conocimientos y conocimientos previos*) no es la que queremos enseñar: si la respuesta no es coherente, no estará en la situación.

Sin una estrategia básica el alumno no entiende el juego, aunque las instrucciones sean claras. (Brousseau 1988b, p.61)²⁶

- este procedimiento básico debe resultar muy rápidamente insuficiente o ineficaz, de modo que se vea obligado a realizar adaptaciones y modificaciones en su sistema de conocimientos. Existe incertidumbre por parte del alumno respecto de las decisiones que tomar;

²⁵ Traducción del original: Il joue un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et dans l'enseignement comme référence et objet épistémologique. (Brousseau 1988a, p. 321).

²⁶ Traducción del original: L'apprentissage consistera à changer de stratégie et à changer les connaissances qui y sont associées. (Brousseau 1988, p.61)

- los conocimientos vistos son *a priori* necesarios para pasar de la estrategia básica a la estrategia óptima
- existe un medio de la validación: el medio permite la retroacción
- el estudiante puede empezar de nuevo.

El aprendizaje consistirá en cambiar estrategias y cambiar los conocimientos asociados a ellas. (Brousseau 1988b, p.61)²⁷

3.2. ¿Qué elementos de la situación modelizamos en el medio?

El medio designa en la situación didáctica el sistema antagonista al alumno, es decir lo que modifica los estados de conocimiento de una manera no controlada por el estudiante: el medio se comporta como un sistema no finalizado. Tiene un carácter relativo. (Brousseau 1998)

El esquema general de las interacciones entre niños y adolescentes en una situación educativa es una célula prevista para una situación de aprendizaje no didáctica (ver Figura 1)

Las interacciones son significativas en la capacidad del sistema (sujeto ↔ medio) para reequilibrar el conjunto de perturbaciones, y a evolucionar si estas perturbaciones son necesarias.

Por problema entendemos el resultado de una perturbación en el equilibrio de la relación sujeto/entorno (...) pero esto sólo tiene sentido si la perturbación puede ser percibida por el sujeto y el entorno. Una perturbación que el sujeto no pueda percibir, o de la que el entorno no pueda dar cuenta de forma perceptible, no puede ser fuente de problemas. (Balacheff 1995, p. 226)²⁸

Llamamos *retroacción* a una información particular proporcionada por el medio: es decir, a la información que es recibida por el estudiante como una sanción, positiva o negativa, relativa a su acción y que le permite ajustar esta acción, aceptar o rechazar una hipótesis, elegir entre varias soluciones.

Esto significa que los elementos modelizados en el medio no son están forzados necesariamente por los materiales (puede ser conocimientos del sujeto antiguos, estables y evidentes), las acciones del sujeto pueden ser acciones “mentales”, no visibles.

La evolución de la situación educativa en la que se encuentra un estudiante, es una elevación que puede leerse como una sucesión de estados entre estados permitidos o posibles. El medio modelizado en la situación adidáctica es lo que el estudiante *no controla*, pero que modifica sus conocimientos. Los procedimientos de los alumnos son como el *observador* de la evolución de los conocimientos del alumno.

Ante una situación adidáctica hay necesariamente incertidumbre.

Si no hay incertidumbre (en el sentido de posibles elecciones relevantes) sobre los estados terminales de la situación, es porque el sujeto conoce la respuesta, que él *sabe*: podemos decir que entonces la situación está controlada por el alumno. (y ya no hay medio en relación a esta situación adidáctica).

El conocimiento *reduce* la incertidumbre del tema eliminando las posibilidades de elección.

²⁷ Traducción del original : L'apprentissage consistera à changer de stratégie et à changer les connaissances qui y sont associées. (Brousseau 1988, p. 61)

²⁸ Traducción del original : Nous désignons par problème le résultat d'une perturbation de l'équilibre de la relation sujet / milieu (...) mais cela n'a de sens que si cette perturbation peut être attestée par le sujet et par le milieu. Une perturbation que le sujet ne pourrait percevoir, ou dont le milieu ne pourrait rendre compte de façon discernable ne pourra être source de problèmes. (Balacheff 1995, p. 226)

Las preguntas que nos permiten plantearnos el sistema sujeto/medio (*inseparable de la noción de situación educativa*) son, por tanto, las siguientes:

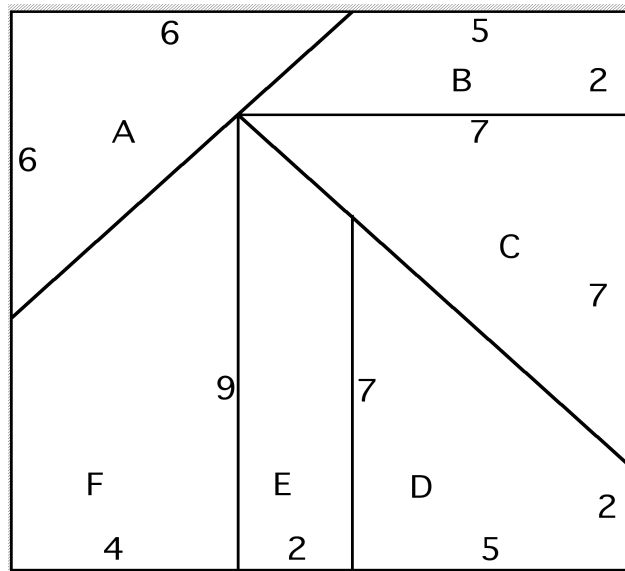
¿Qué puede, en una situación didáctica, provocar (*a priori*) la modificación de los estados de conocimiento de la persona? ¿Debo explicárselos (*a posteriori*)?

3.3. Ejemplo. Análisis *a priori* de una situación didáctica “Ampliación del puzle” (Según G. y N. Brousseau 1987)

Material

- 6 a 8 cartulinas rectangulares de 20 cm × 15 cm con el mismo rompecabezas dibujado (ver Figura 3).

Figura 3. Representación del rompecabezas



Instrucción: Los números de esta representación indican las medidas en cm de determinados lados de las piezas del rompecabezas.

- hojas de papel cuadriculado
- un doble decímetro por alumno.

Consigna

“Aquí hay algunos enigmas. Fabricareis otros similares, más grandes que los modelos, respetando la siguiente regla: el segmento que mide 4 cm en el modelo, debe medir 7 cm en vuestra reproducción.

Tengo un rompecabezas para mi equipo. Cada alumno tendrá que realizar una o dos piezas. Cuando hayas terminado, deberías poder reconstruir las mismas figuras que con el modelo.»

Proceso

Las piezas se dividen entre los equipos de 4 o 5. Después de una breve discusión en equipo, se separan para crear su(s) pieza(s).

El profesor muestra una representación ampliada del rompecabezas completo en la pizarra.

Análisis *a priori*

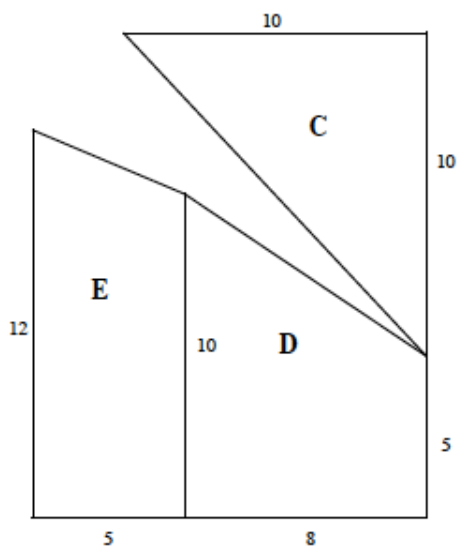
Dos estrategias que no superan las estrategias de inicio

Estas dos estrategias se basan en el conocimiento de los números naturales y las ampliaciones: para ampliar sumamos o multiplicamos por un número entero. *El sentido de multiplicación por un número entero es el de suma repetida.*

Estrategia 1: 'sumar 3 a las medidas de longitud de los "ángulos rectos"'

Se conserva el número de rincones de cada pieza, así como los ángulos rectos: sumamos 3 a las medidas de los lados de los ángulos rectos.

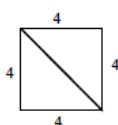
Resultado de este procedimiento sobre las piezas “ampliadas” C, D y E del rompecabezas:



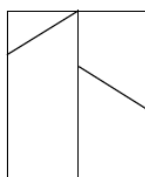
Hay retroalimentación del medio material: las piezas no se acoplan de forma burda, es decir que el no acoplamiento de las piezas es indiscutiblemente perceptible.

- *Ámbito de validez del procedimiento 1.*

El dominio de validez en el sentido estricto de este procedimiento (es decir, lo que respeta la forma geométrica de las piezas) es el conjunto de rompecabezas donde todas las piezas están compuestas por triángulos rectángulos isósceles de lados 4, por ejemplo:

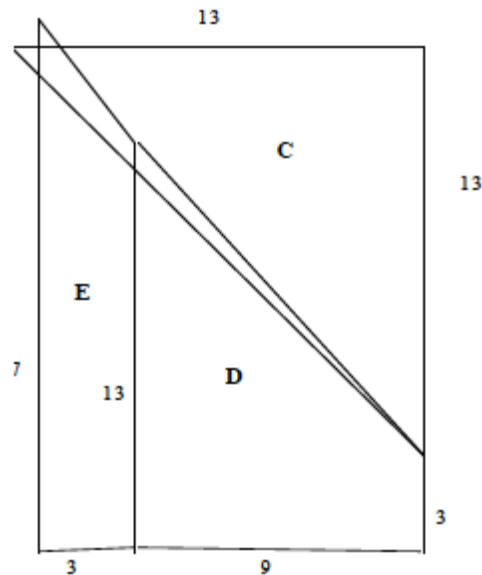


Si definimos el dominio de validez en relación con el medio material, y por lo tanto consideramos válida la ampliación si las piezas del rompecabezas encajan bien, entonces el dominio de validez es más amplio, incluye también el rompecabezas en forma de “rectángulo” resultante del ajuste de piezas en “ángulo recto” (además de un lado oblicuo) y de manera que el rectángulo tenga sus lados subdivididos por el mismo número. Al contrario, la misma cantidad de múltiplos 3 a cada lado del cuadrado.



Estrategia 2: “Multiplicar cada medida por 2 y restar 1”

Resultado de este procedimiento sobre las piezas “ampliadas” C, D y E del rompecabezas:



Hay retroalimentación del medio material: las piezas no se acoplan, pero para este procedimiento, esta mala disposición es *cuestionable a nivel perceptivo*. El rompecabezas está casi bien y los alumnos pueden pensar que el mal acople se debe a un corte torpe. Puede ser entonces necesario recurrir a una retroacción de otro tipo, basada en las relaciones entre las medidas del rompecabezas inicial y las medidas del rompecabezas “imagen”.

Por ejemplo, para las piezas E, D y C tenemos en el rompecabezas inicial la relación que caracteriza su disposición: $2 + 5 = 7$

¿Qué pasa con el rompecabezas de la “imagen”?

$$2 \rightarrow 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$5 \rightarrow 5 \times 2 - 1 = 9$$

$$7 \rightarrow 7 \times 2 - 1 = 13$$

Y la desigualdad $3 + 9 \neq 13$ acredita el no acople de las piezas en el rompecabezas “imagen” de este procedimiento y que permite rechazarlo sin ambigüedad.

Conocimiento buscado en esta situación, por el fracaso de estas estrategias

El significado de multiplicación por un número entero es el de la suma reiterada. El significado de la multiplicación *por un racional* debe construirse contra este primer significado (fundamentalmente por la necesaria anterioridad de la construcción de los números enteros sobre la de los racionales).

El sentido de esta situación es que *los alumnos rechazan explícitamente los procedimientos que involucran números enteros*. (a menudo hablamos de modelo aditivo para hablar de estos procedimientos de ampliación) y *al menos implícitamente construyen una regla de rechazo* que podemos formular de la siguiente manera: “si $a + b = c$ en el rompecabezas inicial, entonces $f(c) = f(a + b) = f(a) + f(b)$ en el rompecabezas ampliado” (¡de lo contrario, las piezas no encajan!).

El rechazo de este modelo aditivo se vuelve entonces constitutivo del significado de la multiplicación por un número racional. La aplicación lineal, solución a este problema, es $7/4$, es decir una aplicación-racional.

Este primer significado de la multiplicación de números por un racional será, tras un largo proceso de aprendizaje (Brousseau & Brousseau 1987), el de la imagen de un racional como medida mediante una aplicación racional-lineal.

¿Se puede vivir esta situación como adidáctica?

- El o la enseñante tiene la posibilidad de limitar sus intervenciones a intervenciones neutrales en relación con los conocimientos que están en juego en esta situación: puede simplemente alentar y anotar los hechos, sin exigencias particulares.
- Hay un procedimiento de base que se aplica al conocimiento de los números enteros: en efecto, el conocimiento de los números enteros es fundamental en relación con cualquier conocimiento de otros números, es decir, que la construcción de cualquier conjunto de números (como los racionales, por ejemplo) se basa en la existencia del conjunto de números enteros. Este procedimiento básico utiliza operaciones definidas en números enteros.
- Existe un medio para la validación del procedimiento, es decir la posibilidad de que los estudiantes sepan si su procedimiento es correcto o no sin que intervenga el profesor: el medio está formado, para cada alumno, por la disposición de los trozos “ampliados”, las piezas del rompecabezas producidas de forma independiente por él y sus compañeros (fase 2).
- Este procedimiento básico es insuficiente, ya que el proceso que tiene que intervenir, implica necesariamente una justificación: el resultado del procedimiento básico (explicado durante la fase 1) es que las piezas no conectan en el momento en que los miembros cooperantes del equipo se reagrupan (fase 3).

4. Variables didácticas: definiciones y ejemplos

Las siguientes definiciones son las de Brousseau dadas en dos textos (ya antiguos, 1982a, 1982b) de la segunda escuela de verano.

Se puede generar un campo de problemas a partir de una situación modificando los valores de ciertas variables que, a su vez, hacen que cambien las características de las estrategias de solución (coste, validez, complejidad, etc.) [...] Sólo las modificaciones que afectan la jerarquía de las estrategias, son tenidas en cuenta (variables pertinentes) y entre las variables pertinentes, son particularmente interesantes aquellas que un profesor puede manipular: estas son las *variables didácticas*. (Brousseau 1982a)²⁹

Estas variables son relevantes en una determinada edad en la medida en que controlan diferentes comportamientos. Serán variables didácticas en la medida en que actuando sobre ellas podamos provocar adaptaciones y regulaciones: aprendizaje. (Brousseau 1982b)³⁰

Por tanto, Brousseau subraya la importancia de tener en cuenta, en cualquier situación, variables cuyos cambios de valores pueden provocar (o no) un aprendizaje. En el texto (Brousseau 1982 b), analiza así mismo, una situación *fundamental* de sustracción (ver en el párrafo 7, la noción de situación fundamental).

Ejemplo. Variables didácticas de la situación “Ampliando el rompecabezas”

$$V_1 = (n, p)$$

²⁹ Traducción del original: Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité...etc.) [...] Seules les Modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont considérées (variables pertinentes) et pour les variables pertinentes, celles qui peuvent manipuler un enseignant sont particulièrement intéressantes : ce sont les *variables didactiques* . (Brousseau 1982a)

³⁰ Traducción del original: Ces variables sont pertinentes à un âge qui n'est pas mesuré ou qui commande des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages. (Brousseau 1982b)

siendo n y p los números que definen la relación de proporcionalidad.

Los valores pertinentes son: p múltiplo de n , $p = kn$ (k entero); $p = kn + n/2$ (k entero y n par); p/n decimal (pero no “medio” entero); p/n racional no decimal. Por ejemplo, aquí hay pares de números enteros que ilustran cada una de las categorías: (4, 8); (4, 6); (4, 7); (3, 7).

Una ampliación que va del 4 al 8 implica la suma $4 + 4$. El alumno se queda en el modelo aditivo y de números enteros.

Un aumento de 4 a 6 a menudo se analiza como “ x más la mitad de x ”. Por lo tanto, tenemos un modelo intermedio entre el modelo aditivo y el modelo lineal, más cercano al modelo aditivo debido al estatus particular de “la mitad”, especialmente porque en este caso la mitad también es un número entero.

Una ampliación de 4 a 7 no permite un paso simple, aunque es posible utilizar divisiones por 2: [la ampliación de 4 a 7 podría interpretarse como “2 por x menos la mitad de la mitad de x ” o “ x más la mitad de x más la mitad de la mitad de x ”].

Hay un salto informacional (ver más abajo) cuando es necesario “pasar de 3 a 7”, porque no es posible ninguna una relación de tipo aditivo. Nos vemos obligados a dejar el aditivo y dejar los números enteros.

Los valores de V_1 ponen en juego el sentido de la multiplicación por un racional, permiten o no la transición de la multiplicación por un número entero (modelo aditivo, suma repetida) a la multiplicación por un racional (modelo multiplicativo, imagen por una aplicación lineal).

$V_2 =$ organización de las interacciones entre alumnos

Los valores de esta variable son una *tupla* que describe los diferentes tipos de fases a lo largo del tiempo: trabajo individual, cooperación, acuerdo, confrontación, etc. En la situación del rompecabezas, se describe mediante: (consulta, trabajo individual, confrontación). La implementación de las dos últimas fases permite una verdadera retroacción con el medio sobre la estrategia decidida en la primera fase. Si reducimos las fases a una (cooperación para construir el rompecabezas ampliado), le quitamos al medio su propiedad de medio de validación y a la situación su carácter adidáctico.

$V_3 =$ configuración del rompecabezas

Los valores también son n -tuplas que describen las respectivas subdivisiones de los lados (por el mismo número o no), las medidas de las partes, etc. Los valores pertinentes de esta variable son aquellos que conciernen al dominio de validez de las estrategias básicas. Aquí, las medidas se eligen de tal manera que el procedimiento de “sumar 3” (que suponemos que será la estrategia inicial para la gran mayoría de los alumnos) conduzca a la construcción de piezas no acopladas de una manera perceptualmente obvia.

- V_1 está en el lado del *saber* en juego (la multiplicación por un racional no decimal, no como imagen por una aplicación lineal).
- V_2 es *constitutivo del carácter educativo* de la situación.
- La V_3 está *vinculada al conocimiento de los alumnos*, ya que se basa en las hipótesis relativas a sus estrategias básicas.

Otras “variables” o restricciones parecen influir en la situación. Por ejemplo, los materiales disponibles para los estudiantes, papel cuadriculado y regla graduada. Se integran en la situación para facilitar la construcción de piezas y medir longitudes. Por tanto, están vinculados a la medida. ¿Se le va a dar el estatus de variable didáctica a este elemento de la situación? Para responder, nos interesa volver al saber en juego, es decir, la transición del modelo aditivo al modelo lineal. La medida no es una cuestión de saber en esta situación. Estos elementos pueden

intervenir en la situación, pero formulamos la hipótesis (que puede argumentarse) de que su presencia o ausencia no la cambia fundamentalmente.

5. Analizar el aprendizaje en una situación de enseñanza “ordinaria”

La noción de situación adidáctica es también un modelo para analizar el aprendizaje de los alumnos en una *situación de enseñanza ordinaria*. Este modelo es un medio para plantearnos las siguientes preguntas: ¿en qué situación(es) educativa (s) se puede(n) encontrar el(los) alumno(s)? Lo que equivale a preguntar: ¿qué pueden aprender en esta situación de enseñanza (búsqueda de medios posibles)? ¿en relación con qué saber?

Hay fases adidácticas en toda enseñanza, generalmente fuera del control del profesor. Chevallard introdujo la noción de *tiempo didáctico* para designar el tiempo específico de la institución educativa, un tiempo marcado por el desfase entre el momento de la enseñanza y el momento del aprendizaje: hay en la enseñanza una ficción de un tiempo didáctico homogéneo. En su tesis (1992), Alain Mercier muestra que la introducción oficial de nuevos objetos de saber modifica la relación con los objetos que ya están ahí, naturalizados, transparentes. Hay entonces una devolución al alumno de la responsabilidad en relación con estos objetos de saber naturalizados: en tanto que objetos antiguos, el estudiante tiene la responsabilidad de saberlos. Esta puede ser entonces una fase adidáctica para estos objetos antiguos (viejos en comparación con el momento de su enseñanza) y por tanto un momento de aprendizaje a posteriori.

6. Diferentes estados del saber, diferentes tipos de situaciones adidácticas

Refiriéndose a la actividad del matemático, Régine Douady (1986) habla de dialéctica *útil-objeto* para designar el proceso de cambio de estatus de los conceptos, proceso que interviene esencialmente en la actividad del alumno ante un problema: distingue para un mismo concepto tres estatus, el de objeto, el de instrumentos (útiles) implícitos y el de instrumentos(útiles) explícitos.

Brousseau distingue tres funciones (y por tanto tres estatus) del conocimiento: acción, formulación y validación. Estos son los tipos de *situaciones* que permiten caracterizar las funciones de un objeto de saber.

En las situaciones (adidácticas) de acción, un sujeto (el alumno) desarrolla conocimientos implícitos como forma de acción en un medio (para la acción): este medio le proporciona información y retroalimentación a cambio de sus acciones.

En las situaciones (adidácticas) de formulación, el *propio sujeto (el alumno) explicita* el modelo implícito de sus acciones. Para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que esta formulación sea ella misma una forma de acción sobre un medio que le proporcione informaciones y retroalimentaciones: esta formulación debe permitir obtener o hacer que otros obtengan un resultado. Las situaciones de comunicación entre grupos de alumnos pueden ser un ejemplo de este tipo de situaciones.

En conclusión, en las situaciones (adidácticas) de validación, la validación empírica proveniente del medio se vuelve insuficiente: el sujeto, para convencer a un oponente, debe desarrollar pruebas intelectuales. Por ejemplo, en matemáticas, las declaraciones explícitas sobre la situación se convierten en aserciones cuya exactitud y pertinencia deben demostrarse según reglas comunes para convertirlo en un teorema reconocido por todos.

7. Situación fundamental

7.1. Introducción

En las fases adidácticas (modelizadas por una situación adidáctica), el alumno tiene que resolver un problema del cual, él es responsable. Sin embargo, la cuestión central es la siguiente: ¿cómo garantizar que el problema planteado sea realmente *pertinente*? en relación al saber? ¿Qué relaciones tiene el problema planteado con *la razón de ser* del objeto de saber, objetivo de enseñanza? ¿Qué problema reconocéis en vuestro “saber-hacer”?

Éstas son cuestiones epistemológicas.

Hipótesis epistemológica

Admitiremos también que para todo conocimiento existe una familia de situaciones susceptibles de darle un sentido correcto. (Brousseau 1986a, p. 316)³¹

Correcto en relación a la historia de este concepto, en relación al contexto social, en relación a la comunidad científica.

Para cualquier conocimiento, es posible construir un juego formal, *comunicable sin utilizar este conocimiento*,³² y para el cual, sin embargo, determina la estrategia óptima. (Brousseau 1988a, pp. 314–315)³³

Una *situación fundamental* del saber es un *modelo* de una familia de situaciones *no didácticas* específicas del saber buscado.

Modelizar una situación de enseñanza implica producir un juego específico de conocimientos específicos [...]. (Brousseau 1986a, p. 334)³⁴

Este modelo es fundamental:

-En cuanto al conocimiento: el juego debe ser tal que el conocimiento aparezca en la forma elegida, como la solución, o como el medio de establecer la estrategia óptima. [...].

-En cuanto a la actividad de enseñanza: el 'juego' debe permitir representar todas las situaciones observadas en clase [...] incluso las menos 'satisfactorias', siempre que consigan que los alumnos aprendan una forma de conocimiento objetivo. Debe ser capaz de generar todas las variantes, incluso las más degeneradas. Éstas se obtendrán eligiendo ciertas variables características de la situación. (Brousseau 1986a, pp. 334-335)³⁵

Una situación fundamental debe permitir al menos (jugando un poco con los valores de las variables didácticas):

³¹ Traducción del original: Nous admettrons aussi qu'il existe pour toute connaissance une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct. (Brousseau 1986a, p. 316)

³² Es la autora quien enfatiza

³³ Traducción del original: Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, *communicable sans utiliser cette connaissance*, et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale. (Brousseau 1988a, pp. 314–315)

³⁴ Traducción del original: Modéliser une situation d'enseignement consiste à produire un jeu spécifique du savoir visé [...] (Brousseau 1986a, p. 334)

³⁵ Traducción del original: - Au regard de la connaissance : le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale. [...]

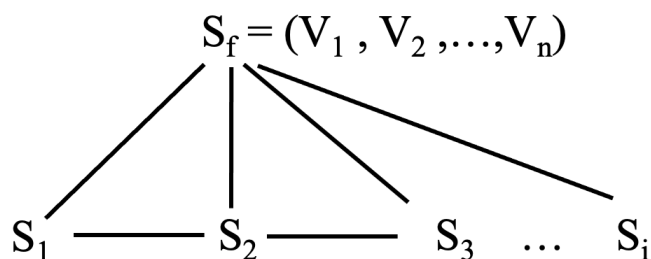
- Au regard de l'activité d'enseignement : le 'jeu' doit permettre de représenter toutes les situations observées dans des classes [...] même les moins 'satisfaisantes', dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé. Il doit pouvoir engendrer toutes les variantes même les plus dégénérées. Elles seront obtenues par le choix de certaines variables caractéristiques de cette situation. (Brousseau 1986a, pp. 334-335)

- una génesis efectiva del saber, es decir una génesis de situaciones representativas de los diferentes significados del saber (de las diferentes ocasiones de utilización de este conocimiento)
- una “relectura” de esta génesis siguiendo la lógica de la organización del saber.

Una situación “fundamental” puede representarse por un conjunto finito de variables, pertinentes para el significado del saber, objetivo de enseñanza. Por el contrario, al dar valores a estas variables generamos situaciones particulares dando al conocimiento un significado particular.

El siguiente esquema (Figura 4) ilustra nuestro propósito:

Figura 4. Situación fundamental S_f



7.2. Ejemplo - Análisis *a priori* de una situación fundamental: “El juego de la carrera hacia n ” o ¿Quién dirá 20?³⁶ (Según Brousseau 1978)

Juego 1. “La carrera por los 20”

Reglas del juego

El juego presenta a dos oponentes que se turnan para decir un número. Se trata de que cada oponente consiga decir primero 20.

Quien juega primero tiene derecho a decir 1 o 2. Sólo se puede decir un número, si se obtiene sumando 1 o 2 al número que acaba de decir el oponente.

Hacer jugar algunas partidas y formular una estrategia ganadora (es decir, que te permite ganar haga lo que haga el oponente).

Respuesta: Gana el que juega primero diciendo 2, luego 5, 8, 11, 14, 17, 20 (que él o ella pueden decir, diga lo que diga el oponente).

Comentario: muy rápidamente “sabemos” que quien dice 17 ha ganado: la carrera hacia el 20 se convierte en la carrera hacia el 17. Por tanto, podemos reiterar el razonamiento. De hecho, la secuencia ganadora se encuentra “bajando”: 20, 17, 14 etc.

Los juegos siguientes se juegan con los mismos equipos contrarios.

Juego 2. “La carrera hacia los 27” (“¿Quién dirá 27?”)

Se trata de poder decir 27 primero. La persona que comienza a jugar tiene derecho a decir 1, 2, 3 o 4. Sólo se puede decir un número, si se obtiene sumando un número distinto de cero menor o igual a 4, al número que acaba de decir el oponente.

Formule una estrategia ganadora.

Para llegar a decir 27 primero, ¿qué número debes decir justo antes?

(Razonamiento análogo al 17 en la carrera hacia el 20) Si digo 26, mi oponente puede sumar 1 y decir 27; si digo 25, mi oponente puede sumar 2 y decir 27; si digo 24, mi oponente puede sumar 3 y decir 27; si digo 23, mi oponente puede sumar 4 y decir 27; si digo 22, lo que agregue mi oponente (1, 2, 3 o 4), sumaré el complemento a

³⁶ Denominación en español de este juego, en diversas traducciones anteriores.

5: 1+4, 2+3, ...: por lo tanto diré 27 primero.

Estrategia ganadora: gana el que juega primero diciendo 2. Secuencia ganadora: 27, 22, 17, 12, 7, 2.

Juego 3. “La carrera a 24” (“¿Quién dirá 24?”)

Se trata de poder decir primero 24. La persona que comienza a jugar tiene derecho a decir un entero no nulo inferior o igual a 3. Sólo se puede decir un número, si se obtiene sumando un número distinto de cero inferior o igual a 3 al número que acaba de decir el oponente.

¿Podrás ganar usando la estrategia que se te ocurrió después del segundo juego?

Respuesta: No, **el ganador es el que juega segundo** diciendo 4 ¡que nunca se puede decir primero!

Secuencia ganadora: 24, 20, 16, 12, 8, 4.

Juego 4. “La carrera hacia el 5929” (“¿Quién dirá 5929?”)

Se trata de poder decir el primero 5929. Quien juegue primero tiene derecho a decir un número entero distinto de cero menor o igual a 2. Un número sólo se puede decir si se obtiene sumando un número menor o igual a 2 al número que acaba de decir el oponente.

Respuesta: **El juego se convierte en: ¿quién gana? ¿deberías empezar o jugar segundo? ¿diciendo qué número?**

Si nos ponemos a razonar como en los juegos anteriores, buscamos el último número que debemos decir para decir 5929 primero. Este último número es 5926 que está a la distancia “correcta” de 5929, es decir a distancia 3: si mi oponente suma 1, le sumo 2 (y digo el primero 5929) - si suma 2, le sumo 1 (y sigo diciendo el primero 5929). El juego de carrera hacia 5929 se convierte en el juego de carreras hacia 5926.

5929, 5926, 5923...: esta lista se obtiene mediante resta repetida de 3.

Se vuelve muy costoso encontrar toda la secuencia ganadora: para ahorrar dinero, solo buscaremos algunos de los números enteros de la lista ganadora para llegar lo más rápido posible al número entero más pequeño. Si restamos de 5929, 1000 por 3, obtenemos un número entero de la lista: 2929. Para encontrar un número entero de la lista menor que 1000, podemos restarle a 2929, 800 por 3 por ejemplo y obtenemos 529. Así hasta 1.

Ejemplo: $5929 - 3 \times 1000 - 3 \times 800 - 3 \times 100 - 3 \times 70 - 3 \times 6 = 1$

De ahí la respuesta: gana el que juega primero diciendo 1.

Una situación general de las carreras hacia n (¿Quién dirá n ?)

El juego presenta a dos oponentes que se turnan para decir un número. Se trata de que cada oponente consiga decir el primero n .

Quien vaya primero tiene derecho a decir un número entero *distinto de cero* menor que p . Sólo podemos decir un número si se obtiene sumando un número entero distinto de cero menor que p al número que acaba de decir el oponente [n y p son números naturales con $n > p$].

Esta situación genera los 4 juegos descritos anteriormente dándole valores a las variables n y p .

¿Qué saber matemático proporciona una herramienta de resolución óptima y económica para juegos de la carrera a n o de ¿quién dirá n ?

La división euclidiana de n por el número entero $(p+1)$: $n = (p+1)q + r$ con $0 \leq r < (p+1)$ ³⁷.

El “sentido” de esta división (en los juegos de la carrera hacia n) es la resta reiterada de $(p+1)$ hacia n : el número de restas reiteradas para llegar al número entero más pequeño es el cociente de esta división, el número entero más pequeño al que llegamos, es el resto. El número $(p+1)$ que restamos repetidamente es el divisor.

Para el juego 1, dividir 20 entre 3 da el resto 2 y para llegar a 2 hay que restar 6 por 3.

Para el juego 4, dividir 5929 entre 3 da 1 y el número de restas de 3 es $1000 + 800 + 100 + 70 + 6$, es decir, 1976.

³⁷ Este punto es enteramente discutible: ¿no sería más bien una situación fundamental de congruencia módulo $(p+1)$? Actualmente investigando...

¿Cuáles podrían ser las variables didácticas del problema de la carrera hacia n para el aprendizaje de este saber matemático?

V₁: n múltiplo de $(p+1)$ o no

Si n no es múltiplo de $(p+1)$, debemos empezar: la secuencia ganadora es una serie aritmética de razón $(p+1)$ y de primer término el resto.

Si n es múltiplo de $(p+1)$, no deberías empezar: la secuencia ganadora es una serie aritmética de la razón $(p+1)$ [paso de los juegos 1, 2 al juego 3].

V₂ (tamaño de n en relación con p): n pequeño en comparación con p [n grande en comparación con p]

Si n es pequeño comparado con p , es posible escribir **todos** los números enteros de la secuencia ganadora: ¡la estrategia de resta repetida de $(p+1)$ es una estrategia óptima que compite con la división euclidiana que no da la lista!

Si n es muy grande en relación con p , la estrategia de restas repetidas se vuelve muy costosa (especialmente porque n es grande en relación con p). Entonces sólo podremos alcanzar algunos de los números enteros de la secuencia ganadora. El juego entonces cambia de naturaleza: para ganar, ¿debes empezar o jugar segundo? ¿diciendo que número?

La estrategia de restas repetidas debe adaptarse y transformarse en una estrategia que permita (re)encontrar el sentido de la división euclidiana: buscamos restar de n el mayor múltiplo posible de $(p+1)$. [evolución de los juegos 1, 2, 3 al juego 4: aquí tenemos un ejemplo de salto informacional].

Conclusión: el juego de la carrera, como situación fundamental

Si se modelizan los juegos de la carrera a n mediante una situación general, se obtienen una situación fundamental de la división euclidiana cuyo significado es el de sustracción reiterada.

NOCIÓN de salto informacional:

El salto informacional consiste, **después de haber encontrado una situación fundamental haciendo que una noción "funcione", elegir primero los valores de sus variables de tal manera que el conocimiento previo de los estudiantes les permita desarrollar estrategias eficaces...** luego, sin modificar las reglas del juego, cambiar los valores de las variables para hacer mucho mayor la complejidad de la tarea a realizar. Se deben establecer nuevas estrategias que requieran la construcción de nuevos conocimientos. (Brousseau 1986a, p.23)

8. Complementos: concepciones, obstáculos

Para ciertos conocimientos, existen situaciones fundamentales que pueden escenificarse directamente en el momento deseado:

Pero supongamos que existen conocimientos para los que no se cumplen las condiciones anteriores: no hay situaciones suficientemente accesibles, suficientemente eficaces y en número suficientemente reducido como para permitir a estudiantes de cualquier edad acceder desde el principio, por adaptación, a una forma de saber que puede considerarse correcto y definitivo: hay que aceptar etapas en el aprendizaje. El saber enseñado mediante adaptación en la primera etapa será temporalmente, no sólo aproximados sino también en parte *falso e inadecuado*. (Brousseau 1986, págs. 316-317)³⁸

La alternativa es enseñar directamente un saber que cumpla con los requisitos de la comunidad

³⁸ Traducción del original : Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées : il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder à l'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que l'on peut considérer comme correcte et définitive : il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoire, non seulement approximatif, mais aussi en partie *faux et inadéquat*. (Brousseau 1986, p. 316-317)

científica, es decir el texto del saber. Como resultado, renunciamos a que el alumno dé sentido al saber: el saber no es una respuesta a un problema incierto del cual el estudiante acepta la responsabilidad.

Por lo tanto, el profesor tiene la opción entre enseñar conocimientos formales y sin sentido o enseñar conocimientos más o menos falsos que deberán rectificarse. (Brousseau 1986a, p. 317)³⁹

Podemos entonces suponer en un mismo sujeto la coexistencia de relaciones contradictorias con un mismo objeto de saber (desde el punto de vista de quien observa los procedimientos), y cuya coherencia debe buscarse en la situación particular en la que se encuentra el sujeto: la noción de concepto es una respuesta a este problema de modelización para hablar de los conocimientos del sujeto.

La noción de concepto permite, en particular, responder al siguiente cuestionamiento: ¿qué saben los alumnos (y qué explican sus dificultades, sus errores)? ¿En qué situaciones lo aprendieron (qué dominio de validez)?

La noción de contrato didáctico completa este modelo para tener en cuenta las limitaciones de la comunicación didáctica de los saberes.

Postulado: el error es prueba de conocimiento

Este postulado adquiere un fuerte significado en el contexto de la hipótesis piagetiana sobre el aprendizaje como adaptación a un medio permitiendo tomar conciencia de una contradicción y su superación:

El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento previo, que tuvo su interés, sus éxitos, pero que ahora resulta falso, o simplemente inadecuado. (Brousseau 1983, p.171)⁴⁰

Brousseau, desde los años 70, afirmó que parte de estos conocimientos son necesarios para el aprendizaje: la trayectoria del alumno debe pasar por la construcción (provisional) de conocimientos erróneos porque la toma de conciencia de este carácter erróneo constituiría el sentido del conocimiento cuya construcción se pretende. Estos pasos obligatorios, él les ha llamado siguiendo a Bachelard (1938, pp.13-22), *obstáculos epistemológicos*:

[...] el conocimiento, como un obstáculo, es siempre el resultado de la interacción del alumno con su entorno y, más concretamente, con una situación que hace que este conocimiento sea 'interesante'. (Brousseau 1998, p.123)⁴¹

Generalmente distinguimos tres tipos de obstáculos según su origen.

- 1- Obstáculo *ontogenético* vinculado al desarrollo psicogenético del sujeto.
- 2- Obstáculo *didáctico* vinculado a la transposición didáctica del saber: es un obstáculo que puede evitarse sin consecuencias para la construcción del conocimiento, que puede desaparecer actuando sobre las situaciones de enseñanza.

³⁹ Traducción del original : Le professeur a donc le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier. (Brousseau 1986, p. 317)

⁴⁰ Traducción del original: L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou comportementales de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fautive, ou simplement inadaptée. (Brousseau 1983, p.171)

⁴¹ Traducción del original: [...] une connaissance, comme un obstacle, est toujours le fruit d'une interaction de l'élève avec son milieu et plus précisément avec une situation qui rend cette connaissance 'intéressante'. (Brousseau 1998, p.123).

3- Obstáculo *epistemológico* vinculado al desarrollo histórico del concepto ⁴²:

[...] un obstáculo epistemológico es constitutivo de un conocimiento acabado, en el sentido de que su rechazo debe ser inevitablemente explicado, y en consecuencia deja huellas, a veces profundas, en el sistema de conocimiento [...]. (Brousseau 1983, p.195)⁴³

Duroux (1983) establece criterios para definir un obstáculo epistemológico:

- 1- Es un **conocimiento** que funciona como tal sobre un conjunto de situaciones y para determinados valores de las variables de dichas situaciones....
- 2- El obstáculo es el conocimiento que, al intentar adaptarse a otras situaciones o a otros valores de variables, provocará errores específicos, identificables y analizables.
- 3- El obstáculo es el conocimiento estable. [...]
- 4- Por lo tanto, el obstáculo sólo podrá superarse en situaciones específicas de rechazo y constituirá un saber [...] El propio retorno a la concepción del obstáculo será parte integral del nuevo saber. (Duroux 1983. p.54)

Ejemplo. Obstáculo de los enteros

Ejemplo 1. Decimales / Enteros

Para el estudiante, las propiedades de los naturales son las de los números en general, de todos los números. Ahora bien, la inmersión del conjunto de los naturales en un superconjunto como los racionales o los decimales, al mismo tiempo que revela nuevas propiedades, hace desaparecer otras: estas ya no son válidas para todos los números, o incluso ya no lo son para ninguno: la multiplicación puede reducir, un decimal ya no tiene sucesor [...].

El enseñante no puede advertir adecuadamente al alumno de esta ruptura, porque ni la cultura, y en particular la tradición, ni la ingeniería didáctica han producido todavía los instrumentos necesarios (ejercicios, advertencias, conceptos, observaciones, paradojas, etc.). Esta situación lleva al enseñante a provocar equívocos y malentendidos y al alumno a cometer errores. Estas concepciones erróneas persisten porque están ligados a una determinada forma de entender las propiedades de los números naturales, y los efectos de la ruptura pueden observarse durante muchos años.

Aún más importante es el mecanismo de este obstáculo: no son los conocimientos enseñados los que son imperfectos -en general los profesores remedian esta desventaja tratando de mantener un discurso incomprendido pero correcto- sino los instrumentos personales de comprensión del estudiante. Ya no comprende, porque lo que hay que cambiar son precisamente los medios de lo que hasta entonces llamaba "comprensión". (Extracto de Brousseau 1998, capítulo 6)⁴⁴

⁴² La noción de obstáculo epistemológico fue introducida por Gaston Bachelard en "La formación de la mente científica" (1938).

⁴³ Traducción del original: [...] un obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance achevée, en ce sens que son rejet doit être incontournable et explicite, et par conséquent il laisse des traces, parfois profondes, dans le système des connaissances [...] (Brousseau 1983, p. 195)

⁴⁴ Traducción del original: Pour l'élève, les propriétés de la nature sont celles des noms en général, de tous les noms. Or, le plongement de l'ensemble des naturels dans un sur-ensemble comme les rationnels ou les décimaux, en même temps qu'il fait apparaître des propriétés nouvelles en fait disparaître certaines autres : elles ne sont plus vraies pour tous les nombres, ou même elles ne le sont plus pour aucun : multiplicateur peut rapetisser, un décimal n'a plus de successeur [...]

L'enseignant ne peut pas avertir convenablement l'élève de cette rupture, car, ni la culture, et en particulier la tradition, ni l'ingénierie didactique n'ont encore produit les instruments nécessaires (exercices, avertissements, concepts,

Ejemplo 2. Situación del rompecabezas (puzle) para encontrar el obstáculo de los naturales.

9. Devolución/institucionalización (saber/conocimiento)

Los principales roles del enseñante se caracterizan por la siguiente doble maniobra: proceso de devolución y proceso de institucionalización.

9.1. Devolución

Para ello, el o la enseñante, primero hace el trabajo opuesto al investigador: busca recontextualizar y repersonalizar el conocimiento a enseñar: busca *problemas que le den sentido al conocimiento a enseñar*, para que la actividad del alumno “se parezca” momentáneamente a la del investigador. Hay devolución al estudiante de *la responsabilidad* respecto del saber, hay devolución de una situación adidáctica.

El proceso de devolución (desde una situación adidáctica) es descrito por André Rouchier en su tesis (1991) como un proceso que permite convertir *el saber* a enseñar en *conocimiento* para alumno (personalizado, contextualizado, temporalizado).

9.2. Institucionalización

Pero si esta fase ha funcionado bien, cuando el alumno ha encontrado soluciones a los problemas planteados, él o ella (alumno/a) no sabe que ha producido un conocimiento que podrá utilizar en otras ocasiones. Para transformar las respuestas y los conocimientos de los alumnos en saber, los alumnos deberán, con la ayuda del profesor, re-descontextualizar, re-despersonalizar el conocimiento que han producido para poder reconocer en lo que han hecho algo que tiene un carácter universal. carácter, *un saber cultural reutilizable*.

Resumiendo, el proceso de institucionalización es un proceso opuesto al de devolución que permite convertir un conocimiento de las personas en un saber reutilizable (despersonalizado, descontextualizado, destemporalizado).

remarques, paradoxes...). Cette situation conduit l'enseignant à provoquer des quiproquos et des malentendus et l'élève à commettre des erreurs. Ces conceptions fausses persistantes car les sont attachées à une certaine manière de comprendre les propriétés des nombres naturelles, et on peut observer les effets de la rupture pendant de nombreuses années.

Plus important encore est le mécanisme de cet obstacle : ce sont, non pas les connaissances enseignées qui sont en défaut - en général les enseignants pourvoient à cet inconvénient en imposant de se maintenir dans un discours incompris mais correct - ce sont les instruments personnels de la compréhension de l'élève. Il ne comprend plus, parce que ce qui devrait être changé ce sont justement les moyens de ce qu'il appelait 'comprendre' jusque-là. (Extrait de Brousseau 1998, chapitre 6)

BIBLIOGRAPHIE

- Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin éditeur.
- Balacheff N. (1995). Conception, connaissance et concept". In D. Grenier (Ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp.219-244). Grenoble : IMAG. <https://hal.science/hal-01072247>
- Bessot A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In C. Margolinas M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29–56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau G. (1978). *Étude locale des processus d'acquisitions scolaires, Enseignement élémentaire des mathématiques n°18*, Bordeaux : IREM. <https://hal.science/hal-00515106>
- Brousseau G (1980) Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire, *Revue de Laryngologie*. 101(3/4). 107–131. <https://hal.science/hal-00582614/>
- Brousseau G. (1982a). Les objets de la didactique des mathématiques. In *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet : IREM d'Orléans.
- Brousseau G. (1982b). Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude *a priori* d'une situation didactique. In *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 39-60). Olivet : IREM d'Orléans. <https://guy-brousseau.com/2381/d%E2%80%99un-probleme-a-l%E2%80%99etude-a-priori-d%E2%80%99une-situation-didactique-1982/>
- Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198. <https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>
- Brousseau G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. In *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 43–47). Olivet : IREM d'Orléans et IMAG Grenoble. <https://guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maitre-et-l%E2%80%99institutionnalisation-1984/>
- Brousseau G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'État de l'Université de Bordeaux. <https://guy-brousseau.com/46/resume-de-la-these-detat-1986/>
- Brousseau G. (1986b). La relation didactique : le milieu. In *Actes de la Quatrième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 54–68). Paris : IREM de Paris 7.
- Brousseau G. (1988a). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3). 309–336.
- Brousseau G. (1988b). Didactique fondamentale, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Actes de l'université d'été*, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.
- Brousseau G. (1997). *La théorie des situations didactiques. (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal)*. <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>.
- Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield)*. Grenoble : La Pensée Sauvage. (English Translation : Brousseau G. (2002). (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. (Eds.)). *Theory of didactical situations in mathematics*. Springer.

- Brousseau G. & Brousseau N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM. <https://hal.science/hal-00610769/fr/>
(English translation: Brousseau, G and N, Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. Springer.)
- Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage. (1991 : 2^{ème} édition).
- Chevallard Y. (1986). Les programmes et la transposition didactique : Illusions, contraintes et possibles. *Bulletin de l'APMEP.*, 352, 32-50.
- Chevallard Y. (1989). *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Étude du cas de l'algèbre*. Habilitation à diriger des recherches. Université d'Aix-Marseille II.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73 – 112.
- Chevallard Y. & Jullien M. (1990-1991) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. *Petit x*, 27, 41–76.
- Chevallard Y., & Mercier A. (1984). La notion de situation didactique. In *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet: IREM d'Orléans et IMAG Grenoble.
- Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2). 5–31.
- Duroux A. (1983). La valeur absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x*, 3, 43-67.
- Duval R. & Pluvinage F. (1977). Démarches individuelles de réponse en mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 8. 51–116.
- Grenier D. (1984). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I. <https://theses.hal.science/tel-00331264>
- Grenier D. (1989). Le contrat didactique comme outil d'analyse des phases de dévolution et de bilan. In R. Gras R. (Ed.) *Actes de la 5^{ème} école d'été de didactique des mathématiques* (pp.21–26). IREM de Rennes. http://www.numdam.org/item/?id=PSMIR_1989_S6_21_0
- Klein F. (1846) *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaires*. Reproduction IREM de Paris 7.
- Laborde C. (1989). Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques. In G. Vergnaud, J. Rogalski and M. Artigue (Eds.) *Actes de la 13^e Conférence Internationale PME*, (vol. 1, pp.46–61). <https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/>
- Margolinas C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Mercier A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I. <https://theses.hal.science/tel-00278299>
- Piaget J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives problème central du développement*. Paris : Presses Universitaires de France (PUF).

Rouchier A. (1991). *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itéro-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse d'état de l'Université d'Orléans.

Tonnelle J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, Mémoire de DEA de Didactique des mathématiques, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.

ANEXO I CONSTRUCCIÓN MATEMÁTICA VERSUS PRÁCTICA

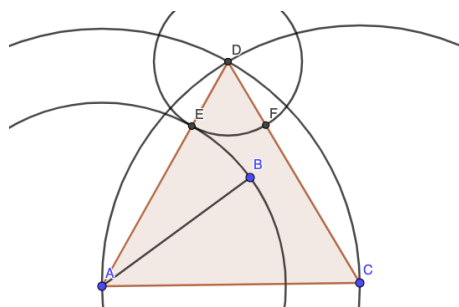
Construcción matemática

Los instrumentos son, instrumentos “ideales”. Un problema de construcción en matemáticas es ante todo un problema de *constructibilidad*.

El compás de Euclides es un “instrumento” que permite trazar un círculo centrado en un punto y que pasa por un punto.

Un compás no “transporta” distancias. Se demuestra que puede transportar distancias mediante la constructibilidad de un segmento [CF] de la misma longitud que un segmento dado [AB].

Sean tres puntos (de inicio) A, B y C no alineados. Trazar un triángulo equilátero CAD ⁴⁵. Trazar el círculo con centro A que pasa por B; llamamos E al punto de intersección de este círculo y de la recta (AD). Trazar el círculo con centro D que pasa por E; llamamos F el punto intersección de este círculo con la recta (CD). El segmento [CF] responde a la pregunta. (Solución de Euclides con notaciones modernas)



Podemos retomar sobre esta construcción lo que dicen Chevallard & Jullien (1991) sobre la construcción de la mitad de un segmento:

Sólo podemos captar el interés de esta construcción si tenemos en cuenta el hecho de que el punto de vista de Euclides es, ante todo, el de la constructibilidad: muestra mediante una secuencia lógica de proposiciones, es decir, no permitiéndose utilizar más que proposiciones ya establecidas.: que el punto medio de un segmento se puede construir con una regla y un compás. (Chevallard, Jullien 1991, p. 65).⁴⁶

Una regla es un “instrumento” de un solo filo rectilíneo, supuestamente ilimitado y sin graduación ni marca.

Podemos analizar la solución a un problema constructivo geométrico según los siguientes criterios:

1. Debe acreditar la existencia del “objeto” a construir;
2. Deberá acreditar su constructibilidad;
3. Debe proporcionar un algoritmo de construcción.
4. Eventualmente, debe permitir la construcción geométrica.⁴⁷

⁴⁵ Trazar el círculo con centro A que pasa por C. Trazar el círculo con centro C que pasa por A. Llamamos D a uno de los puntos de intersección.

⁴⁶ Traducción del original : On ne peut saisir l'intérêt de cette construction que si l'on prend en compte le fait que le point de vue d'Euclide est, avant tout, celui de la constructibilité : il montre par un enchaînement logique de propositions, - en ne se permettant donc d'utiliser que des propositions déjà établis - que le milieu d'un segment est constructible à la règle et au compas. (Chevallard, Jullien 1991, p. 65).

⁴⁷ Traducción del original: “...la geometrografía se interesa por los propios *procesos constructivos*, proponiendo compararlos para encontrar los más simples, según determinados criterios. [...] las soluciones propuestas por los matemáticos son (a menudo malas soluciones)”. (Chevallard, Jullien 1991, p. 66 y 68)

Estos requisitos están evidentemente “anidados” los unos en los otros, es decir que el que satisface el último implica que satisface los otros tres, y la satisfacción del penúltimo a la de los dos anteriores, y así sucesivamente. (Chevallard y Jullien 1991, p. 68)⁴⁸

Construcción práctica

Desde un punto de vista práctico, el problema es encontrar métodos de trazado con instrumentos materiales para obtener un dibujo satisfactorio con respecto a las medidas. Por ejemplo, para encontrar los ejes de simetría de una elipse con centro O marcado, trazamos con un compás apoyado en O -modificando poco a poco su apertura- los círculos inscrito y circunscrito, pero *con tal precisión que no es posible impugnar gráficamente (o perceptualmente) el trazado obtenido* ... Por tanto, un procedimiento de trazado aproximado es pues aceptable desde el momento en que proporciona una solución gráfica con suficiente precisión.

La distinción entre los dos puntos de vista es obvia cuando nos enfrentamos a un caso de no constructibilidad.

Para el diseñador siempre existe un algoritmo constructivo, exacto o aproximado, que requiere tal o cual instrumento, que le permite llevar a cabo su proyecto. La noción de no constructibilidad -y, en consecuencia, la de constructibilidad- queda, por tanto, obsoleta desde su punto de vista. Tiene poca relevancia *gráfica*; sin embargo, conserva toda su relevancia *matemática*. (Chevallard y Jullien 1991, pág. 76)⁴⁹

Un ejemplo de un problema de no constructibilidad utilizando regla y compás:

La división exacta del círculo en partes iguales con regla y compás sólo era posible, en otro tiempo, para los números $2n$, 3, 5 y sus distintos múltiplos. Gauss ya añadió otros casos al mostrar la posibilidad de división en p partes, cuando p es un número entero de la forma

$$p = 2^{2^n} + 1$$

y la imposibilidad de división en todos los demás casos.

La práctica no puede beneficiarse de estos resultados; Las consideraciones de Gauss tienen un significado puramente teórico... (Klein 1846, p.10)⁵⁰

⁴⁸ Traducción del original: 1. Elle doit fournir une preuve de l'existence de « l'objet » à construire ;

2. Elle doit fournir une preuve de sa constructibilité ;

3. Elle doit fournir un algorithme de construction.

4. Éventuellement, elle peut fournir la construction géométrographique.

Ces exigences sont évidemment « emboîtés » les unes dans les autres, c'est-à-dire que la satisfaction de la dernière entraîne la satisfaction des trois autres, la satisfaction de l'avant-dernière celle des deux précédentes, et ainsi de suite. (Chevallard & Jullien 1991, p. 68)

⁴⁹ Traducción del original: Pour dessinateur il existe a toujours un algorithme de construction, exact ou approché, nécessitant tels ou tels instruments, lui permettant de réaliser son projet. La notion de non constructibilité - et, par suite, celle de constructibilité - devient, en conséquence, caduque de son point de vue. Elle n'a guère de pertinence *graphique* ; elle conserve pourtant toute sa pertinence *mathématique* . (Chevallard & Jullien 1991, p. 76)

⁵⁰ Traducción del original: La division exacte du cercle en parties égales par la règle et le compas n'était autrefois possible que pour les nombres $2n$, 3, 5 et leurs divers multiples. Gauss a déjà ajouté les autres cas en démontrant la possibilité de division en p parties, lorsque p est un nom entier de la forme

$$p = 2^{2^n} + 1$$

et l'impossibilité de la division dans tous les autres cas.

La pratique ne peut tirer aucun profit de ces résultats ; Les considérations de Gauss ont une signification purement théorique... (Klein 1846, p.10)

Problema. ¿Cómo caracterizar la construcción con regla y compás en la enseñanza de la geometría?

En la construcción del eje de simetría, lo que el enseñante espera no es ni una construcción “matemática” (en el sentido de Klein o Euclides), ni una construcción práctica. Los instrumentos son materiales y se debe producir un trazado material (como en una construcción “práctica”) pero cualquier trazado debe ser justificable por una propiedad geométrica (como en una construcción “matemática”): *el problema de la existencia no se plantea.*

ANNEXE II

ACTIVIDAD DE TRAZAR EJES DE SIMETRÍA (GRENIER 1984)

Para cada una de las figuras siguientes trazar todos los ejes de simetría con los instrumentos autorizados

1° grupo de figuras: regla graduada y escuadra

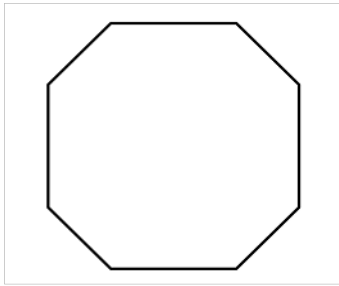
2° grupo de figuras: regla no graduada y escuadra

3° grupo de figuras: regla no graduada y compás

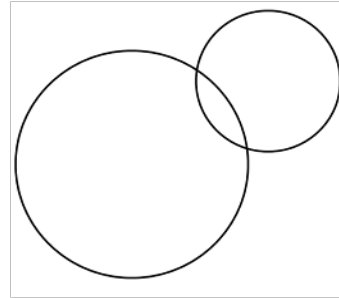
Pour chacune des figures ci-dessous tracer tous les axes de symétrie avec les instruments autorisés.

1^{er} groupe de figure

Instruments autorisés : règle graduée et équerre



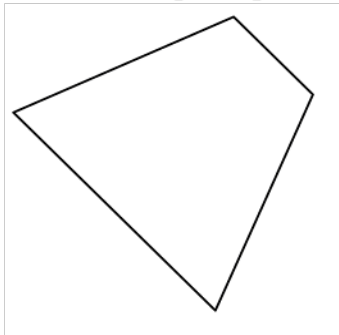
Octogone



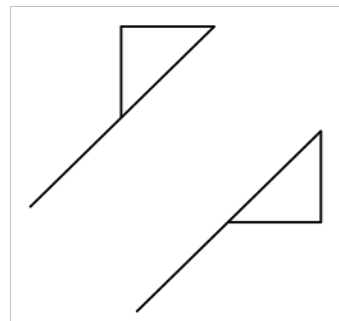
Cercles sans leur centre

2^{ième} groupe de figures

Instruments autorisés : règle non graduée et équerre



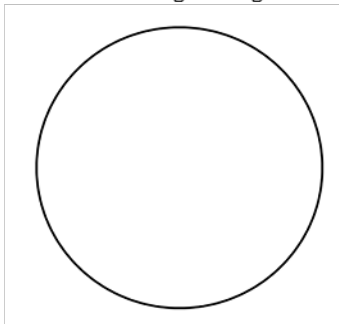
Trapèze isocèle



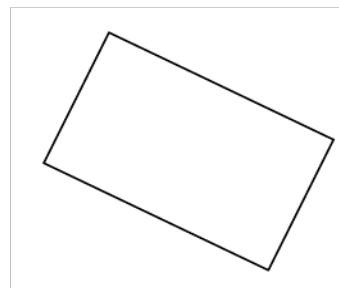
Drapeaux

3^{ième} groupe de figures

Instruments autorisés : règle non graduée et compas



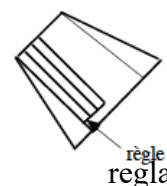
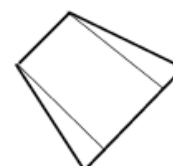
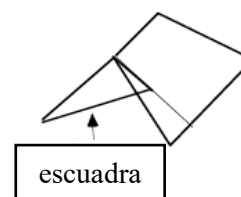
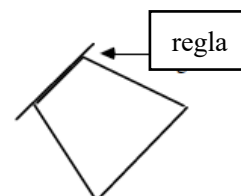
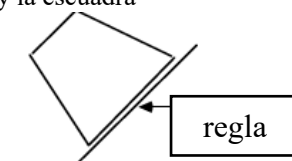
Cercle sans le centre



rectangle

ANEXO III
CRÓNICA “INFORME DE LA ACTIVIDAD DE TRAZADO CON INSTRUMENTOS
RESPECTO DEL TRAPEZIO” EXTRACTO DE (GRENIER 1989)

- 1 Enseñante =E: Pasamos a la figura 3, el trapecio (E pega la figura en la pizarra)
- 2 E: grupo 3 por favor, silencio (la clase es ruidosa), ahí tienen la regla no graduada y la escuadra
- 3 Olivier (grupo 3) toma los dos instrumentos y usa la regla
- 4 E Dámelo (*E recupera la escuadra*)
- 5 Olivier: entonces ya hemos cogido la regla /.../ la deja
- 6 E *toma la regla*: chut, silencio, por favor
- 7 Olivier: la dejamos y luego ponemos un punto [en la regla]
- 8 E: habéis marcado una graduación en la regla no graduada para medir la longitud del segmento
- 9 Olivier: y luego aquí es lo mismo (coloca la regla en la base grande y mide)
- 10 E: aquí pasa lo mismo, vale, ¿es muy preciso?
- 11 XX: no
- 12 E: ¿en tu opinión?
- 13 XX: se puede borrar en la regla
- 14 E: eso se puede borrar en la regla. No es muy preciso. ¡Bueno! Entonces dime como lo hiciste
- 15 Olivier: vimos que era aproximadamente la mitad. Esto era el doble de esto...
- 16 E: ¿Qué expresión dijiste? ¿Has oído?
- 17 X si
- 18 E: ¿Es eso muy preciso? (*se ríe*)
- 19 XX: no
- 20 E: ¡Ya ves! Entonces tal vez, porque se nos va el tiempo, seguiremos ahí porque estás en el casi, pero queremos precisión.
- 21 E a XF: ¿tiene algo que proponer? *XF va al tablero*
- 22 E (a Olivier): gracias Olivier
- 23 E (a XF): dámela si te molesta
- 24 XF *da la regla y mantiene la escuadra*
- 25 E: habla muy alto por favor
- 26 XF: colocamos nuestra escuadra en el ángulo
- 27 E: sí en el vértice del ángulo
- 28 XF: si e hicimos pequeñas líneas de puntos hasta abajo (*traza XF*)
- 29 E: vale, ¿entonces una perpendicular?
- 30 XF: sí
- 31 XF: hacemos lo mismo del otro lado (*traza XF*)
- 32 E: lo mismo del otro lado. Dos perpendiculares.
- 33 XF *devuelve la escuadra y toma la regla no graduada de E*
- 34 XF: pues parece que es un centímetro
- 35 E: Ah, parece que...
- 36 XF: bueno eso es lo que ellos dijeron
- 37 E: eso es lo que dijeron y crees en su palabra
- 38 XF *risas*
- 39 E: entonces es muy preciso eso de 'parece que'
- 40 *protestas de Francisco*
- 41 E: ¡No, no te estamos acusando, François! Pero hablemos de ello. ¿Es muy preciso?
- 42 X: no
- 43 E: pensasteis que era un centímetro. Adelante. Aún te vamos a escuchar dos segundos.
- 44 XF: luego ellos giraron la regla para saber cuántos centímetros había y la dividieron por la mitad.
- 45 E: Bueno. Entonces te acercas un poco a Olivier. ¿Es más preciso que
- 46 XF *regresa a su lugar y le entrega los instrumentos a François*
- 47 E: ¿bueno, François? Ven
- 48 François *llega a la pizarra, toma la regla no graduada.*
- 49 E: tienes la escuadra también
- 50 Francisco *coloca la regla y marca con una pequeña línea cada referencia de la sección de la regla.*



- 51 E: ¿entonces tú marcas, donde? ¿Es muy preciso lo que estás haciendo?
- 52 François: sí
- 53 E: esa es la longitud. Bueno, estamos de acuerdo, así que creo que muchos lo han hecho, no es muy preciso porque tienes el grosor que juega allí.
- 54 Francisco sigue con la regla
- 55 E: no eres más preciso que Olivier, lo siento
- 56 François regresa a su lugar muy decepcionado.
- 57 Un alumno del grupo 2 llega al tablero, toma la regla no graduada
- 58 grupo 2: primero trazamos esto
- 59 E: ahí lo tienes, lo trazas. ¿Y entonces?
- 60 E: ¿quién puede decir cómo se llama esa línea, ¿cómo la llamaste tú?
- 61 grupo 2: trazamos una ...
- 62 E: una diagonal, ¿eh?
- 63 X: perpendicular
- 64 E: una diagonal, luego la otra. Shh.
- 65 grupo 2 traza el otro
- 66 grupo 2: entonces eso me da el centro
- 67 E: eso te da un punto;
- 68 grupo 2: con la escuadra (*toma la escuadra, coloca la escuadra en el punto y devuelve la regla*)
- 69 E escribe en la pizarra
- 70 E: este punto, tu consideras...
- 71 grupo 2: que está en el medio
- 72 E: ¿seguro? (*murmullos*)
- 73 grupo 2: eso nos da esto (*muestra el segmento*)
- 74 E: entonces ¿qué es?
- 75 grupo 2: este es el eje de simetría
- 76 E: esto nos da el eje de simetría. Entonces tienes el punto, luego la perpendicular (*E escribe en la pizarra*).
- 77 E: y eso te da el eje de simetría. Este punto lo elegiste, en fin, dices al inicio que está en el eje de simetría.
- 78 grupo 2: sí
- 79 E: De acuerdo. ¿Alguien tiene otra construcción? ¿bien? (*Alumnos: sí*)
- 80 X: podríamos haber doblado la hoja y trazar (*risas de otros estudiantes*)
- 81 E: no, es con los instrumentos. Pasamos a la siguiente página que es 'las banderas'.
- 82 Yann: pero señor, ¡sólo había un punto!
- 83 E: sí, un punto y la perpendicular (*murmullos*) eso le bastó. No digo que sea así exactamente...
- 84 Yann: sí, ¡necesitas al menos dos puntos!
- 85 E: ¡Ah, silencio! ...silencio... Creo que Yann tiene un problema y tenemos que ayudarlo. Un punto no es suficiente, afirma Yann.
- 86 Yann: sí
- 87 E: entonces, adelante, es tu problema
- 88 X: bueno es estúpido porque... (*risas*)
- 89 E: ¡oh no, no! Tú colocas la escuadra según el lado y lo deslizas hasta que el punto quede en el otro lado de la escuadra (*ella hace mímico en la pizarra*) entonces puedes trazarlo, es preciso.
- 90 Yann: sí.

