



HAL
open science

Une approche énergétique du principe d'équivalence

Patrick Vaudon

► **To cite this version:**

| Patrick Vaudon. Une approche énergétique du principe d'équivalence. 2024. hal-04601916

HAL Id: hal-04601916

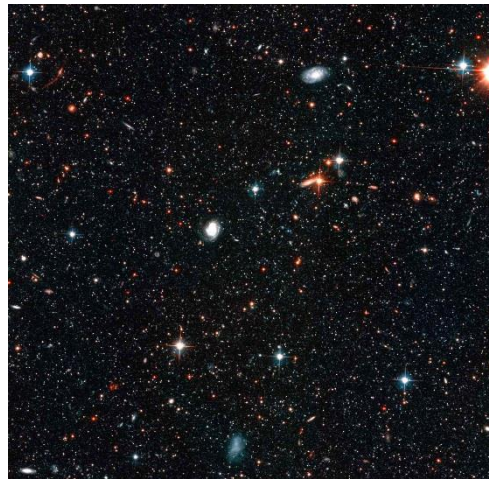
<https://hal.science/hal-04601916>

Preprint submitted on 5 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une approche énergétique du principe d'équivalence



Patrick VAUDON

Xlim - Université de Limoges – France

Table des matières

Une approche énergétique du principe d'équivalence

| | |
|---|-----------|
| I – Introduction..... | 3 |
| II – métrique propre et impropre | 4 |
| III – Approche énergétique | 6 |
| IV – Solution exacte aux équations d'EINSTEIN | 9 |
| V – Transformation de LORENTZ et référentiels accélérés..... | 16 |
| VI – Invariance de la relation fondamentale de la dynamique sous la transformation de LORENTZ étendue aux référentiels accélérés | 25 |
| VII – Conclusion..... | 32 |

I – Introduction

Les deux théories physiques que sont la relativité restreinte et la relativité générale occupent une place fondamentale dans la physique contemporaine. Elles contribuent l'une et l'autre à une compréhension fine et subtile de nombreux phénomènes.

Au-delà de certaines interrogations décrites par FOCK dans son article sur « [Les principes physiques de la théorie de la gravitation d'Einstein](#) », il apparaît que le principal trait d'union entre ces théories est le principe désigné par EINSTEIN sous le nom de principe d'équivalence.

Dans sa forme élémentaire, ce principe stipule qu'un référentiel en chute libre dans un champ de gravitation peut être assimilé à un référentiel inertiel de la relativité restreinte sans champ de gravitation. Einstein a décrit plusieurs fois comment cette idée lui avait permis de progresser dans sa recherche d'une théorie qu'il a qualifiée de théorie de la relativité générale.

Lorsque l'on tente de comprendre comment le principe d'équivalence permet de relier ces deux théories, on se trouve très vite confronté à une difficulté qui semble difficile à surmonter.

La métrique de la relativité restreinte obéit à la relation :

$$ds^2 = d(ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{I-1})$$

La métrique dans un champ de gravitation uniforme g suivant l'axe des x obéit à la relation :

$$ds^2 = d(ct)^2 \left(1 + 2 \frac{\phi(x)}{c^2} \right) - \frac{dx^2}{\left(1 + 2 \frac{\phi(x)}{c^2} \right)} - dy^2 - dz^2 \quad (\text{I-2})$$

$$\phi(x) = -gx$$

Il n'est pas évident de comprendre comment le principe d'équivalence permet de passer de la relation (I-1) à la relation (I-2). Aucun des documents consultés par l'auteur n'apporte de réponse claire à cette question.

Nous allons construire dans la suite de ce document un raisonnement, qui semble à priori rigoureux, et qui établit le lien entre ces deux relations. Il fait appel à quelques subtilités qui sont décrites dans les chapitres suivants.

II – métrique propre et impropre

Les notions de temps propre (respectivement impropre) et de longueur propre (respectivement impropre) font partie des éléments classiques analysés en relativité restreinte. Ils sont détaillés dans de très nombreux documents, et nous rappelons simplement leur définition physique, ainsi que les propriétés qui les relient.

Le temps propre entre deux évènements d'espace-temps en des lieux différents est mesuré par la même horloge qui est présente à chacun des évènements, et qui s'est donc déplacée d'un évènement à l'autre.

Le temps impropre est le temps mesuré par deux horloges différentes, présentes respectivement au premier évènement et au second évènement. Ces horloges fonctionnent de manière synchronisée dans un même référentiel et indiquent donc le temps unique associé au référentiel

La longueur propre est la longueur mesurée entre deux points immobiles d'un référentiel. Sa longueur est donnée par la différence des coordonnées spatiales des extrémités. On représente souvent cette longueur par une « règle » rigide. La méthode de mesure de cette règle montre que sa longueur propre ne dépend pas de sa vitesse de déplacement car le système de mesure est attaché à la règle. C'est la stricte analogie du temps propre attaché à l'horloge qui se déplace.

La longueur impropre correspond à la longueur d'une règle qui s'est déplacée entre deux instants. Sa longueur est différente de la longueur propre, car pour avoir un sens, la différence des coordonnées doit être établie à un instant unique. La longueur impropre dépend donc de la vitesse de déplacement de la règle.

La relativité restreinte nous indique ainsi qu'il existe deux manières de mesurer les temps et les longueurs, l'une avec des valeurs propres, et l'autre avec des valeurs impropres.

Pour mettre en lumière cette différence, nous posons pour des durées et des longueurs infinitésimales :

$d(ct)'$: élément de durée propre (avec un prime)
 dx' : élément de longueur propre (avec un prime)
 $d(ct)$: élément de durée impropre (sans prime)
 dx : élément de longueur impropre (sans prime)

Il est clair que les éléments de durée propre et de longueur propre constituent des éléments intrinsèques aux évènements mesurés. En particulier, ils ne dépendent pas de la

vitesse de déplacement de ces évènements. Il en résulte une définition de l'intervalle d'espace-temps en valeurs propres qui est de la forme :

$$ds^2 = d(ct)^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (\text{II-1})$$

Les relations qui relient les valeurs propres et les valeurs impropres sont déduites de la relativité restreinte. La durée impropre est liée à la durée propre par la relation :

$$d(ct) = \frac{d(ct)'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{II-2})$$

Cette propriété est souvent exprimée en disant que les horloges en mouvement ralentissent ($d(ct)$ est supérieur à $d(ct)'$).

La longueur impropre est liée à la longueur propre par la relation :

$$dx = dx' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{II-3})$$

Cette propriété est souvent exprimée en disant que les règles en mouvement raccourcissent (dx est inférieur à dx').

On en déduit que l'élément d'espace-temps peut être exprimé de deux manières différentes : soit en fonction des grandeurs propres, soit en fonction des grandeurs impropres :

$$ds^2 = d(ct)^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = d(ct)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2 \quad (\text{II-4})$$

On peut d'ores et déjà noter que la forme particulière de la métrique en valeurs impropres suggère que c'est cette métrique qui va assurer le lien avec la métrique d'un champ de gravitation en relativité générale.

III – Approche énergétique

Cette approche est basée sur l'échange d'énergie associé à une masse en déplacement dans un champ de gravitation. On sait que dans une telle situation, les échanges ont lieu entre une énergie potentielle qui dépend du champ de gravitation de potentiel ϕ , et une énergie cinétique liée au mouvement de la masse dans ce champ de gravitation.

Dans cette approche simplifiée destinée à mettre en place les éléments du raisonnement, nous considérons un mouvement de la masse à une vitesse instantanée v suivant l'axe des x , et un champ gravitationnel uniforme g tel que le potentiel associé soit égal à $\phi(x) = -g x$.

Pour une masse au repos m_0 , nous savons que l'énergie totale E qui lui est associée lorsqu'elle est animée d'une vitesse v est égale à :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{III-1})$$

Mais nous ne savons pas comment cette énergie totale se répartit entre énergie cinétique et énergie potentielle dans un champ de gravitation.

Pour déterminer cette répartition, nous allons nous appuyer sur le lagrangien L de la relativité restreinte, qui est associé à une masse au repos m_0 se déplaçant à une vitesse v :

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{III-2})$$

Ce lagrangien traduit d'une manière générale les échanges entre une énergie cinétique E_c et une énergie potentielle E_p (pour plus de détails [voir par exemple](#)), et nous posons :

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = E_c - E_p \quad (\text{III-3})$$

On sait d'autre part que l'énergie totale E de la particule doit être égale à la somme de ces deux énergies :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_c + E_p \quad (\text{III-4})$$

On déduit de (III-3) et (III-4), les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, au sens où on les a définies :

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{III-5})$$

$$E_p = m_0 c^2 \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ces expressions sont valides dans un référentiel sans champ de gravitation.

Nous admettons que dans un référentiel muni d'un champ de gravitation, l'expression de l'énergie cinétique reste inchangée, tandis que l'expression de l'énergie potentielle doit correspondre à l'énergie associée au potentiel de gravitation ϕ . C'est dans cette substitution que se situe, d'un point de vue énergétique, le cœur du principe d'équivalence.

Pour une masse au repos m_0 , animée d'une vitesse v dans un champ de gravitation de potentiel ϕ , cette énergie est définie par la relation :

$$E_p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \phi \quad (\text{III-6})$$

Entre une particule au repos ($v = 0$) hors champ de gravitation ($\phi = 0$), et la même particule qui atteint une vitesse v dans un champ de gravitation ϕ lorsqu'elle est en chute libre, la relation de conservation qui traduit les échanges d'énergie entre énergie potentielle, et énergie cinétique déduite du lagrangien et du principe de moindre action s'écrit alors $E_c + E_p = 0$:

$$\frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \phi = 0 \quad (\text{III-7})$$

Par un raisonnement heuristique, SOMMERFELD est parvenu à la même relation dans son livre « [Electrodynamics](#) », page 314, 315 (avec un champ de gravitation à symétrie sphérique). Mais il interprète le premier terme de la relation ci-dessus comme une approximation Newtonienne de l'énergie cinétique de la particule. Il n'arrive pas à s'expliquer comment une expression approchée de la relativité restreinte peut conduire à une solution exacte des équations d'EINSTEIN.

« *Our derivation* claims only to yield an approximation, since it utilizes the Newtonian law as first approximation Nevertheless, *our result* is, as shown by Schwarzschild and Eddington, exact in the sense of Einstein's theory.» (A. SOMMERFELD)

L'utilisation du lagrangien de la relativité restreinte (III-2), et des échanges d'énergie qui lui sont associés, s'avère comme un maillon indispensable qui permet un passage propre de la métrique de la relativité restreinte à la métrique d'un champ de gravitation.

En simplifiant l'égalité énergétique (III-7), on obtient la relation suivante, déduite de l'équivalence entre énergie potentielle de gravitation et énergie cinétique :

$$v^2 = -2\phi \quad (\text{III-8})$$

De la métrique de la relativité restreinte en valeurs impropres du chapitre précédent, on déduit alors la métrique dans un champ de gravitation sous la forme :

$$ds^2 = d(ct)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2 = d(ct)^2 \left(1 + 2 \frac{\phi}{c^2} \right) - \frac{dx^2}{1 + 2 \frac{\phi}{c^2}} - dy^2 - dz^2 \quad (\text{III-9})$$

Dans un champ de gravitation uniforme g suivant l'axe des x ($\phi = -gx$), on obtient :

$$ds^2 = d(ct)^2 \left(1 - 2 \frac{gx}{c^2} \right) - \frac{dx^2}{1 - 2 \frac{gx}{c^2}} - dy^2 - dz^2 \quad (\text{III-10})$$

Il s'avère que cette métrique est une solution exacte des équations d'EINSTEIN. Les détails sont donnés dans le chapitre suivant.

IV – Solution exacte aux équations d'EINSTEIN

La métrique obtenue à partir de la métrique de la relativité restreinte en valeurs impropres et de l'équivalence entre énergie potentielle et énergie cinétique est solution exacte de l'équation d'EINSTEIN $R_{\xi\beta} = 0$.

Pour le montrer, nous utilisons l'expression suivante du tenseur de RICCI qui est formé par contraction du tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL, et qui sert de base à la formulation des équations de la gravitation :

$$R_{\xi\beta} = \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} \Gamma_{\xi\nu}^{\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\xi\beta}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\xi\nu}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \quad (\text{IV-1})$$

Dans un espace à 4 dimensions, nous adoptons l'indice 4 comme indice temporel. L'écriture développée prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} R_{\xi\beta} = & \Gamma_{\xi\beta}^1 \left\{ \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4 \right\} + \Gamma_{\xi\beta}^2 \left\{ \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{24}^4 \right\} \\ & + \Gamma_{\xi\beta}^3 \left\{ \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{34}^4 \right\} + \Gamma_{\xi\beta}^4 \left\{ \Gamma_{41}^1 + \Gamma_{42}^2 + \Gamma_{43}^3 + \Gamma_{44}^4 \right\} \\ & - (\Gamma_{1\beta}^1 \Gamma_{\xi 1}^1 + \Gamma_{2\beta}^1 \Gamma_{\xi 1}^2 + \Gamma_{3\beta}^1 \Gamma_{\xi 1}^3 + \Gamma_{4\beta}^1 \Gamma_{\xi 1}^4) - (\Gamma_{1\beta}^2 \Gamma_{\xi 2}^1 + \Gamma_{2\beta}^2 \Gamma_{\xi 2}^2 + \Gamma_{3\beta}^2 \Gamma_{\xi 2}^3 + \Gamma_{4\beta}^2 \Gamma_{\xi 2}^4) \\ & - (\Gamma_{1\beta}^3 \Gamma_{\xi 3}^1 + \Gamma_{2\beta}^3 \Gamma_{\xi 3}^2 + \Gamma_{3\beta}^3 \Gamma_{\xi 3}^3 + \Gamma_{4\beta}^3 \Gamma_{\xi 3}^4) - (\Gamma_{1\beta}^4 \Gamma_{\xi 4}^1 + \Gamma_{2\beta}^4 \Gamma_{\xi 4}^2 + \Gamma_{3\beta}^4 \Gamma_{\xi 4}^3 + \Gamma_{4\beta}^4 \Gamma_{\xi 4}^4) \\ & + \left\{ \frac{\partial \Gamma_{\xi\beta}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{\xi\beta}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{\xi\beta}^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma_{\xi\beta}^4}{\partial x^4} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{\xi 1}^1}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \Gamma_{\xi 2}^2}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \Gamma_{\xi 3}^3}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \Gamma_{\xi 4}^4}{\partial x^{\beta}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-2})$$

Chacun des coefficients de CHRISTOFFEL s'exprime en fonction des dérivées des composantes du tenseur métrique par la relation suivante :

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rk} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} \quad (\text{IV-3})$$

dont l'écriture développée est donnée par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^r = & \frac{1}{2} g^{r1} \left\{ \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right\} + \frac{1}{2} g^{r2} \left\{ \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} g^{r3} \left\{ \frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right\} + \frac{1}{2} g^{r4} \left\{ \frac{\partial g_{i4}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j4}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^4} \right\} \end{aligned} \quad (IV-4)$$

soit explicitement pour chaque valeur de r :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^1 = & \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right\} + \frac{1}{2} g^{12} \left\{ \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} g^{13} \left\{ \frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right\} + \frac{1}{2} g^{14} \left\{ \frac{\partial g_{i4}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j4}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^4} \right\} \end{aligned} \quad (IV-5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^2 = & \frac{1}{2} g^{21} \left\{ \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right\} + \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} g^{23} \left\{ \frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right\} + \frac{1}{2} g^{24} \left\{ \frac{\partial g_{i4}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j4}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^4} \right\} \end{aligned} \quad (IV-6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^3 = & \frac{1}{2} g^{31} \left\{ \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right\} + \frac{1}{2} g^{32} \left\{ \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right\} + \frac{1}{2} g^{34} \left\{ \frac{\partial g_{i4}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j4}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^4} \right\} \end{aligned} \quad (IV-7)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^4 = & \frac{1}{2} g^{41} \left\{ \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right\} + \frac{1}{2} g^{42} \left\{ \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} g^{43} \left\{ \frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right\} + \frac{1}{2} g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{i4}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j4}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^4} \right\} \end{aligned} \quad (IV-8)$$

La métrique obtenue au chapitre précédent se présente sous la forme :

$$ds^2 = -\frac{dx^2}{1-2\frac{gx}{c^2}} - dy^2 - dz^2 + d(ct)^2 \left(1 - 2\frac{gx}{c^2} \right) = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 + g_{44}d(ct)^2 \quad (IV-9)$$

On en déduit que les seuls coefficients non nuls de la métrique sont :

$$g_{11} = -\frac{1}{1-2\frac{gx}{c^2}} \quad g_{22} = -1 \quad g_{33} = -1 \quad g_{44} = 1 - 2\frac{gx}{c^2} \quad (IV-10)$$

Les composantes du tenseur métrique contravariant s'en déduisent :

$$g^{11} = -\left(1 - 2\frac{gx}{c^2}\right) \quad g^{22} = -1 \quad g^{33} = -1 \quad g^{44} = \frac{1}{1 - 2\frac{gx}{c^2}} \quad (\text{IV-11})$$

Pour i différent de j , les coefficients de la métrique g_{ij} et g^{ij} sont nuls, ce qui simplifie grandement les coefficients de CHRISTOFFEL sous ces hypothèses. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right\} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right\} \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right\} \quad \Gamma_{13}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} \right\} \quad \Gamma_{14}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \right\} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} \quad \Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-12})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right\} \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right\} \quad \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} \right\} \quad \Gamma_{24}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} \right\} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right\} \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right\} \quad \Gamma_{44}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-13})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right\} \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} \quad \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right\} \quad \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \right\} \quad \Gamma_{34}^3 = \frac{1}{2}g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^4} \right\} \\ \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} \left\{ -\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} \right\} \quad \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{33} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} \right\} \quad \Gamma_{44}^3 = \frac{1}{2}g^{33} \left\{ -\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-14})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^4 &= \frac{1}{2}g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{i4}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j4}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^4} \right\} \\ \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2}g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right\} \quad \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2}g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} \right\} \quad \Gamma_{43}^4 = \frac{1}{2}g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^3} \right\} \quad \Gamma_{44}^4 = \frac{1}{2}g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} \right\} \\ \Gamma_{11}^4 &= \frac{1}{2}g^{44} \left\{ -\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \right\} \quad \Gamma_{22}^4 = \frac{1}{2}g^{44} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^4} \right\} \quad \Gamma_{33}^4 = \frac{1}{2}g^{44} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-15})$$

La métrique ne dépend que de la variable $x = x^1$. Les seules dérivées partielles non nulles sont donc les dérivées partielles par rapport à x^1 . On obtient ainsi les seuls coefficients de CHRISTOFFEL non nuls :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right\} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} & \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{IV-16}$$

Enfin, g_{22} et g_{33} étant constant, leurs dérivées partielles sont nulles également. Il ne reste finalement que :

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right\} \quad \Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right\} \quad \Gamma_{41}^4 = \Gamma_{14}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right\} \tag{IV-17}$$

Le calcul explicite des coefficients de CHRISTOFFEL à partir des expressions de g_{11} et g_{44} (IV-10,11) fournit le résultat (on rappelle que dans cette notation, $x^1 = x$) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} &= -\frac{\frac{2g}{c^2}}{\left(1 - 2\frac{gx}{c^2}\right)^2} & \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} &= -\frac{2g}{c^2} \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 - 2\frac{gx}{c^2}\right) \frac{\frac{2g}{c^2}}{\left(1 - 2\frac{gx}{c^2}\right)^2} = \frac{\frac{g}{c^2}}{1 - 2\frac{gx}{c^2}} \\
\Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right\} = \left(1 - 2\frac{gx}{c^2}\right) \frac{g}{c^2} \\
\Gamma_{41}^4 = \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} g^{44} \left\{ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right\} = -\frac{\frac{g}{c^2}}{1 - 2\frac{gx}{c^2}}
\end{aligned} \tag{IV-18}$$

Le développement du tenseur de RICCI est donné en annexe en fin de ce chapitre. On constate assez rapidement que les seuls termes susceptibles d'être non nuls sont R_{11} et R_{44} :

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Gamma_{11}^1 \Gamma_{14}^4 - \Gamma_{41}^4 \Gamma_{14}^4 - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{14}^4}{\partial x^1} \right\} \\
R_{44} &= \Gamma_{44}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{44}^1 \Gamma_{41}^4 + \left\{ \frac{\partial \Gamma_{44}^1}{\partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{IV-19}$$

On obtient explicitement :

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Gamma_{11}^1 \Gamma_{14}^4 - \Gamma_{41}^4 \Gamma_{14}^4 - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{14}^4}{\partial x^1} \right\} \\
R_{11} &= \left(\frac{\frac{g}{c^2}}{1 - 2 \frac{gx}{c^2}} \right) \left(-\frac{\frac{g}{c^2}}{1 - 2 \frac{gx}{c^2}} \right) - \left(-\frac{\frac{g}{c^2}}{1 - 2 \frac{gx}{c^2}} \right)^2 - \left\{ -\frac{\frac{2g^2}{c^4}}{\left(1 - 2 \frac{gx}{c^2}\right)^2} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{IV-20}$$

$$\begin{aligned}
R_{44} &= \Gamma_{44}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{44}^1 \Gamma_{41}^4 + \left\{ \frac{\partial \Gamma_{44}^1}{\partial x^1} \right\} \\
R_{44} &= \left(\left(1 - 2 \frac{gx}{c^2}\right) \frac{\frac{g}{c^2}}{c^2} \right) \left(\frac{\frac{g}{c^2}}{1 - 2 \frac{gx}{c^2}} \right) - \left(\left(1 - 2 \frac{gx}{c^2}\right) \frac{\frac{g}{c^2}}{c^2} \right) \left(-\frac{\frac{g}{c^2}}{1 - 2 \frac{gx}{c^2}} \right) + \left\{ -\frac{2g^2}{c^4} \right\} = 0
\end{aligned}$$

On confirme ainsi que la métrique issue de la relativité restreinte en valeurs impréces en utilisant l'équivalence entre énergie potentielle et énergie cinétique, est bien une solution exacte des équations d'EINSTEIN.

A toutes fins utiles, l'annexe suivante donne le développement explicite des termes du tenseur de RICCI.

ANNEXE

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Gamma_{11}^1 \left\{ \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4 \right\} + \Gamma_{11}^2 \left\{ \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{24}^4 \right\} \\
&\quad + \Gamma_{11}^3 \left\{ \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{34}^4 \right\} + \Gamma_{11}^4 \left\{ \Gamma_{41}^1 + \Gamma_{42}^2 + \Gamma_{43}^3 + \Gamma_{44}^4 \right\} \\
&\quad - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{41}^1 \Gamma_{11}^4) - (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{12}^3 + \Gamma_{41}^2 \Gamma_{12}^4) \\
&\quad - (\Gamma_{11}^3 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{41}^3 \Gamma_{13}^4) - (\Gamma_{11}^4 \Gamma_{14}^1 + \Gamma_{21}^4 \Gamma_{14}^2 + \Gamma_{31}^4 \Gamma_{14}^3 + \Gamma_{41}^4 \Gamma_{14}^4) \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma_{11}^4}{\partial x^4} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{14}^4}{\partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{IV-21}$$

$$\begin{aligned}
R_{12} &= \Gamma_{12}^1 \left\{ \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4 \right\} + \Gamma_{12}^2 \left\{ \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{24}^4 \right\} \\
&\quad + \Gamma_{12}^3 \left\{ \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{34}^4 \right\} + \Gamma_{12}^4 \left\{ \Gamma_{41}^1 + \Gamma_{42}^2 + \Gamma_{43}^3 + \Gamma_{44}^4 \right\} \\
&\quad - (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{32}^1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{42}^1 \Gamma_{11}^4) - (\Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{12}^3 + \Gamma_{42}^2 \Gamma_{12}^4) \\
&\quad - (\Gamma_{12}^3 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{42}^3 \Gamma_{13}^4) - (\Gamma_{12}^4 \Gamma_{14}^1 + \Gamma_{22}^4 \Gamma_{14}^2 + \Gamma_{32}^4 \Gamma_{14}^3 + \Gamma_{42}^4 \Gamma_{14}^4) \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma_{12}^4}{\partial x^4} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{14}^4}{\partial x^2} \right\}
\end{aligned} \tag{IV-22}$$

V – Transformation de LORENTZ et référentiels accélérés

Nous avons utilisé dans les chapitres précédents le potentiel suivant qui définit un champ de gravitation uniforme suivant l'axe des x :

$$\phi(x) = -gx \quad (\text{V-1})$$

Cette relation fait apparaître une identité d'essence entre champ de gravitation (ou accélération de pesanteur) et accélération d'un référentiel par rapport à un autre.

Lorsque nous mettons en œuvre le principe d'équivalence dans ses aspects énergétiques, nous sommes amenés à poser :

$$v^2 = -2\phi(x) = 2gx \quad (\text{V-2})$$

Il apparaît que tant que nous restons dans un cadre valide pour cette relation (v inférieure à c), la vitesse définie par cette relation est devenue une fonction de x : il s'agit donc d'une vitesse instantanée puisqu'elle varie en chaque abscisse x .

Le principe d'équivalence associe cette relation à un mouvement uniformément accéléré suivant l'axe des x à l'aide des relations :

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{V-3})$$
$$v = gt$$

La vitesse apparaît comme une fonction du temps, et peut être considérée comme une vitesse instantanée.

On peut s'interroger sur cette propriété et formuler l'hypothèse que la transformation de LORENTZ reste valide pour un mouvement accéléré des référentiels, à condition de considérer leur vitesse relative instantanée. On concède que les arguments en faveur de cette hypothèse sont pour l'instant bien ténus. On a toutefois montré que la métrique impropre qui s'en déduit conduit à une solution exacte des équations d'EINSTEIN.

Pour étayer cette hypothèse, nous allons établir les transformations de quelques grandeurs physiques entre référentiels accélérés. Lorsque ces transformations seront établies, nous tenterons de vérifier si elles conservent des relations aussi importantes que la relation fondamentale de la dynamique. Si la réponse est oui, alors nous aurons un argument

supplémentaire en faveur de la validité de la transformation de LORENTZ pour des mouvements relatifs accélérés de référentiels.

Les calculs sont présentés sous la forme de relations élémentaires de la mécanique du point, en traitant directement les principales grandeurs physiques, ce qui rend les résultats moins abstraits que par l'utilisation du formalisme des quadrivecteurs.

Les démonstrations sont présentées dans leur intégralité, sans soucis de longueurs et en intégrant les principaux détails de calculs, ce qui les rend parfois un peu laborieuses.

I – Les transformations des grandeurs physiques

Ces transformations vont être établies en utilisant les relations de bases suivantes entre deux référentiels (R) et (R') en mouvement relatif tel que la vitesse relative instantanée de (R') par rapport à (R) soit égale à v , et que l'accélération relative instantanée de (R') par rapport à (R) soit égale à a :

Transformation de LORENTZ :

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad d(ct') = \frac{d(ct) - vdx/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (V-4)$$

Vitesse relative instantanée de (R') par rapport à (R) :

$$dv = a dt \quad (V-5)$$

Dans un souci de simplification d'écriture, la variable z sera omise par la suite car elle a un comportement analogue à la variable y .

I - 1 - La transformation des vitesses

Toutes les grandeurs qui ne font intervenir que des éléments différentiels du premier ordre ne dépendent pas de l'état d'accélération des référentiels, comme c'est le cas en mécanique classique.

C'est en particulier vrai pour la vitesse instantanée : qu'elle soit calculée ou mesurée pour un mobile en mouvement sinusoïdal, ou en mouvement uniformément accéléré ; lorsqu'elle est prise à un instant donné, elle ne dépend pas de l'accélération du mobile à cet instant.

On en déduit que la transformation des vitesses entre deux référentiels ne dépend pas de l'état d'accélération de ces référentiels, et on obtient en effectuant le rapport des relations de transformations (V-4) :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (V-6)$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (\text{V-7})$$

Puisque ces transformations ne dépendent pas de l'accélération relative des référentiels, on obtient des relations sans changement par rapport à celle qui sont établies en relativité restreinte.

I – 2 La transformation des accélérations

Nous allons être amenés à considérer des différentielles du second ordre, et donc à prendre en compte l'accélération relative des référentiels.

Sur un intervalle de temps infiniment bref dt , la vitesse relative des référentiels est constante, mais, conformément à l'analyse différentielle, nous allons considérer qu'entre deux éléments successifs dt , la vitesse relative v aura varié de la quantité :

$$dv = a dt \quad (\text{V-8})$$

où a représente l'accélération instantanée supposée constante sur l'élément dt .

Soit (R) un référentiel sur lequel nous ne faisons aucune hypothèse : il n'existe aucune raison en particulier de le supposer galiléen.

Soit (R') un référentiel en mouvement de translation par rapport à (R) suivant l'axe des x , avec une vitesse relative v quelconque, et une accélération relative a quelconque sur un intervalle de temps dt .

La transformation des accélérations consiste à évaluer l'accélération d'un point matériel dans le référentiel (R') en fonction des grandeurs cinématiques du mouvement de ce point dans le référentiel (R) et des grandeurs cinématiques du mouvement relatif des référentiels.

La transformation des accélérations suivant l'axe des x :

Pratiquement, elle s'obtient à partir de la transformation de LORENTZ (V-4) en utilisant la composition des différentielles suivantes :

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) \frac{dt}{dt'} \quad (\text{V-9})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right) = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2} - a \right) \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) + \frac{1}{c^2} \left(a \frac{dx}{dt} + v \frac{d^2x}{dt^2} \right) \left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} \quad (\text{V-10})$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (\text{V-11})$$

soit, en regroupant convenablement les termes, après multiplication des relations (V-10) et (V-11) :

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^3} - a \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^2} + \frac{a}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right) \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^3} \quad (\text{V-12})$$

Lorsque l'accélération est nul ($a = 0$), on retrouve le résultat de la relativité restreinte.

Pour les faibles vitesses ($v \ll c$), on retrouve le résultat attendu de la mécanique classique :

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} \approx \frac{d^2x}{dt^2} - a \quad (\text{V-13})$$

La transformation des accélérations suivant l'axe des y :

Par un cheminement analogue, on obtient :

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy'}{dt'} \right) \frac{dt}{dt'} \quad (\text{V-14})$$

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} + \frac{dy}{dt} \left(\frac{-\frac{av}{c^2} \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{c^2} \left(a \frac{dx}{dt} + v \frac{d^2x}{dt^2}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)^2} \right) \quad (\text{V-15})$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (\text{V-16})$$

soit, en regroupant convenablement les termes, après multiplication des relations (V-15) et (V-16) :

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\left\{1 - \frac{v^2}{c^2}\right\}}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^2} + \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \frac{\left\{1 - \frac{v^2}{c^2}\right\}}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^3} + \frac{dy}{dt} \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^3} \quad (V-17)$$

I – 3 La transformation des masses

Conformément à l'analyse précédente, la transformation des masses ne faisant intervenir que des différentielles de l'espace et du temps du premier ordre, elle est inchangée par rapport à celle qui est établie en relativité restreinte :

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) \quad (V-18)$$

I – 4 La transformation des dérivées temporelles des masses

Cette grandeur caractérise la variation temporelle de la masse lorsque sa vitesse et/ou son accélération varie. Elle apparaît comme une transformation utile pour aborder la transformation des forces. Elle s'établit à partir de la relation (V-18), en utilisant le schéma de dérivation composée :

$$\frac{dm'}{dt'} = \frac{dm'}{dt} \frac{dt}{dt'} \quad (V-19)$$

$$\frac{dm'}{dt} = \frac{dm}{dt} \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m \frac{-\frac{1}{c^2} \left(a \frac{dx}{dt} + v \frac{d^2x}{dt^2}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{av}{c^2} \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (V-20)$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (V-21)$$

soit, en regroupant convenablement les termes, après multiplication des relations (V-20) et (V-21) :

$$\frac{dm'}{dt'} = \frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (V-22)$$

I – 5 La transformation des forces

Suivant l'axe Ox

Cette transformation peut être établie en utilisant le schéma de dérivation suivant :

$$F'_x = \frac{d}{dt'} \left(m' \frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{dm'}{dt'} \frac{dx'}{dt'} + m' \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad (V-23)$$

Faisant usage des 4 relations établies précédemment, exprimées en fonction de la vitesse relative des référentiels v , et de leur accélération relative a ; et rappelées pour mémoire :

$$\frac{dm'}{dt'} = \frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \quad (V-24)$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (V-25)$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \quad (V-26)$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left\{ 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right\}^3} - a \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{ 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right\}^2} + \frac{a}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{ 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right\}^3} \quad (V-27)$$

on obtient :

$$F'_x = \left\{ \frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right\} \left\{ \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right\} + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} - a \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} + \frac{a}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right\} \quad (V-28)$$

Soit encore en séparant les termes émanant de la relativité restreinte (première ligne) et ceux inhérent à l'accélération relative des référentiels (deuxième ligne) :

$$\begin{aligned}
F'_x = & \left\{ \frac{dm}{dt} - m \left(\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right\} \left\{ \frac{dx - v}{1 - \frac{v \cdot U_x}{c^2}} \right\} + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{ 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right\}^3} \right\} \\
- m \frac{a}{c^2} & \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \left\{ \frac{dx - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right\} + ma \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ - \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{ 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right\}^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{ 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right\}^3} \right\}
\end{aligned} \tag{V-29}$$

Cette expression se réduit en simplifiant progressivement les lignes 1 et 2 :

$$F'_x = \frac{dm}{dt} \left\{ \frac{dx - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right\} - m \frac{d^2x}{dt^2} \left\{ \frac{\left(\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} - \frac{v^2}{c^2} \right) - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} \right\} \tag{V-30}$$

$$- \frac{ma}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} + ma \left\{ - \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} + \frac{1}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} \right\}$$

$$F'_x = \frac{\frac{dm}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - v \right) + m \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} + \frac{mav}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} - \frac{ma}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \tag{V-31}$$

Soit encore, faisant usage de $F_x = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{dm}{dt} \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2x}{dt^2}$

$$F'_x = \frac{1}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \left(F_x - v \frac{dm}{dt} \right) + \frac{mav}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} - \frac{ma}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \tag{V-32}$$

Dans cette dernière expression le premier terme correspond encore aux résultats déduits de la relativité restreinte, et les deux suivants de l'influence de l'accélération relative des référentiels. L'écriture peut être condensée, en considérant l'expression de la force d'entraînement F_e telle qu'elle est définie en mécanique classique :

$$F_e = \frac{d}{dt} (mv) = ma + v \frac{dm}{dt} \tag{V-33}$$

On obtient la relation de transformation suivante :

$$F'_x = \frac{1}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} (F_x - F_e) + \frac{mav}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \tag{V-34}$$

Suivant l'axe Oy

En procédant de manière analogue, cette transformation sera établie suivant le schéma :

$$F'_y = \frac{d}{dt'} \left(m' \frac{dy'}{dt'} \right) = \frac{dm'}{dt'} \frac{dy'}{dt'} + m' \frac{d^2y'}{dt'^2} \quad (\text{V-35})$$

Faisant usage des 4 relations suivantes, établies précédemment, et rappelées pour mémoire :

$$\frac{dm'}{dt'} = \frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \quad (\text{V-36})$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (\text{V-37})$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \quad (\text{V-38})$$

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} + \left(\frac{v}{c^2} \right) \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} + \frac{dy}{dt} \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} \quad (\text{V-39})$$

on obtient :

$$F'_y = \left\{ \frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right\} \left[\frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] \quad (\text{V-40})$$

$$+ m \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} + \left(\frac{v}{c^2} \right) \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} + \frac{dy}{dt} \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} \right\}$$

Soit encore en séparant les termes émanant de la relativité restreinte (première ligne) et ceux inhérent à l'accélération relative des référentiels (deuxième ligne) :

$$\begin{aligned}
F'_y = & \left\{ \frac{dm}{dt} - m \left(\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right\} \left\{ \frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right\} + m \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} + \left(\frac{v}{c^2} \right) \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} \right\} \\
& - m \frac{a}{c^2} \left\{ \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right\} \left\{ \frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right\} + m \frac{dy}{dt} \frac{a}{c^2} \left\{ \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{V-41}$$

La deuxième ligne s'annule, et on obtient après réduction :

$$F'_y = F_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \tag{V-42}$$

Soit donc une transformation identique à celle de la relativité restreinte : l'accélération relative des référentiels suivant la direction Ox est sans incidence sur les composantes de forces suivant Oy et Oz.

VI – Invariance de la relation fondamentale de la dynamique sous la transformation de LORENTZ étendue aux référentiels accélérés

La relation fondamentale de la dynamique fait partie de ces lois presque mythiques par l'extrême simplicité de sa formulation, et par l'étendue des phénomènes physiques qu'elle permet de comprendre et d'interpréter.

Une transformation de coordonnées entre référentiels accélérés doit conserver l'invariance de cette relation.

Nous allons montrer que les transformations que nous avons établies entre les grandeurs physiques, et en particulier les termes qui font explicitement référence à l'accélération relative des référentiels, sont en cohérence avec cette exigence.

En nous plaçant résolument du point de vue du physicien, nous adoptons comme point de départ, cette relation écrite dans le référentiel (R') :

$$\vec{F}' = \frac{d}{dt'}(m'\vec{v}') = \frac{dm'}{dt'}\vec{v}' + m'\frac{d\vec{v}'}{dt'} \quad (\text{VI-1})$$

En substituant dans cette relation chacune des transformations concernant la force, la masse, la vitesse, le temps, et l'accélération qui sont définies en fonctions des mêmes grandeurs mais exprimées dans le référentiel (R), nous allons montrer qu'on obtient après réduction la relation analogue à (VI-1), mais écrite dans le référentiel (R) :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{VI-2})$$

Pour vérifier cette écriture vectorielle, nous projeterons cette formulation vectorielle suivant chacun des axes x et y.

I – Vérification suivant l'axe des x

Dans la relation :

$$F_x' = \frac{d}{dt'} \left(m' \frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{dm'}{dt'} \frac{dx'}{dt'} + m' \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad (\text{VI-3})$$

nous allons injecter les transformations obtenues dans les chapitres précédents, et qui sont rappelées ci-dessous pour mémoire : (VI –4,5,6,7,8)

$$F_x' = \frac{1}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} (F_x - F_e) + \frac{mav}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (\text{VI-4})$$

$$\frac{dm'}{dt'} = \frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - \frac{ma}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (\text{VI-5})$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (\text{VI-6})$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) \quad (\text{VI-7})$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^3} - a \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^2} + \frac{a}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left\{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right\}^3} \quad (\text{VI-8})$$

Ces substitutions amènent à l'écriture développée de la transformation dans le référentiel (R), comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \left(F_x - ma - v \frac{dm}{dt} \right) + \frac{mav}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} = \\
& \left[\frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - \frac{ma}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right] \left[\frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] \quad (\text{VI-9}) \\
& + \left[\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \right] \left[\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} - a \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} + \frac{a}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} \right]
\end{aligned}$$

Nous allons réduire progressivement cette expression, en détaillant les simplifications apportées à chaque étape :

Simplification par $\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)$:

$$\begin{aligned}
& \left(F_x - ma - v \frac{dm}{dt} \right) + \frac{mav}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} = \\
& \left[\frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - \frac{ma}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right] \left[\frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right] \quad (\text{VI-10}) \\
& + \left[\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \left[\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} - a \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2} + \frac{a}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} \right]
\end{aligned}$$

Simplification par $\frac{mav}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$:

$$\left(F_x - ma - v \frac{dm}{dt}\right) = \left[\frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{\frac{a}{c^2} \frac{dx}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] \left[\frac{dx}{dt} - v \right]$$

$$+ \left[\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \left[\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} - a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{a}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} \right] \quad (\text{VI-11})$$

Simplification par $\frac{ma}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)}$:

$$\left(F_x - ma - v \frac{dm}{dt}\right) = \left[\frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] \left[\frac{dx}{dt} - v \right] + \left[\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \left[\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} - a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] \quad (\text{VI-12})$$

Simplification par $(-ma)$:

$$\left(F_x - v \frac{dm}{dt}\right) = \left[\frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] \left[\frac{dx}{dt} - v \right] + \left[\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \left[\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^3}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} \right] \quad (\text{VI-13})$$

$$\left(F_x - v \frac{dm}{dt}\right) = \left[\frac{dm}{dt} \frac{dx}{dt} - \frac{dm}{dt} v - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} + m \frac{\frac{v^2}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] + \left[m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} \right] \quad (\text{VI-14})$$

Simplification par $v \frac{dm}{dt}$ et $m \frac{\frac{v^2}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}$:

$$F_x = \left[\frac{dm}{dt} \frac{dx}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] + \left[m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} \right] \quad (\text{VI-15})$$

Et pour conclure :

$$F_x = \frac{dm}{dt} \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (\text{VI-16})$$

II – Vérification suivant l'axe des y

Suivant l'axe Oy qui ne possède aucune composante d'accélération relative entre référentiels, la relation de transformation des forces est inchangée par rapport à la relativité restreinte. Nous en concluons que l'accélération relative du référentiel ne génère pas de force dans la direction orthogonale à cette accélération relative.

Comme dans le paragraphe précédent, nous écrivons, dans le référentiel (R'), la projection de la relation fondamentale de la dynamique suivant l'axe Oy :

$$F_y' = \frac{d}{dt'} \left(m' \frac{dy'}{dt'} \right) = \frac{dm'}{dt'} \frac{dy'}{dt'} + m' \frac{d^2y'}{dt'^2} \quad (\text{VI-17})$$

Puis, nous substituons dans cette expression, les transformations des grandeurs physiques établies à partir de l'extension de la transformation de LORENTZ aux référentiels accélérés (VI-18,19,20,21,22) :

$$F_y' = F_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (\text{VI-18})$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad (\text{VI-19})$$

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)^2} + \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)^3} + \frac{dy}{dt} \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)^3} \quad (\text{VI-20})$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) \quad (\text{VI-21})$$

$$\frac{dm'}{dt'} = \frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (\text{VI-22})$$

On obtient ainsi l'écriture développée de la relation (VI-17) dans le référentiel (R') :

$$F_y \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \left[\frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \right] \left[\frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] +$$

$$\left[\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right) \right] \left[\frac{d^2y}{dt^2} \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)^2} + \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)^3} + \frac{dy}{dt} \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)^3} \right]$$
(VI-23)

Nous allons, comme précédemment, réduire progressivement cette expression, en détaillant les simplifications apportées à chaque étape :

Simplification par $\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)$

$$F_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left[\frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \right] \left[\frac{dy}{dt} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \right] +$$

$$\left[\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] \left[\frac{d^2y}{dt^2} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} + \frac{dy}{dt} \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} \right]$$
(VI-24)

Simplification par $\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$

$$F_y = \left[\frac{dm}{dt} - m \frac{\frac{v}{c^2} \frac{d^2x}{dt^2}}{1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} - m \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \right] \left[\frac{dy}{dt} \right] +$$

$$m \left[\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt} \frac{1}{\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} + \frac{dy}{dt} \frac{a}{c^2} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} \right]$$
(VI-25)

Soit pour conclure :

$$F_y = \frac{dm}{dt} \frac{dy}{dt} + m \frac{d^2y}{dt^2}$$
(VI-26)

On peut donc conclure que les termes explicitement fonction de l'accélération relative qui ont été introduits comme conséquence de l'extension de la transformation de LORENTZ

aux référentiels accélérés respectent l'invariance de la relation fondamentale de la dynamique par changement de référentiel.

Il s'agit d'un argument significatif qui plaide en faveur de la validité de cette extension.

VII – Conclusion

Le principe d'équivalence repose sur l'équivalence entre un référentiel en chute libre dans un champ de gravitation (R) et un référentiel inertiel associé à la relativité restreinte et donc sans champ de gravitation (R'). En d'autres termes, la chute libre doit annuler les effets de la gravitation.

Il doit donc exister un raisonnement qui permet de passer de la métrique du référentiel (R') décrit par la relativité restreinte, au référentiel (R) qui est soumis à un champ de gravitation.

Les étapes d'un raisonnement possible ont été détaillées dans les chapitres précédents. Elles font apparaître un certain nombre de particularités.

La métrique la plus simple utilisée en relativité restreinte utilise les grandeurs propres associées aux éléments de temps et d'espace, tandis que la métrique utilisée en relativité générale utilise les grandeurs impropres de ces mêmes éléments. Cela indique par exemple qu'en relativité générale, les horloges qui mesurent les intervalles de temps sont des horloges fixes et synchronisées qui déterminent un temps unique associé au référentiel, quel que soit l'endroit où on se trouve.

D'un point de vue énergétique, l'utilisation du Lagrangien de la relativité restreinte permet de décrire les échanges entre énergie cinétique et énergie potentielle. Le principe d'équivalence consiste à écrire que l'énergie cinétique conserve la même expression qu'en relativité restreinte, tandis que l'énergie potentielle devient l'énergie associée au champ de gravitation.

En formalisant cette équivalence, on fait le constat que la métrique impropre de la relativité restreinte devient une fonction de l'espace, plus précisément de la variable spatiale x dans les exemples présentés. Cette propriété suggère que la relativité restreinte exprimée de manière locale peut être complétée par des termes adéquats pour être utilisée avec des référentiels accélérés. Ces termes ont été explicitement calculés, et assurent l'invariance de la relation fondamentale de la dynamique, ce qui constitue un argument significatif en faveur de leur validité.