



HAL
open science

DEA d'économie appliquée. Filière Entreprise et finance internationale. 1. Le portefeuille optimal et l'allocation stratégique d'actifs

Christian Walter

► To cite this version:

Christian Walter. DEA d'économie appliquée. Filière Entreprise et finance internationale. 1. Le portefeuille optimal et l'allocation stratégique d'actifs. Master. Sciences Po - Paris, France. 2004, pp.19. hal-04589813

HAL Id: hal-04589813

<https://hal.science/hal-04589813v1>

Submitted on 27 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

DEA d'économie appliquée
Filière "Entreprise et finance internationale"
Institut d'études politiques de Paris, 2003 – 2004

Le portefeuille optimal et l'allocation stratégique d'actifs

Christian Walter¹
Polycopié n°1

Ce polycopié présente la base de la théorie du portefeuille de Markowitz et Tobin. Les parties plus techniques sont indiquées par un astérisque. Il s'agit des parties 2.2.1 et 2.3.3.

¹Directeur de la recherche du secteur financier de PricewaterhouseCoopers.
Adresse e-mail : christian.walter@fr.pwc.com

Table des matières

1	Rentabilité et risque d'un portefeuille	3
1.1	La rentabilité et les politiques d'investissement	3
1.2	Le choix d'un numéraire et les rentabilités relatives	5
1.3	La volatilité et l'effet de diversification	7
1.3.1	Exemple avec deux actifs risqués	7
1.3.2	Grande diversification et risque systématique	8
2	Le portefeuille optimal au sens de Markowitz	10
2.1	Le critère et le programme de Markowitz	10
2.2	Résolution du programme de Markowitz	10
2.2.1	Cas général (*)	10
2.2.2	La frontière efficiente de Markowitz	12
2.2.3	Interprétation financière de l'optimalité	14
2.3	Le principe de l'allocation stratégique d'actifs	16
2.3.1	Le théorème de Tobin (1958)	16
2.3.2	Allocation optimale actions / obligations / monétaire	17
2.3.3	Allocation optimale monétaire / marché (*)	19

1 Rentabilité et risque d'un portefeuille

1.1 La rentabilité et les politiques d'investissement

On considère une situation dans laquelle un gérant doit prendre une décision d'investissement en vue d'une date fixée (un jour, un mois, autre), mais sans modifier son allocation d'actifs entre la date de sa décision et la date horizon (pas de gestion dynamique entre les deux dates). Il s'agit d'un modèle *statique* à une seule période de temps, à deux dates : $t = 0$ et $t = 1$. C'est une situation rencontrée par exemple dans le cadre d'un comité d'investissement qui décide d'une allocation sur un rythme mensuel, en fonction des prévisions de performance des marchés.

L'incertitude sur la date 1 est représentée au moyen de "scénarios" que produit le gestionnaire. Plus généralement, on peut considérer que chaque scénario correspond à un "état du monde futur", et on parlera d'états du monde pour caractériser l'aléa affectant les valeurs des quantités suivies (rentabilité, risque etc.). On considère qu'il y a en date $t = 1$ un ensemble Ω avec un nombre $K < \infty$ éléments (états du monde), notés $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$. Chaque élément $\omega \in \Omega$ peut être compris comme un état possible du monde à la date 1, qui est inconnu en date 0, mais qui devient révélé en date 1 aux gestionnaires. On suppose de plus qu'il existe une probabilité P sur Ω , avec $P(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Il existe N titres risqués disponibles sur le marché, de rentabilité R_j , $j = 1, \dots, N$, et un placement sans risque. La rentabilité d'un actif j sur la période est notée R_j tel que

$$R_j \equiv \frac{S_1^j - S_0^j}{S_0^j} \quad j = 1, \dots, N$$

S'il existe un titre sans risque, il sera indicé par 0 et sa rentabilité est notée r .

Une politique d'investissement est définie par l'ensemble des quantités de titres achetées en date $t = 0$ en vue de la date $t = 1$.

Définition 1 (Politique d'investissement (paramétrée en quantités))

Une politique d'investissement (ou politique de gestion, ou position de marché) entre deux dates 0 et 1 est un vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ où θ_j est la quantité de titres j détenus dans le portefeuille en date 0 jusqu'à la date 1.

La valeur du portefeuille θ en date t (sa "valeur liquidative") est définie par $V_t(\theta) = V_t$ tel que

$$V_t \equiv \sum_{j=1}^N \theta_j S_t^j \quad t = 0, 1 \quad (1)$$

On suppose que $V_0 > 0$ (il existe un apport de fond initial et le gérant n'est pas en position de vente à découvert). La rentabilité (performance) de ce portefeuille sur la période est notée $R(\theta) = R$ tel que

$$R = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Comme $S_1^j = S_0^j (1 + R_j)$, il vient de la définition de V_t que

$$R = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\theta_j S_0^j}{V_0} \right) R_j$$

où la quantité $\theta_j S_0^j / V_0$ représente la fraction de l'actif du portefeuille investie en date 0 sur l'action j , c'est-à-dire le *poids* de l'action j dans la performance du portefeuille entre les dates $t = 0$ et $t = 1$. En notant w_j le poids de l'actif j dans le portefeuille en date 0, on a

$$R = \sum_{j=1}^N w_j R_j$$

Une politique d'investissement (une allocation d'actifs) peut être définie aussi bien par le vecteur des quantités de titres que par le vecteur des poids de chaque ligne de titres dans le portefeuille.

Définition 2 (Politique d'investissement (paramétrée en poids))

Une politique d'investissement (ou politique de gestion, ou position de marché) entre deux dates 0 et 1 est un vecteur $w = (w_1, \dots, w_N)$ où w_j est le poids de la ligne de titres j détenus dans le portefeuille en date 0 jusqu'à la date 1.

S'il faut distinguer les portefeuilles, on notera θ^i une allocation d'actifs particulière, i.e. un vecteur de quantités $(\theta_0^i, \theta_1^i, \dots, \theta_N^i)$. On notera $V_t(\theta^i) = V_t^i$ la valeur en date $t = 0, 1$ du portefeuille résultant de l'allocation d'actifs θ^i et $R(\theta^i) = R_i$ la rentabilité sur la période de ce portefeuille, soit

$$R(\theta^i) = \frac{V_1(\theta^i) - V_0(\theta^i)}{V_0(\theta^i)}$$

La rentabilité du portefeuille dépend de chaque scénario ω et est notée $R_i(\omega)$.

Usuellement, on différencie les politiques d'investissement par *objectif de gestion* ("investment objective", ou "investment style") selon le degré d'acceptation du risque qui peut être pris par l'investisseur, dans le but d'obtenir la meilleure rentabilité possible. Les types de politiques d'investissement sont les suivants :

Croissance maximale Une politique d'investissement est dite de recherche de croissance maximale ("aggressive growth") si le portefeuille est construit pour maximiser la rentabilité sans considération de limitation de risque. On trouve par exemple dans cette catégorie les gestions dites "alternatives". Cette politique d'investissement convient bien à des investisseurs prêts à prendre un risque élevé.

Croissance Une politique d'investissement est dite de recherche de croissance ("growth") si le portefeuille est construit pour rechercher la rentabilité la meilleure possible avec prise en considération d'une limite de risque. Un portefeuille de cette catégorie comprendra typiquement plus d'actions que d'obligations. L'investisseur est prêt à accepter une prise de risque élevée, mais contrôlée.

Revenu Une politique d'investissement est dite de recherche de revenu ("income") si le portefeuille est construit pour dégager des flux de revenus (dividendes des actions,

coupons des obligations) avec prise en considération d'une limite de risque. On trouvera dans cette catégorie des portefeuilles composés essentiellement d'obligations et d'actions à dividende élevé. Cette politique d'investissement convient bien à des gestions pour retraites.

Équilibrée Une politique d'investissement est dite équilibré ("balanced") si elle correspond à une combinaison des catégories "croissance" et "revenu". C'est en quelque sorte une catégorie hybride.

Protection maximale Une politique d'investissement est dite de protection maximale ("conservative") si le portefeuille est construit pour minimiser au maximum le risque afin de protéger le capital investi. L'investisseur prudent peut rechercher une protection maximale.

1.2 Le choix d'un numéraire et les rentabilités relatives

On peut exprimer toutes les rentabilités des actifs et des portefeuilles en unité d'un actif particulier, que l'on appelle numéraire (ou actif utilisé comme unité de compte). Les rentabilités relatives sont les rentabilités réelles (nominales) exprimées en unités de numéraire.

Définition 3 (Numéraire)

Un numéraire est un actif financier positif qui ne verse pas de dividendes.

Dans la pratique, on utilise souvent comme numéraire un portefeuille particulier, appelé alors "portefeuille numéraire".

Définition 4 (Portefeuille numéraire)

Un portefeuille numéraire est un portefeuille vérifiant la définition 3.

Le portefeuille numéraire peut servir de portefeuille de référence pour une gestion, et l'on appelle "portefeuille de référence", ou "benchmark" B le portefeuille numéraire choisi.

Définition 5 (Benchmark)

On appelle "benchmark" d'un portefeuille quelconque θ , un portefeuille numéraire noté B dont le choix est pertinent pour la politique de gestion θ .

La pertinence du benchmark pour un portefeuille donné est obtenue en considérant les trois critères suivants :

1. Le benchmark doit correspondre aux besoins de l'investisseur.
2. Le benchmark doit pouvoir refléter le bon espace d'investissement.

3. Dans le cas où les objectifs de gestion ne sont pas clairement explicités, plusieurs indices peuvent être simultanément utilisés.

On notera

$$R_B \equiv \frac{B_1 - B_0}{B_0}$$

la rentabilité du benchmark entre les dates $t = 0$ et $t = 1$. On introduit alors la notion de rentabilité *déflatée*, ou rentabilité *relative par rapport à un benchmark donné* d'un actif j sur la période, comme la quantité R'_j telle que

$$1 + R'_j = \frac{1 + R_j}{1 + R_B} \quad (2)$$

Et, pour tout portefeuille θ , on a de même

$$1 + R'_\theta = \frac{1 + R_\theta}{1 + R_B}$$

Du point de vue de la valeur ajoutée de la gestion d'actifs, R_θ représente en date $t = 1$ la performance du portefeuille géré θ , et R'_θ est donc la performance relative du portefeuille θ par rapport au benchmark B . Lorsque R'_θ et R_B sont "petits", (ce qui est le cas si les dates $t = 0$ et $t = 1$ sont rapprochées), alors

$$R'_\theta = R_\theta - R_B$$

qui représente un *écart de performance* (ou "tilt") mesuré de manière intuitive (additive).

Lorsque l'on applique ce calcul sur les cours eux-mêmes, cela revient à considérer les cours et valeurs de portefeuilles sur la période comprise entre les dates $t = 0$ et $t = 1$:

1. soit comme des cours et valeurs *actualisés* au taux R_B du numéraire,
2. soit comme des cours et valeurs exprimées en *unités de numéraire*, où le numéraire est un portefeuille B .

Ainsi, on définit le cours actualisé $S'_j(t)$ d'un actif j en date t comme

$$S'_j(t) \equiv \frac{S_j(t)}{B_t} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 0, 1$$

et la valeur actualisée en date t d'un portefeuille θ est $V'_t = V_t/B_t$ soit

$$V'_t \equiv \sum_{j=1}^N \theta_j S'_j(t) \quad t = 0, 1$$

Enfin, dans le cas où le numéraire est un actif sans risque de rentabilité r , on notera

$$S_j^*(t) \equiv \frac{S_j(t)}{(1+r)^t} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 0, 1$$

et

$$V_t^* \equiv \sum_{j=1}^N \theta_j S_j^*(t) \quad t = 0, 1$$

les valeurs des titres et des portefeuilles actualisés au taux de l'actif sans risque, et de la même manière (R_j^* et R_θ^*) les rentabilités déflatées correspondantes.

1.3 La volatilité et l'effet de diversification

Dans la problématique classique de la mesure du risque, le risque est mesuré par la variance de la rentabilité et chaque titre est caractérisé par un couple rentabilité-risque défini par l'espérance et la variance de R_j , c'est-à-dire $(E(R_j), \text{var}(R_j))$.

L'application au portefeuille est immédiate. En notant w_j le poids de l'actif j dans le portefeuille, on a

$$R = \sum_{j=1}^N w_j R_j$$

avec $\sum_{j=1}^N w_j = 1$. D'où le couple rentabilité-risque du portefeuille

$$\begin{cases} E(R) = \sum_{j=1}^N w_j E(R_j) \\ \text{var}(R) = \sum_{i,j} w_i \text{cov}(R_i, R_j) w_j \end{cases}$$

L'effet de diversification correspond à l'idée intuitive de "ne pas mettre tous ses oeufs dans le même panier". Dans le cadre développé précédemment, cela permet de réduire le risque (mesuré par la variance) sans réduire la rentabilité.

1.3.1 Exemple avec deux actifs risqués

Par exemple, dans le cas d'un portefeuille composé de deux actions indicées 1 et 2 de rentabilités R_1 et R_2 , on trouve un couple rentabilité-risque

$$\begin{cases} E(R) = (1-x)E(R_1) + xE(R_2) \\ \text{var}(R) = (1-x)^2 \text{var}(R_1) + x^2 \text{var}(R_2) + 2x(1-x) \text{cov}(R_1, R_2) \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, on note $\text{var}(R_j) = \sigma_j^2$ pour $j = 1, 2$. Ce qui donne

$$\text{var}(R) = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho \sigma_1 \sigma_2$$

Comme $-1 \leq \rho \leq +1$, on a $\text{var}(R) \leq (w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2)^2$: la variance totale a été réduite par effet de diversification. Quand $\rho < 0$, on dit que l'on se trouve en présence d'un actif de couverture ("hedge asset").

Deux cas sont particulièrement intéressants :

Cas $\rho = 1$: corrélation parfaite Dans ce cas, on a $\text{var}(R) = ((1-x)\sigma_1 + x\sigma_2)^2$ d'où $\sigma(R) = (1-x)\sigma_1 + x\sigma_2 = x(\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_1$ et $\mu(R) = (1-x)\mu_1 + x\mu_2 = x(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1$. On obtient une droite dans le plan espérance-volatilité.

cas $\rho = -1$: anticorrélation parfaite Dans ce cas, on a $\text{var}(R) = ((1-x)\sigma_1 - x\sigma_2)^2$. Il existe donc une valeur de x telle que la variance s'annule : $x = \sigma_1 / (\sigma_1 + \sigma_2)$. On dit que la position (le portefeuille) est *parfaitement couverte*.

La variance du portefeuille est une fonction du second degré en x . Pour analyser la sensibilité de la variance à la composition x , on calcule

$$\frac{\partial \text{var}(R)}{\partial x} = 2(x(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) - \sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2)$$

et l'annulation de cette dérivée conduit à une proportion x donnée par

$$x = \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

telle que la variance est minimale. On dit que le portefeuille correspondant est le *portefeuille de variance minimale*.

En observant que, pour une rentabilité du portefeuille fixée à μ_P , on a $x = (\mu_P - \mu_1)/(\mu_2 - \mu_1)$, il apparaît que la variance σ_P^2 s'écrit comme une fonction de μ_P^2 : on obtient une parabole dans le plan rentabilité \times variance, ou une hyperbole plan rentabilité \times écart-type.

1.3.2 Grande diversification et risque systématique

Plus généralement, on peut décomposer la variance du portefeuille en faisant apparaître les variances des titres qui le composent :

$$\text{var}(R) = \sum_j w_j^2 \text{var}(R_j) + \sum_{i \neq j} w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad (3)$$

ce qui permet de voir que, pour N actifs, il y a N termes de variance et $N^2 - N$ termes de covariance. Autrement dit, pour N actifs, l'estimation des quantités de la matrice de variance-covariance de rang N nécessite de déterminer N termes de variances et $(N^2 - N)/2$ termes de covariance (car $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$), soit $N(N + 1)/2$ termes au total. Par exemple, pour $N = 100$ titres, cela conduit à l'estimation de 5 050 termes. En 1952, les capacités de calcul limitées des professionnels de la gestion rendent à peu près inapplicable cette méthode. Markowitz lui-même, dans son article de 1952, ne donne pas d'exemple numérique.

La variance moyenne des N actions est :

$$\overline{\text{var}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{var}(R_j)$$

et la covariance moyenne entre les N actions est

$$\overline{\text{cov}} = \frac{2}{N(N - 1)} \sum_{i,j} \text{cov}(R_i, R_j)$$

Partant de l'équation (3), (avec $w_j = 1/N$ pour tout j), il vient que

$$\text{var}(R) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_j \text{var}(R_j) + 2 \sum_{i \neq j} \text{cov}(R_i, R_j) \right) = \frac{1}{N^2} \left(N \overline{\text{var}} + 2 \frac{N(N-1)}{2} \overline{\text{cov}} \right)$$

soit

$$\text{var}(R) = \frac{1}{N} \overline{\text{var}} + \frac{N-1}{N} \overline{\text{cov}} \quad (4)$$

On voit que cette relation (4) définit une *partition* du risque d'un portefeuille entre la moyenne des *causes propres* aux titres (le risque *spécifique* des titres), et la *cause moyenne commune* à tous les titres (le risque lié aux facteurs communs de variations à tous les titres), et donc que la covariance moyenne apparaîtrait comme la "cause commune" des variations.

Lorsque le nombre d'actions devient grand, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}(R) = \overline{\text{cov}} \quad (5)$$

qui montre que la variance totale du portefeuille converge vers la covariance moyenne entre les titres qui le composent. Il s'agit d'un risque non réductible. Donc :

- Si les titres sont parfaitement indépendants, la variance totale du portefeuille est nulle.
- Dans la réalité, il existe toujours une dépendance, et l'on voit que la variance totale décroît en fonction du niveau d'indépendance des titres.

L'augmentation du nombre de titres détenus dans le portefeuille correspond à une opération de *diversification*. La diversification permet ainsi de diminuer le risque jusqu'au niveau plancher de la "cause commune", et pas en-deçà.

2 Le portefeuille optimal au sens de Markowitz

2.1 Le critère et le programme de Markowitz

Définition 6 (Critère de Markowitz)

Une allocation d'actifs θ^* est dite "optimale" si et seulement s'il n'existe pas de portefeuille θ tel que $E(R(\theta)) \geq E(R(\theta^*))$ et $\text{var}(R(\theta)) < \text{var}(R(\theta^*))$.

Cherchant à obtenir l'espérance de rentabilité la plus élevée pour un niveau de variance donné, noté σ^2 , le gérant cherche à résoudre le programme d'optimisation

$$\begin{cases} \max_{\{w_j\}} E(R) \\ \text{s.c.} \\ \text{var}(R) = \sigma_P^2 \\ \sum_{j=1}^N w_j = 1 \end{cases} \quad (6)$$

qui est appelé le programme d'optimisation de Markowitz. On peut aussi écrire ce programme de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min_{\{w_j\}} \text{var}(R) \\ \text{s.c.} \\ E(R) = \mu_P \\ \sum_{j=1}^N w_j = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Définition 7 (Portefeuille MV-optimal)

On appelle portefeuille optimal au sens de Markowitz, ou MV-optimal, un portefeuille obtenu par résolution du programme d'optimisation (6), pour un niveau de risque σ^2 donné, ou (7) pour un niveau de rentabilité μ donné.

2.2 Résolution du programme de Markowitz

2.2.1 Cas général (*)

On écrit en notation matricielle (plus condensée) le couple rentabilité-risque. On note $\mu_j = E(R_j)$, $\sigma_j^2 = \text{var}(R_j)$, $\sigma_{i,j} = \text{cov}(R_i, R_j)$, w le vecteur $[w_j]_{j=1,\dots,N}$, μ le vecteur $[\mu_j]_{j=1,\dots,N}$, et $\Gamma = [\sigma_{i,j}]_{j=1,\dots,N}$ la matrice de variance-covariance, $\mathbf{1}$ le vecteur unité, \langle, \rangle le produit scalaire entre deux vecteurs, et $'$ la transposée d'un vecteur. On a

$$\begin{cases} E(R) = w' \mu = \langle w, \mu \rangle \\ \text{var}(R) = w' \Gamma w = \langle w, \Gamma w \rangle \end{cases}$$

Le programme d'optimisation (7) est

$$\begin{cases} \min_{\{w_j\}} \langle w, \Gamma w \rangle \\ \text{s.c.} \\ \langle w, \mu \rangle = \mu_P \\ \langle w, \mathbf{1} \rangle = 1 \end{cases}$$

qui est un programme avec fonction objectif quadratique et deux contraintes linéaires. On peut aussi ajouter une contrainte supplémentaire sur les poids des actifs, en interdisant les ventes à découvert, et le programme devient alors

$$\begin{cases} \min_{\{w_j\}} \langle w, \Gamma w \rangle \\ \text{s.c.} \\ \langle w, \mu \rangle = \mu_P \\ \langle w, \mathbf{1} \rangle = 1 \\ w_j \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, le problème ne peut pas être résolu par un système d'équations linéaires (égalités et inégalité linéaires). Il est nécessaire de mettre en oeuvre des techniques d'optimisation quadratique.

Pour résoudre le programme (7), on forme le lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2)$

$$\mathcal{L} = \langle w, \Gamma w \rangle - \lambda_1(\langle w, \mathbf{1} \rangle - 1) - \lambda_2(\langle w, \mu \rangle - \mu_P)$$

où λ_1 est le multiplicateur de la contrainte qui assure que la somme des poids de chaque titre est bien égale à 1, et λ_2 le multiplicateur de Lagrange qui correspond à la contrainte qui fixe le niveau de rentabilité. L'annulation du gradient $\nabla = [\partial/\partial w_j]_{j=1, \dots, N}$ fournit les points critiques de \mathcal{L} , soit $\partial\mathcal{L}/\partial w_j = 0$. Cela donne pour chaque action j

$$2(\Gamma w)_j - \lambda_1 - \lambda_2 \mu_j = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

Cette équation est celle qui permet d'obtenir la composition (les poids) du portefeuille optimal.

La résolution du système d'équations (8) se fait de la manière suivante. On passe (8) en écriture matricielle, ce qui donne

$$(\Gamma w) = \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mu$$

d'où, en faisant l'hypothèse que Γ est inversible,

$$w = \lambda_1 \Gamma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_2 \Gamma^{-1} \mu \quad (9)$$

On multiplie scalairement l'équation précédente par $\mathbf{1}$ et par μ

$$\begin{cases} \langle w, \mathbf{1} \rangle = \lambda_1 \langle \Gamma^{-1} \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle + \lambda_2 \langle \Gamma^{-1} \mu, \mathbf{1} \rangle = 1 \\ \langle w, \mu \rangle = \lambda_1 \langle \Gamma^{-1} \mathbf{1}, \mu \rangle + \lambda_2 \langle \Gamma^{-1} \mu, \mu \rangle = \mu_P \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} a = \langle \Gamma^{-1}\mu, \mathbf{1} \rangle = \langle \Gamma^{-1}\mathbf{1}, \mu \rangle \\ b = \langle \Gamma^{-1}\mu, \mu \rangle \\ c = \langle \Gamma^{-1}\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \\ d = bc - a^2 \end{cases}$$

il vient le système d'équations

$$\begin{cases} c\lambda_1 + a\lambda_2 = 1 \\ a\lambda_1 + b\lambda_2 = \mu_P \end{cases}$$

dont la solution est

$$\lambda_1 = \frac{1}{d}(b - \mu_P a) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{d}(\mu_P c - a)$$

En remplaçant λ_1 et λ_2 par leur valeur dans l'équation (9), on obtient les valeurs des poids optimaux w^* :

$$w^* = \frac{b - \mu_P a}{d} \Gamma^{-1}\mathbf{1} + \frac{\mu_P c - a}{d} \Gamma^{-1}\mu$$

Posons

$$g = \frac{1}{d}(b\Gamma^{-1}\mathbf{1} - a\Gamma^{-1}\mu) \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{d}(c\Gamma^{-1}\mu - a\Gamma^{-1}\mathbf{1})$$

il vient

$$w^* = g + h\mu_P \tag{10}$$

qui est la solution du programme de Markowitz.

2.2.2 La frontière efficiente de Markowitz

Une fois obtenue la composition du portefeuille optimal, on peut calculer son risque :

$$\text{var}(R) = \langle w^*, \Gamma w^* \rangle$$

qui donne

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{c} + \frac{c}{d} \left(\mu_P - \frac{a}{c} \right)^2$$

Pour chaque valeur de μ_P (respectivement σ_P), on obtient une allocation optimale différente de volatilité σ_P (respectivement de rentabilité μ_P). L'ensemble est une *hyperbole* dans le plan (μ_P, σ_P) et une *parabole* dans le plan (μ_P, σ_P^2) .

Définition 8 (Frontière efficiente)

On appelle *frontière efficiente*, ou "*frontière de Markowitz*", dans le plan $(E(R), \text{var}(R))$, l'ensemble des allocations d'actifs optimales.

Une propriété fondamentale de la frontière de Markowitz est la propriété de *séparabilité* des portefeuilles optimaux. Elle est connue sous le nom de théorème de Black [1972].

Théorème 1 (Théorème de séparation de Black)

Toute combinaison convexe de portefeuilles optimaux est un portefeuille optimal. Réciproquement, tout portefeuille optimal peut se décomposer en combinaison linéaire de deux portefeuilles optimaux arbitrairement choisis.

A partir de deux portefeuilles optimaux, on peut donc constituer un troisième portefeuille combinaison convexe (poids positifs) ou linéaire (poids quelconques) des deux premiers : il sera également optimal, c'est-à-dire sur la frontière efficiente. Les deux portefeuilles de référence forment une base de l'ensemble des portefeuilles optimaux. Cela veut dire qu'il suffit de connaître deux portefeuilles optimaux pour pouvoir connaître et construire toute la frontière de Markowitz. Cela veut dire également que deux OPCVM peuvent suffire pour construire une allocation d'actifs de niveau de risque quelconque pour tout investisseur, sans qu'il soit nécessaire d'acheter des titres séparément.

Soient θ et θ' deux portefeuilles optimaux. La covariance de leurs rentabilités est

$$\text{cov}(R, R') = \frac{c}{d} \left(\mu - \frac{a}{c} \right) \left(\mu' - \frac{a}{c} \right) + \frac{1}{c}$$

Pour tout portefeuille optimal P , à l'exception du portefeuille de variance minimale, il existe un unique portefeuille optimal de covariance nulle avec le précédent. Ce portefeuille est appelé le zéro-covariant de P .

On voit que $\sigma_P^2 \geq 1/c$. On peut trouver un portefeuille qui a pour variance $1/c$. C'est le *portefeuille de variance minimale*. Il correspond à $\mu = a/c$. Le portefeuille de variance minimale G a pour caractéristiques

$$\begin{aligned} w_G &= \frac{1}{c} \Gamma^{-1} \mathbf{1} \\ \mu_G &= \frac{a}{c} \\ \sigma_G &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

La covariance de la rentabilité de tout action j avec la rentabilité du portefeuille de variance minimale est

$$\text{cov}(R_j, R) = \frac{1}{c}$$

Exercice : forme (6) du programme de Markowitz

Cette forme est

$$\begin{cases} \max_{\{w_j\}} E(R) \\ \text{s.c.} \\ \text{var}(R) = \sigma^2 \\ \sum_{j=1}^N w_j = 1 \end{cases}$$

On forme le lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(w_1, w_2, \dots, w_N, \lambda, \mu)$:

$$\mathcal{L} = E(R) - \frac{\lambda_1}{2} (\text{var}(R) - \sigma^2) - \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^N w_j - 1 \right)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange qui correspond à la contrainte qui fixe le niveau de risque, et μ le multiplicateur de la contrainte qui assure que la somme des poids de chaque titre est bien égale à 1. Soit

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N w_j E(R_j) - \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) - \sigma^2 \right) - \mu \left(\sum_{j=1}^N w_j - 1 \right)$$

L'annulation du gradient $\nabla = [\partial/\partial w_j]_{j=1, \dots, N}$ fournit les points critiques de \mathcal{L} . La première condition $\partial \mathcal{L} / \partial w_j = 0$ conduit, pour tout titre j , à

$$E(R_j) - \lambda^* \sum_{i=1}^N w_i^* \text{cov}(R_j, R_i) - \mu^* = 0$$

2.2.3 Interprétation financière de l'optimalité

La condition d'optimalité du premier ordre est à l'origine du modèle linéaire des rentabilités. La première condition d'optimalité $\partial \mathcal{L} / \partial w_j = 0$ du programme (7) conduit, pour tout titre j , à l'équation

$$E(R_j) = \mu + \lambda \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i \text{cov}(R_j, R_i) \quad j = 1, \dots, N$$

qui exprime une relation linéaire entre la rentabilité $E(R_j)$ de toute action j et la covariance. Comme $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_i \text{cov}(R_j, R_i) = \text{cov}(R_j, \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i R_i) = \text{cov}(R_j, \tilde{R})$, l'équation ci-dessus devient

$$E(R_j) = \mu + \lambda \text{cov}(R_j, \tilde{R}) \quad j = 1, \dots, N$$

On a le théorème suivant.

Théorème 2 (Existence du portefeuille optimal)

Une condition nécessaire de la MV-optimalité d'un portefeuille de rentabilité \tilde{R} défini par une allocation d'actifs $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_N)$, est qu'il existe deux nombres μ et λ tels que, pour tout titre j , $j = 1, \dots, N$

$$E(R_j) = \mu + \lambda \text{cov}(R_j, \tilde{R}) \quad j = 1, \dots, N \tag{11}$$

Autrement dit, il existe une relation linéaire entre l'espérance de rentabilité de chaque titre j et la covariance de la rentabilité de ce titre avec la rentabilité \tilde{R} du portefeuille optimal.

Ce théorème s'interprète financièrement de la manière suivante.

1. La covariance de la rentabilité du titre avec la rentabilité du portefeuille optimal détermine la contribution marginale du titre à la variance totale : c'est donc une mesure du *risque marginal* du titre considéré.

2. L'espérance de rentabilité de chaque titre doit donc être reliée *linéairement* à son risque marginal.
3. Dans le plan $(E(R_j), \text{cov}(R_j, \tilde{R}))$, ou plan "rentabilité / risque marginal", lorsque l'on positionne les titres par rapport à l'allocation d'actifs optimale, tous les titres existants doivent donc se trouver sur une même droite. Si ce n'était pas le cas, cela signifierait que le portefeuille a été composé de façon non optimale.

Le risque marginal possède la propriété d'être une forme linéaire : on peut donc aisément combiner le risque de plusieurs titres, en vérifiant le principe d'additivité de la théorie financière.

L'interprétation financière des multiplicateurs de Lagrange λ et μ se fait de la manière suivante.

1. Multiplicateur μ . Si $\text{cov}(R_j, R) = 0$, alors $E(R_j) = \mu$: la quantité μ représente la rentabilité d'un portefeuille de covariance nulle avec le portefeuille optimal, notée $E(R_Z)$, ou d'un actif sans risque (s'il existe), notée r .
2. Multiplicateur λ . Si $R_j = \tilde{R}$, alors $E(\tilde{R}) = r + \lambda \text{var}(\tilde{R})$, ce qui donne la valeur de λ : $\lambda = (E(\tilde{R}) - r) / \text{var}(\tilde{R})$. La quantité $\tilde{\lambda}$ représente le complément de rentabilité que le gérant peut espérer obtenir en augmentant le niveau de risque d'une unité supplémentaire.

On obtient finalement

$$E(R_j) - r = \frac{\text{cov}(R_j, \tilde{R})}{\text{var}(\tilde{R})} (E(\tilde{R}) - r) \quad j = 1, \dots, N$$

soit, en vertu de la définition du bêta d'une action

$$E(R_j) - r = \beta_j (E(\tilde{R}) - r) \quad j = 1, \dots, N \quad (12)$$

qui donne la valeur de la prime de risque de tout actif j en fonction de la prime de risque du portefeuille optimal.

Autrement dit, si un portefeuille de rentabilité \tilde{R} est optimal, alors on obtient pour tout actif j le *modèle linéaire* des rentabilités :

$$E(R_j) = a_j + b_j E(\tilde{R}) \quad j = 1, \dots, N$$

avec $a_j = r(1 - \beta_j)$ et $b_j = \beta_j$, soit

$$R_j = a_j + b_j \tilde{R} + \varepsilon_j \quad j = 1, \dots, N$$

Les relations précédentes s'appliquent à tout portefeuille θ .

2.3 Le principe de l'allocation stratégique d'actifs

2.3.1 Le théorème de Tobin (1958)

Un cas particulier de la recherche d'un portefeuille optimal vient de l'existence d'un actif non risqué (de variance nulle) de rentabilité r . L'on note $\pi_j = R_j - r$ la prime de risque de toute action j , et $\pi = \mu - r\mathbf{1}$ le vecteur de dimension N des primes de risques de N actions du marché. Soit \tilde{w} le vecteur des poids des actifs risqués. On a par définition $w_0 = 1 - \langle \tilde{w}, \mathbf{1} \rangle$. Le programme d'optimisation devient

$$\begin{cases} \min_{\{\tilde{w}_j\}} \langle \tilde{w}, \Gamma \tilde{w} \rangle \\ \text{s.c.} \\ \langle \tilde{w}, \pi \rangle = \pi_P \\ \langle \tilde{w}, \mathbf{1} \rangle = 1 \end{cases}$$

On obtient le vecteur $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_N)$ des poids des N actifs risqués dans le portefeuille optimal. Puis on répartit les fonds selon l'allocation $(1 - x, x)$. Le portefeuille P optimal aura comme allocation d'actifs

$$w^P = (w_0^P, w_1^P, w_2^P, \dots, w_N^P) = (1 - x, x\tilde{w}_1, x\tilde{w}_2, \dots, x\tilde{w}_N)$$

Dans le plan rentabilité \times écart-type, la frontière efficiente est une droite, tangente à la frontière de Markowitz.

Théorème 3 (Théorème de séparation de Tobin)

Tout portefeuille optimal est une combinaison linéaire de l'actif sans risque et du portefeuille optimal tangent. La frontière efficiente est une droite dans le plan $(E(R), \sigma(R))$, appelée "capital market line" ou "capital allocation line".

Avec un seul actif risqué, le portefeuille optimal tangent, de rentabilité notée \tilde{R} , considérons une allocation d'actifs telle que $x\%$ de l'actif soit investi sur le portefeuille optimal tangent, et $(1 - x)\%$ soit investi sur l'actif non risqué. La rentabilité du portefeuille résultant R est : $R = (1 - x)r + x\tilde{R}$, et le couple rentabilité-risque devient

$$\begin{cases} E(R_P) = (1 - x)r + xE(\tilde{R}) \\ \text{var}(R_P) = x^2 \text{var}(\tilde{R}) \end{cases} \quad (13)$$

d'où l'on déduit la relation linéaire entre la rentabilité du portefeuille $E(R)$ et son écart-type $\sigma(R)$:

$$E(R) = r + \frac{\sigma(R)}{\sigma(\tilde{R})} (E(\tilde{R}) - r)$$

qui forme une demi-droite dans le plan rentabilité \times écart-type, de pente $(E(\tilde{R}) - r)/\sigma(\tilde{R})$.

On peut donc établir la frontière efficiente en trois temps.

1. Dans un premier temps, on détermine la frontière des portefeuilles \tilde{w} constitués sans actif non risqué. On note \tilde{R} la rentabilité d'un portefeuille optimal quelconque.
2. Dans un deuxième temps, on construit une combinaison linéaire entre l'actif non risqué et un portefeuille optimal quelconque, combinaison qui produit donc une droite de pente $(E(\tilde{R}) - r)/\sigma(\tilde{R})$, et l'on maximise la pente de cette droite jusqu'à obtenir la *portefeuille tangent* à la frontière efficiente des actifs risqués. Ce portefeuille est une combinaison \tilde{w} de tous les actifs risqués.
3. Dans un troisième temps, on définit la frontière efficiente comme l'ensemble de tous les portefeuilles $(1 - x, x)$. En effet, puisque tout portefeuille optimal appartenant à la frontière efficiente de Markowitz peut être considéré comme une combinaison linéaire de deux portefeuilles quelconques de cette frontière, puisque l'actif sans risque et le portefeuille optimal tangent appartiennent à la frontière, alors (application du théorème de Black), on peut choisir comme *base* des portefeuilles optimaux, le couple actif monétaire – portefeuille optimal tangent, et ainsi tout portefeuille optimal devient une combinaison linéaire d'actif monétaire et du portefeuille optimal tangent.

Il vient de ce théorème (1958) une conséquence très importante pour la gestion professionnelle. Puisque le portefeuille tangent d'actifs risqués est optimal, sa composition ne dépend pas de l'attitude particulière face au risque de chaque investisseur. Il est construit de manière identique pour *tous* les investisseurs, et ceci quel que soit leur horizon de placement et leur capacité à prendre ou non des risques : le même portefeuille est optimal pour tous. Ce qui permet un *gain de productivité* pour le gestionnaire, qui peut structurer ses produits en fonction de types particuliers.

Le choix d'un niveau de risque, qui différencie les attentes des investisseurs, se fera donc, non sur la base d'une combinaison particulière des actifs risqués, mais seulement sur le choix de la proportion x investie sur le portefeuille optimal tangent : le degré de tolérance au risque se réglera avec la part des fonds investie sur l'actif sans risque. Le choix d'une allocation particulière, c'est-à-dire d'une proportion x , doit faire intervenir des critères de préférence de la part de l'investisseur, fonction de son attitude face au risque.

2.3.2 Allocation optimale actions / obligations / monétaire

On considère trois classes d'actifs : actions et obligations, notées respectivement A et O , de rentabilités R_A et R_O , et le taux du marché monétaire, noté r . On s'intéresse à l'allocation optimale entre actions, obligations et monétaire.

1. Premier temps : détermination des portefeuilles constitués d'actions et d'obligations, sans partie monétaire. Soit $\tilde{w} = (\tilde{w}_A, \tilde{w}_O)$ le vecteur des poids du portefeuille investi en actions et obligations : $\tilde{w}_A + \tilde{w}_O = 1$ et $\tilde{w}_j \geq 0$ pour $j = A, O$. Soit \tilde{R} la rentabilité

d'un portefeuille $\tilde{w} : \tilde{R} = \tilde{w}_A R_A + \tilde{w}_O R_O$. Le couple rentabilité-risque de \tilde{w} est :

$$\begin{cases} E(\tilde{R}) = \tilde{w}_A E(R_A) + \tilde{w}_O E(R_O) \\ \text{var}(\tilde{R}) = \tilde{w}_A^2 \text{var}(R_A) + \tilde{w}_O^2 \text{var}(R_O) + 2\tilde{w}_A \tilde{w}_O \text{cov}(R_A, R_O) \end{cases}$$

2. Deuxième temps : détermination de la pente de la droite issue d'une combinaison linéaire entre l'actif sans risque et un portefeuille d'actifs risqués. Cette pente a pour expression

$$\frac{E(\tilde{R}) - r}{\sigma(\tilde{R})} = \frac{\tilde{w}_A E(R_A) + \tilde{w}_O E(R_O) - r}{(\tilde{w}_A^2 \text{var}(R_A) + \tilde{w}_O^2 \text{var}(R_O) + 2\tilde{w}_A \tilde{w}_O \text{cov}(R_A, R_O))^{1/2}}$$

Puis on maximise la pente de la droite pour obtenir la composition du *portefeuille optimal tangent*. Il s'agit donc de résoudre le programme d'optimisation

$$\begin{cases} \max_{\{w_j\}} \frac{E(\tilde{R}) - r}{\sigma(\tilde{R})} \\ \text{s.c.} \\ w_A + w_O = 1 \end{cases}$$

On pose $\tilde{w}_A = x$, d'où $\tilde{w}_O = 1 - x$. La pente de la droite s'écrit :

$$\frac{E(\tilde{R}) - r}{\sigma(\tilde{R})} = \frac{x E(R_A) + (1 - x) E(R_O) - r}{(x^2 \sigma_A^2 + (1 - x)^2 \sigma_O^2 + 2x(1 - x)\rho\sigma_A\sigma_O)^{1/2}}$$

Maximiser la pente revient à annuler la dérivée de la fonction (cela correspond à une condition d'optimalité du premier ordre $\partial \mathcal{L} / \partial \tilde{w}_j = 0$ pour $j = A, O$ dans ce cas simple puisque $\lambda(\tilde{w}_A + \tilde{w}_O - 1) = 0$). On obtient

$$\tilde{w}_A = \frac{(ER_A - r)\sigma_O^2 - (ER_O - r)\text{cov}(R_A, R_O)}{(ER_A - r)\sigma_O^2 + (ER_O - r)\sigma_A^2 + (ER_A - r + ER_O - r)\text{cov}(R_A, R_O)}$$

et l'on obtient par différence $\tilde{w}_O = 1 - \tilde{w}_A$. Ce sont les poids du *portefeuille optimal tangent*. En notant $\pi_j = R_j - r$ pour $j = A, O$ les primes de risques des marchés actions et obligations, les poids du portefeuille optimal sont :

$$\tilde{w}_A = \frac{E(\pi_A)\sigma_O^2 - E(\pi_O)\rho\sigma_A\sigma_O}{E(\pi_A)\sigma_O^2 + E(\pi_O)\sigma_A^2 - (E(\pi_A) + E(\pi_O))\rho\sigma_A\sigma_O} \quad (14)$$

3. Troisième temps : on forme un nouveau portefeuille composé d'une fraction investie dans le portefeuille optimal tangent \tilde{w} , et d'une fraction investie sur le marché monétaire. Soit $w_P = (1 - x, x)$ l'allocation stratégique entre actif sans risque et actif risqué. La rentabilité de ce portefeuille P est $R_P = (1 - x)r + x\tilde{R}$. Le couple rentabilité-risque de w_P est :

$$\begin{cases} E(R_P) = (1 - x)r + x(\tilde{w}_A E(R_A) + \tilde{w}_O E(R_O)) \\ \text{var}(R_P) = x^2(\tilde{w}_A^2 \text{var}(R_A) + \tilde{w}_O^2 \text{var}(R_O) + 2\tilde{w}_A \tilde{w}_O \text{cov}(R_A, R_O)) \end{cases}$$

Finalement, l'allocation stratégique entre actions, obligations et actif monétaire est

$$w^P = (w_A^P, w_O^P, w_B^P) = (x\tilde{w}_A, x\tilde{w}_O, 1 - x)$$

Ce portefeuille se situe sur la droite d'allocation des actifs ("capital allocation line"). La seule décision à prendre est le choix de x : il n'y a pas de décision à prendre sur la composition en titres des classes A et O : on dit que la gestion est *passive*.

2.3.3 Allocation optimale monétaire / marché (*)

On considère la décision d'allocation entre actif sans risque (monétaire) et actif risqué. Le taux du marché monétaire est noté r , le taux de rentabilité de l'actif risqué est \tilde{R} . On s'intéresse à la détermination de x . Cela correspond à la question en économie de la *demande d'actif risqué*. On utilise pour cela l'équivalent certain R^* . Il s'agit de maximiser $ER - 0,005 \lambda \text{ var } R$ sachant que

$$\begin{cases} E(R) = (1 - x)r + xE(\tilde{R}) \\ \text{var}(R) = x^2 \text{var}(\tilde{R}) \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \max_{\{x\}} R^* &= \max_{\{x\}} \{ER - 0,005 \lambda \text{ var } R\} \\ &= \max_{\{x\}} \{(1 - x)r + xE(\tilde{R}) - 0,005 \lambda x^2 \text{var}(\tilde{R})\} \end{aligned}$$

Le maximum est atteint par l'annulation de la dérivée première :

$$\frac{\partial R^*}{\partial x} = E(\tilde{R}) - r - 0,01\lambda x \text{var}(\tilde{R}) = 0$$

d'où la valeur de x en fonction du paramètre de peur du risque λ

$$x = \frac{E(\tilde{R}) - r}{0,01\lambda \text{var}(\tilde{R})} \quad (15)$$

Le point remarquable de cette solution est qu'elle ne fait pas intervenir le niveau initial de richesse de l'individu : la part optimale d'actif risqué est indépendante du niveau de richesse. Ceci résulte de l'utilisation de la fonction CARA ou de l'équivalent certain de Pratt.