



HAL
open science

Méthode Latin isogéométrique immergée pour le calcul d'interfaces non-linéaires

Evgeniia Lapina, Paul Oumaziz, Robin Bouclier

► To cite this version:

Evgeniia Lapina, Paul Oumaziz, Robin Bouclier. Méthode Latin isogéométrique immergée pour le calcul d'interfaces non-linéaires. 16e Colloque National en Calcul des Structures, May 2024, Giens (Var), France. hal-04581031

HAL Id: hal-04581031

<https://hal.science/hal-04581031v1>

Submitted on 21 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode Latin isogéométrique immergée pour le calcul d'interfaces non-linéaires

E. Lapina^{1,2}, P. Oumaziz¹, R. Bouclier^{2,1}

¹ Institut Clement Ader (ICA), Université de Toulouse, INSA-ISAE-Mines Albi-UPS-CNRS, UMR 5312

² Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), Université de Toulouse, UPS-INSU-CNRS UMR5219

Résumé — A travers cette communication nous présentons une méthode Latin isogéométrique immergée dont le but est de simuler des microstructures de type matrice/inclusions. La méthode Latin, utilisée pour gérer le cas d'interface non-linéaire de type contact frottant ou cohésive, est écrite dans le cadre de l'Analyse IsoGéométrique (AIG). Nous utilisons également une approche de domaine fictif afin de simplifier la paramétrisation spline des maillages.

Mots clés — Splines, Couplage non-conforme, Domaine fictif, Conditions de Robin, Multiéchelle, Contact, Délaminage

1 Introduction

Les microstructures auxquelles nous nous intéressons sont constituées d'une matrice dans laquelle sont placées des inclusions multiples qui interagissent non-linéairement avec la matrice au travers d'interfaces de type contact frottant ou d'interfaces cohésives. Nous choisissons de faire appel à l'Analyse IsoGéométrique (AIG ou IGA en anglais) pour traiter ce type de problème. L'utilisation de fonctions splines régulières et de haut degré (fonctions C^{p-1} entre les éléments pour un degré p) permet une meilleure représentation de la géométrie et un gain en terme de précision à nombre de degrés de liberté équivalent comparé aux éléments finis traditionnels (fonctions C^0 entre les éléments et au mieux de degré 2 dans les codes commerciaux) [6, 5, 3].

Bien que des technologies de splines plus avancées permettent du raffinement local, la présence de trous ou d'inclusions rentre en conflit avec la structure tensorielle utilisée pour obtenir des géométries et maillage splines 2D ou 3D. Cela reste actuellement une problématique scientifique majeure au sein de la communauté AIG. Des approches basées sur une reparamétrisation de la géométrie en la subdivisant en plusieurs patch AIG sont des solutions possibles mais finalement assez complexes et numériquement lourdes à développer. L'idée de base des méthodes immergées [11] est assez élégante dans le sens où la contrainte de conformité entre le maillage d'interpolation de la solution et la géométrie est relâchée. La géométrie est plongé au sein d'un maillage régulier et une règle d'intégration adaptée à la géométrie permet de déterminer les opérateurs discrétisés.

L'interaction d'interface non-linéaire entre 2 domaines immergés (c'est-à-dire au travers d'une interface non-conforme) est finalement assez peu traitée dans la littérature. Nous pouvons noter les travaux de [4, 7] qui ont adapté la méthode Latin [8, 1, 10] à l'approche CutFEM pour gérer des non-linéarités de type contact. Le maillage éléments finis utilisé dans ces travaux n'est pas conforme à la géométrie de l'interface et une stabilisation de la formulation faible du problème est proposée. Cependant dans ce type d'approche l'interpolation reste non-conforme avec la géométrie de l'interface. Sachant que dans le cas du contact ou du délaminage les phénomènes sont très localisés avec des gradients prononcés il est intéressant de chercher à être conforme aux interfaces et permettre également de raffiner localement pour mieux capter ces phénomènes non-linéaires. L'approche proposée par [13] dans le cadre d'interfaces parfaites apparaît justement intéressante dans le contexte non-linéaire dans lequel nous nous plaçons ici. Le point de départ de notre méthodologie est alors le suivant. En ajoutant des couches conformes de chaque côté de l'interface non-linéaire, on obtient ainsi des interfaces "parfaites" non-conformes entre les domaines immergés et leurs couches respectives, et des interface non-linéaires mais conforme entre les couches ; Le couplage entre les domaines et leur couche étant fait par un couplage de type Nitsche [12, 2].

De même que pour [4], la non-linéarité est traitée dans notre approche par la méthode Latin. La "séparation des difficultés" permet de résoudre itérativement via un schéma alterné des problèmes linéaires et parallèles sur les domaines immergés et leurs couches respectives et des problèmes non-linéaires locaux aux interfaces. Nous proposons ainsi de présenter une méthode Latin IsoGéométrique immergée mais conforme aux interfaces [9].

2 Définition du problème

2.1 Formulation forte du problème de référence

Nous considérons un modèle composé de deux domaines Ω_m et Ω_f , nommés respectivement la matrice et l'inclusion. Nous nous restreignons ici à seulement 2 domaines par soucis de simplicité, cependant la méthodologie peut être généralisée à de multiples inclusions sans difficultés. Les deux domaines Ω_m et Ω_f sont couplés à travers l'interface Γ dont le comportement est potentiellement non-linéaire de type contact frottant ou loi cohésive. Nous obtenons donc un domaine de référence Ω tel que $\Omega = \Omega_m \cup \Omega_f \cup \Gamma$ et $\Omega_m \cap \Omega_f = \emptyset$. Bien que le matériau des inclusions et de la matrice puisse être différent sur les deux domaines, il reste élastique linéaire. Nous nous plaçons également dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

Ω_m et Ω_f sont soumis respectivement à des efforts répartis f_m^g et f_f^g et des efforts surfaciques F_m^g et F_f^g sur leurs bords $\Gamma_{F_m^g}$ et $\Gamma_{F_f^g}$. Ces domaines sont également soumis à des déplacements imposés u_m^g et u_f^g sur les bords de Dirichlet $\Gamma_{u_m^g}$ et $\Gamma_{u_f^g}$. La description du modèle est illustré en figure 1.

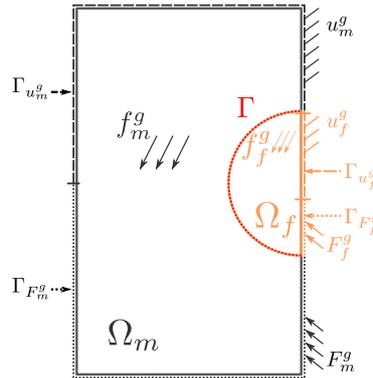


FIGURE 1 – Représentation du problème de référence : couplage de deux domaines Ω_m and Ω_f à travers l'interface Γ .

Le problème de référence consiste alors à vérifier les équations d'équilibre, les lois constitutives et les conditions limites sur les domaines Ω_m et Ω_f . Avec les notations telles que l'indice i précise à quel domaine appartient les grandeurs, les équations du problème s'écrivent $\forall i \in \{m, f\}$:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \sigma_i + f_i^g &= 0 & \text{sur } \Omega_i \\
 \sigma_i &= C_i \varepsilon(u_i) & \text{sur } \Omega_i \\
 u_i &= u_i^g & \text{sur } \Gamma_{u_i^g} \\
 \sigma_i n_i &= F_i^g & \text{sur } \Gamma_{F_i^g}
 \end{aligned} \tag{1}$$

C_i désigne le tenseur de Hooke qui caractérise le comportement matériau et lie le tenseur des contraintes de Cauchy σ_i au tenseur des déformations $\varepsilon(u_i)$. u_i est quant à lui le champ de déplacement défini sur le domaine Ω_i . Afin de compléter le problème de référence il est nécessaire de vérifier également les relations définies à l'interface Γ qui se composent de l'équilibre du vecteur contrainte et de la loi de comportement écrite sous une forme générale :

$$\begin{aligned}
 \sigma_m n_m + \sigma_f n_f &= 0 \\
 g(u_m, u_f, \sigma_m n_m, \sigma_f n_f) &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

avec g qui représente l'équation constitutive du modèle de comportement d'interface.

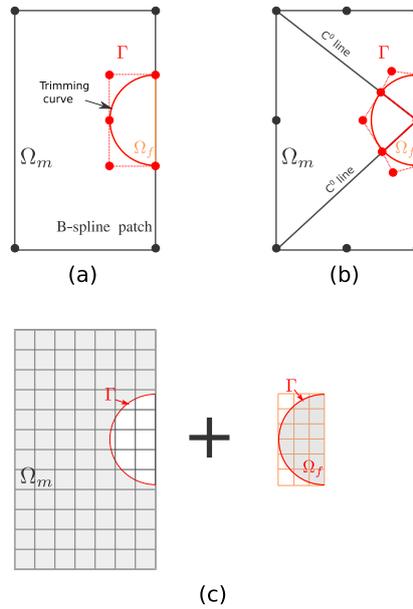


FIGURE 2 – Illustration d’un modèle adapté à l’AIG pour le problème de référence de la Fig 1. (a) Paramétrisation CAO initiale ; (b) Reparamétrisation Spline pour obtenir un modèle numérique conforme à la géométrie ; (c) Discrétisation considéré dans le cas de méthodes immergées, les domaines grisés correspondent aux domaines d’intégration.

2.2 Problématiques liées à la discrétisation spline

Après avoir écrit le problème de référence sous forme forte nous nous intéressons désormais à des problématiques liées à la discrétisation du problème à l’aide de spline. Les géométries auxquelles nous sommes confrontés qui présentent des inclusions ou des trous ne sont pas bien adaptées à une discrétisation spline. Pour illustrer cela nous montrons sur la figure 2 le modèle géométrique du problème de référence (Fig 2 (a)) et une potentielle discrétisation conforme spline (Fig 2 (b)). Le modèle géométrique CAO est composé des patches spline qui sont coupés par des courbes de coupe (trimming curve) ou assemblés à d’autres patches pour le rendu graphique au travers d’opérations booléennes, chaque patch spline n’étant pas modifié. Cela ne peut pas être le cas dans le cadre de la simulation, les patches splines doivent être adaptés et potentiellement reparamétrés pour être conforme à la géométrie. Cela passe en particulier par la définition de ligne C^0 et l’assemblage de plusieurs sous-patches. Cette reparamétrisation est un processus complexe que nous souhaitons éviter. Pour cela nous nous basons sur une approche de domaine fictif. Les champs sont discrétisés sur une grille régulière qui n’est pas forcément conforme à la géométrie. Par exemple sur la figure 2 (c), chaque domaine Ω_m ou Ω_f est plongé dans un patch spline régulier et l’intégration des opérateurs de rigidité est réalisée avec une règle de quadrature adaptée pour n’intégrer que sur les domaines Ω_m ou Ω_f (domaine grisé sur la figure).

3 Méthode Latin isogéométrique immergée

3.1 Principe de l’approche

La difficulté principale rencontrée est le fait qu’à l’interface Γ : 1) la loi ne soit pas linéaire et 2) le maillage ne soit pas conforme à la géométrie. Pris séparément, ces deux points ne présenteraient pas de difficultés à traiter. En effet dans le cas a) d’une interface conforme et non-linéaire, nous pouvons mettre en place une approche de type Latin. Comme dit en introduction, notre idée est alors de s’inspirer des travaux de [13] pour séparer ces 2 difficultés en introduisant à l’interface 2 patches IGA qui forment 2 couches de chaque côté de l’interface (figure 3). Cela permet d’obtenir une discrétisation conforme sur Γ et de raffiner localement plus facilement ce qui a un intérêt pour mieux représenter les comportements non-linéaires locaux. Cette interface correspond ainsi au cas a). L’autre côté des couches définit alors une interface non-conforme avec le maillage mais celle-ci devient une interface parfaite correspondant

tels que,

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \{l, b\}} a_i^j(u_i^j, v_i^j) - \int_{\Gamma_i} \{C_i \varepsilon(v_i)\} n_i^l \cdot \llbracket u_i \rrbracket d\Gamma - \int_{\Gamma_i} \llbracket v_i \rrbracket \cdot \{\sigma_i\} n_i^l d\Gamma \\ & + \zeta_i \int_{\Gamma_i} \llbracket v_i \rrbracket \cdot \llbracket u_i \rrbracket d\Gamma = \sum_{j \in \{l, b\}} l_i^j(v_i^j), \quad \forall (v_i^l, v_i^b) \in \mathcal{V}_i^l \times \mathcal{V}_i^b; \end{aligned} \quad (7)$$

avec la forme bilinéaire a_i^j et la forme linéaire l_i^j associées au sous-domaine Ω_i^j telles que :

$$\begin{aligned} a_i^j(u_i^j, v_i^j) &= \int_{\Omega_i^j} \varepsilon(v_i^j) : C_i \varepsilon(u_i^j) d\Omega; \\ l_i^j(v_i^j) &= \int_{\Omega_i^j} v_i^j \cdot f_i^g d\Omega + \int_{\Gamma_{F_i^j}} v_i^j \cdot F_i^g d\Gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Dans l'équation (7), $\llbracket u_i \rrbracket = u_i^l - u_i^b$ and $\{\sigma_i\} n_i^l$ correspondent au saut de déplacement et au flux de contrainte à travers l'interface Γ_i respectivement. ζ_i est quant à lui un paramètre de stabilisation qui dépend de la taille de la discrétisation et des propriétés matériaux des sous-domaines à coupler.

Nous noterons finalement cette formulation faible sous une forme réduite : $\forall i \in \{m, f\}$, trouver $u_i \in \mathcal{U}_i$ tel que,

$$a_i(u_i, v_i) = l_i(v_i), \quad \forall v_i \in \mathcal{V}_i. \quad (9)$$

3.3 Méthode Latin

Nous avons formulé dans la partie précédente les problèmes d'équilibre sur les domaines Ω_m et Ω_f . Il reste désormais à vérifier en plus des problèmes précédents les relations d'interface sur Γ . Pour cela nous utilisons un approche itérative de type Latin qui va permettre de séparer les équations de notre problème en un premier groupe d'équations linéaires définies sur les domaines Ω_m et Ω_f , et un deuxième groupe d'équations non-linéaires définies sur l'interface Γ . Un schéma alterné est alors utilisé pour déterminer des solutions au premier groupe d'équations puis ensuite au second groupe d'équations. Itérativement la méthode converge vers la solution du problème de référence.

Séparation des équations

Afin de formuler simplement la méthode Latin, nous introduisons deux nouvelles grandeurs définies sur l'interface Γ : $\forall i \in \{m, f\}$, w_i est défini comme la trace du déplacement u_i sur Γ , et λ_i est l'effort surfacique appliqué à Ω_i sur Γ . Nous pouvons désormais définir un premier espace de solution partielle \mathcal{A}_i qui regroupe les solutions des équations linéaires définies sur les domaines Ω_i : $\forall i \in \{m, f\}$

$$\mathcal{A}_i : (\lambda_i, w_i) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} a_i(u_i, v_i) = l_i(v_i), & \forall v_i \in \mathcal{V}_i, \\ \sigma_i^l n_i^l = \lambda_i & \text{sur } \Gamma \\ w_i = u_i^l & \text{sur } \Gamma \end{cases}. \quad (10)$$

Le second espace de solutions partielles contient les solutions des équations non-linéaires définies sur l'interface Γ

$$\mathcal{L} : (\hat{\lambda}_i, \hat{w}_i)_{i \in \{m, f\}} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \hat{\lambda}_m + \hat{\lambda}_f = 0 & \text{sur } \Gamma \\ g(\hat{w}_m, \hat{w}_f, \hat{\lambda}_m, \hat{\lambda}_f) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}. \quad (11)$$

Deux nouvelles équations appelées *directions de recherche* permettent de fermer le système :

$$k^+ : \hat{\lambda}_i - \lambda_i - k_i^+ (\hat{w}_i - w_i) = 0 \quad \text{sur } \Gamma; \quad (12a)$$

$$k^- : \hat{\lambda}_i - \lambda_i + k_i^- (\hat{w}_i - w_i) = 0 \quad \text{sur } \Gamma; \quad (12b)$$

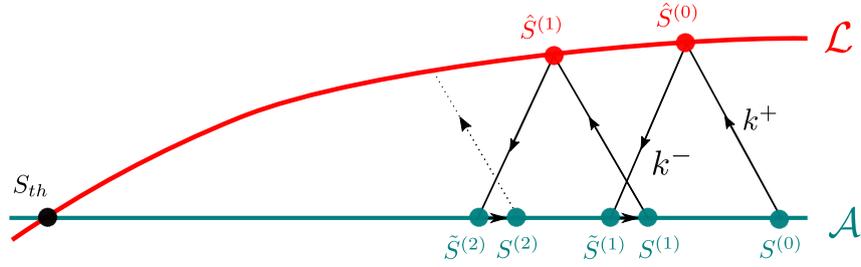


FIGURE 4 – Méthode Latin : schéma du processus itératif en deux étapes ($\tilde{S}^{(i)}$ est une approximation avant relaxation).

Algorithme itératif

Avec la séparation des équations présentée précédemment, un algorithme de point fixe peut être mis en place pour résoudre le problème. Plus précisément à l'itération n , en initialisant à partir d'une solution $S_i^{(0)} = (\lambda_i^{(0)}, w_i^{(0)}) \in \mathcal{A}_i, \forall i \in \{m, f\}$, nous avons un schéma en deux étapes :

1. Étape locale (non-linéaire) :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{m, f\}, \text{ connaissant } S_i^{(n-1)} = (\lambda_i^{(n-1)}, w_i^{(n-1)}) \in \mathcal{A}_i, \\ \text{trouver } \hat{S}_i^{(n-1)} = (\hat{\lambda}_i^{(n-1)}, \hat{w}_i^{(n-1)}) \in \mathcal{L} \cap k^+. \end{aligned} \quad (13)$$

2. Étape globale (linéaire) :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{m, f\}, \text{ connaissant } \hat{S}_i^{(n-1)} = (\hat{\lambda}_i^{(n-1)}, \hat{w}_i^{(n-1)}) \in \mathcal{L}, \\ \text{trouver } S_i^{(n)} = (\lambda_i^{(n)}, w_i^{(n)}) \in \mathcal{A}_i \cap k^-. \end{aligned} \quad (14)$$

Afin d'assurer la convergence de l'algorithme, une étape de relaxation est effectuée après l'étape globale :

$$\forall i \in \{m, f\}, \quad S_i^{(n)} \leftarrow \theta S_i^{(n)} + (1 - \theta) S_i^{(n-1)}, \quad (15)$$

Avec $\theta = 0.5$ [8].

4 Résultats numériques

Pour illustrer les performances de notre approche nous présentons un cas de multiples inclusions présentant des interfaces de type contact unilatéral. Le modèle est constitué d'une matrice carrée de dimension $8 \times 8 \text{ mm}$ dont le maillage de fond est discrétisé en 32×32 éléments. Des conditions de symétrie sont appliquées sur les bords gauche et bas. Une conditions de Dirichlet de 0.05 mm est imposée sur le bord droit. Nous étudions quatre cas présentant respectivement 1, 2, 4 et 16 inclusions. Les inclusions ont un diamètre de 1 mm et les couches associées aux interfaces ont une épaisseur de 0.1 mm . Le maillage de fond des inclusions est quant à lui 8 fois plus fin que celui associé à la matrice. La discrétisation des couches d'éléments est de 16×4 . Nous considérons des matériaux élastiques linéaires isotropes sous l'hypothèse des contraintes planes en petites déformations. Toutes les inclusions présentent le même matériau. Ces paramètres sont précisés sur la figure 5.

Nous présentons sur la figure 6 les cartes de contraintes pour le cas de 4 inclusions. Soumis à de la traction nous pouvons visualiser un décollement des interfaces sur leurs cotés droit et gauche alors que le contact est maintenu sur leur bord haut et bas. A la figure 7 nous montrons les courbes de convergence pour les différents cas d'étude pour montrer que notre méthode est relativement extensible. En effet dans notre cas il n'est pas nécessaire de mettre en place de problème grossier contrairement à la méthode Latin classiquement utilisée en décomposition de domaine. Cela est dû au fait que le domaine de la matrice joue en quelque sorte ce rôle en étant relié directement à toutes les inclusions. Ainsi les informations venant des conditions limites ne requièrent pas beaucoup d'itérations pour se propager dans toute la structure.

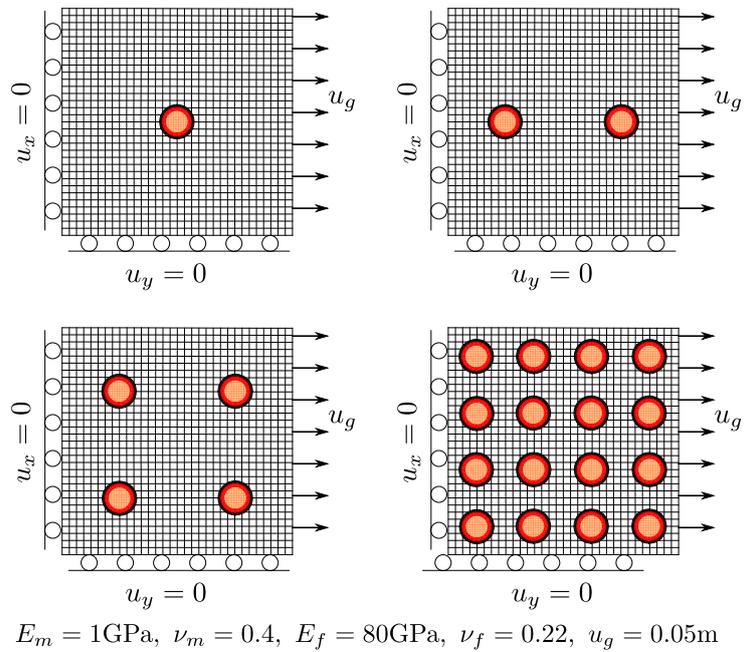


FIGURE 5 – Description de la matrice avec plusieurs cas d’inclusions : 1, 2, 4 et 16 inclusions. En noir est représenté le maillage associé à la matrice et en orange celui associé aux inclusions. On peut visualiser les couches autour des interfaces.

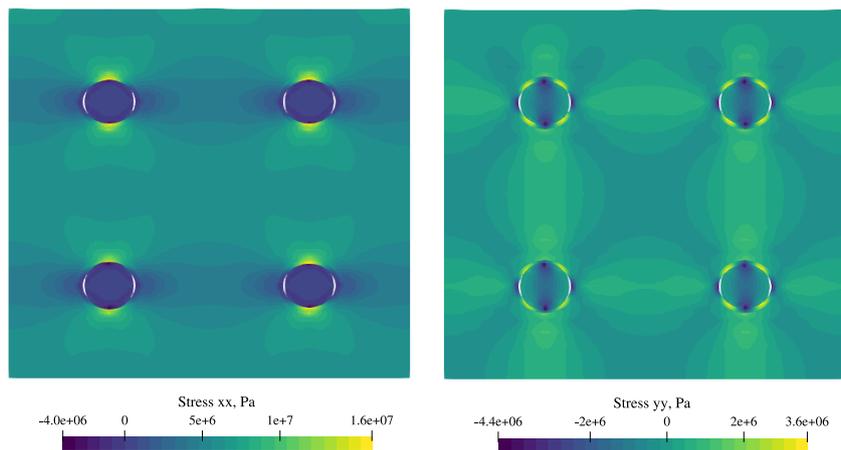


FIGURE 6 – Contrainte σ_{xx} (à gauche) et contrainte σ_{yy} (à droite) pour le modèle à 4 inclusions. Déformée avec un facteur 10.

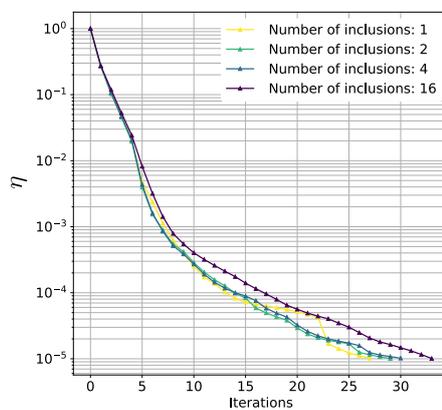


FIGURE 7 – Convergence de la méthode Latin pour les différents cas d’étude

5 Conclusions et perspectives

Nous avons présenté une approche intéressante pour simuler des microstructures de type matrice / inclusions en présence d'interfaces non-linéaire. Pour cela nous avons développé une méthode Latin isogéométrique immergée. En nous basant sur [13] nous avons mis en place des couronnes autour des interfaces non-linéaires pour retrouver une conformité géométrique. L'écriture du problème non-linéaire pour la Latin est alors facilité et un couplage de type Nitsche est utilisé pour coupler ces couronnes à la matrice et aux inclusions [9]. Lors de la communications nous présenterons d'autres résultats de type contact frottant et d'interface cohésive.

Références

- [1] Boucard, P.-A., Champaney, L., *A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1259–1281, 2003
- [2] Bouclier, R., Passieux, J.-C., *A Nitsche-based non-intrusive coupling strategy for global/local isogeometric structural analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 340, 253–277, 2018
- [3] Bouclier, R., Hirschler, T., *IGA : Non-conforming Coupling and Shape Optimization of Complex Multipatch Structures, Volume 1*, John Wiley & Sons, 2022
- [4] Claus, S., Kerfriden, P., *A stable and optimally convergent latin-cutfem algorithm for multiple unilateral contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 938–966, 2018
- [5] Cottrell, J.A., Hughes, T.-J.-R., Bazilevs, Y., *Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD And FEA*, Wiley, 2009
- [6] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y., *sogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 4135–4195, 2005
- [7] Kerfriden, P., Claus, S., Mihai, I., *A mixed-dimensional cutfem methodology for the simulation of fibre-reinforced composites*, Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences 7, 2020
- [8] Ladevèze, P., *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-incremental Methods of Calculation*, Springer, 1999
- [9] Lapina, E., Oumaziz, P., Bouclier, R., *Immersed boundary-conformal isogeometric LaTin method for multiple non-linear interfaces*, Soumis à Engineering with Computers, hal-04224392, 2023
- [10] Oumaziz, P., Gosselet, P., Boucard, P.-A., Guinard, S., *A non-invasive implementation of a mixed domain decomposition method for frictional contact problems*, Computational Mechanics, 797–812, 2017
- [11] Rank, E., Ruess, M., Kollmannsberger, S., Schillinger, D., Düster, A., *Geometric modeling, isogeometric analysis and the finite cell method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 104–115, 2012
- [12] Ruess, M. and Schillinger, D. and Özcan, A.-I. and Rank, E., *Weak coupling for isogeometric analysis of non-matching and trimmed multi-patch geometries*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 46–71, 2014
- [13] Wei, X., Marussig, B., Antolin, P., Buffa, A., *Immersed boundary-conformal isogeometric method for linear elliptic problems*, Computational Mechanics, 1385–1405, 2021