



HAL
open science

Commentaire sur les projets de programme de mathématiques du cycle 1 et du cycle 2

Christine Chambris

► **To cite this version:**

Christine Chambris. Commentaire sur les projets de programme de mathématiques du cycle 1 et du cycle 2. Conseil Supérieur des Programmes. 2024. hal-04604251

HAL Id: hal-04604251

<https://hal.science/hal-04604251v1>

Submitted on 6 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Intention du texte

Par une lettre de saisine en date du 8 janvier 2024, le ministre de l'Éducation nationale et de la Jeunesse a demandé au Conseil Supérieur des Programmes (CSP) de réviser les programmes de français et de mathématiques des cycles 1 et 2 et ce pour une entrée en vigueur à la rentrée 2024. Cette révision s'inscrit dans le cadre du « choc des savoirs » qui vise à « faire progresser l'ensemble des élèves » en s'appuyant sur « les pédagogies les plus efficaces ».

Le CSP a rendu public les projets de programmes d'enseignement de français et mathématiques de la PS jusqu'au CE2 le 8 avril 2024. La direction générale de l'enseignement scolaire (DGESCO) a engagé une consultation nationale sur ce projet de programme du 16 avril au 13 mai 2024, avec la possibilité de faire parvenir des observations sur le projet de programme avant le vendredi 3 mai 2024.

Une contribution, relative aux projets de programme de mathématiques pour le cycle 1 et pour le cycle 2, a été adressée à la DGESCO dans le cadre de cette consultation. Le présent texte en est une révision, communiquée au CSP au début du mois de juin 2024. En écho au cadre du « choc des savoirs » posé par le ministère, les observations rapportées dans ce texte portent **sur les savoirs au cœur de l'enseignement des mathématiques**.

L'exploration des cultures mathématiques scolaires de plusieurs pays d'Asie de l'Est dont les pédagogies apparaissent comme efficaces suggère que des savoirs (concepts et propriétés) *sur les nombres et les opérations* non-identifiés dans notre culture mathématique scolaire pourraient contribuer à l'efficacité de ces « pédagogies », notamment les concepts d'unité et de quantité. Le succès des pédagogies asiatiques reposerait alors, entre autres, sur des savoirs qui pourraient ne pas avoir été importés, ce qui questionne d'emblée *l'importation de l'efficacité*. Entre autres, le texte examine le thème des fractions, qui repose sur la notion d'unité.

Des travaux de recherche en didactique suggèrent que les propriétés des opérations nécessaires pour raisonner en calcul notamment sont, elles aussi, largement non identifiées dans notre culture mathématique scolaire. Dès lors, c'est la flexibilité en calcul qui risque d'être compromise, en particulier si l'enseignement des « procédures fondamentales », censées être adaptées aux nombres en jeu, dont l'automatisation est visée, ne s'appuie pas sur une forme d'explicitation des savoirs qui les sous-tendent.

Le texte met ainsi en évidence un ensemble de savoirs nécessaires pour enseigner et apprendre le nombre et le calcul à l'école qui sont ignorés depuis plusieurs décennies par l'immense majorité des acteurs et qu'il y a urgence à prendre le temps d'une réflexion collective sur les savoirs de l'arithmétique scolaire. Il est impossible d'*improviser* une révision des programmes.

Pour leurs lectures et commentaires constructifs, remerciements à : Bertrand Lebot, Mélanie Guenais, Lalina Coulange, Luca Agostino, Myriam Becqueriaux, Guylaine Fréguis, Alexandra Radovanovic, Michèle Couderette, Michèle Artigue, Stéphane Vinatier, Aline Robert, Éric Mounier, Céline Constantin, Nadine Grapin, Anne-Marie Rinaldi, Catherine Thomas.

Mots-clés : Didactique des mathématiques ; Quantités ; Unités ; Savoir transparent ; Invisibilité des savoirs ; Arithmétique scolaire, Concepts et propriétés mathématiques

Commentaire sur les projets de programme de mathématiques du cycle 1 et du cycle 2

Christine Chambris

Laboratoire de didactique André Revuz, CY Cergy Paris Université

Professeure des universités

christine.chambris@cyu.fr

<https://cv.hal.science/christine-chambris>

1	PRÉAMBULE : RESSOURCES ET SOURCES POUR L'ANALYSE DU PROJET DE PROGRAMMES	3
2	LA VERBALISATION ?	5
2.1	LA VERBALISATION DES FRACTIONS.....	5
2.2	LA VERBALISATION D'UNE PROCÉDURE, CELLE D'UNE EXPLICATION	8
2.3	CONCLUSION SUR LA VERBALISATION.....	10
2.4	COMMENT ENSEIGNER ET QUAND ?	11
3	QUELQUES COMMENTAIRES SUPPLÉMENTAIRES SUR LES FRACTIONS DANS LE PROJET	12
3.1	PLUSIEURS POINTS DE VUE SUR LES FRACTIONS	12
3.2	PARTAGER EN PARTS ÉGALES.....	13
3.3	L'ORDRE.....	13
3.4	LES ÉQUIVALENCES DE FRACTIONS.....	14
3.5	QUAND DÉMARRER ?.....	14
4	SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION.....	15
	DES MOTS ET DES SIGNES : LES UNITÉS	18
5	SUR LE CALCUL – LES SAVOIRS INVISIBLES	19
5.1	ADAPTER SA PROCÉDURE AUX NOMBRES EN JEU ?.....	19
5.2	QUELQUES REMARQUES CONCLUSIVES SUR LE CALCUL	22
	DES MOTS ET DES SIGNES : LE CALCUL	23
6	SUR LES PROBLÈMES : CONFUSION ENTRE CALCUL ET OPÉRATION	25
	DES MOTS ET DES SIGNES : LES OPÉRATIONS.....	27
7	QUELQUES MOTS SUR LE PROJET DE PROGRAMME POUR LE CYCLE 1	28
7.1	DES ÉPISTÉMOLOGIES DES MATHÉMATIQUES ET DE L'ENSEIGNEMENT À LA MATERNELLE QUI QUESTIONNENT	28
7.2	UNE ENTRÉE DANS L'UNIVERS DES NOMBRES EN OPPOSITION À L'INTUITION ET LES LIENS ROMPUS AVEC LES QUANTITÉS.	
	28	
8	POUR CONCLURE.....	30
9	RÉFÉRENCES	31

Je suis chercheuse en didactique des mathématiques. Ma note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches (2022) porte sur les savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres et du calcul à l'école¹.

Aussi, ai-je lu avec un vif intérêt les projets de programmes en consultation pour les cycles 1 et 2 en mathématiques et entrepris d'en réaliser un commentaire. J'ai retenu quelques points qui m'ont semblé particulièrement importants et significatifs. Cette sélection me semble être de nature à alimenter une réflexion plus large. Je n'ai pas eu le temps, et cela aurait par ailleurs conduit à un texte beaucoup plus long, de commenter l'ensemble du projet. Eu égard à mon champ d'expertise, je me suis concentrée sur les thèmes nombre, calcul, résolution de problèmes, grandeurs et mesures, je n'ai pas étudié les projets de programme pour la géométrie. J'ai par ailleurs introduit, au fil du texte, une rubrique « des mots et des signes » qui pointe des questions pratiques liés à l'utilisation ou l'introduction de certains mots ou signes pour enseigner les nombres et le calcul à l'école.

Les sections 2 à 6 du texte portent essentiellement sur le projet de programme du cycle 2, la section 7 sur le cycle 1. Toutefois, des éléments qui me semblent critiques relativement au projet pour le cycle 1 sont évoqués dans les sections 2 à 6 et ce commentaire forme un tout.

Puisque ce qui doit animer notre projet pour l'école est un « choc des savoirs », ce sont **les savoirs au cœur de l'enseignement des mathématiques** qui ont orienté ma lecture et l'élaboration de ce commentaire.

1 Préambule : ressources et sources pour l'analyse du projet de programmes

Ce commentaire s'appuie sur un ensemble de ressources, à la fois constituées de travaux de recherche (les miens et d'autres) et d'une expérience du « terrain », notamment :

- des études comparatives sur le plan des savoirs mathématiques à l'école avant la réforme des années 1970 et aujourd'hui, sur la numération décimale, la proportionnalité, le nombre, les grandeurs et leurs mesures en particulier,
- des études des spécificités de l'enseignement en Asie (Chine, Japon, Singapour dans une moindre mesure, quelques lectures sur la Corée du Sud), au plan des savoirs dans le domaine du nombre et du calcul,
- vingt années d'expérience comme formatrice, en mathématiques, pour le premier degré, en formation initiale et continue d'enseignantes, et formatrice de formateurs pour le premier degré (pour des institutions variées telles que ESEN, IREM de Paris, la plupart des instances de la formation continue de l'académie de Versailles, etc.) notamment sur les thèmes du calcul mental, de la résolution de problèmes arithmétiques, du nombre en maternelle,
- des retours d'information venant des enseignants de terrain concernant leurs besoins observés ou exprimés sur les contenus à enseigner.

Ces ressources ont été mobilisées pour éclairer la logique des savoirs dans le projet de programme. J'ai cherché à clarifier à la fois leur logique interne dans le projet et ce qui pouvait motiver certaines logiques en explorant des sources diverses.

Il a été beaucoup question de Singapour et de sa « méthode » pour ce projet de programme. Pour des raisons que j'ignore, les cultures mathématiques scolaires de la Chine, du Japon, de Singapour aujourd'hui et notamment de la France des années 1930 partagent des similitudes

¹ Mes travaux sont accessibles à partir de la page <https://cv.hal.science/christine-chambris>.

au plan des savoirs qui sont enseignés. J'ai ainsi alimenté mes analyses par des ressources sur l'enseignement au Japon et aussi en Chine.

La société de Singapour est multiculturelle (population d'origine chinoise ~75%, malaise ~15%, indienne ~7%). Depuis plusieurs décennies, l'enseignement à l'école élémentaire se déroule en anglais et une langue maternelle (au choix) est enseignée dès le CP. Une conséquence est que de nombreuses ressources pour enseigner les mathématiques à l'école sont publiées en anglais ce qui les rend plus accessibles au plan international que celles du Japon ou de la Chine, par exemple. En France, la Librairie des écoles a traduit et adapté une première collection de manuels singapouriens en 2007, puis une seconde en 2016. Cette dernière adaptation a été dirigée par Monica Neagoy, comédienne et consultante sur l'enseignement des mathématiques, membre de la commission Villani – Torossian, membre actuellement du CSEN. Nous n'avons en réalité accès, ici, à la culture mathématique scolaire singapourienne que par ce que nous en donnons à voir ces adaptations successives. Pour nous rapprocher de cette culture, nous avons consulté le programme de mathématiques de Singapour (version 2013), accessible en ligne. Une révision des programmes a été publiée en 2021 mais les programmes sont peu détaillés. Les programmes de 2021 comportent apparemment peu de changement. D'ailleurs, le préambule du programme de 2013 précisait déjà « in fact, little has been changed in the content as this has stabilised over the years » (p.6). Le contenu est stable. Cette stabilité augure d'ailleurs de la difficulté d'accéder aux raisons des choses, essentielles pourtant pour comprendre les tenants et aboutissants des pratiques, dans la mesure où elles risquent de relever de ce qui est tacitement partagé par les acteurs (et donc, non explicité). L'étude de la littérature de recherche sur l'enseignement, produite par des singapouriens, constitue toutefois une source intéressante où des déterminants tacites dans des textes comme les programmes sont susceptibles, parfois, d'être explicités.

Les facteurs de réussite d'un système éducatif sont complexes. Parmi les facteurs de réussite, on ne peut douter par exemple de l'importance du pilotage. La Charte du Conseil Supérieur des Programmes définie par le décret du 24 juillet 2013 recommande entre autre de ne pas effectuer les révisions de programmes « dans l'urgence ou pour des raisons conjoncturelles ».

Produire un projet de programme, pour six années, en quatre mois pour une mise en œuvre cinq mois plus tard est malheureusement une situation de révision « dans l'urgence », et même dans *l'extrême urgence*. Singapour ne semble pas agir ainsi. Le ministère Singapourien indique en préambule de la nouvelle version des programmes publiée, pour les six niveaux de l'élémentaire en même temps, « Implementation starting with 2021 Primary One Cohort ». Autrement dit, l'implémentation commence pour les élèves de CP, en 2021, ils suivront un curriculum complet et les enseignants ont la vision de l'ensemble quand ils commencent. Pour les autres élèves ils terminent ce qu'ils ont commencé. C'est donc exactement le contraire de ce qui est envisagé en France : six niveaux commencent en même temps (de la petite section au CE2), les élèves de MS, GS, CE1 et CE2 interrompent ainsi ce qu'ils ont commencé et les enseignants doivent les « raccrocher » à des choses qu'ils n'ont pas commencées. Personne n'a la vision d'ensemble, jusqu'au CM2 (ou la 6^e).

Si des raisons de la révision sont données dans la lettre de saisine à savoir, l'« action résolue pour l'élévation du niveau de nos élèves et la lutte contre les fatalités du destin », aucune évaluation précise des besoins ne semble avoir été faite, l'introduction de la lettre précise d'ailleurs qu'« une première amélioration des résultats des élèves à l'entrée en 6^e » est observée. Il me paraît paradoxal de changer un programme complet quand des améliorations sont constatées avec le précédent. Il faut du temps pour que les enseignantes et les formatrices fassent évoluer leurs pratiques à partir d'un programme. Le changement permanent est un obstacle.

Signalons aussi que Singapour est un pays de 5,5 millions d'habitants (en 2015). Il y a 30 000 enseignants pour les écoles et collèges et 365 écoles et collèges. D'après les chiffres de rentrée 2022 de l'académie de Versailles, c'est à peu près deux fois plus d'élèves et d'enseignants que dans le département de l'Essonne (ou encore la moitié de l'académie). Pour être enseignant à Singapour, il faut être dans le premier tiers à la sortie du lycée et les enseignants sont aussi bien payés que les ingénieurs (Jamet, 2019). Le « modèle » du système éducatif de Singapour est ainsi difficilement exportable, en France.

Eu égard aux similitudes signalées supra, relatives aux savoirs dans les cultures mathématiques en Asie de l'Est actuellement, afin d'éclairer les analyses des contenus singapouriens, je me suis appuyée sur un « guide pédagogique » publié par le ministère de l'éducation japonais sur le programme de 2009², qui semble être un document d'accompagnement du programme. Il a été traduit en anglais et une édition bilingue a été réalisée, apparemment à destination des japonais, pour faciliter la coopération internationale. Par ailleurs, le Japon est aussi un pays dont les résultats aux évaluations PISA sont très bons. C'est un pays deux fois plus peuplé que la France. Son système de formation par les lesson studies a été pris comme modèle dans le vademecum pour la formation des référents mathématiques de circonscription qui a fait suite au « rapport Villani-Torossian ». Si l'on pense que les savoirs (et donc leur explicitation) jouent un rôle dans l'efficacité des pratiques pédagogiques, inclure une telle ressource est légitime pour éclairer nos analyses.

Conformément à la lettre de saisine, d'autres sources que le programme singapourien ont été utilisées pour élaborer le projet de programme. En premier lieu, sur certaines parties, les programmes antérieurs mais aussi les repères annuels de progression, les guides CP et CM, ainsi que d'autres ressources pour les formations produites par l'inspection générale ces dernières années.

2 La verbalisation ?

Le nom verbalisation ou le verbe verbaliser apparaît 15 fois dans le projet. On retrouve un élément du tryptique (manipuler, verbaliser, abstraire) popularisé par le rapport Villani Torossian. Qu'est-ce que la verbalisation ?

Pour que les phases de manipulation et de représentation permettent l'accès à l'abstraction, il importe notamment que les procédures engagées soient verbalisées, à la fois par les élèves eux-mêmes, avec leurs propres mots, et par l'enseignant, avec le vocabulaire adapté. (p.4, préambule)

La verbalisation est un intermédiaire entre la manipulation et l'abstraction. C'est un moyen pour l'enseignant de reformuler les productions langagières des élèves et d'introduire le « vocabulaire ».

2.1 La verbalisation des fractions

Voici un premier extrait du programme singapourien. Il s'agit de l'introduction des fractions, qui se fait en 2^e année³ (p.38).

² “Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics (Grade 1-6)”. Version bilingue (Japonais Anglais) éditée par Masami Isoda (voir la bibliographie)

³ Pour les systèmes éducatifs autres que le français, j'utilise 1^e année pour les élèves de 6-7 ans (CP en France), 2^e année pour ceux de 7-8 ans (CE1 en France), etc.

SUB-STRAND: FRACTIONS	
1. Fraction of a Whole	Students should have opportunities to:
1.1 fraction as part of a whole 1.2 notation and representations of fractions 1.3 comparing and ordering fractions with denominators of given fractions not exceeding 12 <ul style="list-style-type: none"> unit fractions like fractions 	(a) give examples of fractions in everyday situations and use language such as '2 out of 3' to describe fractions. (b) use concrete objects, fraction discs and pictorial representations to represent and interpret fractions in terms of unit fractions, e.g. $\frac{3}{5}$ is 3 units of $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, or 3 fifths, and to compare the sizes of fractions referring to the same whole.

On trouve au CE1 (p.21), l'extrait suivant.

- Savoir interpréter, représenter, écrire et lire des fractions inférieures ou égales à 1.	L'élève sait que trois huitièmes s'écrit mathématiquement $\frac{3}{8}$. Il sait dire que $\frac{3}{8}$ d'un tout correspond à trois parts de ce tout partagé en huit parts égales. L'élève sait que la partie grisée de chacune des figures ci-dessous correspond aux trois huitièmes de la figure. <div style="text-align: center;"> </div> L'élève sait que $\frac{3}{8}$ est égal à $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, qu'il lit « trois huitièmes est égal à un huitième plus un huitième plus un huitième » ou encore « trois huitièmes est égal à trois fois un huitième ».
--	--

Puis, un peu plus loin, toujours en 2^e année, dans le programme singapourien (p.39) :

2. Addition and Subtraction	Students should have opportunities to:
2.1 adding and subtracting like fractions within one whole with denominators of given fractions not exceeding 12	(a) work in groups to write addition and subtraction stories involving like fractions. (b) use fraction discs to illustrate addition and subtraction of like fractions within one whole. e.g. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (3 fifths + 1 fifth = 4 fifths)

Et, toujours au CE1 (p.22)

- Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur.	L'élève sait calculer $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$. Il s'appuie pour cela sur des manipulations, sur des représentations et sur la verbalisation : « deux tiers du tout moins un tiers du tout, cela fait un tiers du tout » ou « un cinquième du tout plus deux cinquièmes du tout, cela fait trois cinquièmes du tout ».
---	---

Bien que partageant des traits communs les deux extraits ne sont pas organisés de la même façon et les différents points de vue sur les fractions ont des statuts différents. En appui sur les « unit fractions », le texte singapourien indique que $\frac{3}{5}$ est « 3 unités de $\frac{1}{5}$ », « $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ », « 3 cinquièmes ».

Le texte français indique « trois huitièmes s'écrit mathématiquement $\frac{3}{8}$ ». J'interprète que « $\frac{3}{8}$ » doit être vu comme une *écriture mathématique* (donc une écriture symbolique, l'écriture fractionnaire, avec un trait de fraction, un numérateur et un dénominateur) quand « trois huitièmes » en est une *lecture* ; $\frac{3}{8}$ est présenté comme *étant égal* à $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ et il résulte de cette égalité une *lecture* « trois huitièmes est égal à un huitième plus un huitième plus un huitième ». Ce découpage témoigne de la vision des mathématiques indiquée dans le préambule : « accéder au langage mathématique (écriture décimale ou fractionnaire (...)) » (p.4). Seul le langage écrit (formel) apparaît comme *mathématique*. La *lecture* remplit ici une fonction d'oralisation de l'écrit. Vient ensuite une autre fonction de la *lecture* avec ce qui traduit un traitement, dans la langue naturelle (qui n'apparaît pas à Singapour), et permettrait alors de dire aussi « trois fois un huitième ». Ce traitement semble faire écho à ce qui est proposé précédemment au CP qui conduit à l'introduction de la multiplication : « l'élève comprend et utilise le mot « fois » dans le cadre d'additions itérées » (p.10, CP)⁴. S'agit-il d'amorcer l'apprentissage de la multiplication d'une fraction et d'un entier au CE1 ? (elle est introduite en 5^e année à Singapour). Dans cette transformation de l'extrait singapourien, deux expressions ont disparu : « 3 units of $\frac{1}{5}$ » et « 3 fifths », que je traduis par 3 unités de $\frac{1}{5}$ [3 unités de $\frac{1}{8}$] et 3 cinquièmes [3 huitièmes]. Ce « trois fois un huitième » semble venir remplacer ces expressions disparues.

⁴ Pour laisser à ce texte une longueur raisonnable, je n'étudierai pas davantage le thème de la multiplication.

Les deux extraits suivants traduisent une transformation du même ordre à propos de l'addition et de la soustraction des fractions. Le texte singapourien indique : « $3/5+1/5=4/5$ (3 fifths+1 fifth = 4 fifths) » quand le texte français indique : « L'élève sait calculer (...) $1/5+2/5$. Il s'appuie sur (...) la verbalisation : « un cinquième du tout plus deux cinquièmes du tout, cela fait trois cinquièmes du tout ». La « verbalisation » inclut ici la détermination du résultat du calcul. Elle inclut donc un traitement qui va au-delà de la simple oralisation. La « verbalisation » remplace ainsi l'expression symbolique du programme singapourien $1 \text{ cinquième} + 2 \text{ cinquièmes} = 3 \text{ cinquièmes}$.

D'après mes travaux, l'expression « 3 units of $1/5$ » est fondamentale. Elle témoigne du fait que « $1/5$ » est **une unité** dans la culture mathématique scolaire singapourienne. C'est le fait que $1/5$ soit considéré comme une unité qui permet de **définir** $3/5$ comme *3 unités $1/5$* et donc comme *3 cinquièmes*, et ensuite de compter « en cinquièmes » pour le calcul, comme on peut compter « en unités simples » mais aussi « en dizaines » quand la dizaine est une unité, comme on mesure « en centimètres » ou « en mètres », etc. Il y a donc, pour concevoir les fractions dans la culture singapourienne, à concevoir un concept central : l'unité. Il faut concevoir que « un cinquième » est une unité, qui s'obtient comme étant la « taille » qui résulte d'un partage de 1 en cinq parts égales ou qui va 5 fois dans 1.

Ce qu'on appelle « fractions unitaires » (p.20) (fractions du type $1/n$) en France, présentées comme démarrage du travail, s'appelle « unités fractionnaires »⁵ dans la culture singapourienne. Cette appellation permet d'envisager, là-bas, un ensemble de raisonnements sur les « unités » difficiles à concevoir, ici, où ce point de vue conceptuel est absent.

Pour résumer :

Dans le texte singapourien, dans un premier temps, l'unité permet de définir les fractions, ensuite d'élaborer et justifier des raisonnements pour le calcul. On calcule avec une unité qui est le cinquième : $3 \text{ cinquièmes} + 1 \text{ cinquième} = 4 \text{ cinquièmes}$.

La disparition des deux expressions simultanément dans le projet de programme témoigne a contrario de la non-identification de $1/5$ (ou du cinquième) comme unité dans la culture mathématique scolaire institutionnelle en France⁶. La *verbalisation* est soit une « oralisation » : la fraction a/b se « lit » *a-bièmes*, soit un moyen pour le raisonnement (passer de un huitième plus un huitième plus un huitième à trois fois un huitième) sans que les concepts qui permettent le raisonnement soient identifiés. On imagine alors difficilement

⁵ La traduction de « unit fraction » ne va pas de soi. Je reprends l'expression de la chercheuse chinoise Liping Ma « fractional unit ». On pourrait utiliser « fraction d'unité ». Le problème est que « fraction d'unité » ne porte pas l'idée que la « fraction d'unité » est elle-même une unité.

⁶ Signalons deux autres disparitions du premier extrait singapourien qui vont dans le même sens : « like fractions » et « sizes » (tailles). L'expression « like fractions », même si elle apparaît avec la précision « i.e., fractions with the same denominator » (et est sans surprise traduite par *fractions ayant le même dénominateur*), ne manque pas de faire écho à l'expression « like numbers » de l'arithmétique chinoise qui désigne les « nombres concrets qui ont des *unités avec le même nom* » (Ma & Kessel, p.444, je souligne). Ainsi, à Singapour, $3/5$ et $2/5$ semblent être regardées comme des fractions qui ont la *même unité* (i.e., $1/5$). De façon complémentaire, l'expression singapourienne « comparer les *tailles* des fractions (...) » sous-entend que comparer des fractions c'est comparer des tailles. À Singapour comme ailleurs, une *taille* peut être exprimée comme *un certain nombre de fois une certaine unité* (d'une certaine taille, elle aussi). Comparer deux fractions signifie alors, là-bas, comparer deux quantités exprimées chacune sous la forme d'un certain nombre d'unités d'une certaine taille. Cette expression est devenue « expliquer pourquoi $2/5$ [resp. $1/5$] est *plus petit* que $3/5$ [resp. $1/3$] (...) ». On voit qu'il serait crucial d'enseigner, ici, que le dénominateur indique la taille de l'unité (et *dénomme* l'unité) et que le nombre d'unités à considérer (de cette taille) est indiqué par le numérateur. Cette nécessité et les indices *quantitatifs* qui pourraient aider à la repérer ont comme disparu et semblent être remplacés par une leçon de vocabulaire : « Connaître et utiliser les mots « dénominateur » et « numérateur » » (p.22) et l'élève « sait que le dénominateur indique le nombre total de parts égales » (p.22).

qu'ils puissent être enseignés par les enseignants, on imagine encore plus difficilement comment les élèves pourraient les apprendre.

On pourrait introduire une désignation orale « unité-un cinquième » (écrite « unité 1/5 »), j'y reviendrai. Remarquons qu'étant admis qu'un cinquième est une unité, on devrait pouvoir se référer au petit mantra « La présence des unités dans les calculs présentés est fortement encouragée » (p.23) et écrire « 3 cinquièmes + 1 cinquième = 4 cinquièmes »⁷.

2.2 La verbalisation d'une procédure, celle d'une explication

Les deux exemples qui suivent sont apparemment étrangers l'un à l'autre⁸. Le premier porte sur la multiplication par dix, le second sur les fractions et leur « égalité ». Le premier est présent à deux reprises, une fois au CE1 (avec le nombre 72), une fois au CE2 (avec le nombre 724, ci-après).

[Exemple 1] L'élève sait que, lors d'une multiplication par 10, une unité devient une dizaine, une dizaine devient une centaine et une centaine devient un millier. Ainsi, chaque chiffre du nombre initial prend une valeur 10 fois plus grande : le chiffre des unités devient le chiffre des dizaines, le chiffre des dizaines devient le chiffre des centaines et le chiffre des centaines devient le chiffre des milliers.

Un outil du type « glisse-nombres » peut être utilisé pour accompagner les premières multiplications par 10, en complément de la verbalisation de la procédure en termes d'unités de numération. Progressivement, l'élève apprend à s'en détacher.



$$10 \times 724 = 7240. \text{ (p.37, CE2)}$$

[Exemple 2] L'élève sait expliquer pourquoi six huitièmes d'un tout est égal à trois quarts de ce tout, en s'appuyant sur des manipulations, sur des représentations géométriques et sur des verbalisations : « Si, pour un même tout, je fais des parts deux fois plus petites et que je prends deux fois plus de parts, alors j'en prends la même chose ».



(p.33, CE2)

Il n'est pas facile de voir que ces deux « verbalisations » font intervenir une même propriété des unités. Ce n'est pas facile car d'une part la propriété est non enseignée et pour partie implicite et d'autre part les unités sont pour partie cachées. Une version « faible » de la propriété est la suivante :

- M1⁹ : Pour un même nombre d'unités, si l'unité est plus petite (respectivement plus grande), la quantité totale est plus petite (respectivement plus grande).

Une version « forte » de la propriété est la suivante :

⁷ Il importe de distinguer d'une part le travail sur les « unités de compte » qui peuvent être incarnées dans des tailles relatives d'objets qu'on peut dénombrer, qui a sa place à l'école, d'autre part le travail qui consiste à « faire la somme de 3 et de 1 » au numérateur que l'on appréhenderait tout autrement par exemple dans un « monde de fraction-quotient » qui pourrait être enseigné au collège. $5x = 3$ et $5x' = 1$ si je fais la somme de $5x$ et $5x'$ - soit de 3, j'obtiens un nombre $(x+x')$ qui multiplié par 5 donne 4... soit $4/5$

⁸ Voir (Chambris, Coulange, Rinaldi, & Train, 2021) pour une amorce d'étude de deux situations de ce type.

⁹ Moyen mnémotechnique pour le lecteur : La lettre M a été choisie pour indiquer qu'il s'agit d'une propriété de la Mesure. La lettre N qui vient ensuite évoque que c'est une propriété de la mesure qui implique un rapport qui est un Nombre.

- N1 : Pour un même nombre d'unités, si l'unité est k fois plus petite (respectivement k fois plus grande), la quantité totale est k fois plus petite (respectivement k fois plus grande).

M1 traduit que, pour un même nombre d'unités, une augmentation ou une diminution de l'unité a une répercussion sur la quantité globale. En d'autres termes, si deux lignes ont été mesurées, que l'on a trouvé pour la première un certain nombre de centimètres et pour la seconde, le même nombre, cette fois, de mètres. La seconde est plus longue que la première car le mètre est plus long que le centimètre. Réciproquement, si l'on sait que quatre éléphants occupent plus de place que quatre fourmis, on peut en déduire qu'un seul éléphant occupe plus de place qu'une seule fourmi. Les unités sont les quantités d'espace occupées respectivement par un éléphant et une fourmi. Les enfants ne perçoivent pas spontanément cette relation. **Dans un premier temps¹⁰, dans le comptage, pour les enfants, seul le nombre compte : plus le nombre est grand, plus la quantité comptée est grande.** Il faut conceptualiser l'unité comme une certaine « taille » pour appréhender le fait que 6 unités d'un certain type peuvent être plus grandes que 10 unités d'un autre type. C'est ce qui se joue dans M1.

N1 est un raffinement de M1. Il faut déjà comprendre M1 pour comprendre N1. N1 apporte une précision quantitative sur la transformation de la taille de l'unité. Elle s'appuie sur une comparaison multiplicative (k fois plus grand ou k fois plus petit). La transformation de l'unité (k fois plus grande ou plus petite) se répercute sur la quantité totale.

Revenons à la multiplication par dix. Une signification de *multiplier par dix* est *rendre dix fois plus grand*. D'après la propriété N1, il suffit donc de prendre des unités dix fois plus grandes, en même nombre, pour multiplier par dix. Étant appris (et donc enseigné) que la dizaine est une unité, qui est dix fois plus grande que l'unité simple, de même pour la centaine vis-à-vis de la dizaine, le millier vis-à-vis de la centaine, il suffit effectivement de changer les unités simples en dizaines, les dizaines en centaines, les centaines en milliers pour multiplier par dix. La première partie de la *verbalisation* proposée « L'élève sait que, lors d'une multiplication par 10, une unité devient une dizaine, une dizaine devient une centaine et une centaine devient un millier » traduit un « déplacement » des chiffres dans la multiplication par dix, la deuxième traduit les relations entre les unités mais rien ne traduit le lien entre la taille des unités et la quantité totale. La difficile propriété N1 n'est pas identifiée. À la place, si l'on peut dire, un « outil », le « glisse-nombre » est censé *accompagner* la multiplication ou les élèves.

Venons-en à la « verbalisation » de l'équivalence des fractions. La propriété N1 nous dit que si les parts sont deux fois plus petites, pour un même nombre de parts, la quantité totale est deux fois plus petite. Cette partie du raisonnement nécessite de concevoir les parts (petites ou grandes) comme des unités. Ensuite, il faut rendre cette quantité deux fois plus grande. C'est une autre propriété qui permet d'obtenir le résultat.

En effet, j'ai évoqué précédemment les propriétés M1 et N1. Il est possible d'identifier une autre propriété que j'appelle M2.

- M2 : Pour une unité donnée, plus le nombre d'unités est grand, plus la quantité totale est grande.

Il existe une version forte de cette propriété. Je l'appelle N2. Elle raffine M2 et précise comment la transformation du nombre d'unités affecte la quantité totale.

¹⁰ Ce « dans un premier temps » signifie qu'il est essentiel que, dans un premier temps, les enfants *apprennent* cette relation entre nombre et quantité (souvent de nature spatiale). Elle n'a rien d'inné, même si elle peut être considérée comme « intuitive ». Il faut donc qu'elle leur soit enseignée pour qu'ils l'apprennent. Elle devrait constituer un objectif essentiel du programme du cycle 1 (cf. section 7).

- N2 : Pour une unité donnée, si le nombre d'unités est k fois plus grand (ou k fois plus petit), la quantité totale est k fois plus grande (ou k fois plus petite).

Pour terminer sur l'équivalence des fractions : après avoir rendu la quantité totale deux fois plus petite en prenant des unités deux fois plus petites, on peut rendre cette quantité totale deux fois plus grande en prenant deux fois plus d'unités.

Pour finir sur ce point, j'introduis deux propriétés que j'appelle pour l'une compensation approximative (CA) et pour l'autre compensation multiplicative (CM). On peut les voir pour l'une comme une combinaison de M1 et M2, pour l'autre comme une combinaison de N1 et N2.

- CA : Pour faire une quantité donnée, on peut prendre plus d'unités plus petites ou encore prendre moins d'unités mais des unités plus grandes.
- CM : Pour faire une quantité donnée, on peut prendre k fois plus d'unités, k fois plus petites ou encore prendre k fois moins d'unités, mais des unités k fois plus grandes.

La propriété CM, instanciée aux unités fractionnaires, permet à elle seule d'élaborer l'équivalence des fractions par des raisonnements de complexité éventuellement variée : $1/8$, c'est deux fois plus petit qu'un quart (car * ' $1/8$ c'est plus petit qu'un quart et qu'on met deux huitièmes dans un quart' ou car ** 'il y a deux fois plus de huitièmes que de quarts dans 1'). Ce point de vue multiplicatif sur la relation entre $1/8$ et $1/4$ traduit que « $1/4$ est 2 unités $1/8$ ». Il est nécessaire pour faire fonctionner les propriétés CM et N1.

On pourrait être tenté de proposer « on met 2 huitièmes dans un quart » à la place de *. Le passage de « on met 2 huitièmes dans un quart » à « $1/8$ est deux fois plus petit qu'un quart » cache une difficulté conceptuelle bien mise en évidence dans (Chambris, Coulange, Rinaldi, Train, 2021), sans néanmoins avoir de solution pour la dépasser. Il apparaît néanmoins qu'un pré-requis d'ordre est nécessaire pour établir la comparaison multiplicative, « $1/8$ c'est plus petit qu'un quart » (annoncé dans le projet pour le CE1) en amont permet d'amorcer la comparaison et pourrait peut-être contribuer à constituer une étape intermédiaire. Signalons enfin que nous sommes ici en présence de trois formulations qui constituent chacune une « verbalisation » associée à la même figure (par exemple à la figure 1), donnant ainsi à *voir* ou plutôt à *penser* et donc à *verbaliser trois notions différentes* dans le même dessin !



Figure 1 : représentations de $3/4$ et $6/8$ (p.33, CE2)

Comme ce développement permet de l'entrevoir, CM n'a rien d'évident.

Ma compréhension des savoirs en jeu dans l'enseignement des nombres et du calcul à l'école m'autorise à dire que, pour que les élèves deviennent en mesure d'appréhender les « verbalisations » évoquées au début de cette section, il est indispensable qu'ils « connaissent » ces six propriétés. Ce sont des savoirs absolument cruciaux dans le champ du « raisonnement multiplicatif ». S'ils ne sont pas suffisants, ils seront nécessaires dans l'apprentissage des savoirs de la proportionnalité, au cycle 3.

2.3 Conclusion sur la verbalisation

La présentation du mot « verbalisation » dans le projet de programmes suggère qu'il suffirait de mettre des mots, les bons, d'abord ceux des élèves, puis ceux du professeur, pour que l'abstraction se fasse. Comme on l'a vu dans les analyses qui précèdent, le mot verbalisation est utilisé dans une diversité de situations. Parfois, il s'agit d'une simple oralisation d'une *expression écrite* dans le formalisme mathématique. D'autres fois, l'usage du mot permet de modifier, voire de faire disparaître, probablement inconsciemment, une expression

mathématique qui n'existe pas dans la culture mathématique scolaire dominante en une autre expression qui est l'oralisation d'une autre expression mathématique qui, elle, existe dans cette culture. Certaines fois une « verbalisation » est un moyen, probablement inconscient, de « noyer le poisson » et masque une difficulté conceptuelle. C'est ce qui se passe avec le « glisse-nombre », c'est aussi ce qui se passe avec l'introduction du mot « fois ». D'autre fois, ce qui apparaît sous l'étiquette « verbalisation » est une propriété mathématique non-identifiée dans la culture mathématique scolaire dominante.

La verbalisation est présentée comme un moyen pour l'abstraction et l'introduction du vocabulaire par l'enseignant. On voit qu'il ne s'agit pas tant de vocabulaire que de concepts et de propriétés, dont on imagine mal comment l'introduction d'un mot pourrait remplacer l'enseignement d'un concept ou de propriétés par des activités, choisies et orchestrées par l'enseignant, afin de conduire à des apprentissages des concepts et propriétés dûment identifiés. L'utilisation du mot « verbalisation » permet ainsi de pallier un ensemble de difficultés qui se présentent lors de l'élaboration du programme. Le mot verbalisation *masque* des concepts et des propriétés essentiels pour l'apprentissage. Son usage me semble pouvoir témoigner aussi de la non-identification de savoirs cruciaux pour l'apprentissage de l'arithmétique scolaire et donc pour son enseignement.

On ne peut pas apprendre aux enseignants à faire verbaliser les élèves, tant que les savoirs, qui devraient être au cœur du travail dans la classe et au cœur de la verbalisation ne sont pas identifiés par les programmes (ou d'autres ressources pour formateurs ou enseignants). Si l'enseignant ne sait pas ce qu'il doit enseigner il est incapable de diriger une discussion entre élèves, même si des élèves s'expriment bien. Il ne sait pas ce qu'il doit faire ressortir. Le *bon sens* ne suffit pas pour enseigner quelque chose d'aussi subtil que l'arithmétique de l'école élémentaire.

2.4 Comment enseigner et quand ?

Les deux sections qui précèdent, sur la verbalisation, ont mis en évidence deux choses :

- Un concept, celui d'unité, dans le champ de l'arithmétique scolaire,
- Six propriétés qui impliquent ce concept.

Cette mise en évidence d'un concept et de six propriétés, absents de la culture mathématique scolaire française, mais qui peuvent être considérés par les lecteurs qui les connaissent comme « évidents » ou seulement « intuitifs » amène à poser une question critique : faut-il enseigner ce concept et ces propriétés ? Au-delà des exemples examinés, qui paraissent peut-être anecdotiques à certains lecteurs, il y a de nombreuses raisons de penser (et nous en apportons quelques-unes dans la suite du texte), que l'absence de l'enseignement du concept d'unité et des propriétés qui s'y rattachent est source de difficultés pour beaucoup d'élèves dans l'apprentissage de l'arithmétique scolaire. Ce concept et ces propriétés me semblent être au cœur de ce que la littérature internationale, en particulier anglo-saxonne, appelle le « raisonnement multiplicatif ». Si l'école vise effectivement à réduire les inégalités d'accès aux savoirs, la réponse à notre question ne peut alors être que positive. La question qui vient ensuite est : Comment les enseigner et quand ?

Il me semble important de préciser que la mise au point de séquences d'enseignement pour que les élèves apprennent le « raisonnement multiplicatif » est une question vive de la recherche en didactique depuis plusieurs décennies, au plan international. Il existe probablement des cultures didactiques, en Asie de l'Est, qui savent enseigner ces « raisonnements ». Leurs secrets nous parviennent difficilement. Il semble, au moins pour le Japon et la Chine, que ces cultures accordent une part importante à l'enseignement des quantités continues et que, comme Singapour, elles enseignent des représentations « continues » (bandes, lignes ou barres) pour la résolution de problèmes arithmétiques (que

les quantités relèvent du *discret* ou du *continu du quotidien* comme des gateaux, des ficelles, des liquides ou autres). Ces représentations « continues » pourraient témoigner, dans ces cultures, de la présence d'un modèle unificateur de la quantité, ayant des attributs du « continu »¹¹. Les travaux de Polotskaia et Savard (2021) ou encore ceux d'Ovide, Coulange et Train qui s'appuient sur les longueurs apportent aussi des pistes pour N1 et CM. Ces enseignements y sont envisagés au **cycle 3**. À ma connaissance, les travaux sur l'enseignement de raisonnements qui impliquent M1 ou CA sont un peu plus avancés (notamment les travaux de Cortina et Visnovska¹²) que ceux qui impliquent CM ou N1. Enseigner le concept d'unité est aussi une question vive.

S'il semble que M1, M2 et CA devraient être enseignées (sous des formes à préciser) au cycle 2, probablement à partir du CE1. La programmation de N1, N2 et CM devrait faire l'objet d'une réflexion approfondie.

3 Quelques commentaires supplémentaires sur les fractions dans le projet

La notion de fraction est un point sensible du projet de programme du cycle 2. Depuis les années, 1970 au moins, les fractions n'étaient pas au programme avant le cours moyen. Introduire un tel objet pose des problèmes complexes qui me semblent peu identifiés dans le projet. Le projet propose par ailleurs d'introduire les fractions dès le CP. Qu'en est-il à Singapour ? et ailleurs ?

3.1 Plusieurs points de vue sur les fractions

Les travaux de recherche sur les fractions (et sur la multiplication mais je ne m'y attarderai pas) mettent en évidence deux niveaux de conceptualisation sur les « fractions », on pourrait dire deux concepts de fraction. En première approximation, on peut dire que le premier (partage) consiste à envisager *un tiers comme une des parts (plus ou moins grande et non un morceau matériel*¹³) dans un partage en trois parts de même taille d'une quantité (qui est le 1). Le second (unité) consiste à envisager *un tiers comme la taille d'une part dans un partage en parts de même taille* d'une quantité (qui est le 1). Un troisième point de vue (unité également) un petit peu différent du second consiste à voir un tiers comme la **taille** qu'il faut prendre trois fois pour avoir l'unité (ou le tout ou le 1). Le second est plus abstrait que le premier, il n'est pas lié *directement* à la quantité *incorporée* dans l'objet partagé au sens où il faut fabriquer un objet conceptuel unique (abstraire mathématiquement) à partir des trois parts. Le second (ou le troisième) est indispensable pour l'apprentissage des fractions comme nombre. Un quatrième point de vue est « trois dans un » (ou « quatre dans un ») évoqué dans la note 10 à propos des partages « géométriques ». Il ne s'agit pas d'un point de vue quantitatif. La filiation avec les fractions est loin d'être évidente. Les élèves en difficulté dans l'apprentissage des fractions sont souvent au niveau « partage », voire au niveau « trois dans un ». Le point de vue partage exclut les fractions supérieures à 1.

Le projet fait le choix d'introduire au CE1 les fractions, probablement, comme partage. La négociation de la transformation de ce point de vue en unité est forcément délicate. D'ailleurs, l'intention au CE2 même si elle introduit des unités me semble peu claire quant à ce projet. Il est fait mention par exemple de « 1/2 d'unité » et non de « unité 1/2 ».

¹¹ Cette remarque n'est pas sans rapport avec ce que nous écrivons dans la section 7, sur les apprentissages des premiers nombres en lien avec une perception quantitative de l'espace.

¹² Voir les références : (Cortina, Visnovska & Zuniga, 2014) et (Vale, et al., 2021).

¹³ Les deux exemples de partage en quatre du carré au CP et la petite formule « L'élève sait reconnaître qu'un quart d'une figure est grisé dans différentes configurations » (p.9) ne manquent pas d'interroger. S'agit-il de faire de la géométrie ou de comprendre qu'on parle de « quantité de surface » ? D'ailleurs, est-ce bien le même quart ? Le lecteur intéressé pourra consulter la page 160 du guide collègue (Chambris, 2021).

3.2 Partager en parts égales

Passés le $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ du CP, le projet indique à propos de la poursuite de l'étude des fractions :

L'élève sait partager le contenu d'une bouteille d'eau en quatre parts égales dans quatre verres (par transvasement ou avec une seringue non graduée pour affiner le partage) et dire qu'il y a un quart du contenu de la bouteille dans chaque verre. (p.20, CE1)

Il me semble qu'il importe de se mettre d'accord, pour enseigner l'arithmétique, sur le fait que ce qui est important n'est pas tant l'exactitude, la précision du partage, que la conceptualisation nécessaire de ce que signifient des parts égales : *aucune des parts n'est plus grande que l'autre*. C'est une quantité (ce qui peut être plus ou moins grand) que l'on partage. Parler de *parts de même taille* plutôt que de parts égales permettrait peut-être de lever certaines ambiguïtés, au moins au début de l'apprentissage.

Il importe aussi de faire remarquer et d'enseigner que, pour réaliser un partage équitable, si on prend dans une part et que l'on met dans l'autre, la première part va diminuer, la seconde va augmenter, puisque le total ne change pas. C'est un principe de compensation, que j'appelle principe de compensation interne (de l'addition).

Cette définition de « parts égales » et cette propriété de compensation interne des quantités sont probablement des prérequis essentiels pour appréhender les unités fractionnaires. Il n'est pas sûr que, par exemple, dans un « pliage » en 2, en 4, en 8, on appréhende l'un ou l'autre de ces aspects.

Signalons une situation typique d'introduction des fractions au Japon (en 3^e année) et la définition des unités fractionnaires qui en découle (Watanabe, 2006). Pour mesurer un tronc d'arbre, une bande de papier a été fabriquée (effectivement) qui a la même longueur que la circonférence du tronc. Sa longueur est entre 1 mètre et 2 mètres. Se pose alors la question de la longueur de ce qui reste une fois qu'on a enlevé le mètre. Il en découle la définition suivante (que j'ai traduite de l'anglais) : « le morceau supplémentaire a la même longueur que l'une des longueurs du mètre partitionné en deux longueurs égales, et nous disons que c'est $\frac{1}{2}$ de 1 mètre »¹⁴. Il faudrait sans doute affiner la traduction mais la formulation porte l'idée que le partage en deux du mètre a conduit à la fabrication de deux longueurs égales (ce qui n'est pas le cas de tout partage en deux). Il est important de noter que cette entrée dans la fraction prépare le terrain pour voir le « demi » comme une unité. Elle s'appuie sur un partage en parts égales mais ancre ce partage dans une mesure. Le demi mètre est introduit comme quelque chose qui est une certaine taille (une certaine longueur). Ce point de vue est fondamental pour comprendre ce que sont les nombres (même si le demi-mètre n'est pas un nombre) et que les fractions sont des nombres (même si ce sont en réalité les rationnels qui en sont).

3.3 L'ordre

Depuis d'assez nombreuses années, la logique des programmes du primaire et du collège conduit à enseigner uniquement la comparaison de fractions ayant le même dénominateur, les fractions de dénominateurs différents pouvant être comparées au fur et à mesure de l'apprentissage de la réduction au même dénominateur. Il arrive néanmoins que des fractions de dénominateurs différents soient comparées sans être réduites au même dénominateur. Il peut arriver que l'on dise « plus il y a de parts, plus elles sont petites » mais le plus souvent la stratégie est « graphique » : je représente les fractions, notamment sur une droite graduée, je **vois** que c'est plus grand, donc la fraction est plus grande. Si cette pratique n'est pas à éliminer, il est crucial d'apprendre aux élèves à *raisonner* pour comparer les fractions.

¹⁴ “The extra piece is the same length as one of the two equally partitioned lengths of 1 meter, and we say it is $\frac{1}{2}$ of 1 meter.” (traduit du japonais par Watanabe, 2006, p.370)

L'enseignement de comparaisons d'unités fractionnaires est absolument central. Ce « plus je partage (équitablement) en un plus grand nombre de parts, plus celles-ci seront petites » ou « dans une quantité (longueur, superficie, etc.), plus j'ai compté d'unités, plus les unités sont petites » doit être pris au sérieux et faire l'objet d'un enseignement. Cela participe de la compréhension que les unités fractionnaires sont plus ou moins grandes. Cela participe aussi de la compréhension des nombres. Comment peut-on avoir un rapport serein aux mathématiques quand on n'a pas la *sensation*, lors d'un calcul, de la taille des nombres que l'on manipule ?

L'ordre des unités fractionnaires, dans l'ordre inverse des dénominateurs, est une application de la propriété CA. « Le quart, c'est la taille (ou la quantité) que je dois prendre 4 fois pour avoir 1. Le tiers, c'est la taille (ou la quantité) que je dois prendre 3 fois pour avoir 1. J'ai donc plus de quarts que de tiers dans 1. Par conséquent les quarts sont plus petits que les tiers. » On voit à nouveau une application et l'importance de CA. Dans leurs travaux, Cortina et Visnovska proposent une situation de mesure : deux personnes ont mesuré une bande avec leur empan, l'une a trouvé 5, l'autre a trouvé 6. Qui a la plus grande main ?¹⁵ Le problème posé aux élèves les conduit, en présence d'une seule des deux personnes à explorer les effets du report d'une main plus ou moins grande.

Il me semble alors absolument indispensable que les élèves apprennent à comparer des fractions unitaires *avant* qu'ils apprennent à reconnaître ou à fabriquer des fractions équivalentes. Par exemple, écrire $2/4 = 1/2$ ou dire « deux quarts font un demi » (CP, p.9) incorpore l'idée qu'on a deux sortes d'unités, des quarts et des demis, deux de la première sorte, une seule de la seconde sorte. Pour que cette relation prenne son sens, il faut avoir compris que les quarts sont plus petits que les demis. On peut alors se dire qu'on doit prendre plus de fois ce qui est plus petit que ce qui est plus grand pour avoir pareil. On retrouve la propriété CA qui vient éclairer la signification de l'équivalence des fractions. L'égalité est raisonnable, sans doute pas au CP.

3.4 Les équivalences de fractions

J'ai déjà longuement discuté le raisonnement proposé pour établir l'équivalence de fractions. Je n'y reviens pas. Il existe cependant (au moins) un autre raisonnement pour établir l'équivalence de fractions, beaucoup moins complexe et qui a donc une portée plus limitée, au plan du raisonnement multiplicatif, mais qui pourrait peut-être être envisagé dans un premier temps.

Pour établir l'équivalence entre $3/4$ et $6/8$, on peut, par exemple en appui sur une représentation, élaborer le raisonnement suivant. Le rectangle, c'est l'unité-1. Si je partage chaque unité-quart en 2, j'obtiens des parts plus petites car chaque part est une partie d'une unité-quart. J'obtiens, en tout, 8 parts car il y en a deux dans chaque unité-quart (ou car je peux les compter). Ces parts sont donc des unités-huitièmes. Comme j'avais 3 unités-quarts, pour avoir la même quantité, il me faut maintenant 6 unités-huitièmes (j'ai deux unités-huitièmes dans chacune des trois unités-quarts). Je peux les compter : 3 unités-quarts c'est aussi 6 unités-huitièmes.



3.5 Quand démarrer ?

Le projet de programme envisage la chose suivante pour démarrer l'enseignement des fractions.

¹⁵ Voir l'album [Mama Khanyi et les pots](#) (Vale, et al. 2021), traduit en français, inspiré de cette situation.

Au CP, l'objectif est de familiariser les élèves avec les mots « moitié », « demi » et « quart » afin qu'ils comprennent que, par exemple, un quart de disque désigne une partie du disque dans le cas d'un partage en quatre parts égales.

Les écritures fractionnaires ne sont pas utilisées au CP. (...)

L'élève comprend que deux demis font le tout, que deux quarts font un demi et que quatre quarts font le tout. Il sait que le quart est égal à la moitié de la moitié. (p.9, CP)

À Singapour les fractions sont introduites en 2^e année ; au Japon, également. Si à Singapour, les fractions étudiées en 2^e année sont les fractions inférieures à 1 et dont le dénominateur est inférieur à 12, au Japon, en 2^e année, il s'agit seulement de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{4}$ (éventuellement $\frac{1}{8}$).

Au regard de ces éléments et de ceux qui ont précédé, comment justifier le choix d'introduire les fractions, au CP, avec des équivalences ? Il est tout de même étonnant qu'en prenant Singapour comme modèle, le projet de programme se montre « plus royaliste que le roi ». Les systèmes éducatifs qui réussissent ne commencent pas à enseigner plus tôt les notions. Ils préparent le terrain, en amont, en enseignant aux élèves les concepts qui leur seront nécessaires, en aval.

Au CP, pourraient être envisagés des moyens pour réfléchir aux effets (diminution, augmentation, compensation) d'actions sur les parts dans un partage (égal ou inégal), à la fois avec les nombres mais aussi en appui sur le domaine grandeurs et mesures. Ceci pourrait non seulement préparer l'enseignement des fractions mais aussi appuyer l'enseignement du calcul en rendant sensibles les propriétés. Au CE1, pourraient être envisagés l'étude des effets de la taille des unités dans des situations de mesurage pour aller vers les propriétés de compensation des unités. L'enseignement des fractions pourrait véritablement commencer au CE2.

Quoi qu'il en soit, l'approche de la fraction comme fraction partie d'un tout qui semble envisagée pour le CE1 et la suite envisagée pour le CE2 devraient être revues pour mettre en avant le point de vue unité fractionnaire, le plus important et plus puissant pour faire des mathématiques. Cette remarque renvoie à plusieurs questions :

- quand faut-il introduire les fractions, comme unités fractionnaires ?
- quand les élèves sont-ils prêts à apprendre les unités fractionnaires ?
- si les élèves ne sont pas prêts, cognitivement à apprendre les unités fractionnaires au CE1 (le Japon ne le fait pas et, en dépit de la définition, Singapour semble se cantonner aux fractions parties de tout), est-il nécessaire de leur apprendre les fractions « parties de tout » qui n'ont pas d'avenir mathématique ?

Sous certaines conditions qui mériteraient d'être examinées, des variations sur la « taille du tout » (un rectangle plus ou moins long, par exemple) pourraient néanmoins probablement aider à dépasser un point de vue « partie de tout » sur les fractions. L'énoncé suivant « si le tout est plus grand, alors le tiers du tout est plus grand » constitue en effet une forme de la propriété M1 (ou de sa réciproque) et pourrait être pris en considération.

À partir d'un point de vue unité-fractionnaire, il est facile d'accéder à un point de vue partie d'un tout, alors que le sens inverse semble plus délicat sauf, peut-être, à mettre en avant les variations sur la taille du tout et ses effets sur la taille des parts (et réciproquement !).

4 Sur l'enseignement de la numération

En dépit de l'introduction de l'expression « unités de numération » dans le programme en 2015, l'usage des mots dizaines, centaines ou milliers dans le projet de programme ne témoigne pas complètement du fait que ces « mots » désignent des unités. Ce constat nous assure déjà que la restauration éventuelle du mot « unité » à propos des fractions ne suffirait pas pour garantir la conceptualisation d'un huitième comme unité.

On peut remarquer des gênes langagières, par exemple au CE1 :

- écritures en unités de numération (6 centaines et 3 dizaines et 5 unités ou 63 dizaines et 5 unités ou 635 unités, mais aussi d'autres écritures comme, par exemple, 3 dizaines et 6 centaines et 5 unités ou 5 unités et 5 centaines et 13 dizaines) ;
- décomposition du type : $(6 \times 100) + (3 \times 10) + (5 \times 1)$;
- décomposition additive sous la forme $600 + 30 + 5$;
- écriture en lettres (six-cent-trente-cinq). (p.19)

Les décompositions sous la forme d'expressions arithmétiques sont qualifiées de « décompositions » quand celles qui sont exprimées avec les « unités de numération » sont qualifiées d'« écritures » et les contributions des différentes « unités de numération » sont séparées par le mot « et ». La limite de ce choix est atteinte lorsqu'il faut calculer :

L'élève sait qu'ajouter ou soustraire 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 ou 90 à un nombre, c'est ajouter ou soustraire 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 dizaines à ce nombre.

Par exemple : $76 - 30 = ?$

« 30, c'est 3 dizaines. 7 dizaines - 3 dizaines = 4 dizaines. Donc $76 - 30 = 46$. » (p.12, je souligne)

Le calcul est un domaine dans lequel l'utilisation d'unités autres que 1 en numération est particulièrement efficace. On peut en effet calculer des « grandes quantités » avec des « petits nombres de grandes unités ». Comme on le voit dans l'exemple précédent, au lieu de calculer avec 70 et 30, on calcule avec 7 et 3 !¹⁶

Comment les autres font-ils ? Le programme japonais indique précisément comme objectif en 2^e année :

Addition et soustraction de nombres pouvant être considérés comme utilisant la centaine comme unité (p.131, gr 2)

Le guide pédagogique éclaire l'objectif ainsi :

Ici, addition et soustraction de nombres qui peuvent être considérés en utilisant la centaine comme unité signifie, par exemple, des calculs tels que $800 + 700$ ou $500 - 100$. Ces calculs peuvent être considérés comme $8 + 7$ ou $5 - 1$, en considérant ces nombres avec 100 comme unité. (p.131, gr 2)¹⁷

On voit que ce n'est pas tant la présence des mots « dizaines » ou « centaines » dans le calcul que la possibilité de *regarder les nombres en utilisant 100 comme unité* qui importe. Cette formule nous assure de la présence du concept d'unité, dans la culture mathématique scolaire japonaise.

Les unités 10, 100 ou 1000 dans les calculs sont une conséquence de l'existence de ces unités dans la numération elle-même. Penser que la dizaine et la centaine sont des unités oblige à penser qu'on compte des choses plus ou moins grandes. Appréhender les tailles respectives d'une dizaine et une centaine permet de dire que 4 centaines est plus grand que 4 dizaines puisqu'une centaine est plus grande qu'une dizaine. Nous retrouvons la propriété M1 que nous avons introduite avec les fractions, ici pour une meilleure compréhension de la numération des entiers.

Des telles considérations sont absentes de la culture mathématique scolaire française. Le projet fait apparaître la notion d'« unité de numération », mais sans enseigner la notion. Il n'est en effet pas question de se préoccuper de la diversité des *tailles* de l'unité et de ce que

¹⁶ Nous retrouvons la propriété CA.

¹⁷ Addition and subtraction of numbers that can be considered using hundred as a unit

Here, addition and subtraction of numbers that can be considered using hundred as a unit means, for example, calculations such as $800 + 700$ or $500 - 100$. These calculations can be thought of as $8 + 7$ or $5 - 1$, by looking at those numbers using 100 as a unit. (p.131, gr 2)

cela nous dit sur les *ordres de grandeur* de ce qui est compté et donc des nombres. Comme nous le verrons, il s'agit de la continuité inquiétante du projet pour le cycle 1.

Le projet prévoit de « déterminer le complément à la dizaine supérieure d'un nombre », mais ne prévoit de déterminer ni « la dizaine supérieure d'un nombre », ni sa dizaine inférieure. Comme les programmes précédents, le projet semble prévoir d'encadrer un nombre entre deux dizaines ou deux centaines. Précisons qu'« encadrer à la centaine » par exemple se résume souvent à remplacer les deux derniers chiffres du nombre par des zéros pour identifier le plus petit et à augmenter le chiffre des centaines de 1 (en conservant les zéros) pour le plus grand. Par exemple, **pour encadrer 357 entre deux centaines**, on peut remplacer 5 et 7 par 0, ce qui donne 300, puis augmenter 3 de 1, ce qui donne : $300 < 357 < 400$. Ces tâches constituent alors une activité purement formelle et ne contribuent pas à une perception « quantitative » des nombres. La réponse **3 centaines < 357 < 4 centaines**, qui paraît somme toute raisonnable, n'est en général pas envisagée.

En réalité, dans la culture japonaise, à partir de la 2^e année, « les élèves apprennent (...) à traiter 10 et 100 comme des unités¹⁸ ». Cela se manifeste par le calcul évoqué précédemment *en considérant 100 comme unité*. Au préalable, les élèves ont fait un travail sur les nombres. Ils doivent « comprendre la taille relative des nombres en regardant 10 ou 100 comme des unités¹⁹ ». Cette expression est explicitée et détaillée.

“To understand the relative size of numbers” means to grasp a numbers' size in terms of units such as tens and hundreds. For example, it means to see 6000 as “600 groups of a group of 10” or “60 groups of a group of 100.” The objective here is to deepen pupils' understanding of the structure of numbers and to enrich their number sense by grasping the relative size of numbers. It is important to help students understand the relative size of numbers through activities with concrete objects, and mere formal teaching should be avoided. (p.125, gr 2)

Le but est donc « d'approfondir la compréhension de la structure des nombres et d'enrichir le sens des nombres en saisissant la taille relative des nombres » et « l'enseignement purement formel doit être évité ». On imagine alors des possibilités, pour le programme français, pour enseigner un encadrement entre deux centaines qui permettrait de développer les ordres de grandeurs et la compréhension des nombres. C'est en ce sens que les programmes devraient évoluer. À terme, l'expression « unité de numération » pourrait disparaître²⁰ et on pourrait simplement parler d'*unités* dans le domaine de la *numération* ou encore dans celui du *calcul*, comme on parle d'*unités* pour la mesure des *grandeurs*.

Le programme singapourien ne dit pas que 10, 100 ou 1000 sont des unités. Pour autant, on trouve, en 1^e année « donner du sens à la taille de 100 » (p.34, gr 1), en 2^e année « compter en dizaines / centaines, pour établir que 10 dizaines font 1 centaine et que 10 centaines font 1 millier » (p. 37, gr 2, je traduis et je souligne). À partir de la 2^e année, et pour chaque nouvelle puissance de dix étudiée, on trouve un équivalent de « donner un sens à la taille de 100 et l'utiliser pour estimer le nombre d'objets de la taille de centaines » (p.37, gr 2). Il me semble que cela signifie qu'il s'agit de donner une estimation en centaines.

Concevoir les dizaines, centaines comme unités est ainsi un levier puissant pour envisager les ordres de grandeur des nombres. De même qu'on peut dire que la longueur de tel trait ou que 46 cm est entre 4 dm et 5 dm, on peut dire que le nombre 46 est entre 4 dizaines et 5 dizaines ou encore entre 4 dix et 5 dix ou entre 4.10 et 5.10 ou entre 4 (10) et 5 (10) selon la désignation adoptée pour les unités.

¹⁸ students are taught (...) to treat 10 and 100 as units

¹⁹ understand relative size of numbers by regarding 10 or 100 as a unit (p.123, gr 2)

²⁰ L'expression « unité de la numération » vient de la recherche (Chambris, 2008).

Des mots et des signes : les unités

Introduire des nouveaux concepts dans l'enseignement pose aussi la question de leur désignation. Le mot unité est utilisé dans une diversité de contextes, à l'école élémentaire. Plusieurs discussions avec les enseignants me suggèrent qu'ils sont réticents *a priori* à utiliser le mot « unité » pour parler d'autre chose que du « chiffre des unités ». Dès lors qu'on leur montre qu'ils utilisent le mot dans le contexte des mesures, ils voient la nécessité de réfléchir à des alternatives.

Les expressions « unités de mesure » pour le mètre, le kilogramme, etc., plus spécifiquement « unité de longueur », « unité de masse » existent et sont tout à fait pertinentes.

Avec la numération des entiers lors de l'étude des « grands nombres », est en général introduite l'expression « unité simple » pour parler de « 1 » ou de « un ». Les enseignants voient alors un intérêt à utiliser plus précocement l'expression « unité simple » pour l'enseignement de la numération, pour le « chiffre des unités simples » et donc pour « 1 », y compris pour les « petits nombres ».

D'autres unités deviennent nécessaires lorsqu'il est question de voir « dix » ou « un cinquième » comme des unités. Il serait possible de parler de « sur-unité » et de « sous-unités » pour désigner les unités selon qu'elles sont plus grandes ou plus petites que un.

On pourrait aussi introduire des expressions comme « unité-un cinquième » ou « unité-cinquième » pour *parler*. Il serait possible à *l'écrit* d'utiliser « unité 1/5 ». L'écriture « 3/5 » pourrait ainsi être *oralisée*, au choix, « trois cinquièmes » ou « trois unités-cinquième » ou « trois unités un cinquième », en particulier au début de l'apprentissage pour les deux dernières propositions. L'introduction des « unités-cinquièmes » pourrait aider à distinguer de « cinquième », comme adjectif ordinal. Il n'y aurait pas de raison de limiter l'usage aux sous-unités. On pourrait parler d'« unité-dix » ou d'« unité-dizaine ». Il n'y a pas de raison de rigidifier les usages et on peut aussi dire : « je prends un cinquième comme unité ».

La chercheuse chinoise Liping Ma (1999, p.37) indique l'utilisation d'une expression « basic-unit » qu'on pourrait traduire par « unité de base », en Chine. L'unité de base est l'unité dans laquelle une quantité est *exprimée*. Dans 48 dizaines, l'unité de base est la dizaine, tandis que c'est « 1 » pour 480. On peut exprimer 123 avec le dixième comme unité de base, soit 1230 dixièmes, ou encore avec 2 comme unité de base soit 61,5 unités ²¹. En réalité, lorsqu'aucune unité n'est indiquée, l'unité de base est implicite et est « 1 ». Liping Ma ne donne pas d'exemple avec les unités de mesure, mais on pourrait étendre l'usage en disant par exemple que, dans 345 secondes, l'unité de base est la seconde.

Il ne s'agit pas de faire des leçons de vocabulaire mais de disposer des mots adaptés non seulement pour doter les élèves des outils conceptuels qui leur sont nécessaires pour penser mais aussi pour parler entre enseignantes.

Pour le plaisir d'entendre les élèves raisonner, voici un extrait d'un article de Régine Douady (chercheuse en mathématique devenue chercheuse en didactique) qui relate les expérimentations qu'elle a conduites à la fin des années 1970, avec des élèves de 8-10 ans. La chercheuse rapporte les propos de l'un d'eux : « 1/60 est une bonne unité pour calculer avec 1/5, des 1/3, des 1/4, des 1/10 parce que $5 \times 2 = 10$, $5 \times 4 = 20$, $3 \times 20 = 60$, $2 \times 10 = 20$ » (Douady, 1980, p.95). Même si la chercheuse n'en fait pas mention, il n'y a aucun doute sur le fait que pour que de telles formulations soient produites par les élèves, l'enseignante avait enseigné

²¹ Contrairement à l'anglais, la langue française n'a pas de modalité uniforme pour nominaliser les adjectifs cardinaux. Il n'y a pas d'équivalent simple et efficace à « 61,5 twos ». La suggestion « unité-deux » semble au moins aussi raisonnable que celle d'une généralisation du suffixe « -aine », qui donnerait *deuxaine* mais pas *millaine*, etc. Concernant l'écrit, j'ai indiqué ci-dessus 61,5.2 ou 61,5 (2). On pourrait ajouter 61,5 unités 2.

les nombres en appui sur un concept d'unité (point de vue qui a prévalu probablement jusqu'à la fin des années 1960 en France).

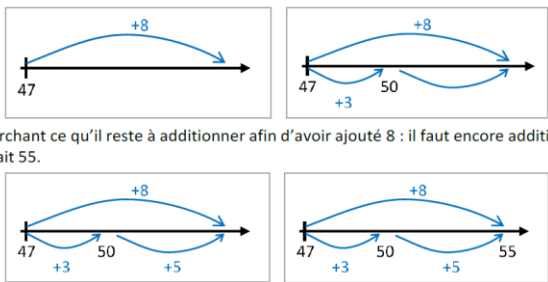

5 Sur le calcul – les savoirs invisibles

5.1 Adapter sa procédure aux nombres en jeu ?

Depuis quelques années, les prescriptions insistent sur l'importance de l'adaptation des procédures aux nombres en jeu dans le calcul mental. C'est une bonne chose qu'il existe apparemment un consensus sur ce point.

Par ailleurs, depuis de nombreuses années, les progressions en calcul mental des manuels font apparaître du CP au CM un objectif d'apprentissage « ajouter 9 », puis « ajouter 19, ajouter 29, etc. ». Ce « ajouter 9, 19 » apparaît par exemple dans les repères de progressivité à la fois au CE1 et au CE2. Cette constance interroge au regard de la complexité qu'il conviendrait de rendre croissante. Je ne m'attarde pas sur ce point.

Le projet de programme, tentant de mettre de la cohérence mais sans disposer apparemment d'une clé de lecture efficace de la situation, propose les éléments suivants pour le CP.

<p>– Ajouter un nombre inférieur à 9 à un nombre.</p> <p>(p.12)</p>	<p>Pour ajouter un nombre inférieur à 9, l'élève sait utiliser une procédure adaptée aux nombres en jeu. Si l'ajout des nouvelles unités ne conduit pas à la formation d'une nouvelle dizaine, il sait qu'il suffit d'agir sur le chiffre des unités du nombre initial. Par exemple $32 + 4 = 36$ car $2 + 4 = 6$.</p> <p>Si l'ajout des nouvelles unités conduit à changer le nombre de dizaines, par exemple, pour calculer $47 + 8$, l'élève cherche d'abord combien il faut ajouter à 47 pour aller à la dizaine supérieure, c'est-à-dire à 50 : il faut ajouter 3.</p>  <p>L'élève poursuit en cherchant ce qu'il reste à additionner afin d'avoir ajouté 8 : il faut encore additionner 5 à 50, parce que 8 c'est 3 + 5. Cela fait 55.</p> <p>Donc $47 + 8 = 55$.</p>
<p>– Ajouter 9 à un nombre.</p>	<p>L'élève sait que, pour ajouter 9 à un nombre, il peut ajouter 10 puis soustraire 1. Il sait aussi qu'il n'est pas utile de mettre en œuvre cette procédure quand le nombre a 0 ou 1 comme chiffre des unités.</p> <p>Sur son ardoise, l'élève peut simplement écrire le résultat intermédiaire permettant d'alléger sa mémoire de travail.</p>
<p>(p.12-13)</p>	<p>Ainsi, pour ajouter 9 à 37, le contenu de l'ardoise pourra évoluer chronologiquement, comme indiqué ci-dessous :</p> 

Le deuxième extrait est un emprunt au guide orange du CP, plus précisément c'est ce qui y est proposé comme « institutionnalisation » après une phase exploratoire.

Curieusement, le projet de programme sépare l'ajout d'un nombre entre 1 et 8 et l'ajout de 9. Nous²² avons travaillé récemment à partir de données recueillies dans des classes ordinaires d'enseignants qui essaient d'enseigner « le +9 ». Il ressort des observations que les jeunes élèves ne produisent *jamais* la procédure « +10-1 ». Dans nos observations, après une phase ouverte, l'enseignant tente d'enseigner ce « +9 » *contre* ses élèves. Ce qu'on observe aussi, en revanche, c'est que, dans la phase ouverte, des élèves inventent des techniques. Si leurs techniques s'appliquent à l'ajout de 9, elles ont une certaine portée et pourraient s'appliquer pour l'ajout de n'importe quel nombre inférieur à 10 (avec retenue). Même si les techniques observées ressemblent à ce qui est proposé pour $47+8$ dans le projet de programme, il y a des

²² (Batton, Celi, Chambris, Constantin, Coulange, en préparation)

différences importantes au plan des concepts que les élèves utilisent. Dans nos observations, les élèves ne résonnent pas en termes de chiffres. Ils *voient* les *nombres*, par exemple 47, composé de quarante et sept, éventuellement de 4 dizaines et 7. Ils manipulent ces objets mentaux comme s'il s'agissait d'une matière quantitative. Ils « maintiennent » la quantité tout au long du calcul. Ils *mettent* 40 de côté. Ils *mettent* 3 dans (ou à) sept pour avoir dix. Ils *mettent* ce dix dans (ou à) 40, ce qui *fait* 50. Ils s'occupent ensuite du huit dont il *reste* 5 (puisque les 3 ont été *pris* dans le 8) et *mettent* ce 5 dans (ou à) 50.

Il est difficile de repérer tous les leviers des raisonnements. Nous retrouvons néanmoins une propriété, déjà rencontrée à propos des fractions. J'ai une quantité totale (un tout), composée de parties (7 et 8). Je prends une quantité (3) dans une partie (8), ma partie diminue. Je mets cette quantité (3) dans l'autre partie (7), la partie augmente. La quantité totale (le tout) ne change pas. Il s'agit de la propriété de compensation interne évoquée précédemment à propos du partage. Nous repérons aussi l'importance de la numération pour produire un découpage efficace de 47 en 40 et 7, ainsi qu'un ensemble de faits numériques pour calculer avec les petits nombres (les compléments à dix et $8-3=5$).

Au CP, un appui sur le matériel, avec tous les « uns » visibles, éventuellement groupés par dix (voir figure 2, par exemple), comme *matière quantitative*, puis une évocation de cette *matière*, semblent plus adaptés qu'une ligne numérique pour accompagner les raisonnements des élèves.

Pour revenir à « ajouter 9 » en ajoutant 10 puis en enlevant 1, si cette technique a une pertinence, il n'y a aucune raison de la limiter à 9, sauf à vouloir faire de cette technique un jeu sur les chiffres comme c'est malheureusement souvent le cas dans les ressources (et dans les classes observées récemment) : « j'augmente le chiffre des dizaines de 1, je diminue le chiffre des unités de 1, clic, clic ». Pour (faire) comprendre la technique, il faut en donner une *explication*, c'est-à-dire un raisonnement qui permet de la produire et de lui donner une certaine généralité. Seule l'utilisation de propriétés (dans l'action ou explicitées) peut faire aboutir ce projet. En d'autres termes, sans propriété mathématique (implicite ou explicite), il semble impossible de devenir *flexible* en calcul. Sans propriété mathématique explicitée auprès des enseignants, il semble alors impossible que les enseignants soient mesure d'enseigner un calcul flexible. La forme que doit prendre l'explicitation auprès des élèves est une autre question importante dans la mesure où il ne s'agit pas d'entraîner les élèves à *réciter leurs propriétés* !

Pour être enseigné à l'école, « ajouter 10, enlever 1 pour ajouter 9 » ne doit pas être vu « algébriquement », comme ce serait le cas avec la « verbalisation » suivante : *comme* $9=10-1$, alors je peux utiliser l'associativité de l'addition des relatifs $23+9=23+(10-1)=(23+10)-1$. C'est probablement inaccessible au cycle 2. Un raisonnement qui pourrait être enseigné au cycle 2, au CE1 ou au CE2, est le suivant : « Je veux ajouter 9, c'est difficile. 9 c'est presque dix. A la place de 9, je vais ajouter dix (c'est plus facile). J'ai ajouté dix, *comme dix c'est plus que 9, j'ai trop ajouté. Je vais compenser en enlevant ce que j'ai ajouté en trop, ici 1 (ou **comme dix, c'est un de plus que 9, j'ai ajouté un de trop, je vais enlever 1 pour compenser). » Le raisonnement pourrait constituer une technique dotée d'une certaine efficacité pour ajouter n'importe quel nombre « pas trop loin » d'une dizaine entière. Plus généralement, ce type de raisonnement a une certaine efficacité dans de nombreux calculs du champ additif : au lieu d'ajouter ou d'enlever un nombre « compliqué », on ajoute ou on enlève un nombre « simple » (c'est-à-dire qu'on sait facilement ajouter ou enlever) assez proche (en mobilisant ses connaissances sur les tailles des nombres, sur les arrondis), puis on compense les ajouts en trop (resp. en moins) par des retraits (resp. des ajouts) et les retraits en trop (resp. en moins) par des ajouts (resp. des retraits).

Par exemple : calculer $47+28$ (sans poser l'opération).

28 c'est difficile à ajouter. A la place, j'ajoute 30 (c'est presque 28). J'ai 77. J'ai trop ajouté, je dois enlever pour compenser. J'ai ajouté deux de trop, j'enlève 2. 75.

Il peut aussi s'appliquer par exemple pour 47-28.

28 c'est difficile à enlever. A la place, j'enlève 30 (c'est presque 28, un peu plus). J'ai 17. J'ai trop enlevé, je dois ajouter pour compenser. J'ai enlevé deux de trop, j'ajoute 2. 19.

Il peut aussi s'appliquer par exemple pour 47+24.

24 ce n'est pas facile à ajouter. Je vais ajouter 20 (c'est presque 24, un peu moins). J'ai 67. Je n'ai pas ajouté assez. Il me reste encore 4 à ajouter à 67. Je vais déjà ajouter 3 à 7 pour faire dix. Ce qui me donne 70. Il me reste 1 dans 3. 71.

Ou encore pour calculer : $25+26+25+24$.

Je sais que 4 fois 25 c'est 100. Je remplace 26 par 25 et 24 par 25 dans mon calcul, car 24 et 26 sont proches de 25. Il faut que j'ajoute 1 à cause du 26 et que j'enlève 1 à cause du 24. $25+26+25+24$, c'est 100.

Etc.

On voit ici qu'une « même » propriété des quantités est utilisée dans tous ces calculs. C'est une propriété intuitive. Nous parlons de compensations externes²³.

- Si j'ajoute trop, je peux compenser, en enlevant ce que j'ai ajouté en trop.
- Si j'enlève trop, je peux compenser, en ajoutant ce que j'ai enlevé en trop.
- Si je n'ajoute pas assez, je peux « compenser », en continuant à ajouter.
- Si je n'enlève pas assez, je peux « compenser », en continuant à enlever.

Il est difficile d'imaginer comment des jeunes élèves peuvent produire des raisonnements efficaces en calcul s'ils ne se racontent pas, à eux-mêmes, une propriété d'un de ces types (ou une variation). Il est alors impossible, pour ceux qui n'ont pas encore construit une suffisamment bonne intuition des quantités d'imaginer tout seul, ce qu'il faut se raconter dans sa tête, pour produire le raisonnement si ces propriétés ou des variations ne leur sont pas enseignées.

La figure 2 est extraite de la leçon qui s'est déroulée au cours de la 23^e étude internationale ICMI dans une classe de 1^e année à Macao (Chine) en fin d'année scolaire, sur l'addition, avec retenue, d'un nombre à un chiffre. Elle rend visible trois stratégies de calcul, qui reposent toutes sur la même propriété de l'addition. Celle que nous avons rencontrée précédemment et appelée la compensation interne de l'addition. Les variations sur la quantité choisie (24 ou 9) pour être décomposée et/ou la décomposition qui en est faite (20 et 4, 21 et 3 pour 24, 6 et 3 pour 9) rendent possibles plusieurs stratégies de calcul qui reposent sur cette propriété mais aussi sur des connaissances en numération : ajouter dix ou un nombre entier de dizaines à un nombre à deux chiffres ($23+10$, $20+13$) ou à un chiffre ($30+3$). Des faits numériques différents sont nécessaires selon les stratégies : $10 = 9+1$ / $4=3+1$, $9+4=13$, $9=6+3$ / $4+6=10$. **La culture mathématique scolaire de Macao fait apparemment le choix de ne pas choisir entre ces trois stratégies pour ajouter un nombre à un chiffre « avec retenue ». Il est important de remarquer que ces trois stratégies font fonctionner les mêmes savoirs dans des instanciations un peu différentes, laissant ainsi la possibilité d'une certaine flexibilité tout en contenant la diversité des savoirs engagés, au sens d'en éviter l'inflation.**

²³ Voir la « grille des propriétés » sur la page du groupe Calcul mental (IREMS de Paris).



Figure 2 : trois stratégies de calcul pour $24+9$, à Macao (Chine) (Novotna, Kaur, et al. 2018, p.260)

Pour résumer, dans un premier temps, il semble raisonnable d'enseigner à *tous* les élèves un raisonnement spontané chez *certain*s élèves (celui que nous avons développé pour $47+8$, avec une alternative qui serait de mettre 2 dans 8 pour faire 10, pour cela décomposer 47 en $40+7$ et prendre le 2 dans 7, où il reste alors 5) et qui sous-tend les stratégies de la figure 2. Il s'appuie sur la propriété interne de compensation de l'addition²⁴. On peut attendre l'année suivante pour le second raisonnement (celui que nous avons développé pour « ajouter 9 »). Il s'appuie sur une autre propriété. Il ne semble pas souhaitable d'enseigner ce type de raisonnement au CP car il ne semble pas produit spontanément par les jeunes élèves qui ont une bonne compréhension des nombres.

Penser les propriétés qui servent d'appui aux stratégies de calcul est probablement un levier pour penser la programmation de l'enseignement des raisonnements en calcul. Encore une fois, en termes d'explicitation des propriétés, il faut distinguer ce que les enseignants doivent savoir pour enseigner et ce qu'ils doivent (faire) expliciter aux élèves et à quels moments. C'est une réflexion importante qui doit être menée.

5.2 Quelques remarques conclusives sur le calcul

De façon générale, les stratégies de calcul mental nécessitent de mettre des œuvres des connaissances de trois ordres :

- sur les propriétés des opérations ou des quantités. Les propriétés standard des opérations dans \mathbb{R} (pour le champ additif : associativité, commutativité) ne suffisent pas pour produire les techniques efficaces.
- sur les faits numériques pour produire des décompositions et recompositions,
- sur la numération, qu'elle soit orale ou écrite, pour produire des décompositions et recompositions, pour envisager les ordres de grandeur des quantités manipulées.

Notre expérience des formations à l'enseignement du calcul mental nous suggère qu'une telle présentation des savoirs est très utile aux enseignants pour analyser les calculs et donc pour programmer l'enseignement aux élèves. Parmi les propriétés, nous avons évoqué la propriété de compensation additive et quatre propriétés de compensation externe. Il y en a d'autres. De même que M1, M2, CA, N1, N2 et CM, les propriétés des quantités du champ additif sont largement inconnues dans la culture mathématique scolaire française même si des travaux en

²⁴ Il devrait d'ailleurs être enseigné plus tôt dans l'année, pour des calculs avec des nombres beaucoup plus petits. Par exemple, dans un raisonnement comme « je sais que 5 et 5 c'est dix. Pour calculer $6+4$, comme je sais que 6 c'est un de plus que 5, je peux prendre 1 dans 6, ce qui fait 5 et je le mets à 4 ce qui fait 5 (car je sais que 5 c'est un de plus que 4). $6+4$, c'est aussi $5+5$, c'est dix ». Travailler les raisonnements avec les petits nombres aiderait aussi à envisager plusieurs stratégies pour les nombres plus grands (cf. figure 2).

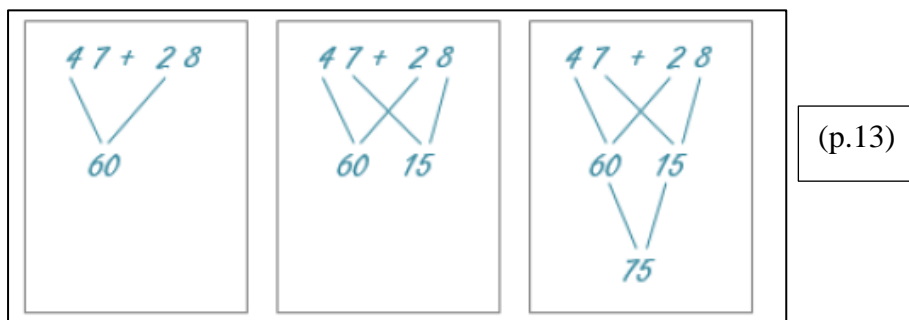
cours s'attachent à les rendre visibles²⁵. Liping Ma (Ma & Kessel, 2018) a fourni une liste des propriétés utilisées en arithmétique scolaire, en Chine.

Il est d'ailleurs déroutant que le projet n'envisage le calcul sur les petits nombres que sous la forme de « mémoriser des faits numériques » (p.11) Comme indiqué dans une note précédente, le calcul sur les petits nombres pourrait constituer un espace idéal pour faire *raisonner* les jeunes élèves.

Même s'il est important que les élèves automatisent certains résultats et techniques, l'automatisation ne peut ignorer la possibilité d'un contrôle par le sens et la nécessité de développer la flexibilité en calcul. Le sens que les élèves doivent donner au calcul est celui de raisonnements sur les quantités. Les discours et les écrits des enseignants doivent accompagner au mieux la possibilité de la construction du sens par les élèves, à leur niveau de compréhension et en les « tirant vers le haut ».

Des mots et des signes : le calcul

Noter au tableau ou sur une affiche les procédures de calcul utilisées par les élèves est un geste professionnel nécessaire mais difficile à mettre en œuvre pour les enseignants. Il est ainsi pertinent de leur proposer des moyens pour représenter les stratégies des élèves, dans la perspective aussi que les élèves s'en emparent. Le projet de programme propose la représentation suivante.



Malheureusement, cette représentation « en arbre » véhicule l'idée d'un calcul « sur les chiffres » : on calcule avec le 4 et le 2. D'ailleurs, la formulation « utiliser les connaissances sur la numération pour effectuer rapidement des calculs en s'appuyant notamment sur la position des chiffres dans les nombres » (p.10) semble confirmer cette idée. Comme on le voit dans les raisonnements des élèves précédemment évoqués, il est important pour comprendre le calcul de travailler sur le nombre « en entier ». De plus, comment pourrait-on dessiner l'arbre pour la stratégie de calcul qui s'appuie sur les décompositions suivantes : 47 en 42 + 5 et 28 en 20 + 8 ? Les deux tentatives de la figure 3 illustrent cette impossibilité.

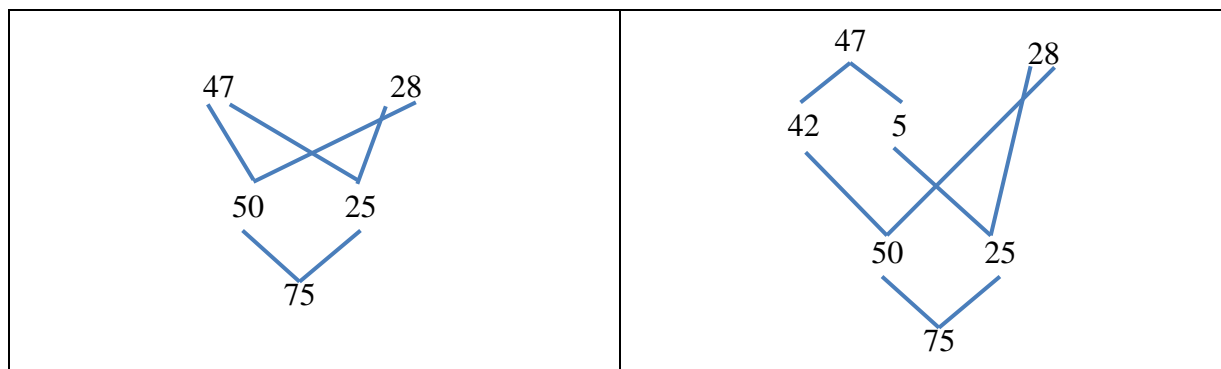


Figure 3 : de l'impossibilité de représenter raisonnablement les calculs avec les *arbres à chiffres*.

²⁵ Voir notamment la « grille des propriétés » et la grille simplifiée (groupe Calcul mental, IREMS de Paris).

Ce n'est pas sur la « position des chiffres » que les élèves doivent s'appuyer pour raisonner en calcul, c'est sur la valeur des chiffres selon leur position. Une proposition alternative pourrait être celle de la figure 4 qui fait apparaître les décompositions de 47 et 28.

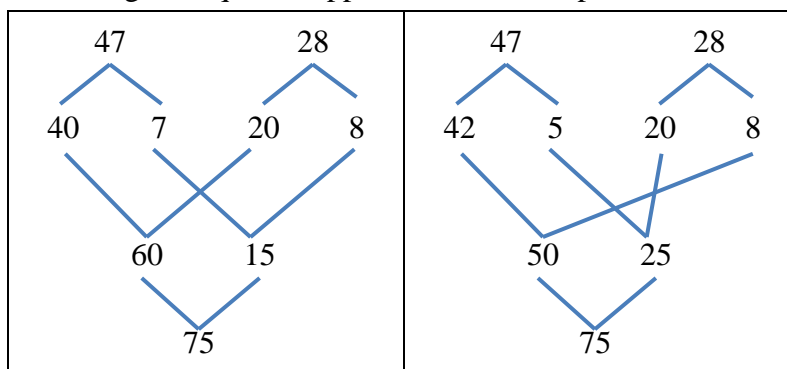


Figure 4 : deux « arbres » qui intègrent la représentation des décompositions additives des *nombres*

La figure 2 (de la leçon de Macao) montre des « arbres » qui intègrent la décomposition additive des nombres. Notons que si 24 est décomposé en 20 et 4, il l'est aussi en 23 et 1. La pluralité des possibilités exclut l'idée d'un calcul sur les chiffres et impose de faire apparaître explicitement, dans l'arbre, la décomposition utilisée. Signalons aussi que dans la proposition de Macao, le résultat du calcul apparaît dans une égalité et non dans « l'arbre ».

Par ailleurs, pour aider les praticiens et les élèves, il me semblerait souhaitable que les programmes s'intéressent à un problème central dans l'enseignement du calcul. Il s'agit que l'institution se positionne sur la programmation de l'enseignement des *parenthèses*²⁶. En effet, cette programmation est un impensé des programmes de l'école depuis plusieurs décennies. Il en résulte que l'éducation nationale laisse à la charge de chaque enseignante de l'école élémentaire, en France, la décision d'utiliser ou pas les parenthèses dans sa classe, ce qui ne peut manquer de créer des ruptures dans la continuité des enseignements. La question de la programmation nécessite d'interroger les raisons de leur introduction à un niveau donné, les contextes liés à leur utilisation tout au long de l'école, ainsi que les discours associés à leurs usages et à ce que désignent et signifient de telles écritures. Voici quelques éléments pour alimenter la réflexion. Historien des mathématiques, Serfati (2005) montre que la clarification de ce qui apparaît aujourd'hui comme une « double interprétation » d'une écriture symbolique comme « 3×5 » est demeurée impensée pendant près de trois siècles. Les signes introduits pour coder des opérations à exécuter ont été rapidement complétés par d'autres signes nécessaires pour structurer des écritures comportant plus d'un signe opératoire comme « $5 + 3 \times 5$ » ambiguës pour l'exécution. Les parenthèses permettent d'identifier les opérands et ce qu'il y a à considérer « à gauche » et à « droite » de chaque signe d'opération. Une fois l'écriture parenthésée comme dans « $5 + (3 \times 5)$ », il devient possible de penser que (3×5) peut être embarqué à dans un nouveau calcul. Il s'agit là d'une deuxième fonction des parenthèses renvoyant à la possibilité de représenter un « résultat ». La complexité tient notamment au fait que les deux « interprétations » sont contradictoires. Le discours répandu consistant à dire rapidement que « les parenthèses sont prioritaires » ne renvoie qu'à la première fonction de ces signes, tout en masquant ce qu'elles permettent fondamentalement d'identifier sur le plan de la structure, le risque étant que cette unique interprétation constitue un obstacle important pour d'autres apprentissages. Par exemple, comprendre le lien entre « $5 + (3 \times 5)$ » et « 4×5 » ne peut se réduire à l'obtention d'un même nombre (Frege, 1892, parle de dénoté) à l'issue d'un calcul que ces écritures coderaient seulement. Leur sens (Frege, 1892) est nécessaire ce qui nécessite d'envisager des manières

²⁶ Elles sont introduites en 2^e année au Japon.

de le travailler en classe (pour penser par exemple que « $5 + (3 \times 5)$ » c'est 5 de plus que quelque chose). Dans les problèmes à étape, si les écritures parenthésées peuvent renvoyer à une mise en forme d'un ensemble de calculs à exécuter dans un certain ordre, elles pourraient aussi permettre de raisonner sur la structure des problèmes tout en raisonnant sur les écritures en lien avec les codages de résultats, ce qui constitue une seconde perspective de travail autour des parenthèses²⁷. Sous certaines conditions, les jeux de calcul, comme « le compte est bon », constituent des contextes probablement favorables à l'utilisation des parenthèses. La seconde approche prépare par ailleurs au travail sur les structures en algèbre. Il faudrait bien sûr éviter un travail purement formel avec les parenthèses.

6 Sur les problèmes : confusion entre calcul et opération

L'introduction des « modèles en barres » pour résoudre les problèmes arithmétiques depuis quelques années m'a conduit à animer nombreuses formations sur le sujet. Une représentation des enseignantes qui se dégage de beaucoup d'échanges et qui constitue un obstacle majeur à l'utilisation de ces « modèles » est la confusion entre *déterminer la solution numérique d'un problème* et *exprimer les quantités inconnues dans un problème à l'aide des opérations avec les quantités connues*.

Dans le projet de programmes, cette « expression » apparaît dans la phase « modéliser » du « modèle de résolution de problèmes en quatre phases » (figure 5).

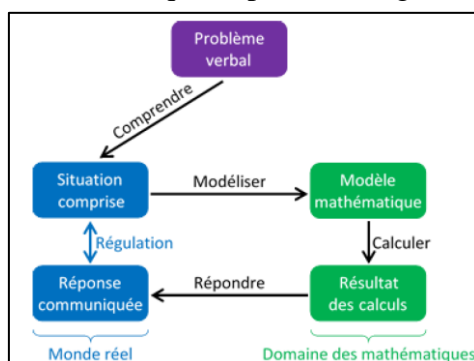


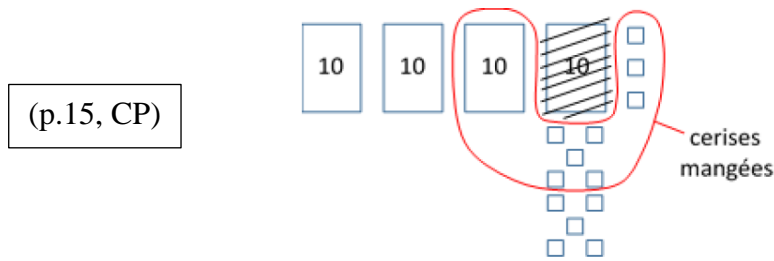
Figure 5 : le modèle de résolution de problèmes en quatre phases (p.15, CE1)

La phase « Modéliser » conduit l'élève à identifier la ou les opérations qu'il va devoir effectuer pour trouver le résultat cherché. Cette phase s'articule avec des manipulations ou des représentations schématiques qui vont contribuer à comprendre le modèle mathématique en jeu. (p.15, je souligne)

Ce cadrage pour la résolution de problèmes est louable. Pour autant, parmi les nombreux exemples proposés et accompagnés de schémas, aucun d'entre eux n'est accompagné d'une telle « modélisation ». Plus troublant, au CP, si « la résolution de problèmes fournit un cadre permettant de donner du sens aux opérations » (p.9) et si « l'élève montre sa compréhension du sens de l'addition et de la soustraction lors de la résolution de problèmes » (p.10), « tant que des procédures de calcul ne sont pas disponibles, il peut prendre appui sur des manipulations d'objets tangibles (cubes et barres de dix cubes, pièces de monnaie et billets fictifs) symbolisant ce qui est en jeu dans l'énoncé, ou sur des représentations schématiques. » (p.15) Suit un exemple détaillé où l'élève « simule » un « retrait ».

²⁷ « J'avais 7 pommes, j'en ai mangé 2 puis 1. Combien me reste-t-il de pommes ? » Deux expressions sont possibles, $(7-2)-1$ et $7-(2+1)$ (exemple adapté d'un manuel chinois du CP), qui peuvent traduire à la fois une exécution différente des calculs et des points de vue différents sur les relations entre les quantités dans le problème.

Par exemple, pour le problème « Anna avait 43 cerises. Elle en a mangé 18. Combien Anna a-t-elle de cerises maintenant ? », l'élève sait représenter les 43 cerises par quatre barres de dix cubes et trois cubes isolés, puis simuler le retrait de 18 cerises en « cassant » une barre de dix cubes en dix cubes unités afin d'entourer dix-huit cubes pour obtenir le résultat cherché, 25 cerises, en dénombrant sur les cubes qui n'ont pas été entourés.



Cet extrait me semble témoigner de la confusion évoquée précédemment, en révélant une autre plus profonde, une confusion entre *effectuer un calcul* et *exprimer des relations entre quantités à l'aide d'une opération*. On peut tout à fait montrer sa compréhension de la soustraction en indiquant que la solution du problème *s'exprime* ou se modélise par la relation : $? = 43 - 18$ sans disposer de procédure pour *effectuer le calcul*.

À cet égard, l'utilisation de la calculatrice (dont le projet prévoit de repousser l'introduction au cycle 3) montrerait bien la différence entre exprimer une relation entre des quantités à l'aide de nombres et d'une opération et effectuer un calcul à partir d'une expression. La calculatrice n'est d'aucune aide pour le premier aspect.

L'élève qui effectue, avec les cubes, les transformations proposées ne montre pas sa compréhension de la soustraction. Il montre sa compréhension de la situation concrète et sa capacité à résoudre le problème en utilisant des nombres. Ceci ne veut pas dire qu'il faut empêcher les élèves d'utiliser leurs méthodes pour résoudre les problèmes. Ceci veut dire que, si on souhaite que les élèves apprennent à modéliser les relations entre les quantités avec des opérations, il faut le leur faire apprendre. Il faut en informer (et former) les enseignants pour qu'ils l'enseignent aux élèves. Ce n'est pas une question de liberté pédagogique, c'est un *savoir* dont l'institution doit choisir si elle souhaite qu'il soit enseigné ou pas aux élèves.

Cet objectif est important pour comprendre le « sens des opérations » et pour une entrée progressive dans l'algèbre. Pour autant, cet objectif n'a pas fait l'objet d'une préoccupation claire des prescripteurs depuis de nombreuses années. Le projet en consultation ne fait pas exception. Même si les « modèles en barres » sont un levier puissant pour (faire) réfléchir aux questions de modélisation par les opérations arithmétiques et les nombres, en l'état, le projet suggère plutôt que le schéma est une fin et non un moyen. Pour former les enseignants à enseigner des notions qui ne leur sont pas familières, il est indispensable que le but visé soit clair.

L'absence de préoccupation relativement à cet objectif, l'absence d'identification du but, pourraient en réalité traduire, elles aussi, comme l'absence de la notion d'unité, une tension de nature épistémologique entre les cultures didactiques singapourienne et française. En effet, le statut de ces « expressions » est peut-être ambigu. Dans la culture mathématique scolaire singapourienne, les « expressions » traduisent une relation entre les quantités en jeu dans la situation. Elles sont indépendantes des nombres. On pourrait écrire :

$$\text{quantité de cerises initiale} - \text{quantité de cerises mangées} = \text{quantité de cerise finale}$$

et d'ailleurs, Kaur (2018), didacticienne singapourienne, propose les écrits de la figure 6.

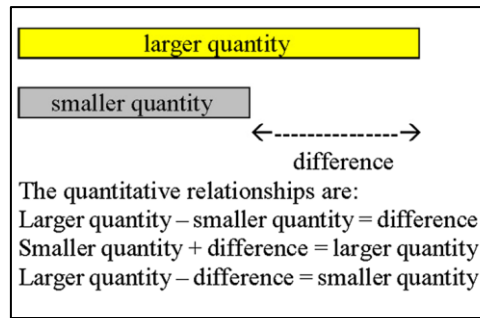


Figure 6 : le modèle de la comparaison additive (Kaur, 2018, p.7)

Les « expressions » relatives aux « quantités de cerises » peuvent être instanciées avec les nombres. L'expression « $43 - 18 = ?$ » provient donc des *raisonnements* sur les *quantités*. On pourrait peut-être d'ailleurs écrire « 43 cerises – 18 cerises = ? ».

Il est possible que, dans la culture mathématique scolaire française, seules des « relations entre des nombres » soient légitimes comme *écriture mathématique* (nous avons vu des *évitements* précédemment, notamment avec les fractions). D'ailleurs, ma fréquentation à la fois des textes institutionnels et des enseignants me laisse penser que cette hypothèse n'est pas fantaisiste. Considérer les *quantités* comme objet mathématique pourrait dès lors constituer un interdit largement partagé dans cette culture qui empêcherait de considérer, comme *mathématique*, *l'écriture de relations entre quantités*, par conséquent de questionner la possibilité même de leur enseignement dans le cadre d'un cours de *mathématiques* et donc d'en faire un objet d'enseignement.

Des mots et des signes : les opérations

Le projet du CE2 fait apparaître du « vocabulaire » : « L'élève comprend et utilise les phrases suivantes. (...) 60 et 37 sont les termes de la soustraction $60 - 37$ » (p.35, CE2). De tels exercices sont habituellement proposés au collège. Cette apparition traduit-elle une erreur d'interprétation de pratiques de l'Asie de l'Est qui ont des mots pour désigner les opérands des opérations arithmétiques, par exemple *diminuende*, *diminuteur*, *différence* pour la soustraction ou encore *multiplicande*, *multiplicateur*, *produit* pour la multiplication ? Disposer de tels mots semble effectivement très utile, là-bas²⁸, pour enseigner le sens des opérations, pour la modélisation ou encore pour parler du calcul ou des propriétés des opérations. Il s'agit de doter les enseignants de moyens pour enseigner aux élèves les outils conceptuels pour raisonner en mathématiques et non de faire apprendre du « vocabulaire ».

Au Japon, et peut-être à Singapour, on écrit « $34 : 8 = 4$ reste 2 » pour traduire la division euclidienne de 34 par 8, ce qui pose quelques problèmes mathématiques théoriques que je ne développe pas mais n'empêche visiblement pas les élèves de réussir et les enseignants d'enseigner. Dans les mathématiques avancées, on écrit « $34 = 8 \times 4 + 2$ ». Cette écriture a l'inconvénient d'être une « multiplication » ce qui n'aide guère les élèves à repérer qu'il s'agit d'une division ! Dans des travaux de recherche, Cooper (2015) proposait $34 : 8 = 4$ ($2 : 8$), avec ($2 : 8$) à oraliser en 2 à *partager en 8*. Au Japon, « $34 : 8 = 4$ reste 2 » est introduit au grade 3 et la relation multiplicative « dividende = diviseur \times quotient + reste » au grade 4. Que faut-il suggérer aux enseignantes ?

²⁸ Par exemple, le guide pédagogique sur le programme japonais mentionne à propos des techniques de calcul soustractif en 1^e année « Les principales méthodes sont la décomposition du *diminuende* et la décomposition du *diminuteur* » (p.107, je souligne), et prend l'exemple de $12 - 7$ qui donne, avec la décomposition du diminuende en 10 et 2, $(10 - 7) + 2$ et, avec la décomposition du diminuteur en 2 et 5, $(12 - 2) - 5$; ou encore à propos des « idées sur les fonctions », en 2^e année, « comment un produit change quand le *multiplicateur* augmente de 1 » (p.88, section sur les « relations mathématiques », je souligne).

7 Quelques mots sur le projet de programme pour le cycle 1

7.1 Des épistémologies des mathématiques et de l'enseignement à la maternelle qui questionnent

Un texte de programme peut difficilement rendre compte de la nécessité de développer les liens entre les différentes entrées qu'il contient, soit internes à la discipline (le nombre, les formes, les mesures), soit dans les rapports avec les autres disciplines. Nous alertons néanmoins sur le risque induit par une présentation très cloisonnée des notions abordées et par l'accumulation de micro-objectifs. L'absence de mention de l'enseignement des thématiques pluridisciplinaires que sont la structuration du temps et de l'espace, critiques pour le développement et le *bien être* des jeunes enfants, ne fait que renforcer notre inquiétude. Le domaine des grandeurs n'est pas présenté comme une source possible pour enrichir le développement du nombre. Seules la longueur et la masse sont mentionnées. Les activités autour de la perception de l'aire ou du volume (à l'exception de sa distinction avec la masse) m'ont semblé absentes. Je n'ai pas repéré de transvasements, par exemple.

Certaines formulations du projet de programme semblent témoigner d'une méconnaissance totale de ce que sont à la fois les mathématiques, les jeunes enfants qui apprennent les mathématiques et l'école maternelle. A cet égard, le dernier paragraphe du préambule est pour le moins déroutant.

Il est attendu de l'enseignant qu'il utilise un vocabulaire précis et consacré, même si celui-ci n'est pas exigible des élèves. Ainsi, il parle d'un carré dont un sommet (et non une pointe) est placé vers le haut de la feuille ou encore d'un disque (et non d'un rond). Il explique la distinction entre un nombre et un chiffre (un nombre étant formé avec des chiffres, de même qu'un mot est écrit avec des lettres). L'enseignant veille à travers ses pratiques de classe et le choix des situations qu'il propose à favoriser l'égalité entre les filles et les garçons. (p.3, cycle 1)

Expliquer que l'enseignante doit utiliser le mot *sommet* au lieu de *pointe* et indiquer dans le même temps que le « sommet est placé vers le haut » n'aidera pas les élèves à comprendre que les sommets sont aussi *sur les côtés* et *vers le bas*, puisque ce sont des pointes (et des creux, pour plus tard) et non un sommet... de montagne. Une telle leçon de vocabulaire n'aidera pas non plus les enseignantes à repérer les enjeux de la géométrie et à focaliser leur enseignement sur les aspects conceptuels. Pour finir, avoir pour projet d'écrire dans les programmes scolaires d'un pays qu'un nombre est « formé avec des chiffres », c'est projeter d'organiser dès le début de la scolarité le divorce entre les élèves et les nombres.

7.2 Une entrée dans l'univers des nombres en opposition à l'intuition et les liens rompus avec les quantités.

Dans le projet pour le cycle 1, en dépit de 88 occurrences du mot « quantité », ce terme n'est jamais défini autrement que par l'intermédiaire du mot « cardinal » (41 occurrences du mot ou de ses dérivés) bien plus abstrait et bien plus restrictif que ce que recouvre l'intuition de la quantité qu'il est essentiel de développer et sur laquelle il est essentiel de fonder l'apprentissage du nombre pour un rapport serein aux nombres et au calcul.

Le premier « point de vigilance » insiste ainsi sur l'importance de couper le lien entre le nombre et l'espace occupé par les objets comptés. On commence donc l'introduction des nombres en expliquant qu'il faut veiller à faire comprendre qu'il y a plus de fourmis que d'éléphants lorsque qu'on voit 4 fourmis et 3 éléphants. Alors que savoir discerner le petit du grand pourrait constituer un premier point d'appui pour les enfants, l'aspect contre-intuitif évident de cette affirmation constitue un obstacle majeur à la compréhension du lien entre nombre et quantité (en termes de perception de l'espace plus ou moins grand et non de « quantité d'objets »). L'appui sur les sens est indispensable pour développer une première

perception du concept de nombre. En particulier, comparer des tailles de collections homogènes (des cubes, par exemple) dans des agencements spatiaux spécifiques faciliterait les liens avec la perception des quantités physiques (superficie, longueur, hauteur). Il est essentiel que les enfants comprennent d'abord que, plus l'espace occupé par ce qui est compté est grand, plus le nombre est grand (et inversement) ce qui suppose de compter dans un premier temps uniquement des collections homogènes. Lavie et Sfard (2019) ont élaboré une proposition didactique en ce sens pour enseigner les nombres et leur sens à des enfants de 2,5 à 4 ans (Sfard est une chercheuse en mathématique devenue chercheuse en didactique)²⁹. Dans la suite, ils pourront aussi remarquer, puis apprendre que, quel que soit ce que l'on compte, qu'il s'agisse de fourmis ou d'éléphants, on en a plus quand on en a 4 que quand on en a 3. Cette propriété ne dépend pas du type d'objets comptés. C'est cela qui permettra d'abstraire les nombres. Il est inutile de *piéger* les élèves en espaçant les objets ou en mettant des objets de tailles différentes. Il sera temps, à l'école élémentaire, quand on leur enseignera vraiment ce qu'est une unité d'apprendre qu'on peut avoir un grand nombre de petites unités et un petit nombre de grandes unités pour une même quantité. Des observations en ce sens pourraient néanmoins être réalisées à la fin de la maternelle, en comparant des alignements de tiges de longueurs variées, par exemple. En classe, on pourrait aussi *s'interroger* sur le fait que bien qu'on ait un grand nombre de fourmis elles occupent moins de place qu'un petit nombre de d'éléphants. Ces observations permettraient de préparer l'avenir. En l'espèce, il s'agit *encore* de la propriété que nous avons appelée M1.

²⁹ La proposition repose sur une tâche centrale : deux collections homogènes du même type d'objets sont présentées à l'enfant avec la question « où y a-t-il le plus (de cubes) ? » (OYAP) (parfois « où y a-t-il le moins ? »). L'agencement spatial des collections varie : les cubes sont serrés dans un bol ; les cubes sont réorganisés, sous les yeux de l'enfant, par l'adulte dans un premier temps, en deux rangées parallèles. A chaque fois la question OYAP lui est posée. Dans le même temps, le dénombrement est enseigné aux enfants, en particulier dans la configuration de la rangée qui pourrait aider les enfants à faire le lien entre plus on compte loin, plus l'espace occupé est long. Lavie et Sfard montrent qu'il est difficile de repérer que les jeunes enfants n'ont pas encore appris cette relation entre numérique et quantitatif. Ils *imitent tellement bien les adultes* que souvent dans leur développement, au même moment, quand on leur demande « Où y a-t-il le plus de cubes ? », ils sont capables de dire qu'il y en a plus quand il y en a 6 que quand il y en a 3 parce qu'on compte plus loin, ils sont capables de dire (ou reconnaître) qu'il y en a plus car cela prend plus de place, mais ils ne savent pas qu'il s'agit en fait de répondre à une même question (ces enfants ne mettent pas en relation « le plus » spatial quantitatif et « le plus » numérique qui n'est donc pas quantitatif). Il importe d'aider les enseignants à repérer ces « illusions d'apprentissage » qui sont tout à fait normales dans le développement des élèves, et de les aider à aider les élèves à faire les liens.

L'intervention s'est déroulée sur 18 mois. Elle confirme globalement le développement des enfants que les auteures avaient identifié préalablement dans des observations sans intervention :

- 1) D'abord, les jeunes enfants *interprètent la question* « Où y a-t-il le plus ? » comme un choix, un peu comme « Quel est le tas que tu veux le plus ? ». Ils fournissent donc des réponses à la question, à leur niveau de compréhension. Elles peuvent paraître à l'adulte, alternativement correctes et incorrectes ou encore aléatoires.
- 2) Ensuite, en réponse à la question « où y a-t-il le plus ? », d'abord ils ne disent rien mais choisissent le « bon » tas, plus tard ils disent « haut / pas haut » par exemple. Mon interprétation est que les enfants perçoivent, pour répondre à la question, non pas, les cubes, mais l'espace occupé par les cubes.
- 3) Plus tard, ils disent un petit peu / beaucoup / pas beaucoup. Tout ce passe comme s'ils fabriquaient des échelons avec les mots « quantitatifs » pour répondre à la question. Ils sont aussi capables de comparer numériquement sans considérer la comparaison comme « quantitative ».
- 4) Enfin, ils répondent avec le nombre : *là il y a 5, ici il y a 3. Là, il y a plus qu'ici*. Tout se passe comme s'ils remplaçaient en quelque sorte ces échelons quantitatifs par une échelle constituée par les noms des nombres. A ce point, les enfants ont acquis le « principe cardinal ».

Dans un premier temps, un nombre apparaît ainsi comme une sorte de rang dans une échelle qui décrit l'espace, plus ou moins grand, occupé par les cubes. La correspondance terme à terme est introduite (et même enseignée) mais elle ne semble pas jouer de rôle dans la compréhension initiale du nombre, plus précisément dans la capacité des enfants à acquérir ce que les auteures identifient comme « le principe cardinal ».

Sans cela, après avoir appris que 4 fourmis c'est plus que 3 éléphants, comme il faudra aussi apprendre que 1 dizaine c'est plus grand que 2, tout est effectivement en place pour installer l'idée que le nombre est *formé de chiffres*, réduire le concept à son écriture chiffrée, et limiter les opérations entre les nombres à des manipulations formelles sur les symboles et à des jeux d'écritures. Malheureusement notre analyse du projet pour le cycle 2 ne nous a pas rassurés sur ce qui pourrait permettre d'éviter cet « écueil » dans le projet.

8 Pour conclure

A la date à laquelle j'écris ce commentaire, je suis inquiète. Ce ne sont pas, en soi, l'introduction des fractions au cycle 2 ou encore le calcul chronométré qui m'inquiètent.

Ce commentaire sur le projet de programme met en effet en évidence un ensemble de savoirs non identifiés dans la culture mathématique scolaire en France. Ils sont essentiels pour l'apprentissage des nombres et du calcul à l'école et au début du collège. Sans explicitation auprès des enseignants et des formateurs des concepts et propriétés nécessaires pour conduire un raisonnement, il est impossible de former les enseignants à former les élèves à raisonner. L'absence d'identification des savoirs conduit alors, de fait, à l'absence de cohérence mathématique de l'enseignement.

La cohérence doit être appuyée par des balises en termes d'apprentissage de concepts. Nous avons formulé des propositions avec un arrière-plan, celui des quantités – avec des propriétés théoriques qui peuvent paraître pour partie « inhabituelles » par rapport à des savoirs « modernes » sur les nombres et les opérations mais qui visent précisément à fournir des repères pour l'apprentissage et pour le développement de connaissances mathématiques pour tous les élèves.

À défaut de cette cohérence, fondée par des hypothèses, le projet présente des risques forts, sur différents plans, bien connus dans les travaux sur l'enseignement des mathématiques :

- il peut y avoir une illusion d'apprentissage de connaissances de niveau avancées alors que les élèves n'ont appris que des recettes (clic-clic) ou « un dix fois plus grand » qui n'en est pas un (au mieux un dix dans un, au pire une position « mobile » dans un glisse-nombre),
- il peut y avoir enseignement de l'outil (le modèle en barre, le glisse nombre) ou du vocabulaire (la somme, les termes, etc.) comme une fin en soi qui se substitue à la connaissance à construire avec l'outil.

Ces risques ont toujours existé et existent encore, mais ils sont peut-être à même d'être renforcés du fait de la précocité nouvelle de certains apprentissages visés (comme les fractions) si des précautions ne sont pas prises en termes de cohérence (cf. point précédent) mais aussi en termes de formation d'enseignants.

Les savoirs « non identifiés » sont globalement situés dans « l'intuition des nombres ». Ils ne sont pas identifiés comme relevant de savoirs mathématiques par la plupart des acteurs qui les maîtrisent, ils ne sont pas maîtrisés par certains acteurs. Ils ne sont pas identifiés dans le projet. Cette situation n'est pas fondamentalement nouvelle. Le projet de programme, s'il était appliqué, pourrait néanmoins aggraver l'état du système d'enseignement pour deux raisons.

La première est la suivante. En demandant aux enseignants d'enseigner des contenus nouveaux, des techniques nouvelles sans mettre en évidence les savoirs qui sont nécessaires pour le raisonnement (c'est-à-dire pour faire des mathématiques), sans mettre en évidence les leviers pour le raisonnement, le nouveau programme risque de déstabiliser un peu plus les enseignants qui risquent de se trouver en échec et encore plus démunis, sans alternative.

La deuxième raison est liée à la multitude de techniques imposées. Sans doute une nouveauté du programme en projet réside-t-elle dans la volonté « de définir un ensemble de procédures fondamentales que tous les élèves doivent maîtriser ». L'analyse des prémisses de ce projet, qui pourrait relever d'une réelle ambition pour les enfants et les enseignants, révèle malheureusement l'absence de considération pour les savoirs qui sous-tendent « les procédures fondamentales ». Le défaut d'analyse des savoirs en jeu (ajouter 9 et ajouter un nombre entre 1 et 8) dans les techniques conduit à une juxtaposition de techniques qu'il est bien difficile de justifier tant au plan des mathématiques, qu'au plan de leur apprentissage.

Le projet de programme témoigne selon moi d'un ensemble de tensions épistémologiques dans la culture mathématique scolaire en France, notamment parce qu'elle est mal à l'aise avec un ensemble de savoirs sur les *quantités* et les *unités* pourtant essentiels au développement mathématique des jeunes élèves. Ils peuvent être inconnus ou rejetés hors des mathématiques. Les tensions sont exacerbées par l'importation de « pratiques » venues d'ailleurs dans lesquelles ces savoirs sont incorporés, sans analyse épistémologique fine de ce qui les rend possibles et cohérentes, là-bas. Une telle analyse n'était pas possible dans un temps aussi court. Si les programmes sont publiés, les enseignants seront mis en position de gérer le produit de ces tensions, sur des contenus nouveaux, alors même que les auteurs du programme n'auront pas eu conscience de leur existence.

L'intention annoncée de faire démarrer les programmes sur tous les niveaux d'un cycle en même temps ne fait que confirmer l'ignorance ou l'absence de considération pour la nature même des mathématiques de l'école. Apprendre les nombres et le calcul, ce n'est pas apprendre un ensemble d'automatismes, c'est apprendre à raisonner avec des concepts en utilisant des propriétés dont la maîtrise se consolide progressivement et qui se diversifient au fil des années. Cette intention fait ainsi craindre une amplification des difficultés.

L'invisibilité des savoirs dans les situations d'enseignement (appelée aussi transparence des savoirs) est un phénomène étudié par des sociologues (e.g., Bautier et al. 2011) et des didacticiens (e.g., Margolinas & Laparra, 2011, Chesnais, et al., 2023). L'invisibilité des savoirs est une source essentielle de production des inégalités scolaires. Le projet en consultation n'apportera probablement aucune solution aux difficultés actuelles.

Par quelques encarts intitulés « des mots et des signes », j'ai voulu signaler, sur des questions pratiques, des impensés dans le projet de programme et plus généralement dans la culture mathématique scolaire en France. Il est temps d'engager une réflexion collective avec les différents acteurs de l'enseignement des mathématiques à l'école : enseignant.e.s, formateur.rice.s, chercheur.e.s, institutionnel.elle.s.

9 Références

- Batton, A., Celi, V., Chambris, C., Constantin, C. & Coulange, L. (en preparation). Point(s) de vue sémiotique(s) sur l'activité d'élèves et d'enseignants en arithmétique scolaire – Apports de deux approches théoriques en didactique : la théorie anthropologique et l'épistémographie
- Bautier, E., Catteau, C., Joigneaux, C., & Thouny, C. (2011). Des difficultés invisibles aux apprentissages non faits. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Éds.), *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. (p. 45-56). Rennes: Presses Universitaires de Rennes.
- Chambris, C. (2008). Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire : Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle : Connaissances des élèves actuels (Université Paris Diderot (Paris 7)). Paris. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/>
- Chambris, C. (2021). Point sur la recherche (in chapitre VI - Grandeurs). In DGESCO (Éd.), *La résolution de problèmes au collège* (p. 160). Paris: Ministère de l'Éducation Nationale.
- Chambris, C. (2022). Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités. (Habilitation à diriger des recherches) CY Cergy Paris Université.

- Chambris, C., Coulanges, L., Rinaldi, A.-M., & Train, G. (2021). Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux—Potentialités. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, G. Cirade, L. Coulanges, P. Job, ... F. Vandebrouck (Éds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : Point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*. (Vol. 2, p. 373-396). Grenoble: La pensée sauvage.
- Chesnais, A., Destribats, A., Lefort, J., Lahmouche, N., & Béjaud, M. (2023). Prendre en charge des objets transparents de la classe de mathématiques pour mieux faire apprendre tous les élèves : Distance et langage. *Revue de Mathématiques pour l'école*, (240), 55-68. <https://doi.org/10.26034/vd.rm.2023.4117>
- Cooper, J. (2015). Combining Mathematical and Educational Perspectives in Professional Development. In X. Sun, B. Kaur, & J. Novotna (Éds.), *Proceedings of ICMI Study 23, Whole Number Arithmetic* (p. 68-75). University of Macau.
- Cortina, J. L., Visnovska, J., & Zuniga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality : Supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal*, 26(1), 79-99.
- Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en didactique des mathématiques*, 1(1), 77-111.
- Frege, G. (1892). *Ecrits logiques et philosophiques*. (Traduction, 1971, Imbert C.) Paris : Editions Points.
- Jamet, J.-M. (2019). La « méthode de Singapour » : Surface émergée de l'iceberg singapourien. *Grand N*, 104, 39-58.
- Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method : A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM*, 51(1), 151-168. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y>
- Lavie, I., & Sfard, A. (2019). How Children Individualize Numerical Routines : Elements of a Discursive Theory in Making. *Journal of the Learning Sciences*, 28(4-5), 419-461. <https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1646650>
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics : Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States* (Lawrence Erlbaum Associates). Mahwah, NJ: Routledge.
- Ma, L., & Kessel, C. (2018). The Theory of School Arithmetic : Whole Numbers. In M. Bartolini-Bussi & X. Sun (Éds.), *Building the Foundation : Whole Numbers in the Primary Grades* (p. 439-463). Springer Open. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-63555-2.pdf>
- Margolinas, C., & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Éds.), *La construction des inégalités scolaires* (p. 19-32). Presses Universitaires de Rennes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779196>
- Novotná, J., Kaur, B., Gervasoni, A., Askew, M., Veldhuis, M., Pearn, C., & Sun, X. H. (2018). How to Teach and Assess Whole Number Arithmetic : Some International Perspectives. In M. G. Bartolini Bussi & X. H. Sun (Éds.), *Building the Foundation : Whole Numbers in the Primary Grades* (p. 251-286). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_11
- Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Shifting paradigms in word problem solving. The case of multiplicative structures. In J. Novotna & H. Moroava (Éds.), *Broadening experiences in elementary school mathematics. Proceedings of International Symposium Elementary Mathematics Teaching 21. Prague 22-26 august 2021* (p. 328-337). Prague, the Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.
- Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Editions PETRA.
- Vale, P., Graven, M., & Visnovska, J. (Ford, C., illustration) (2019). *Mama Khanyi et les pots* (Traduction, 2021, C. Chambris). South African Numeracy Chair Project, Rhodes University. (https://tribu.phm.education.gouv.fr/portal_v2/tribu-app/document?id=EHtf1) Pour imprimer: https://tribu.phm.education.gouv.fr/portal_v2/tribu-app/document?id=A0bbP3
- Watanabe, T. (2006). The teaching and learning of fractions : A Japanese perspective. *Teaching Children Mathematics*, 12(7), 368-374.
- Programmes de Singapour : <https://www.moe.gov.sg/primary/curriculum/syllabus>
- Pour le Japon : Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics (Grade 1-6) <https://facultyweb.kennesaw.edu/twatanab/docs/Teaching%20Guide%20Elementary.pdf>
- Groupe IREMS calcul mental : <https://irems.u-paris.fr/groupe-calcul-mental/>