



**HAL**  
open science

# Étude numérique de l'amortissement de structures composites à fibres de lin par une méthode itérative d'ordre élevé

Laëtitia Duigou, Jean-Marc Cadou, Mathias Ziapkoff, El Mostafa Daya, Guillaume Robin

► **To cite this version:**

Laëtitia Duigou, Jean-Marc Cadou, Mathias Ziapkoff, El Mostafa Daya, Guillaume Robin. Étude numérique de l'amortissement de structures composites à fibres de lin par une méthode itérative d'ordre élevé. JNC23: Journées Nationales sur les Composites 2023, AMAC, UFC, Supmicrotech-ENSMM, CNRS, Jul 2023, Besançon, France. hal-04606785

**HAL Id: hal-04606785**

**<https://hal.science/hal-04606785>**

Submitted on 10 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude numérique de l'amortissement de structures composites à fibres de lin par une méthode itérative d'ordre élevé

## *Numerical study of the damping of flax fibre composite structures by a high order iterative method*

M. Ziapkoff<sup>1</sup>, G. Robin<sup>2</sup>, L. Duigou<sup>1</sup>, EM Daya<sup>2</sup>, JM Cadou<sup>1</sup>

1 : IRDL, Institut de Recherche Dupuy de Lôme, UMR CNRS 6027, IRDL, F-56100 Lorient, France  
e-mail : mathias.ziapkoff@univ-ubs.fr [laetitia.duigou@univ-ubs.fr](mailto:laetitia.duigou@univ-ubs.fr) et jean-marc.cadou@univ-ubs.fr

2 : Université de Lorraine, Arts et Métiers ParisTech, LEM3, UMR CNRS 7239F-57000 Metz, France  
e-mail : [guillaume.robin@univ-lorraine.fr](mailto:guillaume.robin@univ-lorraine.fr) et el-mostafa.day@univ-lorraine.fr

### Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à un problème de vibration de structures composites à fibres naturelles. La loi de comportement du pli fibres de lin/matrice étant non-linéaire, une méthode de Newton d'ordre élevé (MNOE) est utilisée pour résoudre le problème de vibration complexe non-linéaire. Cette méthode est basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation.

### Abstract

In this work, we are interested in a vibration problem of natural fibre composite structures. Since the behaviour law of the flax fibre/matrix ply is non-linear, a high order Newton method (HONM) is used to solve the complex non-linear vibration problem. This method is based on homotopy and perturbation techniques.

**Mots Clés :** Vibration, Composites, Fibre de lin, Viscoélasticité, Homotopie, Perturbation

**Keywords :** Vibration, Composites, Flax fiber, Viscoelasticity, Homotopy, Perturbation

## 1. Introduction

Les structures composites sont utilisées dans de nombreux domaines industriels pour lesquels la maîtrise du bruit et des amplitudes de vibration sont des problématiques sensibles. En effet, le confort sonore et la sécurité des personnes ou des biens sont des préoccupations dans de nombreux secteurs d'activités (transport, BTP, ingénierie civile, militaire...). Afin d'atténuer ou de réduire ces vibrations, des matériaux spécifiques peuvent être utilisés. Dans cette étude, nous nous intéressons aux fibres bio-sourcées et plus précisément à la fibre de lin. En effet, cette dernière présente de nombreux avantages : sa capacité intrinsèque d'amortissement associé à un faible poids [1]. Cependant peu d'études numériques existent dans la littérature concernant la modélisation du comportement vibratoire de ces matériaux naturels.

C'est pourquoi dans ce travail, réalisé dans le cadre du projet ANR-Bio-Damping, nous étudions le comportement vibratoire de structures composites laminées de fibres de lin. Une loi de comportement isotrope transverse [5] de type viscoélastique est proposée pour un pli fibre de lin/matrice. Ceci conduit à résoudre numériquement un problème non linéaire aux valeurs propres complexes. Pour cela, nous proposons un algorithme basé sur les techniques d'homotopie et de perturbation. Dans cette étude, la non linéarité est la dépendance du module d'Young et du coefficient d'amortissement du matériau en fonction de la pulsation. Des comparaisons avec des résultats numériques et expérimentaux issus de la littérature permettent de valider la méthode proposée.

## 2. Equations du problème

### 1.1 Equation du problème de vibration des structures composites

En considérant le Principe des Puissances Virtuelles, la relation contrainte déformation et la discrétisation par éléments finis, le problème discret de vibration des structures composites peut s'écrire sous la forme :

$$([K^*(\omega)] + C^*[M])\{U^*\} = \{0\} \quad (\text{Eq. 1})$$

avec  $C^* = -\omega^2$

$[M]$  désigne la matrice de masse. Le vecteur modal est représenté par  $\{U^*\}$  et la fréquence de vibration par  $\omega$ . Les composantes complexes sont signalées par un astérisque (\*) exceptée  $\omega$ , pour des raisons de simplification d'écriture. Ainsi la matrice de rigidité  $[K^*(\omega)]$ , dépendante de la fréquence, est complexe.

### 1.2 Expression de la matrice de rigidité $K^*(\omega)$

La matrice de rigidité de la structure dépend du nombre de plis, de l'épaisseur et de l'orientation de ces plis ainsi que des propriétés mécaniques du matériau. En considérant la loi de comportement d'un pli, isotrope transverse [4], cette matrice de rigidité peut être mise sous la forme symbolique suivante :

$$[K^*(\omega)] = [\Lambda_L].E_L^*(\omega) + [\Lambda_T].E_T^*(\omega) + [\Lambda_{LT}].G_{LT}^*(\omega) \quad (\text{Eq. 2})$$

Où les opérateurs  $[\Lambda_{\mathcal{M}}]$  dépendent du nombre de plis, de leur épaisseur ainsi que de leur orientation. A noter, que par souci de simplification, nous considérons dans cette écriture que tous les plis du stratifiés sont constitués du même matériau. Ainsi, les modules  $E_L^*(\omega)$ ,  $E_T^*(\omega)$ ,  $G_{LT}^*(\omega)$  sont identiques pour toutes les couches et peuvent être mis en facteur. Au niveau de la résolution numérique, les plis peuvent être constitués de matériaux différents. Les modules  $E_L^*(\omega)$ ,  $E_T^*(\omega)$ ,  $G_{LT}^*(\omega)$  sont donc différents entre plis, la forme symbolique (Eq. 2) est alors plus complexe à écrire.

Dans l'équation (Eq. 2), on voit ainsi que les modules de comportement viscoélastique  $\mathcal{M}^* = (E_L^*(\omega), E_T^*(\omega), G_{LT}^*(\omega))$  sont considérés comme indépendants les uns des autres. A noter que dans cette étude les coefficients de Poisson suivant les trois directions (L, T et LT) sont également considérés constants (indépendants de la fréquence) et réels [7].

Dans ce travail, on considère que le pli a un comportement de type viscoélastique représenté par une loi de type Zener fractionnaire [3]. Chaque module  $\mathcal{M}^*$  s'écrit alors

$$\mathcal{M}^*(\omega) = \frac{\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_\infty(j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \quad (\text{Eq. 3})$$

Dans le but d'exprimer les parties réelle et imaginaire de  $\mathcal{M}^*(\omega)$ , nous réécrivons les termes  $\omega^\alpha$  et  $j^\alpha$  dans la forme suivante :

$$\begin{cases} \omega^\alpha = |\omega|^\alpha (\cos(\alpha\theta) + j\sin(\alpha\theta))^\alpha \\ j^\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ \theta = \arctan\left(\frac{\omega^i}{\omega^r}\right) \end{cases} \quad (\text{Eq. 4})$$

$|\bullet|$  représente le module d'un nombre complexe. Après quelques opérations mathématiques, les parties réelle et imaginaire peuvent s'exprimer ainsi :

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{r*}(\omega) = \mathcal{M}_0 \frac{(1 + (c_1 + 1) \omega_n^\alpha [\cos(\alpha\theta)c_2 - \sin(\alpha\theta)c_3] + c_1 \omega_n^{2\alpha})}{1 + 2 \omega_n^\alpha [\cos(\alpha\theta)c_2 - \sin(\alpha\theta)c_3] + \omega_n^{2\alpha}} \\ \mathcal{M}^{i*}(\omega) = \mathcal{M}_0 \frac{(c_1 - 1) \omega_n^\alpha [\cos(\alpha\theta)c_3 + \sin(\alpha\theta)c_2]}{1 + 2 \omega_n^\alpha [\cos(\alpha\theta)c_2 - \sin(\alpha\theta)c_3] + \omega_n^{2\alpha}} \end{cases} \quad (\text{Eq. 5})$$

avec  $\omega_n = \tau|\omega|$  ,  $c_1 = \frac{\mathcal{M}_\infty}{\mathcal{M}_0}$  ,  $c_2 = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$  ,  $c_3 = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$

Le problème à résoudre (Eq. 1) est donc complexe et non-linéaire. Dans cette étude, nous proposons une méthode de résolution basée sur l'association des techniques d'homotopie et de perturbation.

### 3. Résolution du problème

Pour résoudre le problème de vibration (Eq. 1) et évaluer à la fois la fréquence de résonance et l'amortissement de la structure, les codes commerciaux tels que Abaqus ou Ansys ne sont pas adaptés. Ici, nous proposons une méthode basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation (MNOE) [2].

Nous considérons le problème non linéaire (Eq. 1) ayant pour inconnue le vecteur complexe  $\{U^*, C^*\}$ . La technique d'homotopie est utilisée afin de le résoudre par un algorithme itératif d'ordre élevé. Les incréments suivants sont introduits :

$$\begin{cases} \Delta U^* \\ \Delta C^* \end{cases} = \begin{cases} U^* - U_0^* \\ C^* - C_0^* \end{cases} \text{ et } [\Delta K^*] = [K^*(\omega)] - [K^*(\omega_0)] \quad (\text{Eq. 6})$$

avec  $\{U_0^*, C_0^*\}$ , un point initial à définir.  $[K^*(\omega_0)]$  correspond à la matrice de rigidité calculée en  $\omega_0$ . Après insertion de (Eq. 6) et de quelques manipulations, nous obtenons :

$$[L]\{\Delta U^*\} + \Delta C^*[M]\{U_0^*\} + \{R_0\} + [\Delta K^*]\{U_0^*\} + [\Delta K^*]\{\Delta U^*\} + \Delta C^*[M]\{\Delta U^*\} = \{0\}$$

$$\text{Avec } [L] = [K^*(\omega_0)] + C_0^*[M] \text{ et } R_0 = ([K^*(\omega_0)] + C_0^*[M])\{U_0^*\} \quad (\text{Eq. 7})$$

Ceci nous permet d'introduire artificiellement un paramètre  $\varepsilon$  :

$$[L]\Delta U^* + \Delta C^*[M]\{U_0^*\} + \varepsilon \{R_0\} + \varepsilon [\Delta K^*]\{U_0^*\} + [\Delta K^*]\{\Delta U^*\} + \Delta C^*[M]\{\Delta U^*\} = \{0\} \quad (\text{Eq. 8})$$

On peut remarquer que le problème initial (Eq. 1) correspond à  $\varepsilon = 1$ .

Le point initial est choisi de la manière suivante  $\{U_{na}, \omega_{na}\}$  et représente respectivement le mode propre réel et la fréquence de résonance non amortie, obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres réelles par des méthodes classiques telles que la méthode de sous-espace ou la méthode de Lanczos.

A ce stade, nous cherchons l'ensemble des termes du vecteur  $X = \{U^*, C^*, \omega, \mathcal{M}^*\}$  sous la forme d'une série entière du paramètre  $\varepsilon$  et tronquée à un ordre  $N$  :

$$\{X\} = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \{X_j\} \quad (\text{Eq. 9})$$

Dans l'expression de la matrice  $K^*(\omega)$  (Eq. 2) apparaît les modules  $\mathcal{M}^*$ . Cette dernière est également décomposée comme une série entière par rapport au paramètre  $\varepsilon$  :

$$[K^*(\omega)] = [K^*] = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [K^*_j] = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \{[\Lambda_L] \cdot E_{L_j}^* + [\Lambda_T] \cdot E_{T_j}^* + [\Lambda_{LT}] \cdot G_{LT_j}^*\} \quad (\text{Eq. 10})$$

Où  $[K_0^*]$  est calculée en prenant  $\omega$  égal à  $\omega_0$ , soit  $[K_0^*] = [K(\omega_0)]$ .

L'introduction des développements asymptotiques ((Eq. 9) et (Eq. 10)) dans l'équation modifiée (Eq. 8) et l'identification suivant les puissances de  $\varepsilon$  conduisent aux systèmes linéaires suivants:

Ordre 1 :

$$[L]\{U_1^*\} + C_1^* [M]\{U_0\} = -R_0 \quad (\text{Eq. 11})$$

Ordre 2 :

$$[L]\{U_2^*\} + C_2^* [M]\{U_0\} = -[K_1^*]\{U_0\} - C_1^* [M]\{U_1^*\} - [K_1^*]\{U_1^*\} \quad (\text{Eq. 12})$$

Ordre  $k \geq 2$  :

$$[L]\{U_k^*\} + C_k^* [M]\{U_0\} = -[K_{k-1}^*]\{U_0\} - \sum_{j=1}^{k-1} (C_j^* [M]\{U_{k-j}^*\} + [K_j^*]\{U_{k-j}^*\}) \quad (\text{Eq. 13})$$

La difficulté de cette étude réside dans la dépendance des modules de comportement  $\mathcal{M}^*$  à la fréquence  $\omega$ . Ainsi, l'équation (Eq. 3) définissant cette relation est fortement non linéaire. L'identification à chaque ordre  $k$  des coefficients de  $\mathcal{M}_k^{r*}$  et de  $\mathcal{M}_k^{i*}$  (Eq. 5) n'est ainsi pas simple à réaliser. L'introduction des développements asymptotique dans ces équations suppose donc de modifier ces dernières afin d'identifier les relations de récurrence. L'idée générale est d'introduire de nouvelles variables afin de réécrire les équations à traiter sous une forme quadratique plus adaptée à l'insertion des développements asymptotiques [8]. Ainsi les expressions suivantes sont définies :

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2 = (\omega_n^2 + \xi) \\ A = v^{2\alpha} \\ B = v^\alpha \\ X = \frac{\omega^i}{\omega^r} \\ \theta = \arctan X \\ Z = X^2 \\ T = \cos(\alpha\theta) \\ S = \sin(\alpha\theta) \\ D = (c_1 + 1)[c_2 T - c_3 S] \\ F = 2[c_2 T - c_3 S] \\ H = (c_1 - 1)[c_3 T + c_2 S] \\ Y = FB \end{array} \right. \quad \text{Avec les formes différentielles :} \quad \left\{ \begin{array}{l} v dA - 2\alpha A dv = 0 \\ v dB - \alpha B dv = 0 \\ d\theta = \frac{1}{1+Z} dX \\ dT = -\alpha S d\theta \\ dS = \alpha T d\theta \end{array} \right. \quad (\text{Eq. 14})$$

$\xi$  est un paramètre de régularisation dont la valeur est définie par l'utilisateur. Dans les applications numériques, ce paramètre varie entre  $\xi=10^{-20}$ . Cette régularisation permet d'éviter des difficultés numériques au voisinage d'une pulsation nulle. Le symbole « d » désigne la différentielle de la variable.

L'équation (Eq. 5) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}^{r*}(\omega) = \mathcal{M}_0 \frac{1 + DB + c_1 A}{1 + Y + A} \\ \mathcal{M}^{i*}(\omega) = \mathcal{M}_0 \frac{HB}{1 + Y + A} \end{array} \right. \quad (\text{Eq. 15})$$

Comme  $\omega$  est une inconnue développée en série, les variables  $A, dA, B, dB, v, dv, D, F, H, \theta, T, S, X, Y, Z$  sont cherchées également sous forme de série. Une fois, l'ensemble des développements asymptotiques en  $\varepsilon$  de toutes les variables réalisé, l'expression des modules et variables est obtenue pour chaque ordre à partir de l'identification suivant les puissances du paramètre  $\varepsilon$ . Ainsi à partir de l'ordre  $k \geq 2$ , les expressions des parties réelle et imaginaire des modules sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_k^r = \frac{\lambda_0 (B_0 D_k + B_k D_0 + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j D_{k-j}) + c_1 A_k) - \Lambda_0^r (Y_k + A_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_j^r (Y_{k-j} + A_{k-j})}{1 + Y_0 + A_0} \\ \Lambda_k^i = \frac{\lambda_0 (B_0 H_k + B_k H_0 + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j H_{k-j})) - \Lambda_0^i (Y_k + A_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_j^i (Y_{k-j} + A_{k-j})}{1 + Y_0 + A_0} \end{array} \right. \quad (\text{Eq. 16})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 v_k = \frac{2\omega_{n0}\omega_{nk} + \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{nj}\omega_{nk-j} - \sum_{j=1}^{k-1} v_j v_{k-j}}{2v_0} \\
 dv_{k-1} = kv_k \\
 dA_{k-1} = \frac{2\alpha \left( A_0 dv_{k-1} + \left( \sum_{j=1}^{k-2} A_j dv_{k-j-1} \right) + A_{k-1} dv_0 \right) - v_{k-1} dA_0 - \sum_{j=1}^{k-2} v_j dA_{k-j-1}}{v_0} \\
 dB_{k-1} = \frac{\alpha \left( B_0 dv_{k-1} + \left( \sum_{j=1}^{k-2} B_j dv_{k-j-1} \right) + B_{k-1} dv_0 \right) - v_{k-1} dB_0 - \sum_{j=1}^{k-2} v_j dB_{k-j-1}}{v_0} \\
 A_k = \frac{dA_{k-1}}{k} \\
 B_k = \frac{dB_{k-1}}{k} \\
 X_k = \frac{\omega_k^i - X_0 \omega_k^r - \sum_{j=1}^{k-1} X_j \omega_{k-j}^r}{\omega_0^r} \\
 \theta_k = \frac{kX_k - \sum_{j=1}^{k-1} j\theta_j Z_{k-j}}{k(1 + Z_0)} \\
 Z_k = 2X_0 X_k + \sum_{j=1}^{k-1} X_j X_{k-j} \\
 T_k = -\frac{\alpha}{k} \left[ kS_0 \theta_k + \sum_{j=1}^{k-1} j\theta_j S_{k-j} \right] \\
 S_k = \frac{\alpha}{k} \left[ kT_0 \theta_k + \sum_{j=1}^{k-1} j\theta_j T_{k-j} \right] \\
 D_k = (c_1 + 1)[c_2 T_k - c_3 S_k] \\
 F_k = 2[c_2 T_k - c_3 S_k] \\
 H_k = (c_1 - 1)[c_3 T_k + c_2 S_k] \\
 Y_k = B_0 F_k + B_k F_0 + \sum_{j=1}^{k-1} B_j F_{k-j}
 \end{array} \right.$$

A noter que pour des raisons de facilité de lecture, nous n'avons pas fait la distinction entre parties réelle et imaginaire dans les expressions précédentes.

En développant chacun des termes dépendant de  $\omega$ , sous sa forme asymptotique et en identifiant suivant les puissances de  $\varepsilon$  dans l'équation (Eq. 8), on a obtenu une série de problèmes linéaires. Pour avoir autant d'équations que d'inconnues, une condition de normalisation sur le mode est rajoutée :

$$\{ {}^t U_k^* \} [M] \{ U_0^* \} = 0$$

A l'ordre  $k$ , le problème s'écrit alors:

$$[L_t] \begin{Bmatrix} U_k^* \\ p_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [M] \{ U_0^* \} \\ {}^t ([M] \{ U_0^* \}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_k^* \\ p_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_k^{nl*} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le second membre,  $\{ F_k^{nl*} \}$ , dépendra seulement des termes précédents et l'opérateur tangent  $[L_t]$  sera actualisé à chaque itération.

#### 4. Résultats numériques

Afin de valider la méthode de Newton d'ordre élevée (MNOE) proposée, nous considérons une plaque composite encadrée libre. Nous prenons l'exemple présenté par Hafidi et al. [3]. La plaque composite en époxy renforcée par des fibres de lin ( $V_f = 40\%$ ) a les caractéristiques géométriques suivantes :  $(170 \times 10 \times 1 \text{ mm}^3)$ . Elle est constituée de 4 plis dont les paramètres matériaux sont donnés dans la Table 1. Les coefficients de Poisson  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{TL}$  et la masse volumiques sont respectivement égaux à 0,43, 0,11 et  $1289 \text{ kg/m}^3$ . La loi viscoélastique est de type Zener fractionnaire dont les paramètres sont définis dans Tab. 1.

	$\mathcal{M}_0$ (GPa)	$\mathcal{M}_\infty$ (GPa)	$\tau$ (s)	$\alpha$
$E_L$ ( $0^\circ$ )	19,2	20,7	$1,50 \cdot 10^{-5}$	0,422
$E_T$ ( $90^\circ$ )	5,03	5,63	$1,59 \cdot 10^{-5}$	0,422
$G_{LT}$ ( $\pm 45^\circ$ )	2,65	2,9	$1,50 \cdot 10^{-5}$	0,422

Tab. 1. Paramètres rhéologiques des modèles de Zener Fractionnaire d'un pli fibres de lin/polymère.

Les résultats de la figure 1 représente l'évolution du coefficient d'amortissement en fonction de la fréquence de vibration pour les modules et permet de comparer nos résultats numériques aux résultats expérimentaux et numériques de Hafidi et al. [3].

Les points représentant les résultats numériques obtenus par la méthode MNOE suivent les courbes expérimentale et numérique obtenus par Hafidi et al. [3]. Cela nous montre que le calcul des fréquences amorties, nécessaire pour calculer les coefficients d'amortissement est correctement réalisé par la méthode proposée.

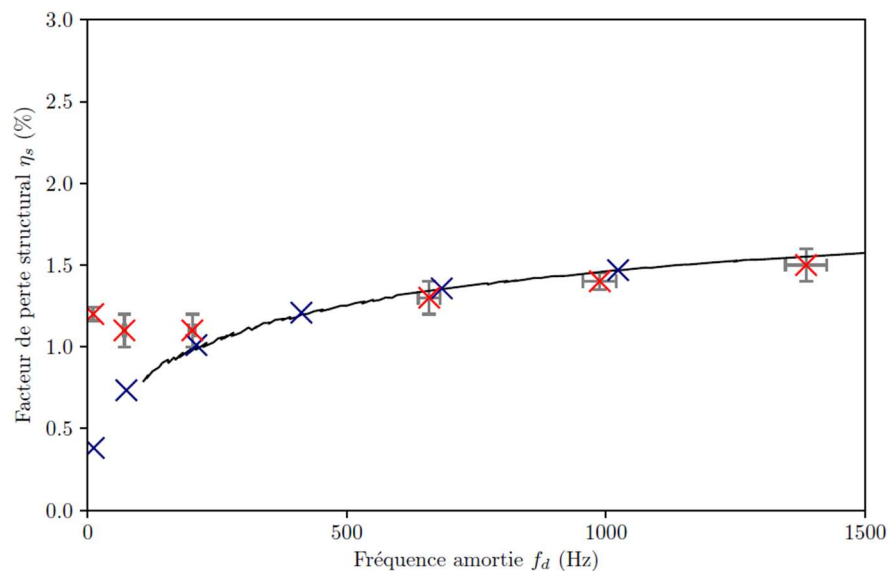


Fig. 1. Dépendance en fréquence du coefficient d'amortissement  $\eta_s$  pour un composite  $[\pm 60^\circ]_s$ . Comparaison entre les résultats numériques (—) et expérimentaux (x) de Hafidi et al. [3] et les résultats numériques MNOE (x).



## 5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un algorithme itératif d'ordre élevé (MNOE) pour résoudre le problème de vibration d'une structure composite [9]. Cette méthode est basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation. Elle permet de passer d'un problème non-linéaire en une série de problèmes linéaires. La particularité de ce travail réside dans le fait que la loi de comportement des modules de chaque pli est de type Zener fractionnaire : ces derniers varient en fonction d'une puissance de la fréquence. Ceci implique l'introduction de variables intermédiaires et une modification des équations initiales pour écrire une série de problèmes linéaires à résoudre. Dans ce cas, le second membre est calculé en fonctions des inconnues aux ordres précédents. Une comparaison avec les résultats expérimentaux et numériques présentés par Hafidi et al. [3] permet de valider l'ensemble des développements pour un composite présentant des plis identiques en fibres de lin/époxy. Dans ce travail, nous n'avons présenter qu'une loi de type Zener fractionnaire mais des développements identiques ont été réalisés pour les lois de type Zener Maxwell et Maxwell généralisé.

Une campagne d'essais expérimentaux permettra de déterminer précisément les coefficients matériaux nécessaires à la simulation numérique de ces structures composites à base de fibres de lin.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier l'Agence Nationale de la Recherche pour le financement accordé par le programme ANR AAPG2019 CE10 à travers le projet Bio-Amortissement.

## Références

- [1] F. Duc, P.E. Bourban, C.J.G. Plummer, J.-A.E. Manson, « Damping of thermoset and thermoplastic flax fibre composites », *Composites: Part A*, 64, 115-123, 2014.
- [2] L. Duigou, E.M. Daya and M. Potier-Ferry, « Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11-12): p. 1323-1335, 2003.
- [3] A. El-Hafidi, P.B. Gning, B. Piezel, M. Belaïd, S. Fontaine. « Determination of dynamic properties of flax fibres reinforced laminate using vibration measurements ». *Polymer testing*, 57, 219-225, 2017.
- [4] D. Gay, « Matériaux composites », Editions Lavoisier, 690 pages, 1987.
- [5] A. Hallal, F. Fardoun, R Younes, F Hage Chehade. « Evaluation of longitudinal and transversal Young's moduli for unidirectional composite material with long fibers ». *Advanced Materials Research* 324, pp 189-192, 2011.
- [6] P. Litewka, R. Lewandowski. « Dynamic characteristics of viscoelastic Mindlin plates with influence of temperature », *Computers & Structures*, Volume 229, 2020.
- [7] M. Matter. « Identification modale numérique-expérimentales des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites », Thèse de doctorat en Mécanique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2008.
- [8] M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Descamps, J.M. Cadou, H.L. Cao and A. Elhage Hussein. « Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique ». *Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t.324, Série II b, 171-177, 1997.
- [9] M. Ziapkoff, L. Duigou, G. Robin, JM. Cadou, EM. Daya. « A high order Newton method to solve vibration problem of composite structures considering fractional derivative Zener model ». *Mechanics of advanced materials and structures*, <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2161115>, 2022