



**HAL**  
open science

# Lentilles à gradient d'indice de réfraction pour la focalisation d'ondes élastiques de flexion dans une plaque composite d'épaisseur constante

Valentin Rapine, Nour Abuhemeida, Morvan Ouisse, Scott Cogan, Pascal Francescato, Rémy Lachat, Yann Meyer

## ► To cite this version:

Valentin Rapine, Nour Abuhemeida, Morvan Ouisse, Scott Cogan, Pascal Francescato, et al.. Lentilles à gradient d'indice de réfraction pour la focalisation d'ondes élastiques de flexion dans une plaque composite d'épaisseur constante. JNC23: Journées Nationales sur les Composites 2023, AMAC, UFC, Supmicrotech-ENSMM, CNRS, Jul 2023, Besançon, France. hal-04606798

**HAL Id: hal-04606798**

**<https://hal.science/hal-04606798>**

Submitted on 10 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Lentilles à gradient d'indice de réfraction pour la focalisation d'ondes élastiques de flexion dans une plaque composite d'épaisseur constante

## *Gradient index lenses for focusing elastic flexural waves in a composite plate with a constant thickness*

Valentin Rapine<sup>1</sup>, Nour Abuhemeida<sup>2</sup>, Morvan Ouisse<sup>2</sup>, Scott Cogan<sup>2</sup>, Pascal Francescato<sup>1</sup>, Rémy Lachat<sup>3</sup> et Yann Meyer<sup>1</sup>

1 : Université Savoie Mont Blanc, SYMME, 74000 Annecy, France  
e-mail : valentin.rapine@univ-smb.fr, yann.meyer@univ-smb.fr et pascal.francescato@univ-smb.fr

2 : SUPMICROTECH, Université de Franche-Comté, CNRS, Institut FEMTO-ST, F-25000 Besançon, France  
e-mail : nour.abuhemeida@femto-st.fr, morvan.ouisse@femto-st.fr et scott.cogan@univ-fcomte.fr

3 : ICB UMR 6303, CNRS, UBFC, UTBM, 90000 Belfort, France  
e-mail : remy.lachat@utbm.fr

### Résumé

La focalisation d'énergie vibratoire présente un intérêt certain dans les domaines tels que la récupération d'énergie. Les lentilles à gradient d'indice, « GRADIENT-INDEX LENS » (*GRIN lens* en anglais) sont des systèmes dans lesquels un profil de propriétés mécaniques permet aux ondes de se propager suivant des trajectoires courbes pour concentrer l'énergie vibratoire dans une zone définie. Différentes stratégies de conception existent afin d'obtenir le gradient de propriétés permettant de focaliser. La stratégie mise en oeuvre ici repose sur le pilotage du taux massique de fibres d'un composite unidirectionnel (UD). Différents procédés de fabrication de composite UD à faible taux massique de fibres ont été mis en oeuvre et comparés afin de sélectionner un procédé efficace adapté à la fabrication de la lentille et avec lequel les incertitudes sont acceptables. De plus dans ce cadre de conception, nous avons mis en évidence grâce à un modèle numérique le fait que pour une fréquence entre 2 kHz et 8 kHz la lentille permet de multiplier par environ 2.8 la quantité d'énergie focalisée dans la zone définie.

### Abstract

Vibrational energy focusing is of great interest in fields such as energy harvesting. GRADIENT-INDEX LENSES (*GRIN lenses*) are systems in which a mechanical properties profile allows waves to propagate along curved paths to focus on a specific area. Different design strategies exist to obtain the gradient of properties that allow focusing. The strategy implemented here is based on the control of the fiber mass ratio of a unidirectional (UD) composite. Different manufacturing processes of UD composites with low fiber mass ratio were implemented and compared to select an efficient process adapted to lens manufacturing and with which the uncertainties are acceptable. Furthermore, in this design framework, we have demonstrated through a numerical model that for a frequency between 2 kHz and 8 kHz the lens allows to multiply by approximately 2.8 the amount of focused energy in the defined area.

**Mots Clés :** Lentille à gradient d'indice, Ondes élastiques, Conception, Optimisation, Incertitudes, Robustesse

**Keywords :** Elastic waves, Design, Optimisation, Uncertainties, Robustness

## 1. Introduction

Les composites sont des matériaux clés pour de nombreux domaines (transport, aéronautique, énergies renouvelables, ...). Leurs propriétés physiques, notamment mécaniques, peuvent être sélectionnées sur mesure pour répondre au mieux à un cahier des charges. Cependant, l'un des défis majeurs lors de la conception de ces structures est de garantir la robustesse des performances visées malgré les nombreuses sources d'incertitude notamment liées à leur fabrication.

Les travaux présentés s'intéressent à la conception robuste d'une lentille de focalisation d'ondes élastiques de flexion dans une plaque composite d'épaisseur constante. Cette application suscite un intérêt particulier dans les domaines tels que la récupération d'énergie [1]. En effet, il est possible d'extraire plus d'énergie en plaçant le système de récupération sur la zone de focalisation.

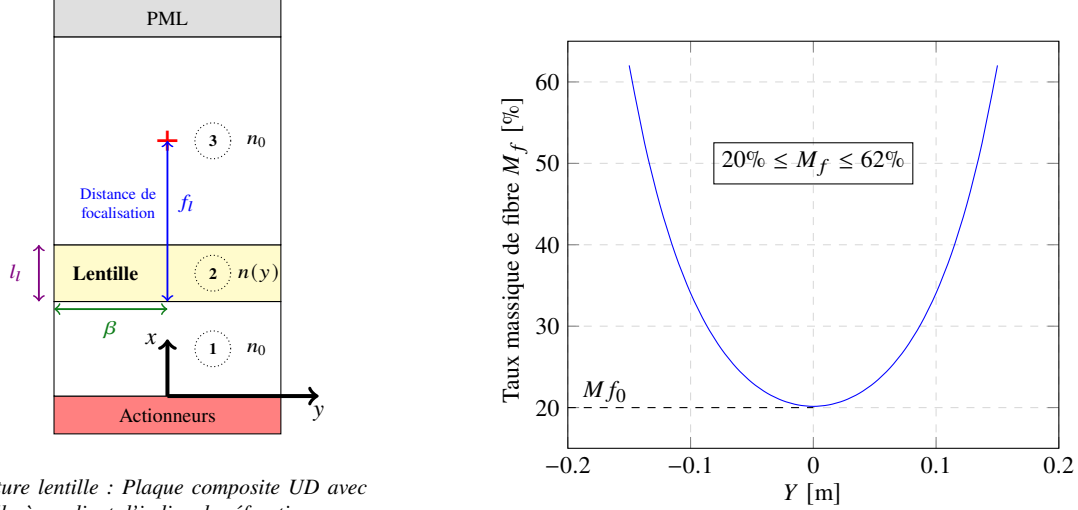
Les lentilles à gradient d'indice, « GRADIENT-INDEX LENS » (*GRIN lens* en anglais) désignent des systèmes avec un gradient d'indice de réfraction. La focalisation des ondes élastiques est réalisée en contrôlant les variations de l'indice de réfraction ou de la vitesse de l'onde le long de l'axe transversal à la direction de propagation. Il existe plusieurs stratégies de conception permettant d'obtenir le gradient de propriétés nécessaire à la focalisation. Les structures périodiques avec des trous [2] ou inclusions comme les cristaux phononiques [3, 4] permettent d'obtenir des matériaux dans lesquels les ondes se propagent suivant des trajectoires courbes. Le gradient de vitesse acoustique adéquat pour générer l'indice de réfraction recherché est obtenu en changeant le rayon des trous ou des inclusions. La vitesse de phase est contrôlée par le profil de densité, de raideur élastique ou bien même d'épaisseur [5].

Les matériaux composites permettent d'obtenir des modifications locales de propriétés (raideur, densité) qui vont influencer le comportement vibratoire global de la structure. Les libertés de conception offertes par les matériaux composites peuvent être exploitées dans le cadre de la conception d'une lentille à gradient d'indice. L'objectif ici est de trouver un point de fonctionnement dans un espace de conception donné en prenant en compte les contraintes de fabrication.

L'article est organisé de la manière suivante. La conception d'une lentille à gradient d'indice de réfraction basée sur la variation du taux massique de fibres d'un composite unidirectionnel (UD) est présentée dans la partie 2. Le procédé de fabrication d'un composite à taux massique de fibres donné entre 20% et 62% est sélectionné dans la partie 3. Les performances en terme de focalisation d'énergie de la lentille conçue selon la stratégie de conception adoptée sont montrées dans la partie 4. Les résultats de calculs numériques sont donnés dans une gamme de fréquences définie entre 2 kHz et 8 kHz. Pour finir, nous discuterons des résultats et des perspectives de ces travaux.

## 2. Conception d'une lentille pour la focalisation d'énergie en composite unidirectionnel à épaisseur constante

La lentille à gradient d'indice s'intègre à une plaque composite UD comme le montre la figure (Fig. 1a). Des ondes planes de flexion sont générées à une extrémité de la plaque par une série d'éléments piézoélectriques. L'onde se propage suivant  $\vec{x}$  avant de rencontrer la lentille présentant un gradient de propriétés mécaniques permettant la focalisation des ondes dans une zone définie par la distance de focalisation  $f_l$ . Dans le cadre de ces travaux, nous travaillons dans une bande de fréquences allant de 2 kHz à 8 kHz. La plaque a une largeur de 300 mm ( $2\beta = 300\text{mm}$ ) et une épaisseur constante de 3 mm ( $h = 3\text{ mm}$ ). Une zone d'absorption parfaite (PML) permet d'éviter les réflexions et d'observer le phénomène de focalisation.



(a) Structure lentille : Plaque composite UD avec une lentille à gradient d'indice de réfraction; avec  $\vec{x}$  la direction des fibres et de la propagation; zone ② :  $M_f = M_f(y)$ ; zones ① et ③ :  $M_f = M_{f0}$

(b) Solution de lentille à gradient d'index de réfraction avec variation du taux massique de fibres pour une plaque composite UD, selon Eq. 3

FIG. 1. – Paramètres de conception d'une lentille à gradient d'indice de réfraction

L'indice de réfraction est un rapport des vitesses de phase entre deux milieux de propriétés différentes. L'équation (Eq. 1) présente une variation d'indice de réfraction la focalisation en milieu isotrope [3].

$$n(y) = \frac{c_0}{c(y)} = n_0 \operatorname{sech}(\alpha y) \quad (\text{Eq. 1})$$

avec  $\alpha = \frac{\pi}{2f_l}$  ( $f_l$ , la distance de focalisation en  $m$ ),  $c_0$  et  $n_0$  respectivement la vitesse de phase (en  $m.s^{-1}$ ) et l'indice de réfraction de la plaque support ( $n_0 = 1$ ) comme présenté en figure (Fig. 1a),  $y \in [-\beta; \beta]$ ,  $\beta$  la demi largeur de la plaque (en  $m$ ). En considérant une propagation d'ondes de flexion unidirectionnelle suivant l'axe  $x$ , nous obtenons une équation (Eq. 2) de dimensionnement de la lentille.

$$\frac{E_x(y)}{\rho(y)} = \frac{E_{x0}}{\rho_0} \frac{\cosh^4(\alpha y)}{n_0^4} \quad (\text{Eq. 2})$$

Avec  $E_x(y)$  et  $\rho(y)$  respectivement le module d'élasticité (en  $N.m^{-2}$ ) suivant  $\vec{x}$  et la densité (en  $kg.m^{-3}$ ) de la lentille (Fig. 1a) zone ②,  $E_{x0}$  et  $\rho_0$  le module d'élasticité suivant  $\vec{x}$  et la densité de la plaque (Fig. 1a) zones ① et ③. La densité et le module d'élasticité doivent être maîtrisés. Différentes approches existent. Une première consiste à utiliser des stratifiés dans le but de piloter le module homogénéisé  $E_x(y)$  avec différentes orientations des plis. Une deuxième approche consiste à utiliser des couches unidirectionnelles, avec un pilotage du taux massique de fibres pour obtenir des variations de la densité et des modules.

Dans le cas d'un composite unidirectionnel, en appliquant la loi des mélanges [6], l'équation (Eq. 2) devient :

$$M_f(y) \approx M_{f0} \frac{\cosh^4(\alpha y)}{n_0^4} \quad (\text{Eq. 3})$$

avec  $M_f(y)$  le taux massique de fibres du composite (en %). La figure (Fig. 1b) montre un dimensionnement de la lentille selon cette seconde approche avec la variation du taux massique de fibres au niveau de la lentille.

## 3. Procédés de fabrication

La figure (Fig. 1b) montre une variation continue du taux massique de fibres. Du point de vue de la fabrication, il est compliqué de trouver un procédé permettant d'obtenir directement un tel résultat. Cependant, dans la littérature, nous retrouvons des exemples de discrétisation du profil de lentille donnant des résultats semblables à un profil continu [5]. La stratégie de fabrication est alors de discrétiser la largeur ( $2\beta$ ) de la lentille en  $n$  zones, chacune avec un taux massique de fibres  $M_{fi}$  correspondant à la courbe décrite en figure (Fig. 1b). Classiquement, dans l'emploi de matériaux composites hautes performances, l'objectif est de maximiser le taux massique de fibres. Cependant, ici l'enjeu de la fabrication d'une lentille à gradient d'indice de réfraction au vu de la stratégie adoptée est de maîtriser dans une large gamme le taux massique de fibres d'un composite unidirectionnel. Dans cette partie, nous allons

passer en revue différents procédés de fabrication de composite et étudier leur pertinence vis-à-vis du pilotage du taux massique de fibres entre 20% et 62%. La difficulté se concentrant sur les composites à taux massique de fibres faible, nous investiguons dans cette partie, les différents procédés permettant de fabriquer une plaque composite UD carbone/epoxy de  $(400 \times 400 \times 3) \text{ mm}^3$  à taux massique de fibres de 20%. Les résultats seront comparés en terme de taux massique de fibre et d'épaisseur par rapport aux valeurs cibles.

### 3.1. Voie humide sous presse (VH)

Une première approche de fabrication consiste à simplement déposer dans un moule de dimension  $(400 \times 400 \times 3) \text{ mm}^3$  tour à tour les plis de tissus carbone secs et réaliser un moulage au contact avec la résine époxy puis de mettre le moule sous presse. Dans le but de garantir un taux massique de fibres défini dans une plaque composite UD carbone/epoxy, il est nécessaire de définir le nombre de plis de tissu UD carbone se rapprochant le plus du taux massique de fibres cible. Afin de pouvoir se rapprocher le plus possible du taux massique de fibres désiré, il est préférable d'utiliser de faibles grammages de tissus UD (ici  $160 \text{ g/m}^2$ ). Les valeurs de taux massique de fibres fabricable sont donc ici limitées par le grammage du tissu carbone utilisé. Il s'agit d'un critère important dans la comparaison des procédés de fabrication. Lors de la mise en oeuvre de ce procédé, il n'est pas possible de garantir une bonne répartition des fibres dans l'épaisseur de la plaque, ainsi que dans son plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ . De plus, ce procédé ne permet pas d'obtenir une bonne imprégnation, il génère des inclusions de vide au sein du composite. L'ensemble de ces défauts impacte les propriétés mécaniques de la plaque ce qui aura une répercussion sur la propagation des ondes de flexion. Les variations d'épaisseurs et de taux massique de fibres ont été mesurées sur la plaque obtenue. Ces mesures sont reportées sur la figure (Fig. 4).

### 3.2. RTM Light (RTM-L)

Une autre stratégie de fabrication consiste à fabriquer la plaque avec le procédé RTM Light. Il s'agit de placer les plis de tissus carbone secs dans le moule et de venir remplir le moule de résine par la mise sous vide (ici entre  $-0.5$  et  $-0.9$  bar). Ce procédé permet, en plaçant le bon nombre de plis de tissus carbone, d'atteindre un taux massique de fibres proche de 20%. Comme pour le procédé de voie humide sous presse, le nombre de taux massique de fibres fabricable est limité par le grammage du tissu carbone utilisé. L'imprégnation est meilleure dans ce cas. Cependant, l'un des problèmes majeurs lors de la mise en oeuvre de ce procédé est le déplacement des fibres pendant l'écoulement de la résine. En effet, pour obtenir un faible taux massique de fibres, le nombre de plis de tissus est limité. Dans notre cas, seulement six plis sont nécessaires dans le moule d'épaisseur 3 mm. Ainsi, lors de l'écoulement de la résine, les fibres sont emportées ce qui provoque une répartition des fibres hétérogène (Fig. 3). Les variations d'épaisseur et de taux massique de fibres ont été mesurées sur la plaque obtenue. Ces mesures sont reportées sur la figure (Fig. 4). Nous observons une variabilité importante du taux massique de fibres. Cette méthode de fabrication pourrait être améliorée en utilisant une préforme obtenue à partir de plis UD avec un liant TP (thermoplastique).

### 3.3. Préimprégné (PI)

Une approche différente des deux procédés précédemment présentés est la fabrication en voie sèche. Un préimprégné est un semi-produit constitué d'un renfort fibreux sur lequel a été déposé de façon parfaitement contrôlée en  $M_f$ , une résine thermodurcissable, souvent époxy. Ce procédé est reconnu pour avoir un (*resin flow*) fluage de la résine faible ce qui est intéressant pour garantir une répartition homogène des fibres dans l'épaisseur. Afin de piloter le taux massique de fibres, la stratégie consiste à intercaler de façon régulière des films de colle époxy (ici référence Hexbond® ST1035  $300 \text{ g/m}^2$ ) lors de l'empilement des plis de préimprégné (ici référence Hexply® M35-4/38%/UD150/37-800). En vue de piloter le taux massique de fibres entre 20% et le taux massique de fibres du préimprégné 62%. Il existe des films de colle époxy de très faible grammage ( $75 \text{ g/m}^2$ ) permettant de se rapprocher au mieux de l'épaisseur et du taux massique souhaités. Un autre avantage non négligeable de ce procédé est de pouvoir fabriquer la structure lentille en un seul moulage, ce qui n'est pas possible avec les deux autres méthodes qui nécessitent plusieurs moulages et des assemblages pour réaliser la structure lentille complète (Fig. 1a). Pour cette méthode nous obtenons les valeurs d'épaisseurs et de taux massique cible et avec une variabilité nettement améliorée (Fig. 4) ainsi qu'une répartition homogène des fibres dans l'épaisseur (Fig. 2).

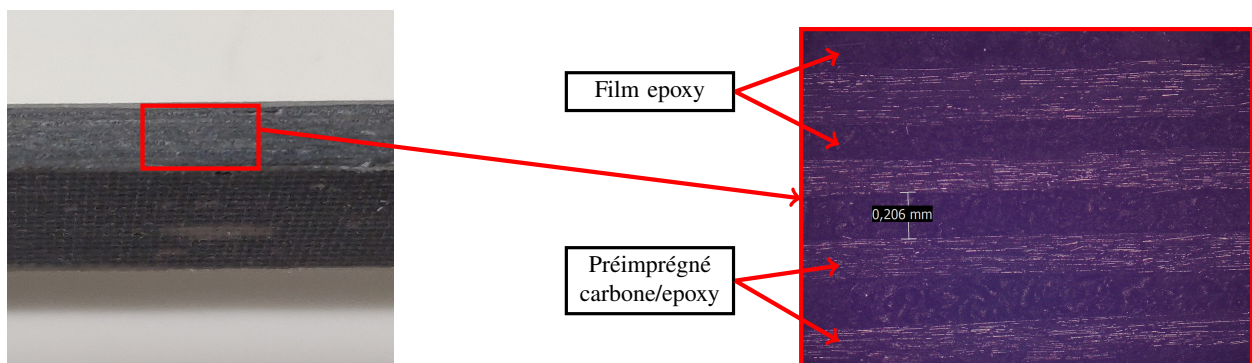


FIG. 2. – Positionnement des fibres dans l'épaisseur pour le procédé préimprégné (PI), la vue de coupe est dans la direction des fibres et est obtenue au microscope (Leica DM2700 M)

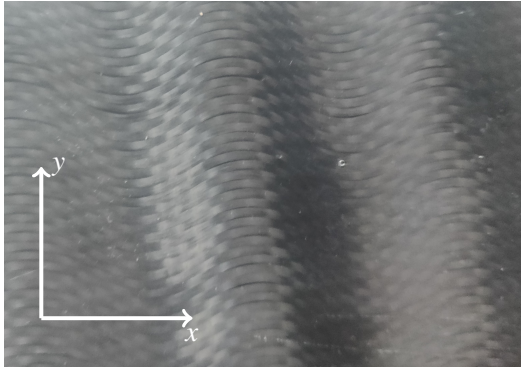


Fig. 3. – Déplacement des fibres résultant de l'écoulement de la résine suivant  $\vec{x}$  pour le procédé RTM-Light

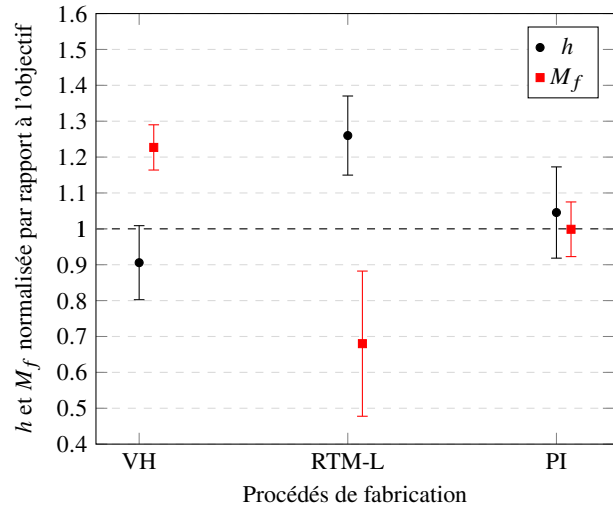


Fig. 4. – Valeur moyenne et variabilité ( $\pm 2\sigma$ ) des épaisseurs  $h$  mesurées au micromètre (JD300-25 Testwell®) et des taux massiques de fibres  $M_f$  mesurés par perte au feu [7, NF EN ISO 10352] obtenues avec avec 16 mesures d'épaisseur et de taux massique de fibres réparties uniformément, pour chaque procédé de fabrication (VH : voie humide sous presse, RTM-L : RTM Light, PI : préimprégnés)

#### 4. Modélisation numérique

Les travaux expérimentaux autour du procédé de fabrication ont permis de définir un espace de conception et d'évaluer les incertitudes de fabrication. L'association de ces connaissances avec un modèle numérique permettent d'explorer les solutions dans l'espace de conception. Le diagramme de la figure (Fig. 5) décrit les étapes du calcul numérique. Ces étapes sont détaillées dans cette section. Les calculs numériques présentés ici ont été réalisés avec COMSOL Multiphysics® [8]. Ces calculs ont été réalisés en régime harmonique permanent et en considérant les structures composites de la plaque comme élastiquement homogènes équivalentes.

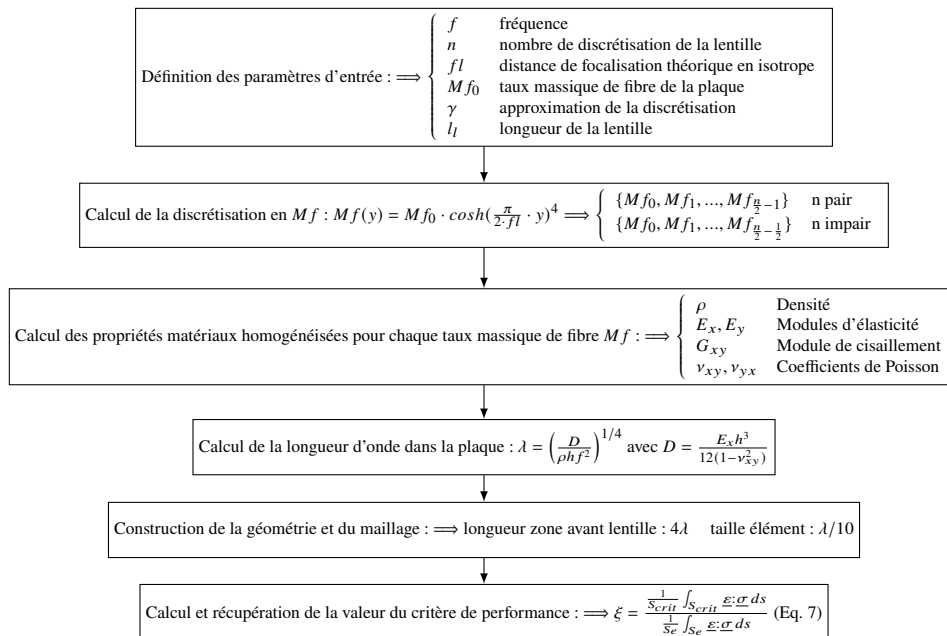


Fig. 5. – Étapes du calcul numérique

##### 4.1. Définition des paramètres du calcul

L'objectif est de s'approcher de la courbe  $Mf(y)$  (Eq. 3)(Fig. 1b). Plusieurs paramètres sont définis pour caractériser la discrétisation du profil  $Mf(y)$ . Ils sont répertoriés dans le tableau (Tab. 1). Nous retrouvons quatre paramètres :

- Le taux massique de fibres de la plaque hôte et de la bande centrale de la lentille noté  $Mf_0$  qui est le minimum de  $Mf(y)$ .

- La distance de focalisation théorique  $f_l$  définie dans l'équation (Eq. 2) dans le cadre d'une modélisation avec un matériau à comportement isotrope. Ce paramètre modifie le degré de convexité de  $M_f(y)$ .
- Le nombre de bandes de discrétisation de la lentille  $n$  (Fig. 6).
- L'approximation  $\gamma$  du taux massique de fibres  $M_f$  de chaque bande entre le maximum ( $\gamma = 100\%$ ) et le minimum ( $\gamma = 0\%$ ) comme représenté sur la figure (Fig. 6). Nous avons :

$$\forall i \in \begin{cases} \{0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} & \text{n pair} \\ \{0, 1, \dots, \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\} & \text{n impair} \end{cases}, M_{fi} = \left(1 - \frac{\gamma[\%]}{100}\right) \cdot \min(M_f(y)) + \frac{\gamma[\%]}{100} \cdot \max(M_f(y)) \quad (\text{Eq. 4})$$

pour  $y$  de la bande  $i$  considérée.

Paramètre	Variable [Unité]	Valeur
$M_{f0}$	Taux massique de la plaque [%]	20
$f_l$	Distance de focalisation [m]	0.3
$n$	Nombre de discrétisation	9
$\gamma$	Approximation de discrétisation [%]	50

Tab. 1. – Paramètres d'entrée du calcul

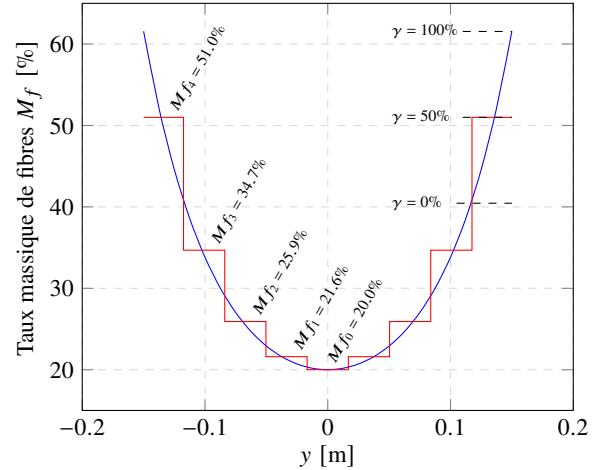


Fig. 6. – Discretisation de la lentille correspondant aux paramètres du tableau (Tab. 1)

#### 4.2. Propriétés mécaniques de chaque discrétisation

La discrétisation du profil de taux massique de fibres expliqué dans la partie 4.1 a permis de déterminer les taux massiques de fibres pour chaque zone de la lentille. Les propriétés mécaniques de chaque zone sont calculées à partir des caractéristiques de la fibre et de la matrice utilisées. Dans notre cas, le composite UD est composé de fibres de carbone et d'une matrice époxy. Leurs caractéristiques sont répertoriées dans le tableau (Tab. 2). A partir de la loi des mélanges [6], nous calculons les propriétés mécaniques du composite pour chaque taux massique. La figure (Fig. 7) montre l'évolution des différentes propriétés mécaniques (densité, modules d'élasticité et coefficient de Poisson) en fonction du taux massique de fibres du composite UD pour les caractéristiques de fibre et de matrice définies.

Paramètre	Variable [Unité]	Valeur
<b>Fibre</b>		
$\rho_f$	densité [ $kg.m^{-3}$ ]	1700
$E_{1f}$	module d'élasticité 1 [ $GPa$ ]	230
$E_{2f}$	module d'élasticité 2 [ $GPa$ ]	40
$G_{12f}$	module de cisaillement [ $GPa$ ]	15
$\nu_{12f}$	coefficient de Poisson	0.2
<b>Matrice</b>		
$\rho_m$	densité [ $kg.m^{-3}$ ]	1200
$E_m$	module d'élasticité [ $GPa$ ]	3
$\nu_m$	coefficient de Poisson	0.4

Tab. 2. – Propriétés mécaniques de la fibre et de la matrice avec (1) l'axe longitudinal et (2) l'axe transversal des fibres

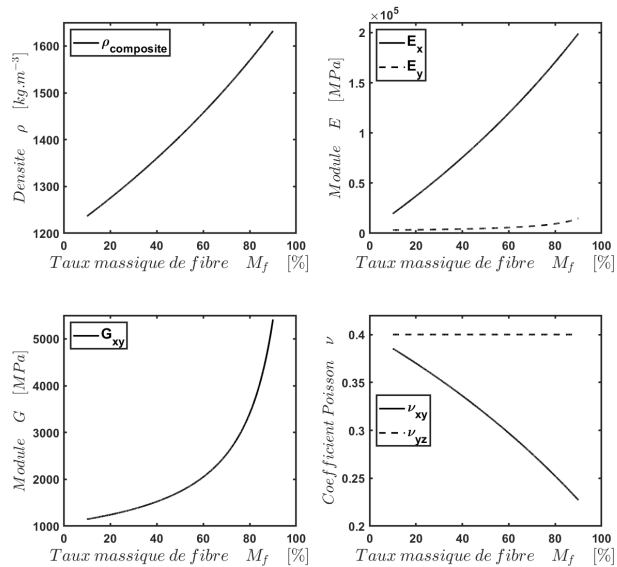


Fig. 7. – Paramètres matériaux du composite UD en fonction du taux massique de fibres  $M_f$ , selon la méthode d'homogénéisation élastique de la loi des mélanges [6]

### 4.3. Géométrie et maillage

Pour garantir un résultat cohérent avec un temps de calcul raisonnable dans une large bande de fréquence, le modèle doit être adapté à cette dernière. La taille maximale d'un élément du maillage est de 1/10 de la longueur d'onde ( $\lambda/10$ ). De plus, la zone en amont de la lentille suivant le sens de propagation a pour longueur 4 longueur d'onde ( $4\lambda$ ). Cette adaptation du modèle à la fréquence minimise l'impact des hautes fréquences sur le temps de calcul et permet plus de cohérence dans le calcul du critère de performance de la lentille détaillée dans la partie 4.4. La longueur d'onde  $\lambda$  doit alors être calculée. La propagation d'ondes élastiques de flexion dans une plaque homogène et isotrope de Kirchhoff-Love est décrite par l'équation (Eq. 5).

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} = 0 \quad (\text{Eq. 5})$$

avec  $w$  le déplacement transversal de la plaque (en  $m$ ),  $\rho$  la densité (en  $kg.m^{-3}$ ),  $h$  l'épaisseur (en  $m$ ) et  $D$  le module de flexion  $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$  avec  $E$  le module d'Young (en  $N.m^{-2}$ ) et  $\nu$  le coefficient de Poisson. Dans le cas d'une onde de flexion harmonique, l'équation (Eq. 5) s'écrit :  $Dk^4 = \rho h \omega^2$  avec  $k$  le nombre d'onde ( $k = 2\pi/\lambda$ ) et  $\omega$  la pulsation ( $\omega = 2\pi f$ ). La longueur d'onde  $\lambda$  dans la plaque est donc calculée suivant l'équation Eq. 6.

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi h}{f} \left( \frac{E}{12\rho(1-\nu^2)} \right)^{1/4}} \quad (\text{Eq. 6})$$

Pour un taux massique  $Mf_0$  de la plaque de 20% avec les propriétés mécaniques de fibre et de matrice correspondantes (Tab. 2), la longueur d'onde  $\lambda$  varie respectivement entre 126 mm et 63 mm pour une fréquence allant de 2 kHz à 8 kHz.

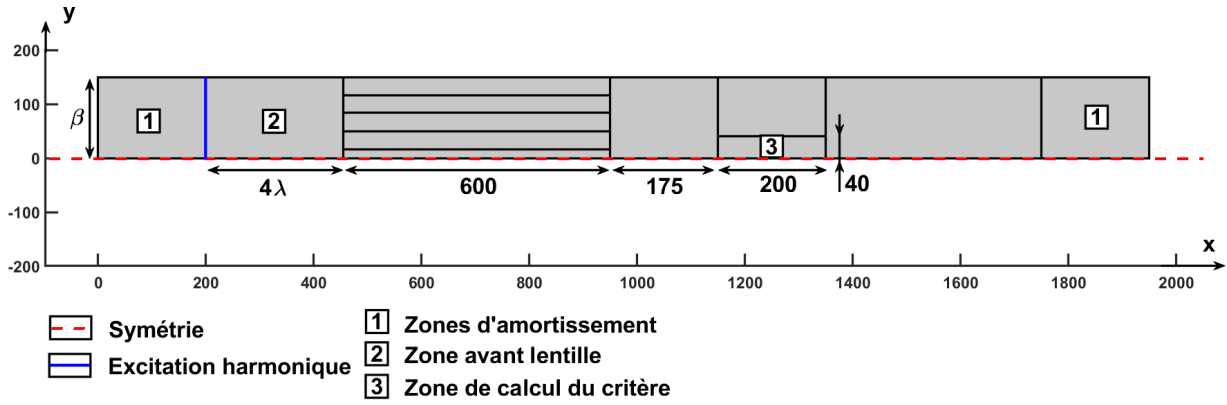


FIG. 8. – Géométrie du modèle numérique de la structure lentille correspondant aux paramètres définis dans la partie 4.1 pour  $f = 8000\text{Hz}$ , (dimensions en mm)

### 4.4. Critère de performance

Pour rendre compte des performances de la lentille concernant l'objectif de focalisation de l'énergie vibratoire d'ondes élastiques de flexion un critère doit être défini. Le critère utilisé ici est le rapport de la densité d'énergie de déformation sur la surface de focalisation  $S_{crit}$  et la surface avant lentille  $S_e$  (Fig. 8) (Eq. 7).

$$\xi = \frac{\frac{1}{S_{crit}} \int_{S_{crit}} \underline{\varepsilon} : \underline{\sigma} ds}{\frac{1}{S_e} \int_{S_e} \underline{\varepsilon} : \underline{\sigma} ds} \quad (\text{Eq. 7})$$

avec  $\underline{\varepsilon}$  le tenseur des déformations et  $\underline{\sigma}$  le tenseur des contraintes. Sans lentille le critère  $\xi$  vaut 1. Ainsi le critère traduit directement le gain d'énergie potentiellement récupérable apportée par la lentille si un dispositif de récupération est positionné dans la zone de focalisation.

### 4.5. Résultats

Les résultats des calculs numériques pour la configuration définie précédemment (Tab. 1) pour plusieurs fréquences entre 2 kHz et 8 kHz sont représentés (Fig. 9). Nous remarquons que numériquement la stratégie de conception de la lentille en composite UD avec un profil de taux massique de fibres permet de focaliser l'énergie d'ondes planes de flexion dans la gamme de fréquence étudiée. En effet, pour l'ensemble de ces fréquences, nous observons une zone de concentration d'énergie de déformation de taille variable suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . La taille de cette zone de focalisation diminue lorsque la fréquence augmente contrairement à sa position qui ne varie pas avec la fréquence. Les résultats du critère de performance montrent que, selon la zone de calcul du critère définie dans la partie 4.4 (Fig. 8), la lentille permet de multiplier par environ 2.8 la quantité d'énergie récupérable. En effet, dans la gamme de fréquences étudiée, nous remarquons que la valeur de ce critère c'est à dire de la quantité d'énergie potentiellement récupérable avec la lentille par rapport à celle sans la lentille est faiblement impactée par la fréquence, elle varie entre 2.77 et 2.83.



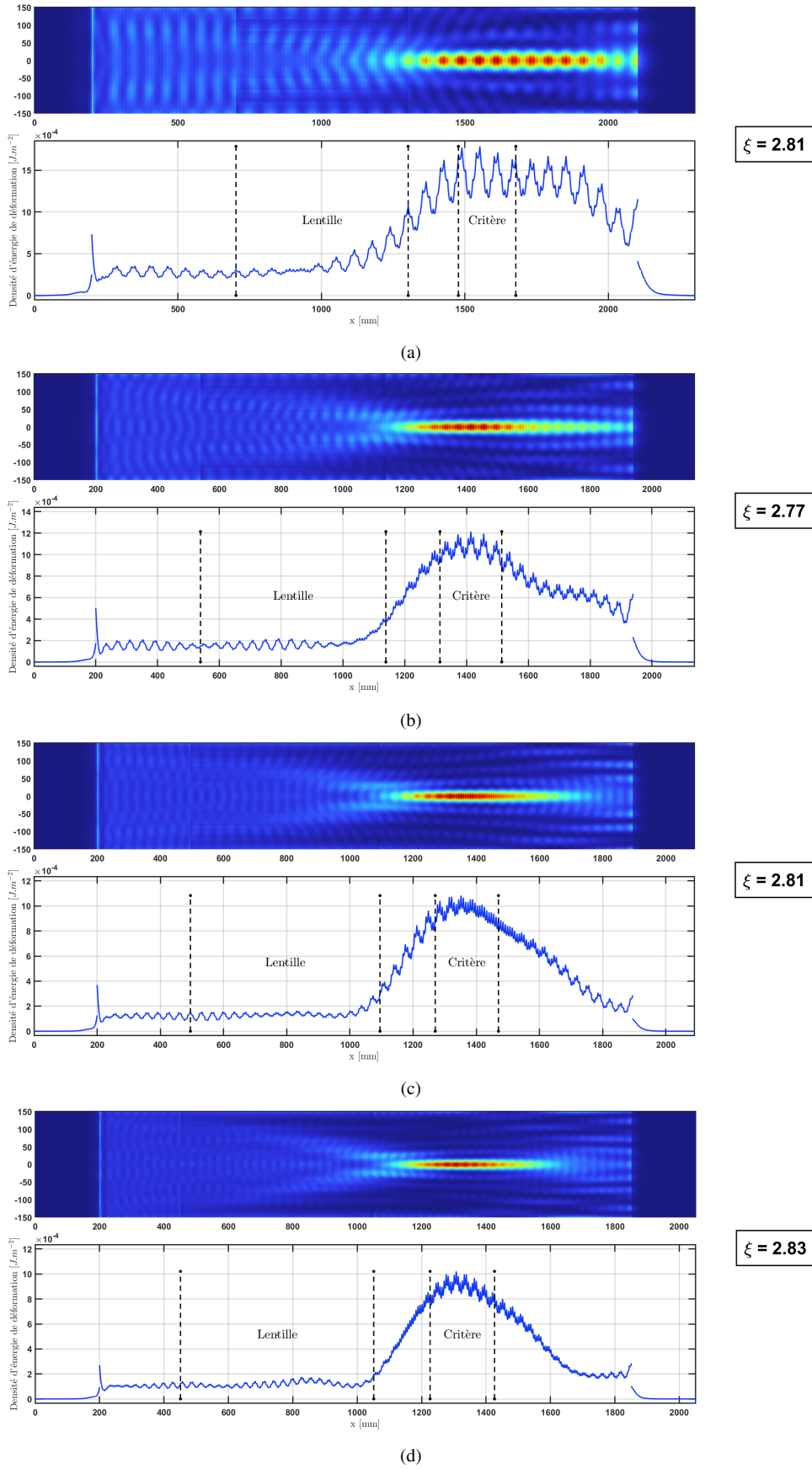


FIG. 9. – Répartition de l'énergie de déformation suivant le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  de la plaque, densité d'énergie de déformation suivant l'axe de symétrie (central) de la structure lentille et valeur du critère de performance  $\xi$  pour la configuration décrite par (Tab. 1) pour les fréquences suivantes : (a)  $f = 2000$  Hz, (b)  $f = 4400$  Hz, (c)  $f = 5800$  Hz et (d)  $f = 8000$  Hz



## 5. Conclusions et perspectives

Cet article propose une nouvelle approche à la conception de lentille à gradient d'indice pour focaliser l'énergie d'ondes élastiques planes de flexion. La solution proposée ne fait pas intervenir de structures périodiques comme des trous ou des inclusions. En effet il n'y a pas de modification géométrique de la plaque hôte : la lentille a une épaisseur constante. La stratégie de conception mise en oeuvre repose sur l'utilisation de matériaux composites dont les propriétés ont été choisies judicieusement. Il est possible de fabriquer des structures à base de plis composites en pilotant les raideurs et la densité. La grandeur physique reliant la densité et les raideurs dans un composite UD est le taux massique de fibres. Ainsi, il est possible d'obtenir un gradient de propriétés permettant de focaliser des ondes planes de flexion en discrétisant la lentille en plusieurs zones formant un profil de taux massique de fibres.

La comparaison de différentes méthodes de fabrication de la plaque composite avec lentille a permis de retenir le procédé de drapage sous vide de préimprégnés UD carbone/epoxy à taux massique de fibre variable dans l'intervalle 20% – 62%. Cette méthode présente à la fois une mise en oeuvre simple et des incertitudes de fabrication raisonnables. Les travaux réalisés autour du procédé de fabrication ont permis de définir un cadre de conception de la lentille à gradient d'indice. Ce cadre de conception a été modélisé numériquement. Le modèle numérique a montré que la stratégie de conception utilisée permet bien de focaliser l'énergie vibratoire. Nous avons aussi mis en évidence grâce à ce modèle le fait que dans une configuration définie pour une fréquence entre 2 kHz et 8 kHz, la lentille permet de multiplier par environ 2.8 la quantité d'énergie récupérée selon la zone de calcul du critère.

Le modèle numérique développé est paramétré et a un temps de calcul raisonnable de l'ordre de 10 secondes dans la gamme de fréquences. Il est donc envisageable de l'utiliser pour rechercher des solutions optimales [1] dans le cadre de conception en considérant le critère défini. Puis dans un second temps, de questionner la robustesse de ces solutions vis-à-vis des incertitudes de fabrication recensées par des caractérisations mécaniques de lentilles fabriquées.

### Remerciements

Cette recherche a été financée par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) au titre du projet ASTRIA ANR-21-CE46-001. Dans l'objectif de sa publication en libre accès, l'auteur a appliqué une licence open access CC-BY à tout manuscrit accepté pour publication (AAM) résultant de cette soumission.

### Références

- [1] J. Hyun, W. Choi, M. Kim « Gradient-index phononic crystals for highly dense flexural energy harvesting », *Applied Physics Letters* Vol. 115 n° 17, pp. 173901, 2019, ISSN 0003-6951, 1077-3118.
- [2] H. Zhu, F. Semperlotti « Two-dimensional structure-embedded acoustic lenses based on periodic acoustic black holes », *Journal of Applied Physics* Vol. 122 n° 6, pp. 065104, 2017, ISSN 0021-8979, 1089-7550.
- [3] S.-C. S. Lin, T. J. Huang, J.-H. Sun, T.-T. Wu « Gradient-index phononic crystals », *Physical Review B* Vol. 79 n° 9, pp. 094302, 2009, publisher : American Physical Society.
- [4] J. Hyun, M. Kim, W. Choi « Partitioned gradient-index phononic crystals for full phase control », *Scientific Reports* Vol. 10 n° 1, pp. 14630, 2020, ISSN 2045-2322.
- [5] E. Sadoulet-Reboul, G. Matten, K. Yi, M. Ouisse « Passive discrete lens for broadband elastic guided wave focusing », *Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics* Vol. 2021, pp. 1–14, 2021.
- [6] D. Gay, Matériaux composites, Hermès science [diff.] Lavoisier, [Paris] Paris, 5e éd. révisée edn., ISBN 978-2-7462-1098-1, 2005.
- [7] NF EN ISO 10352 « Plastiques renforcés de fibres — Mélanges à mouler et préimprégnés — Détermination de la masse surfacique et de la masse des fibres par unité de surface », 2020.
- [8] COMSOL Inc. « COMSOL version 6.1 », 2023.