



**HAL**  
open science

## Modélisation des effets de capillarité dans les milieux poreux

Antoine Caradot, Pablo Carrillo Martínez, Philippe-André Luneau, Sardor Yakupov

► **To cite this version:**

Antoine Caradot, Pablo Carrillo Martínez, Philippe-André Luneau, Sardor Yakupov. Modélisation des effets de capillarité dans les milieux poreux. Semaine d'Étude Mathématiques et Entreprises Bourget-du-Lac. 2024. hal-04593862

**HAL Id: hal-04593862**

**<https://hal.science/hal-04593862>**

Submitted on 30 May 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation des effets de capillarité dans les milieux poreux

Antoine Caradot\*      Pablo Carrillo Martínez†  
Philippe-André Luneau‡      Sardor Yakupov§

## Résumé

Dans ce rapport, la modélisation d'écoulements de fluides en milieux poreux est explorée, en particulier les écoulements où la force de capillarité a un effet important. Le modèle mathématique pour une remontée capillaire dans une bandelette de toile de verre verticale est présentée, puis une simulation numérique est proposée afin de comparer avec les résultats expérimentaux. Un second modèle pour étudier le front d'avancement d'une goutte d'eau pénétrant dans une feuille de voile de verre est présenté.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modèle mathématique</b>	<b>4</b>
2.1	Quantités d'intérêt, paramètres et équations constitutives . . . . .	4
2.2	Équation de Richards et diffusivité unidimensionnelle . . . . .	5
2.3	Modèle pour une goutte déposée sur un milieu plan . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Solutions analytiques</b>	<b>8</b>
3.1	Solution asymptotique . . . . .	9
3.2	Une autre solution asymptotique . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Expériences numériques</b>	<b>10</b>
4.1	Montée capillaire par différences finies . . . . .	11
4.2	Résultats . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Discussion et perspectives</b>	<b>14</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>15</b>

---

\*caradot.antoine@gmail.com

†Université de Franche-Comté, pablo.carrillo\_martinez@univ-fcomte.fr

‡Université Laval, philippe-andre.luneau.1@ulaval.ca

§Université Grenoble-Alpes, sardor.yakupov@univ-grenoble-alpes.fr

# 1 Introduction

L'étude des phénomènes du mouvement de l'eau à travers des milieux poreux remontent au XIX<sup>ème</sup> siècle avec Henry Darcy, ayant proposé la loi du même nom, liant la vitesse de propagation du fluide avec le gradient de pression. Durant les années qui ont suivi, quelques avancées ont été faites comme la déduction de l'équation de Lucas-Washburn au début du XX<sup>ème</sup> siècle (USEVIČIŪTĖ et BALTRĖNAITĖ-GEDIENĖ, 2022), reliant la hauteur maximale atteinte lors de la montée d'un fluide dans un tuyau par capillarité (Figure 1) :

$$(\text{hauteur})^2 = \frac{(\text{rayon tuyau}) \times (\text{tension superficielle}) \times \cos(\text{angle du ménisque})}{2 \times (\text{viscosité})}.$$

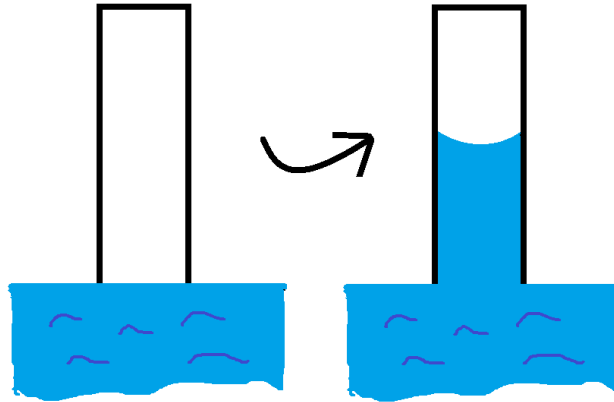


FIGURE 1 – Illustration de la montée du liquide dans un tuyau par la force capillaire.

Cependant, l'avancement le plus important est arrivé en 1931 avec l'équation de Richards, et est encore considéré aujourd'hui comme un point de départ pour la recherche dans ce cadre. À travers l'équation de Darcy et l'équation de continuité, l'équation de Richards permet de mesurer le changement en contenu volumétrique dans le milieu avec le temps.

En raison des différentes quantités physiques qui interagissent au travers de l'équation, comme la perméabilité ou la pression capillaire, il faut déterminer des lois de comportement afin d'exprimer ces variables en fonction du contenu volumétrique de liquide. Comme il n'y a pas de consensus général pour mettre la dépendance mentionnée dans une forme spécifique, il existe plusieurs lois plus ou moins complexes, généralement sous une forme qui ressemble à une loi de puissance. Ainsi, nous allons nous intéresser à deux équations constitutives, proposées par Brooks-Corey (1964) et Mualem-van Genuchten (1976-1980).

Le problème concret sur lequel nous appliquerons le modèle de Richards vient d'une problématique esthétique en lien avec les tuiles de **faux plafond** ou **plafond suspendu**. Ces tuiles sont composées d'une couche isolante, entourée de deux couches d'un matériau composite appelé voile de verre. Le voile de verre est essentiellement composé de fibres de verre microscopiques ainsi que d'un liant chimique avec certaines propriétés hydrophobes. À cause de la nature fibreuse de ce composite, sa structure est composée d'un réseau de pores et de canaux microscopiques dans lequel on peut observer des effets de capillarité. En cas de fuite d'eau dans le plafond, il peut arriver que de l'eau tombe sur les tuiles. On voudrait alors que, si l'eau réussit à pénétrer la tuile, elle ne la traverse pas (par exemple, on espère que l'eau se diffusera dans le plan horizontal de la tuile, mais pas verticalement), sinon on pourrait voir l'apparition de taches sur le revêtement. À partir de données expérimentales fournies par la société Owens Corning sur des tests de montée capillaire (Figure 2), nous allons utiliser le modèle de Richards afin de reproduire numériquement les écoulement en milieux poreux observés. Même si le but initial des travaux sur lesquels la présente étude se base était la modélisation du mouvement de l'eau dans le sol, on peut espérer s'approcher plus ou moins bien de la complexité intrinsèque de la structure des voiles de verre en changeant les différents paramètres physiques ou bien le modèle lui-même.

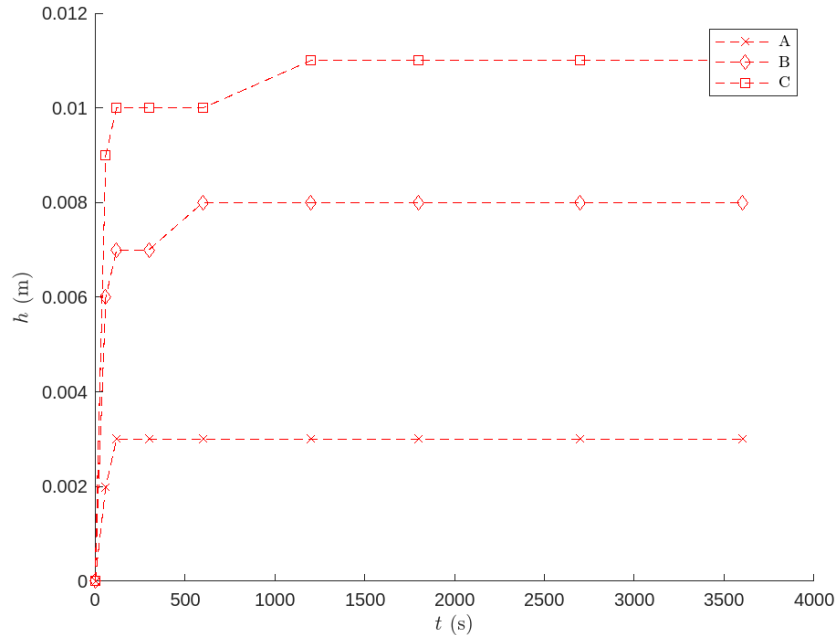


FIGURE 2 – Hauteur capillaire au fil du temps dans trois bandelettes (A, B et C) faites de voile de verre et imbibées par le bas.

## 2 Modèle mathématique

Dans cette section, nous décrivons le modèle mathématique de propagation d'un liquide en milieu poreux basé sur l'équation de Darcy-Richards, dans les cas de l'imbibition capillaire et d'une goutte pénétrant un milieu poreux plan. Le développement suivra de façon large celui présenté dans PEREZ-CRUZ, STIHARU et DOMINGUEZ-GONZALEZ (2017).

### 2.1 Quantités d'intérêt, paramètres et équations constitutives

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un milieu poreux. On note par  $\theta = \theta(t, x, y, z)$  [ $\text{m}^3\text{m}^{-3}$ ] le contenu volumétrique (la quantité de liquide contenue dans le médium), et  $\theta_s$  le contenu maximal (lorsque la saturation est atteinte). Dans le cas d'une montée capillaire, on se contentera de supposer que le problème est unidimensionnel, c'est-à-dire  $\theta = \theta(t, z)$ . Cette approximation est valide si le réseau capillaire est beaucoup plus haut que large (par exemple, une bandelette fine de papier).

Dans un cas de montée capillaire, la pression à l'intérieur du fluide est donnée par deux composantes :

$$\tilde{p} = \rho g z + \tilde{\psi}(\theta),$$

où le premier terme représente la pression hydrostatique (causée par la gravité) ( $\rho$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ] la densité et  $g$  [ $\text{ms}^{-2}$ ] l'accélération gravitationnelle) et  $\tilde{\psi}$  [ $\text{Nm}^{-2}$ ] est la pression capillaire. Dorénavant, cette quantité sera normalisée par  $\rho g$ , i.e. la pression est représentée par sa hauteur d'eau. On obtient

$$p = z + \psi(\theta), \tag{1}$$

en unités de longueur.

L'un des modèles possibles pour décrire la relation constitutive entre  $\theta$  et  $\psi$  est une loi de puissance telle qu'indiquée par le modèle de Brooks-Corey (HUININK, 2016 ; PEREZ-CRUZ, STIHARU et DOMINGUEZ-GONZALEZ, 2017) :

$$\frac{\psi(\theta)}{\psi_c} := \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^{-\frac{1}{\lambda}}. \tag{2}$$

$\psi_c$  [m] représente la pression d'air à l'interface liquide-gaz et  $\theta_s$  représente le contenu volumétrique à saturation.

Il existe d'autres lois de comportement pour lier  $\theta$  et  $\psi$ , comme la loi de van Genuchten qui sera étudiée de manière analytique dans la section 3. On choisit ici la loi de puissance par simplicité.

Le liquide a diverses propriétés spécifiques comme la viscosité  $\mu$  et le poids spécifique  $\gamma$ . Le milieu poreux lui-même possède également une perméabilité,  $k = k(\theta)$ . On définit la conductivité du milieu pour ce liquide par :

$$K(\theta) := k(\theta) \frac{\gamma}{\mu}.$$

Le modèle plus commun pour l'expression de la conductivité en fonction du contenu volumétrique  $\theta$  est donné lui aussi par une loi de puissance :

$$K(\theta) = K_0 \theta^m \quad (3)$$

où  $m = \frac{3\lambda+2}{\lambda}$  (cf. HUININK, 2016).

## 2.2 Équation de Richards et diffusivité unidimensionnelle

Le débit  $q$  [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ] d'un fluide est lié au gradient de la pression dans ce fluide par la loi de Darcy :

$$q = -\frac{k\gamma}{\mu} \nabla p. \quad (4)$$

Pour modéliser le transport du liquide le long du réseau capillaire, on utilise l'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\text{div} q. \quad (5)$$

Si l'on substitue la loi de Darcy (4) puis la pression (1) dans l'équation de continuité (5), on obtient l'équation de Richards :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} \left( \frac{k\gamma}{\mu} \nabla p \right) = \text{div} [K(\theta) \nabla (\psi(\theta) + z)].$$

Comme on est dans le cas unidimensionnelle, l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K(\theta) \left( \frac{\partial}{\partial z} \psi(\theta) + 1 \right) \right). \quad (6)$$

En développant l'équation à l'aide de la dérivation des fonctions composées, on fait apparaître la diffusivité  $D(\theta)$  définie par :

$$D(\theta) := K(\theta) \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta},$$

c'est-à-dire la conductivité du milieu combinée avec la variation dans la pression capillaire causée par les changements dans le contenu de liquide. De cette manière, on obtient une forme alternative pour l'expression de l'équation de Richards :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}. \quad (7)$$

Cette équation est une équation de réaction diffusion non linéaire, à diffusion non homogène. Il convient de lui ajouter des conditions aux limites (cf. Section 4.1 concernant la résolution numérique).

### 2.3 Modèle pour une goutte déposée sur un milieu plan

Le problème dynamique pour ce problème (illustré à la figure 3) pourrait également être modéliser avec l'équation de Richards (6), mais en trois dimensions.

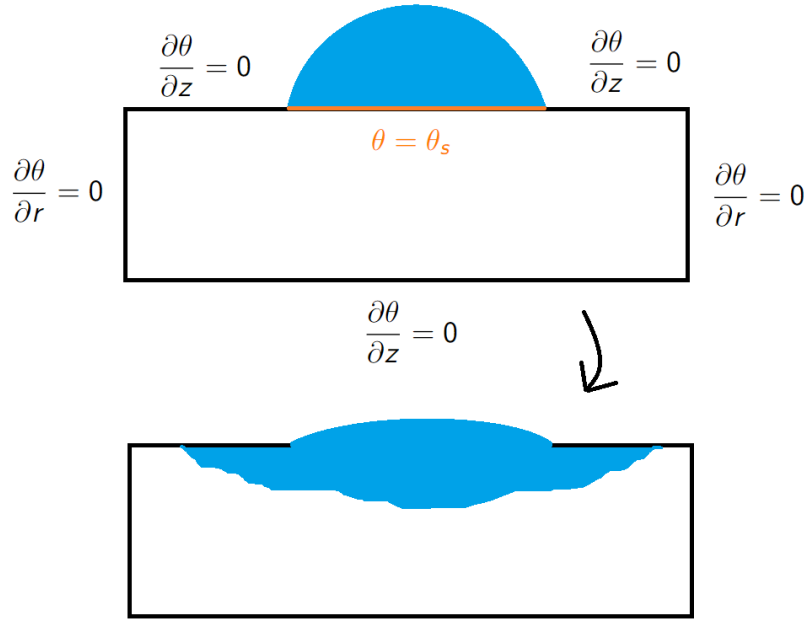


FIGURE 3 – Goutte s’infiltrant dans un milieu poreux plan. Les conditions aux limites pour l’équation de Richards sont illustrées.

**Remarque.** On note que la conductivité  $K$  n’est potentiellement **pas la même** que pour le problème de la sous-section précédente. En effet, on peut supposer que le milieu est isotrope dans le plan  $xy$  car les fibres de verres n’ont pas de direction préférentielle a priori. Cependant, dans la direction  $z$ , le réseau capillaire peut avoir une structure très différente (il y a probablement moins de fibres de verre orientées dans cette direction), ce qui introduit une anisotropie verticale, et ainsi change la conductivité.

Au vu des difficultés rencontrées dans le cas unidimensionnel, il est clair qu’un tel modèle ne serait pas soluble analytiquement ; on fait donc une série de simplifications, avec leurs justifications, afin d’obtenir des formules approximatives pour les quantités principales mesurées expérimentalement liant les paramètres microscopiques.

On commence par supposer que le problème possède une symétrie axiale (il est dit *axisymétrique*) ce qui permet d’utiliser les coordonnées cylindriques et d’ignorer la variable angulaire. Cette hypothèse est raisonnable car le matériel

n'a pas de direction latérale privilégiée (isotropie planaire) et la forme de la goutte initiale est proche d'une sphère. L'équation (6) devient donc :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(K(\theta)\nabla(\psi + z))_r] + \frac{\partial}{\partial z} ((K(\theta)\nabla(\psi + z))_z). \quad (8)$$

On suppose de plus que le tenseur  $K$  est diagonal de valeurs  $K_h$  et  $K_v$  pour les directions horizontale et verticale respectivement. On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rK(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right]. \quad (9)$$

Comme les expériences montrent que la profondeur d'imbibition est faible, on peut ignorer le terme de gravité et ainsi obtenir l'équation de diffusion non-linéaire 2-dimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rK(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (10)$$

Cette équation reste tout de même difficile à manipuler même numériquement. Il nous faut donc adopter une autre approche. Tout d'abord, on remarque que le modèle doit surtout répondre à des questions statiques et non dynamiques (on s'intéresse à l'état stationnaire); on doit établir le lien entre la largeur et la profondeur de la tache, ainsi que le temps total d'imbibition de la goutte. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes, dont certaines sont inspirées par l'article CHEBBI, 2021 sur l'absorption des gouttes par des matériaux poreux :

- La tache a une forme de calotte sphérique. Cette hypothèse est raisonnable car la condition de stationnarité implique qu'au niveau macroscopique le front d'imbibition forme une surface de courbure moyenne constante. La résolution de l'équation de courbure moyenne constante dans le cas de symétrie axiale est

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}}{(1 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2)^{3/2}} + \frac{\frac{\partial z}{\partial r}}{z((1 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2)^{1/2})} = \frac{2\psi_{tot.}}{\sigma},$$

et donne des calottes sphériques pour des conditions initiales raisonnables.

- La profondeur d'imbibition  $P$  est négligeable devant la largeur de la tache  $L$ . Ceci est en accord avec les données expérimentales.

- Les conductivités horizontale et verticale sont constantes. Ceci est une simplification assez forte, qui n'impactera cependant pas le comportement asymptotique d'imbibition.

- Les mouvements horizontaux et verticaux peuvent être traités séparément. Ceci vient du fait que le milieu est supposé suffisamment homogène.

- On approche les dérivées de  $\psi$  par des accroissements finis. Cette étape est nécessaire pour pouvoir effectuer des calculs. Bien que cela introduise évidemment des imprécisions, l'erreur au régime stationnaire sera faible.



Avec toutes ses hypothèses, on peut appliquer la loi de Darcy pour trouver le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}\frac{2K_h\psi_{tot.}}{L - L_0} &= \frac{dL}{dt}, \\ \frac{\pi P}{L} \frac{dP}{dt} &= \frac{K_v\psi_{tot.}}{P}.\end{aligned}$$

La condition sur le temps total est :

$$\frac{\pi}{2}P(t_{imb})L(t_{imb})^2 = V_0.$$

La solution de ces équations donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}L(t) &= L_0 + \left(\frac{4K_h\psi_{tot.}}{\pi}t\right)^{1/2}, \\ P(t) &= \left(\frac{3K_v\psi_{tot.}L_0}{\pi}t + \frac{K_v}{2K_h}\left(\frac{4K_h\psi_{tot.}}{\pi}t\right)^{3/2}\right)^{1/3},\end{aligned}$$

et la condition sur le volume (si le temps d'imbibition est suffisamment grand) donne

$$t_{imb.} \simeq \frac{(4V_0^2L_0^4\pi^3)^{1/5}}{4K_h\psi_{tot.}} \cdot \left(\frac{2K_h}{K_v}\right)^{2/15},$$

ce qui correspond à une largeur finale de la tache approximativement égale à

$$L(t_{imb.}) = L_0 + \left(\frac{V_0L_0^2}{\pi}\right)^{1/5} \left(\frac{2K_h}{K_v}\right)^{1/15}.$$

Malheureusement les données expérimentales ne sont pas suffisamment précises pour pouvoir vérifier la validité de ces calculs.

### 3 Solutions analytiques

L'équation de Richards est une EDP instationnaire de réaction diffusion avec un terme de réaction non-linéaire d'ordre 1. Ainsi, sa résolution analytique est potentiellement impossible; les techniques habituelles consistent en regarder une forme alternative pour la diffusivité (7) et à ajouter des hypothèses parfois restrictives (FARTHING et OGDEN, 2017). Cependant, comme on suppose que le modèle se stabilisera vers une solution stationnaire (par exemple, la montée capillaire se stabilisera à la hauteur capillaire), on pourrait rechercher une solution quand  $\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ , ou encore quand la vitesse du liquide  $q$  est égale à zéro. Cela se produit à  $t \rightarrow \infty$ . On verra que selon la loi de comportement entre  $\theta$  et  $\psi$ , on obtient des solutions stationnaires différentes.

### 3.1 Solution asymptotique

Dans cette section, on utilise la loi de puissance de Brooks-Corey donnée par (2). À l'état stationnaire ( $t \rightarrow \infty$ ), on suppose que le débit doit être 0, donc  $0 = q = -K(\theta)\nabla p$  ce qui implique  $\nabla p = 0$  et ainsi

$$p = \text{cte} = \psi(\theta) + z.$$

Avec les conditions initiales  $\theta(0) = \theta_s$  et  $z(0) = 0$  et en utilisant (2), on a

$$p(0) = z(0) + \psi(\theta(0)) = \psi_c.$$

On déduit  $p \equiv \psi_c$ . Si on met cette relation dans (1), cela donne

$$\psi_c = z + \left(\frac{\theta_s}{\theta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \psi_c,$$

et un simple calcul permet de dériver la solution stationnaire

$$\theta(z) = \theta_s \left(1 - \frac{z}{\psi_c}\right)^{-\lambda}.$$

**Remarque.** La relation entre la pression capillaire  $\psi$  et la hauteur  $z$  est linéaire pour le régime stationnaire, notamment

$$\psi(z) = -z + \psi_c.$$

Ce fait se déduit directement à partir de  $p \equiv \psi_c$ . Comme cette relation n'utilise aucune loi de comportement entre  $\theta$  et  $\psi$ , elle reste toujours vraie.

La solution est donc hyperbolique et  $\theta$  ne sera jamais nul peu importe la hauteur  $z$ . De plus, en regardant l'allure du graphe, on voit que la solution ne présente pas la rapide variation du front constatée dans les observations théoriques. Ceci est probablement dû au mauvais comportement du modèle de Brooks-Corey près de  $\theta = 0$ , et motive la section suivante.

### 3.2 Une autre solution asymptotique

Dans cette section, on utilise une relation entre  $\psi$  et  $\theta$  donnée par l'équation de Mualem-van Genuchten (MARTINEZ, SCHVEZOV et ROSENBERGER, 2013), que nous modifieront légèrement :

$$\theta = \frac{\theta_s}{\left(1 + \left(\frac{\psi - \psi_c}{\psi_c}\right)^q\right)^m}$$

où  $m = 1 - \frac{1}{q}$ . Dans le cas où on prend  $\lambda = mq$  très grand, la relation peut s'approximer par

$$\theta(\psi) = \frac{\theta_s}{1 + \left(\frac{\psi - \psi_c}{\psi_c}\right)^\lambda}. \quad (11)$$

Reproduisant la procédure de la section précédente (on pose  $q = 0$ ), on arrive à l'état stationnaire :

$$\theta(z) = \frac{\theta_s}{1 + \left(-\frac{z}{\psi_c}\right)^\lambda}.$$

Sur la figure 4 ci-dessous, on peut voir la comparaison entre les deux solutions stationnaires pour plusieurs valeurs des paramètres. On y observe le profil de saturation ( $\theta/\theta_s$ ) du liquide dans le capillaire vertical ( $z$ ). Il semble que la seconde solution stationnaire permette de décrire des profils de saturations beaucoup moins diffus. En effet,  $\psi_c$  semble contrôler la diffusivité du front ( $|\psi_c|$  grand sera plus diffus) et  $\lambda$  semble contrôler la rapidité de la transition entre l'état saturé et vide ( $\lambda$  grand sera une transition plus nette).

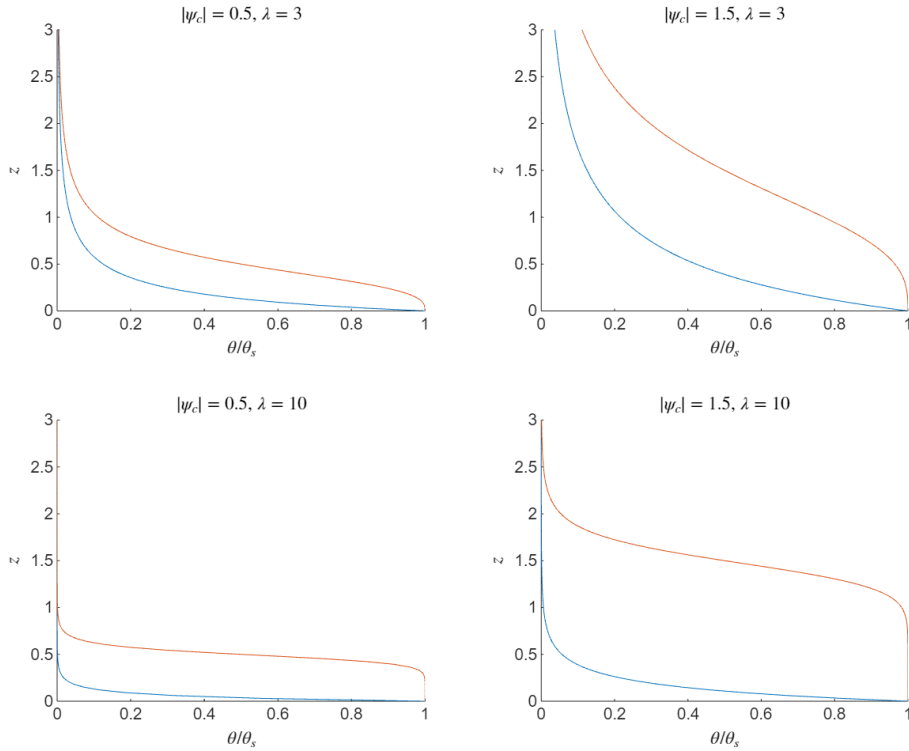


FIGURE 4 – Solutions stationnaires pour les modèles de Brooks-Corey (bleu) et de van Genuchten (orange) pour plusieurs valeurs de paramètres.

## 4 Expériences numériques

Pour simuler numériquement le phénomène de montée capillaire, on utilise une méthode numérique pour résoudre l'équation de Richards. On se base sur l'ar-

ticle de MARTINEZ, SCHVEZOV et ROSENBERGER (2013) qui résout un problème d'infiltration d'eau dans le sol (une colonne de matériau poreux) bien que, contrairement à eux, nous allons utiliser le modèle de Brooks-Corey pour le déroulement des calculs. Une implémentation MATLAB est disponible en annexe.

#### 4.1 Montée capillaire par différences finies

La solution analytique étant intraitable, on tente de résoudre l'équation numériquement. On considère le modèle donné par l'équation de Richards (6) unidimensionnelle :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K(\theta) \left( \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial z} + 1 \right) \right). \quad (12)$$

Par convention, on prendra des valeurs de  $\psi$  et  $\psi_c$  négatives. La relation entre la saturation  $\theta$  et la pression capillaire  $\psi$  donnée par Brooks-Corey (2) permet de réécrire l'équation en fonction de  $\psi$  :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right). \quad (13)$$

où la capillarité donnée par (3) devient

$$K(\psi) = K_0 \theta_s^m \left( \frac{\psi}{\psi_c} \right)^{-(3\lambda+2)}.$$

Par ailleurs, un calcul simple permet de déduire

$$C(\psi) := \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -\frac{\lambda \theta_s}{\psi_c} \left( \frac{\psi}{\psi_c} \right)^{-(1+\lambda)}.$$

Pour trouver  $\psi(t, z)$  numériquement, on divise le domaine temps-espace

$$[0, T] \times [0, Z] \subset \mathbb{R}^2$$

en  $N_t$  et  $N_z$  morceaux de taille  $\Delta t$  et  $\Delta z$  respectivement. On note  $\psi_i^l$  pour la valeur de  $\psi(t, z)$  à la position  $z = i\Delta z$  et au temps  $t = l\Delta t$ . On utilise un schéma de Crank-Nicolson en temps et un schéma de différences centrées en espace comme dans MARTINEZ, SCHVEZOV et ROSENBERGER (2013) :

$$C(\psi_i^l) \frac{\psi_i^{l+1} - \psi_i^l}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta z} \left[ \begin{array}{c} -K(\psi_{i-\frac{1}{2}}^l) \left( \frac{\psi_{i+1}^{l+1} - \psi_i^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{\psi_{i+1}^l - \psi_i^l}{2\Delta z} + 1 \right) \\ + K(\psi_{i+\frac{1}{2}}^l) \left( \frac{\psi_i^{l+1} - \psi_{i-1}^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{\psi_i^l - \psi_{i-1}^l}{2\Delta z} + 1 \right) \end{array} \right] \quad (14)$$

pour calculer  $\{\psi_i^{l+1}\}$ , où les coefficients

$$K(\psi_{i+\frac{1}{2}}^l) = \frac{K(\psi_{i+1}^l) + K(\psi_i^l)}{2},$$

$$K(\psi_{i-\frac{1}{2}}^l) = \frac{K(\psi_i^l) + K(\psi_{i-1}^l)}{2}$$

sont calculés au temps précédent  $l$  comme prescrit par la théorie des méthodes semi-linéaires (THOMÉE, 2006).

Pour les conditions aux limites, on pose :

- $\psi(0, z) = -TGV$  ( $z > 0$ ) car comme le matériau est initialement sec, la pression est immense pour  $\theta = 0$  dans le modèle de loi de puissance (2) ( $TGV = \text{Très Grande Valeur}$ );
- $\psi(t, 0) = \psi_c$  car le matériau sera toujours saturé en bas (trempage);
- $\frac{\partial \psi}{\partial z}(t, Z) = 0$  (flux nul) car au bord de la feuille on ne doit pas avoir de perte de masse de liquide (on peut supposer la feuille infiniment longue).

Cela se traduit sur le  $\psi$  discret par :

$$\psi_1^l = \psi_c \quad \text{pour tout } l \in \{0, 1, 2, \dots, N_t\} \quad (15)$$

puis

$$\psi_{N_z}^l = \psi_{N_z-1}^l \quad \text{pour tout } l \in \{0, 1, 2, \dots, N_t\}; \quad (16)$$

et

$$\psi_i^0 = -TGV \quad \text{pour tout } i \in \{2, 3, \dots, N_z\}. \quad (17)$$

Si l'on isole les valeurs  $\psi_{i-1}^{l+1}$ ,  $\psi_i^{l+1}$  et  $\psi_{i+1}^{l+1}$ , c'est-à-dire les valeurs au temps  $t = (l+1)\Delta t$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} -(a_i^l c_i^l) \psi_{i-1}^{l+1} + (a_i^l d_i^l + 1) \psi_i^{l+1} - (a_i^l b_i^l) \psi_{i+1}^{l+1} \\ = a_i e_i 2\Delta z + a_i c_i \psi_{i-1}^l - (a_i d_i - 1) \psi_i^l + a_i b_i \psi_{i+1}^l \end{aligned} \quad (18)$$

pour tout  $i \in \{2, 3, \dots, N_z - 1\}$  où

$$\begin{aligned} a_i^l &= \frac{\Delta t}{2\Delta z C(\psi_i^l)} & b_i^l &= K(\psi_{i+\frac{i}{2}}^l) & d_i^l &= b_i^l + c_i^l \\ & & c_i^l &= K(\psi_{i+\frac{i}{2}}^l) & e_i &= b_i^l - c_i^l \end{aligned}$$

En combinant (15), (16), et (18) on obtient un système tridiagonal d'équations linéaires  $A^l \psi^{l+1} = f^l$  de taille  $N_z \times N_z$ . Comme ce schéma est implicite, en résolvant ce système à chaque itération à partir de  $l = 0$  (17), on peut déduire les valeurs  $\{\psi_i^{l+1}\}$  pour tout  $i$  à partir des valeurs au temps courant.

## 4.2 Résultats

On exécute l'expérience de montée capillaire avec les paramètres de la table 1.

Paramètre	Valeur
$Z$	50cm
$T$	1h
$\Delta t$	1s
$\Delta z$	0.1mm
$\lambda$	4
$\psi_c$	-6mm
$\theta_s$	0.5
$K_0$	1e-10
$TGV$	1000m

TABLE 1 – Valeurs des paramètres pour l’expérience numérique.

La solution obtenue a un profil très similaire à la solution analytique stationnaire proposée (Figure 5) :

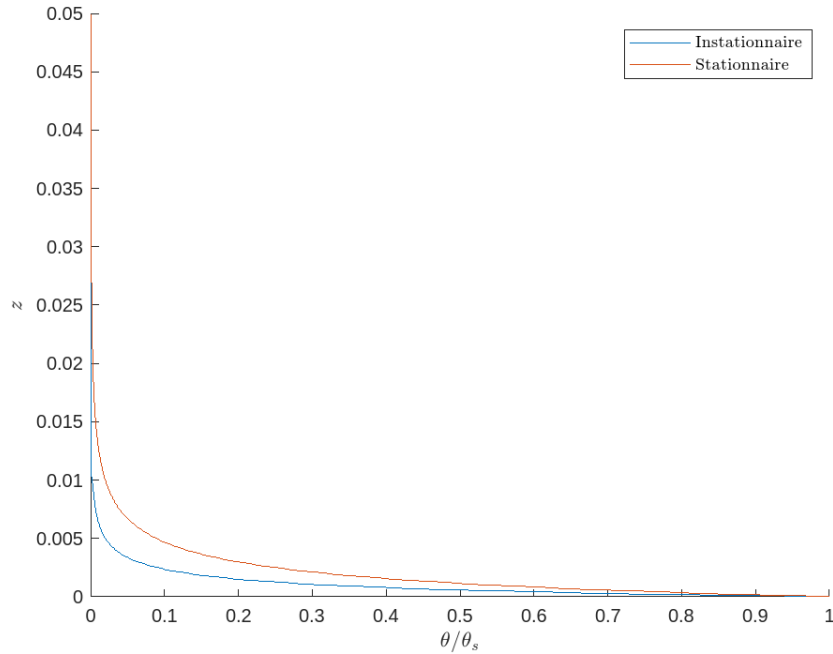


FIGURE 5 – Comparaison des saturations obtenues par simulation (instationnaire) et par la solution analytique (stationnaire).

Sans en connaître plus sur la composition du matériau, il est difficile de dire si les valeurs sont réellement celles associées au voile de verre.

Cependant, la simulation nous permet d’obtenir quelque chose qui s’approche des courbes réelles (Figure 6) :

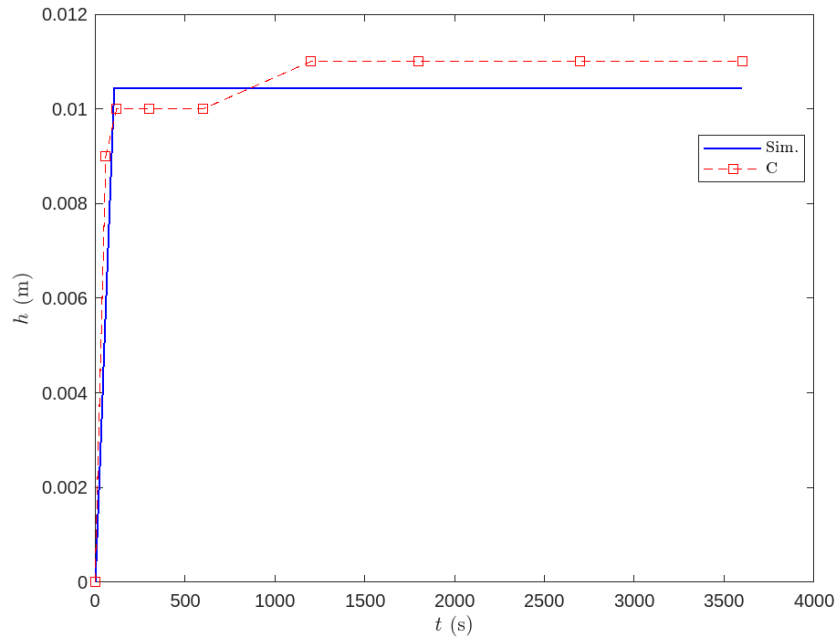


FIGURE 6 – Évolution de la hauteur capillaire par simulation, comparée avec les données expérimentales de la bandelette C.

On se doute que  $\theta_s$  doit être légèrement au-dessus de 0.4 (densité de vide d'un milieu poreux uniforme), et que  $K_0$  doit être petit et  $\lambda$  grand (diminuer la conductivité et la diffusivité).

## 5 Discussion et perspectives

Ce rapport montre que le modèle de Richards pour le phénomène de montée capillaire dans un voile de verre présente un potentiel méritant d'être exploré plus en détail. Nous avons également pu observer que le modèle de van Genuchten est un meilleur choix de loi de comportement liant la pression capillaire et la saturation qu'une loi exponentielle, car il permet un front de mouillage (stationnaire) beaucoup moins diffus. Vis-à-vis des données expérimentales, cela fournit également une meilleure correspondance. Même si les propriétés des matériaux n'ont pu être déterminées exactement, on peut reproduire approximativement le comportement des données de montée capillaire.

Dans des travaux futurs, plusieurs pistes de travail pourront être explorées :

- Étude plus détaillée (en particulier, une modélisation numérique) du problème de goutte d'eau sur la surface du matériau.
- Possibles solutions analytiques : l'utilisation de méthodes analytiques avancées (transformée de Laplace, changement de variables) ou d'hypothèses plus restrictives (la diffusivité  $D$  constante, l'absence du terme de gravité) pourrait

mener à des équations plus simples à résoudre analytiquement ou à modéliser numériquement. Par exemple, si on enlève la gravité dans le cas 1D, l'équation devient alors parabolique avec un coefficient de diffusion non linéaire, et on peut ainsi utiliser la transformation de Boltzmann (GERLERO, BERLI et KLER, 2023) pour obtenir une EDO à résoudre au lieu d'une EDP, simplifiant grandement la résolution et la modélisation.

- Utilisation d'autres approches pour la modélisation numérique (comme la méthode des volumes finis) qui peuvent être plus adaptées au problème.
- Reparamétrisation du problème, un autre choix d'unité et autres mesures pour améliorer la stabilité du schéma numérique (FARTHING et OGDEN, 2017).
- Étudier avec plus de soin la dépendance entre les paramètres physiques du matériau et le comportement macroscopique du problème. Entre autre, une étude microscopique reliant les différents paramètres physiques pourrait s'avérer très utile, car il semble que plusieurs de ces grandeurs ne sont pas indépendantes, et donc le système n'est pas facilement contrôlable.

## Remerciements

Ce rapport a été réalisé dans le cadre de la Semaine d'Étude Mathématiques et Entreprises (SEME) qui s'est déroulée du 13 au 17 mai 2024 et était organisée par l'AMIES, le LAMA (Université Savoie-Mont Blanc) et le CNRS. Merci à Stéphane Gerbi et Christian Ruyer-Quil de l'Université Savoie-Mont Blanc, ainsi qu'à Boris Burgarella et Thomas Querette d'Owens Corning (branche de Chambéry) pour leur soutien dans ce projet.

## Bibliographie

- CHEBBI, Rachid (2021). "Absorption and Spreading of a Liquid Droplet Over a Thick Porous Substrate". In : *ACS Omega* 6.7. PMID : 33644571, p. 4649-4655. DOI : [10.1021/acsomega.0c05341](https://doi.org/10.1021/acsomega.0c05341). eprint : <https://doi.org/10.1021/acsomega.0c05341>. URL : <https://doi.org/10.1021/acsomega.0c05341>.
- FARTHING, Matthew W. et Fred L. OGDEN (2017). "Numerical Solution of Richards' Equation : A Review of Advances and Challenges". en. In : *Soil Science Society of America Journal* 81.6, p. 1257-1269. ISSN : 1435-0661. DOI : [10.2136/sssaj2017.02.0058](https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058).
- GERLERO, Gabriel S., Claudio L. A. BERLI et Pablo A. KLER (fév. 2023). "Open-source high-performance software packages for direct and inverse solving of horizontal capillary flow". en. In : *Capillarity* 6.2. ISSN : 2709-2119. DOI : [10.46690/capi.2023.02.02](https://doi.org/10.46690/capi.2023.02.02). URL : <https://www.sciopen.com/article/10.46690/capi.2023.02.02>.
- HUININK, Henk (sept. 2016). *Fluids in Porous Media : Transport and phase changes*. en. Morgan & Claypool Publishers. ISBN : 978-1-68174-297-7. URL : <https://iopscience-iop-org.acces.bibl.ulaval.ca/book/mono/978-1-6817-4297-7>.



- MARTINEZ, José Luis, Carlos Enrique SCHVEZOV et Mario Roberto ROSENBERGER (oct. 2013). “Aproximación en diferencias finitas a la ecuación de Richards para transporte de agua en suelos no saturados”. spa. In : Accepted : 2016-12-13T20 :10 :02Z. ISSN : 1666-6070. URL : <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/9299>.
- PEREZ-CRUZ, Angel, Ion STIHARU et Aurelio DOMINGUEZ-GONZALEZ (mai 2017). “Two-dimensional model of imbibition into paper-based networks using Richards’ equation”. en. In : *Microfluidics and Nanofluidics* 21.5, p. 98. ISSN : 1613-4990. DOI : [10.1007/s10404-017-1937-0](https://doi.org/10.1007/s10404-017-1937-0).
- THOMÉE, Vidar (2006). “Semilinear Parabolic Equations”. en. In : *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Sous la dir. de Vidar THOMÉE. Berlin, Heidelberg : Springer, p. 245-260. ISBN : 978-3-540-33122-3. DOI : [10.1007/3-540-33122-0\\_14](https://doi.org/10.1007/3-540-33122-0_14). URL : [https://doi.org/10.1007/3-540-33122-0\\_14](https://doi.org/10.1007/3-540-33122-0_14).
- USEVIČIŪTĖ, Luiza et Edita BALTRĖNAITĖ-GEDIENĖ (fév. 2022). “Modelling of a Capillary Rise Height of Biochar by Modified Lucas–Washburn Equation”. en. In : *Environmental Modeling and Assessment* 27.1, p. 29-43. ISSN : 1573-2967. DOI : [10.1007/s10666-021-09782-6](https://doi.org/10.1007/s10666-021-09782-6).

## Annexe : programme de simulation

Ce programme MATLAB/GNU Octave permet de générer les figures 5 et 6.

```
clear;
close all;
clc;

% Programme de simulation de montee capillaire unidimensionnelle
% Resolution de l'equation de Darcy-Richards avec differences
  finies

% Parametres physiques

L = 0.05; % Longueur de la bandelette
K0 = 1e-10; % Coefficient de conductivite
ThetaS = 0.5; % Contenu volumique max
PsiC = -6e-3; % Pression de l'air
Lambda = 4; % Index de distribution de taille des pores

% Parametres de discretisation

dt = 1; % Pas de temps
Nt = 3600; % Nombre de pas de temps
dz = 0.0001; % Pas d'espace
Nz = round(L/dz); % Nombre de pas d'espace

zz = linspace(0,L,Nz); % Maillage espace
tt = 0:dt:dt*Nt; % Maillage temps

% Quantites auxiliaires

Pow = -3*Lambda-2;
m = (3*Lambda+2)/Lambda;
TGV = 1e3; % Tres grande valeur

K = @(x) K0*ThetaS^m.*(x/PsiC).^Pow; % Conductivite

C = @(x) -(Lambda/PsiC)*(x/PsiC).^(-1-Lambda); % Regle de chaine C
  = dPsi/dTheta

% Definition de l'inconnu discretise (chaque colonne represente une
  iteration temporelle, chaque ligne
% represente la pression discretisee sur la bandelette)
Psi = zeros(Nz,Nt+1);
```

```

% Condition initiale en temps
Psi(:,1) = -TGV;

% Condition de Dirichlet (saturation en bas de la bandelette)
Psi(end,:) = PsiC;

% Boucle en temps
for l=2:Nt+1

    % Calcul de K aux demi-pas
    KMoyen = zeros(Nz-1,1);
    for i=1:Nz-1
        KMoyen(i) = (K(Psi(i,l-1)) + K(Psi(i+1,l-1)))/2;
    end

    % Construction de la matrice de differences finies spatiale
    a = dt./(2*dz*C(Psi(2:end-1,l-1)));
    b = KMoyen(1:end-1);
    c = KMoyen(2:end);
    d = b + c;
    e = b - c;

    I = [-a.*c ; 0];
    D = [1 ; a.*c + 1 ; 1];
    S = [-1 ; -a.*b]; % Le coefficient -1 permet d'imposer une
        Neumann au bout non-imbibe
    A1 = diag(I,-1) + diag(D) + diag(S, 1);

    % Construction du membre de droite
    bl = zeros(Nz,1);
    bl(1) = 0; % Neumann (Flux nul)
    bl(end) = PsiC; % Dirichlet (saturation)
    bl(2:end-1) = 2*dz*a.*e + a.*c.*Psi(3:end,l-1) - (a.*d - 1).*Psi
        (2:end-1,l-1) + a.*b.*Psi(1:end-2,l-1);

    % Resolution
    Psi(:,l) = full(sparse(A1)\sparse(bl));

end

% Tracer les resultats

Psi = flip(Psi);

% Tracer la pression au temps final

```

```

figure;
hold on;
plot(Psi(:,Nt+1),zz)
xlabel("Psi")
ylabel("z")
hold off;

% Tracer la saturation au temps final
figure;
Theta = ThetaS*(Psi(:,end)/PsiC).^(-Lambda);
plot((Theta/ThetaS),zz)
xlabel("Theta/ThetaS")
ylabel("z")
title("Simulation instationnaire")

% Tracer l'etat stationnaire theorique pour une
% equation constitutive en loi de puissance
ThetaLimite = ThetaS./((1-zz/PsiC).^Lambda);
figure;
plot(ThetaLimite/ThetaS,zz)
xlabel("Theta/ThetaS (theorique, stationnaire)")
ylabel("z")
title("Etat stationnaire (theorique)")

% Tracer la hauteur capillaire en fonction du temps
front = zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nt+1
    Theta = ThetaS*(Psi(:,i)/PsiC).^(-Lambda);
    front(i) = zz(nnz(Theta > 1e-5));
end

figure;
plot(tt,front,"b","LineWidth",1)
xlabel("t (s)")
ylabel("h (m)")

% Ajouter les donnees de l'echantillon d'un voile de verre
hold on
plot(60*[0 1 2 5 10 20 30 45 60],[0 9 10 10 10 11 11 11 11]/1000,"
    rx—")
hold off
legend("Simulation","Experimental")

```