



HAL
open science

Méthode de la variation de la constante pour les suites récurrentes linéaires

David Pigeon

► **To cite this version:**

David Pigeon. Méthode de la variation de la constante pour les suites récurrentes linéaires. 2024. ⟨hal-04594303⟩

HAL Id: hal-04594303

<https://hal.science/hal-04594303v1>

Preprint submitted on 30 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Méthode de la variation de la constante pour les suites récurrentes linéaires

David Pigeon

30 mai 2024

Mots clés : Suites numériques, Méthode de la variation de la constante, Méthode de Lagrange.

Résumé

On adapte la méthode de la variation de la constante pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 aux suites récurrentes linéaires.

Table des matières

1	Résultat	2
2	Cas en dimension 1	4
2.1	Exemple 1	4
2.2	Exemple 2	5
2.3	Exemple 3	6
3	Cas en dimension 2	8
3.1	Introduction	8
3.2	Exemple	8

Introduction

La méthode de variation des constantes, également appelée méthode de Lagrange, est une technique en mathématiques pour résoudre les équations différentielles. Cette méthode permet de trouver des solutions d'équations différentielles non homogènes en utilisant les solutions de l'équation homogène associée. Elle consiste à remplacer les constantes de la solution homogène par des fonctions variables à déterminer, facilitant ainsi la résolution d'équations plus complexes.

Dans ce texte, on développe une méthode de variation des constantes pour les suites numériques en s'inspirant de celle utilisée pour les équations différentielles. En remplaçant les termes constants d'une suite récurrente par des fonctions variables dépendant de l'indice, on peut résoudre des suites non homogènes en utilisant les solutions des suites homogènes correspondantes. On finit le texte avec quelques exemples d'application.

1 Résultat

Soit :

$$a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \quad , \quad b \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$$

On considère l'équation l'équation d'inconnue $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$:

$$(E) : u_{n+1} = a_n u_n + b_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

L'équation homogène associée à (E) est :

$$(E_0) : u_{n+1} = a_n u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1.1

(i) On a :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(E_0) &= \{(\mathbf{P}(a)_n \Lambda)_n, \Lambda \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathbf{P}(a) e_i)_{1 \leq i \leq n}. \end{aligned}$$

avec (e_1, \dots, e_n) une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et :

$$\mathbf{P}(a) := (I_n, a(0), a(1)a(0), a(2)a(1)a(0), \dots).$$

(ii) Soit une solution particulière w de (E) . On a :

$$\text{Sol}(E) = w + \text{Sol}(E_0).$$

(iii) On a :

$$\text{Sol}(E) = \left\{ \left(\mathbf{P}(a)_n \left(\Lambda + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b(k) \right) \right)_n, \Lambda \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Démonstration. (i) Montrons le résultat par double inclusion.

- Soit $u \in \text{Sol}(E_0)$. Montrons que :

$$u = \mathbf{P}(a) u_0$$

i.e. montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_n) : u_n = \mathbf{P}(a)_n u_0.$$

(I) On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(a)_0 u_0 &= I_n u_0 \\ &= u_0. \end{aligned}$$

Donc (\mathcal{P}_0) est vraie.

(II) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons (\mathcal{P}_n) vraie. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_n u_n \\ &= a_n \mathbf{P}(a)_n u_0 \\ &= \mathbf{P}(a)_{n+1} u_0. \end{aligned}$$

Donc (\mathcal{P}_{n+1}) est vraie.

(III) Par le principe de récurrence, (\mathcal{P}_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $u := \lambda \mathbf{P}(a)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - a_n u_n &= \lambda \mathbf{P}(a)_{n+1} - a_n \lambda \mathbf{P}(a)_n \\ &= \lambda (\mathbf{P}(a)_{n+1} - a_n \mathbf{P}(a)_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $u \in \text{Sol}(E_0)$.

(ii) Montrons le résultat par double inclusion.

- Soit $u \in \text{Sol}(E_0)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (w+u)_{n+1} - a_n (w+u)_n &= (w_{n+1} - a_n w_n) + (u_{n+1} + a_n u_n) \\ &= 0 + b_n \\ &= b_n \end{aligned}$$

i.e. $w+u \in \text{Sol}(E)$.

- Soit $v \in \text{Sol}(E)$. Posons $u := v - w$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - a_n u_n &= (v-w)_{n+1} - a_n (v-w)_n \\ &= (v_{n+1} - a_n v_n) - (w_{n+1} - a_n w_n) \\ &= b_n - b_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

i.e. $u \in \text{Sol}(E_0)$.

(iii) Soit la suite $w \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n := \mathbf{P}(a)_n \mu(n)$$

avec $\mu \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\mu_0 := 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. On a équivalence entre :

$$\begin{aligned} w \in \text{Sol}(E) &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = a_n w_n + b_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(a)_{n+1} \mu_{n+1} = a_n \mathbf{P}(a)_n \mu_n + b_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(a)_{n+1} \mu_{n+1} = \mathbf{P}(a)_{n+1} \mu_n + b_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} - \mu_n = \mathbf{P}(a)_{n+1}^{-1} b_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{k+1} - \mu_k = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b(k) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \mathbf{P}(a)_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b(k) \right) \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\text{Sol}(E) = \left\{ \left(\mathbf{P}(a)_n \left(\Lambda + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b(k) \right) \right)_n, \Lambda \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \right\}.$$

□

2 Cas en dimension 1

2.1 Exemple 1

Soit l'équation dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$:

$$(E) : u_{n+1} = 2u_n + 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Résolvons l'équation (E) de deux façons différentes.

- (1) Une solution de (E) est une suite arithmético-géométrique. On peut donc résoudre simplement (E) par la technique usuelle. L'équation caractéristique associée à (E) est :

$$(E_c) : X = 2X + 5.$$

On a :

$$\text{Sol}(E_c) = \{-5\}.$$

Soit $u \in \text{Sol}(E)$. Posons :

$$v := u + 5.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 5 \\ &= 2u_n + 5 + 5 \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

i.e. $v_n = 2^n v_0$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n - 5 \\ &= 2^n v_0 - 5 \\ &= 2^n (u_0 + 5) - 5. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\text{Sol}(E) = \{(2^n (\lambda + 5) - 5)_n, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

- (2) On applique la proposition 1.1. On est dans le cas où :

$$a : n \in \mathbb{N} \longmapsto 2, \quad b : n \in \mathbb{N} \longmapsto 5.$$

- **Solutions de (E_0) .** Posons :

$$(E_0) : u_{n+1} = 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}((2)_n) = (2^n)_n$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(E_0) &= \{(\lambda \mathbf{P}(a))_n, \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(\lambda 2^n)_n, \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{C}}((2^n)_n). \end{aligned}$$

- On a directement :

$$\begin{aligned}
 \text{Sol}(E) &= \left\{ \left(\mathbf{P}(a)_n \left(\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b(k) \right) \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ \left(2^n \left(\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k-1} 5 \right) \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ \left(2^n \left(\lambda + 5 \frac{1/2 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} \right) \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \{(2^n(\lambda + 5) - 5)_n, \lambda \in \mathbb{C}\}
 \end{aligned}$$

2.2 Exemple 2

Soit le système :

$$(F) : \begin{cases} (E) : u_{n+1} = 2u_n + 3^n, & \forall n \in \mathbb{N}. \\ u_0 := 3 \end{cases}$$

Les premières valeurs que doit vérifier une solution de (F) sont :

n	0	1	2	3	4
u_n	3	7	17	43	113

On applique la proposition. On est dans le cas où :

$$a : n \in \mathbb{N} \mapsto 2, \quad b : n \in \mathbb{N} \mapsto 3^n.$$

- **Solutions de (E₀).** Posons :

$$(E_0) : u_{n+1} = 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}((2)_n) = (2^n)_n$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}
 \text{Sol}(E_0) &= \{(\lambda \mathbf{P}(a)_n)_n, \lambda \in \mathbb{C}\} \\
 &= \{(\lambda 2^n)_n, \lambda \in \mathbb{C}\} \\
 &= \text{Vect}_{\mathbb{C}}((2^n)_n).
 \end{aligned}$$

- **Solutions de (E).** On a directement :

$$\begin{aligned}
 \text{Sol}(E) &= \left\{ \left(\mathbf{P}(a)_n \left(\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b(k) \right) \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ \left(2^n \left(\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k-1} 3^k \right) \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ \left(2^n \left(\lambda + \frac{1/2 - 3^n/2^{n+1}}{1 - 3/2} \right) \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \{(2^n(\lambda - 1) + 3^n)_n, \lambda \in \mathbb{C}\} \\
 &= \{u^{\{\lambda\}} := (\lambda 2^n + 3^n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{C}\}
 \end{aligned}$$

- **Solution de (F).** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a équivalence entre :

$$\begin{aligned} u^{\{\lambda\}} \in \text{Sol}(F) &\iff u_0^{\{\lambda\}} = 3 \\ &\iff \lambda + 1 = 3 \\ &\iff \lambda = 2 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(F) &= \{u^{\{2\}}\} \\ &= \{(2^{n+1} + 3^n)_n\} \end{aligned}$$

Les premières valeurs de la suite $u^{\{2\}}$ sont :

n	0	1	2	3	4
$u_n^{\{2\}}$	3	7	17	43	113

On retrouve bien les valeurs annoncées au début de l'exemple.

2.3 Exemple 3

Soit le système :

$$(F) : \begin{cases} (E) : u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n + 3^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 := 1 \end{cases}$$

Les premières valeurs que doit vérifier une solution de (F) sont :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	3/2	4	12	183/5

On applique la proposition 1.1. On est dans le cas où :

$$a : n \in \mathbb{N} \mapsto \frac{n+1}{n+2}, \quad b : n \in \mathbb{N} \mapsto 3^n.$$

- **Solutions de (E₀).** Posons :

$$(E_0) : u_{n+1} = 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a par produit télescopique pour tout $n \in \mathbb{N}_*$:

$$\mathbf{P}(a)_n = \prod_{k=0}^{n-1} a_k = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{n+1}$$

(cela est vrai aussi pour $n := 0$ car par définition $\mathbf{P}(a)_0 := 1$) et ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(E_0) &= \{(\lambda \mathbf{P}(a)_n)_n, \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \left\{ \left(\frac{\lambda}{n+1} \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

- **Solutions de (E).** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(a)_n \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b_k &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+2) 3^k \\
 &= \frac{1}{3(n+1)} \sum_{k=1}^n (k+1) 3^k \\
 &= \frac{1}{3(n+1)} \left(\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} t^{k+1} \right) \Big|_{t=3} \\
 &= \frac{1}{3(n+1)} \left(\frac{d}{dt} \frac{t^2 - t^{n+2}}{1-t} \right) \Big|_{t=3} \\
 &= \frac{1}{3(n+1)} \left(\frac{(2t - (n+2)t^{n+1})(1-t) + t^2 - t^{n+2}}{(1-t)^2} \right) \Big|_{t=3} \\
 &= \frac{-1 + (2n+1)3^n}{4(n+1)}
 \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Sol}(E) &= \left\{ \left(\mathbf{P}(a)_n \left(\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b(k) \right) \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ u^{\{\lambda\}} := \left(\frac{1}{n+1} \left(\lambda + \frac{-1 + (2n+1)3^n}{4} \right) \right)_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\}
 \end{aligned}$$

- **Solution de (F).** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a équivalence entre :

$$\begin{aligned}
 u^{\{\lambda\}} \in \text{Sol}(F) &\iff u_0^{\{\lambda\}} = 1 \\
 &\iff \lambda = 1
 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Sol}(F) &= \{ u^{\{1\}} \} \\
 &= \left\{ \left(\frac{3 + (2n+1)3^n}{4(n+1)} \right)_n \right\}
 \end{aligned}$$

Les premières valeurs de la suite $u^{\{1\}}$ sont :

n	0	1	2	3	4
$u_n^{\{1\}}$	1	3/2	4	12	183/5

On retrouve bien les valeurs annoncées au début de l'exemple.

3 Cas en dimension 2

3.1 Introduction

Soit l'équation dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}))$:

$$(E) : u_{n+2} = \alpha_n u_{n+1} + \beta_n u_n + \gamma_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette équation rentre bien dans la cadre du texte car elle est équivalente à l'équation :

$$(E') : U_{n+1} = a_n U_n + b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec :

$$U_n := \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}, \quad a_n := \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_n := \begin{pmatrix} \gamma_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Exemple

Soit le système :

$$(F) : \begin{cases} (E) : u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 3^n, & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 := 1, u_1 := 1 \end{cases}$$

Les premières valeurs que doit vérifier une solution de (F) sont :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	1	2	7	26

L'équation (E) est équivalente à :

$$(E') : U_{n+1} = AU_n + \begin{pmatrix} 3^n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec :

$$U_n := \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On applique la proposition 1.1. On est dans le cas où :

$$a : n \in \mathbb{N} \mapsto A, \quad b : n \in \mathbb{N} \mapsto \begin{pmatrix} 3^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$(E'_0) : U_{n+1} = AU_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi on a :

$$\mathbf{P}(a) = (A^n)_n$$

et :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(E'_0) &= \{(\mathbf{P}(a)_n \Lambda)_n, \Lambda \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})\} \\ &= \{(A^n \Lambda)_n, \Lambda \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})\}. \end{aligned}$$

- **Calcul de A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.** Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \det(A - XI_2) \\ &= \begin{vmatrix} 3 - X & -2 \\ 1 & -X \end{vmatrix} \\ &= X^2 - 3X + 2 \\ &= (X - 1)(X - 2)\end{aligned}$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y = x \\ x = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \end{cases}\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y = 2x \\ x = 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y \end{cases}\end{aligned}$$

Donc on a :

$$E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme A est inversible (car $\det(A) = 2 \neq 0$), on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- **Solutions de (E'_0) .** On a :

$$\begin{aligned}\text{Sol}(E'_0) &= \{ \mathbf{P}(a) \Lambda, \Lambda \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \} \\ &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right)_n, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} (2^{n+1} - 1)\lambda + (-2^{n+1} + 2)\mu \\ (2^n - 1)\lambda + (-2^n + 2)\mu \end{pmatrix}_n, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}\end{aligned}$$

- **Solutions de (E_0) .** Posons :

$$(E_0) : u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a donc directement :

$$\text{Sol}(E_0) = \{(\lambda(2^n - 1) + \mu(-2^n + 2))_n, \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

- **Solutions de (E') .** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(a)_n \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b_k &= A^n \sum_{k=0}^{n-1} A^{-k-1} b_k \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{-k} - 1 & -2^{-k} + 2 \\ 2^{-k-1} - 1 & -2^{-k-1} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 3^k (2^{-k} - 1) \\ 3^k (2^{-k-1} - 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1 - (3/2)^n}{1 - 3/2} - \frac{1 - 3^n}{1 - 3} \\ \frac{1/2 - 3^n/2^{n+1}}{1 - 3/2} - \frac{1 - 3^n}{1 - 3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{3^n}{2^{n-1}} - \frac{3^n}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{2^n}{3^n} - \frac{2}{3^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3^n}{2^{n-1}} - \frac{3^n}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{2^n}{3^n} - \frac{2}{3^n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+2} + 1 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(E') &= \left\{ \left(\mathbf{P}(a)_n \left(\Lambda + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(a)_{k+1}^{-1} b(k) \right) \right)_n, \Lambda \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} (2^{n+1} - 1)\lambda + (-2^{n+1} + 2)\mu + 3^{n+1}/2 - 2^{n+1} + 1/2 \\ (2^n - 1)\lambda + (-2^n + 2)\mu + 3^n/2 - 2^n + 1/2 \end{pmatrix}_n, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

- **Solution de (E) .** On a donc :

$$\text{Sol}(E) = \left\{ u^{\{\lambda, \mu\}} := \begin{pmatrix} (2^n - 1)\lambda + (-2^n + 2)\mu + \frac{-2^{n+1} + 3^n + 1}{2} \end{pmatrix}_n, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

- **Solution de (F) .** Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a équivalence entre :

$$\begin{aligned} u^{\{\lambda, \mu\}} \in \text{Sol}(F) &\iff u_0^{\{\lambda, \mu\}} = 1 \wedge u_1^{\{\lambda, \mu\}} = 1 \\ &\iff \mu = 1 \wedge \lambda = 1 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\text{Sol}(F) = \{u^{\{2,1\}}\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{-2^{n+1} + 3^n + 3}{2} \right)_n \right\}$$

Les premières valeurs de la suite $u^{\{1\}}$ sont :

n	0	1	2	3	4
$u_n^{\{2,1\}}$	1	1	2	7	26

On retrouve bien les valeurs annoncées au début de l'exemple.