



HAL
open science

Le modèle linéaire en finance : une perspective historique

Christian Walter

► **To cite this version:**

| Christian Walter. Le modèle linéaire en finance : une perspective historique. 2003. hal-04579461

HAL Id: hal-04579461

<https://hal.science/hal-04579461>

Preprint submitted on 17 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0
International License

Le modèle linéaire en finance : une perspective historique

Christian Walter

PRICEWATERHOUSECOOPERS¹
INSTITUT D'ÉTUDES POLITIQUES

Mars 2003

Résumé

Le modèle linéaire est très présent en finance, depuis son intuition par Markowitz (1959) et son introduction effective par Sharpe (1963). Pourtant, s'il s'agit de la même syntaxe mathématique qui opère dans les constructions opératoires des marchés réels, de grandes différences sémantiques existent entre les modèles linéaires utilisés dans la finance concrète. On montre que, en réalité, trois formes sémantiques du modèle linéaire ont été développées en finance, lui conférant trois statuts épistémologiques distincts. On propose de qualifier ces trois modèles en référence à l'hypothèse sous-jacente qui les informe : un modèle linéaire statistique (1959 – 1963), puis un modèle linéaire économique (1964 – 1979), et enfin un modèle linéaire financier (depuis 1980). On montre que la première forme sémantique du modèle linéaire, issue d'un postulat statistique non démontré, fait renaître dans la finance des années soixante les débats autour de la théorie des erreurs (1755 – 1809). On utilise un article de Paul Lévy de 1924 pour situer dans ce contexte historique la position de Fama (1965) sur la limite de la diversification dans le cas d'aléas stables non gaussiens. On propose l'hypothèse que la seconde forme sémantique du modèle linéaire, issue d'une justification économique du premier, fait renaître dans la finance des années soixante-dix les débats autour de la théorie des moyennes (1850 – 1885), et introduit la physique sociale de Quételet (1835) dans la gestion d'actifs, introduction qui conduit à l'instauration de la gestion indiciaire passive. On montre que la troisième forme sémantique du modèle linéaire correspond à une reconstruction didactique complète de la finance, et conduit aux approches modernes de l'évaluation des actifs sous condition de non existence d'arbitrage.

1. Adresse de correspondance : PricewaterhouseCoopers, 32 rue Guersant – 75017 Paris.
Tél. 01 56 57 85 96. Fax 01 56 57 24 09. e-mail : christian.walter@fr.pwcglobal.com

Table des matières

1	Introduction	3
2	Le modèle linéaire comme hypothèse statistique	4
2.1	Le contexte	4
2.1.1	Un territoire en déshérence	4
2.1.2	Le portefeuille optimal au sens de Markowitz (1952)	5
2.1.3	Une intuition de Markowitz restée sans suite (1959)	7
2.2	L'apparition du modèle linéaire	8
2.2.1	Le modèle linéaire gaussien de Sharpe (1963)	8
2.2.2	Le modèle linéaire non gaussien de Fama (1965)	12
3	Le modèle linéaire comme hypothèse économique	15
3.1	Du portefeuille optimal au modèle linéaire	15
3.1.1	Une propriété du portefeuille optimal	15
3.1.2	Le principe de séparation des fonds de Tobin (1958)	16
3.2	La justification économique du modèle linéaire	16
3.2.1	Le modèle d'équilibre de Sharpe (1964)	16
3.2.2	Vers la théorie des moyennes (1965 – 1968)	18
4	Le modèle linéaire comme hypothèse financière	19
4.1	La reconstruction didactique de la théorie financière	19
4.1.1	La rupture de Harrison – Kreps – Pliska (1979 – 1981)	19
4.1.2	La condition de non existence d'arbitrages	21
4.2	La justification financière du modèle linéaire	22
4.2.1	Une application du théorème de Radon – Nikodym	22
4.2.2	La forme linéaire de l'évaluation par arbitrage	24
A	Références bibliographiques	25

Liste des tableaux

1	Les trois formes sémantiques du modèle linéaire.	24
---	--	----

1 Introduction

Dans sa grande geste de 1995, impressionnante oeuvre intitulée “Histoire du modèle linéaire”, sous-titrée “Formes et usages en statistique et économétrie jusqu’en 1945”, Michel Armatte entreprend de tracer l’histoire intellectuelle et sociale de l’objet mathématique appelé modèle linéaire et dont il en donne la définition suivante.

“Sous le terme de *modèle linéaire* se cache un complexe d’objets et de propriétés mathématiques dont la première forme est constituée pour l’essentiel entre 1750 et 1830 sous le vocable de *théorie des erreurs*. (...) Le champ de cette théorie n’est pas celui des mathématiques pures, mais celui des *mathématiques mixtes* au sens où on l’entendait au XVIIIème siècle. Concepts et méthodes de cette théorie sont donc fortement enracinés dans le domaine d’investigation où sont nés les problèmes que cette théorie mathématique pense pouvoir traduire et résoudre.”²

Cette définition fait apparaître l’étroite imbrication entre des objets mathématiques formels et les domaines sur lesquels ils s’appliquent. Si “1809 est bien la date de naissance d’une théorie des erreurs qui se veut entièrement mathématique”³, la théorie des erreurs pénètre ensuite progressivement les domaines les plus variés : géodésie (vers 1830), artillerie (vers 1850), actuariat (vers 1870) au point que l’on peut se demander si

“l’essentiel du débat sur les notions fondamentales [de la théorie des erreurs] aussi bien que sur ses usages, n’échappe pas en grande partie au débat académique entre géomètres et mathématiciens, pour se réfugier, après 1830, dans une myriade de petites et moyennes disciplines dont elle va féconder les modélisations, voire même inspirer quelques uns de leurs paradigmes les plus importants. Les historiens du calcul des probabilités ont plusieurs fois souligné la mise en sommeil de leur discipline entre 1840 et 1930. Mais les graines semées sont allées féconder d’autres champs, et d’autres acteurs qu’on n’appelle pas toujours des savants ont travaillé à reconstruire pour ces outils une efficacité dans d’autres domaines, ce qui a en général nécessité de redéfinir et les outils et les problématiques originales du domaine”⁴.

La statistique est le “dernier domaine où la théorie des erreurs pénètre en force”⁵. On voit alors apparaître un déplacement conceptuel qui conduira à la théorie des moyennes, dont les territoires s’étendront sur la démographie (1855), l’anthropologie (1865), la sociologie durkheimienne (1890), puis l’économie politique avec la théorie des indices. Achevant son parcours historique en 1945, Michel Armatte laissait ouverte la porte du prolongement de l’histoire du modèle linéaire à des domaines non couverts à cette date. Il était tentant d’essayer de reprendre le flambeau, et de poursuivre les investigations sur un territoire encore inexploré : la finance et les marchés financiers.

Le modèle linéaire est très présent en finance, depuis son intuition par Markowitz (1959) et son introduction effective par Sharpe (1963). Pourtant, s’il s’agit de la même syntaxe mathématique qui opère dans les constructions opératoires des marchés réels, de grandes différences sémantiques existent entre les modèles linéaires utilisés dans la finance concrète. Le but de cet article est de montrer que, en réalité, *trois formes sémantiques* du modèle linéaire ont été développées en finance, lui conférant *trois statuts épistémologiques distincts*. On propose de qualifier ces trois modèles en référence à l’hypothèse sous-jacente qui les informe :

- un modèle linéaire statistique (1959 – 1963),
- puis un modèle linéaire économique (1964 – 1979),
- et enfin un modèle linéaire financier (depuis 1980).

Ce travail est conçu selon cette tripartition. Dans la première partie, on montre que le la première forme sémantique du modèle linéaire, issue d’un postulat statistique non démontré, fait renaître dans la finance des années soixante les débats autour de la théorie des erreurs (1755 – 1809). On situe les contributions de Markowitz [1952, 1959] et de Sharpe [1963], et on utilise deux articles de Paul Lévy

2. Armatte [1995], p. 152.

3. Armatte [1995], p. 285.

4. Armatte [1995], p. 339.

5. Armatte [1995], p. 340.

de 1924 et 1930 pour situer dans ce contexte historique la position de Fama [1965] sur la limite de la diversification dans le cas d'aléas stables non gaussiens, en faisant apparaître la position de Mandelbrot – Fama en écho de celle de Paul Lévy.

Dans la deuxième partie, on revient sur la formation du modèle d'équilibre des actifs financiers de Sharpe [1964]. Puis on propose l'hypothèse que la seconde forme sémantique du modèle linéaire, issue d'une justification économique du premier, fait renaître dans la finance des années soixante-dix les débats autour de la théorie des moyennes (1850 – 1885), et introduit la physique sociale de Quételet (1835) dans la gestion d'actifs, introduction qui conduit à l'instauration de la gestion indicielle passive.

Dans la troisième partie, on montre que la troisième forme sémantique du modèle linéaire correspond à une reconstruction didactique complète de la finance, analogue à celle entreprise par Linnik [1963] pour la méthode des moindres carrés, et conduit aux approches modernes de l'évaluation des actifs sous condition de non existence d'arbitrage. On situe la rupture introduite par les travaux de Harrison – Kreps – Pliska [1979, 1981], on rappelle le transfert de savoir des mathématiques à la finance (théorème de Radon – Nikodym), et on présente le nouveau statut du modèle linéaire à partir de la densité des prix d'états.

2 Le modèle linéaire comme hypothèse statistique

2.1 Le contexte

2.1.1 Un territoire en déshérence

Le contexte de l'apparition du modèle linéaire en finance est celui de la théorie des choix de portefeuille, théorie développée sous sa forme actuelle par Harry Markowitz, dans un article de quatorze pages publié en 1952 dans le *Journal of Finance*, article qui lui vaudra d'obtenir le prix Nobel d'économie en 1990. Le contexte de la situation des investissements boursiers à cette époque est évoqué dans ses souvenirs par l'un des professionnels de la gestion, Peter Bernstein.

“Au début des années cinquante, les souvenirs encore douloureux du krach boursier et de la grande dépression des années trente maintenaient la bourse à l'écart du monde de l'économie, et même de la finance. Trop peu de temps s'était écoulé depuis la fin de la deuxième guerre mondiale pour qu'une nouvelle génération de chercheurs, non marqués par ces années terribles, apparaisse. De toutes les manières, les placements boursiers n'avaient jamais été considérés comme réellement légitimes auprès des épargnants, et le peu de reconnaissance obtenue avait comme été effacé par la période précédente.

Dans les années cinquante, les ratios réglementaires limitaient à 30% la proportion de l'épargne gérée sous mandat pouvant être investie sur des actions. Une personne seulement sur seize possédait des actions, et le nombre de sociétés de bourse restait inférieur de 20% à ce qu'il avait été en 1929. Vingt-trois ans après le krach boursier, les cours des actions étaient toujours un tiers sous leur niveau le plus élevé de 1929. La détention d'actions était considérée comme si dangereuse que l'on trouvait des sociétés, parmi les meilleures, dont les dividendes procuraient un rendement triple de ceux d'un compte d'épargne.

De plus, ce n'était pas seulement la peur d'une catastrophe financière qui tenait éloignés de la bourse les épargnants, mais aussi l'impression que le marché était manipulé par quelques individus occupant des fonctions importantes dans le monde de la finance. (...) En fait, tant les universitaires que le grand public considéraient la bourse au mieux comme un terrain de jeux pour spéculateurs.”⁶

6. Bernstein [1992], p.42. Traduction française : 1995, p. 48.

C'est dans ce contexte que Markowitz s'intéresse au problème de la composition du portefeuille de l'investisseur, et développe ce qui sera appelé la "théorie du portefeuille". Cette théorie postule que, lorsque l'on cherche à répartir son épargne entre différents placements ou types de placement, les deux, et deux seuls, critères de choix des supports d'investissement qu'il faut retenir, sont la rentabilité espérée du placement, et le risque associé, mesuré par la variance (ou l'écart-type) de cette rentabilité. A partir de ces deux critères, ce qui est appelé le "modèle de Markowitz" fournit la répartition dite "optimale" des actifs dans le portefeuille. Les deux étapes du raisonnement sont :

- Les préférences des individus admettent une représentation dans le plan espérance-variance
- Le modèle de Markowitz permet de construire l'ensembles des portefeuilles optimaux selon ces préférences.

Comme le dit lui-même Markowitz dans son article de 1952,

"Le processus de construction de la composition d'un portefeuille peut être divisé en deux parties. La première étape commence avec l'observation et l'expérience, et conduit à la formation des croyances sur les performances futures des titres existants sur le marché. La deuxième étape commence avec l'utilisation de ces croyances, et se termine avec la répartition des fonds entre les différents actifs (asset allocation). Cette deuxième étape seule est l'objet de l'article."

Sur la genèse intellectuelle de ce modèle, genèse souvent occultée par ses promoteurs anglo-saxons qui présentent la contribution de Markowitz comme surgie miraculeusement du néant (et Dieu dit "que Markowitz soit"...), on pourra consulter l'étude de Pradier [2000], qui permet de mieux situer l'apport propre de Markowitz par rapport aux courants de pensée précédents. Ainsi :

"L'idée selon laquelle les choix incertains s'apparentent à un arbitrage entre rendement et sécurité remonte probablement à la plus haute antiquité⁷ ; sa formalisation mathématique date de la fin du dix-huitième siècle ; son expression la plus célèbre est probablement la théorie de Harry Markowitz. La spécificité, les apports de ce dernier ont rarement été délimités et, de façon générale, l'histoire de l'analyse espérance-variance (selon l'expression consacrée par Markowitz) reste encore à écrire, dans la mesure où l'auteur ne dit rien sur ses sources" (...) [Or] comment ne pas tenir compte des travaux de Bachelier et Cowles autour des questions de distribution, de marche aléatoire et de dépendance des actions, ceux d'Edgeworth et Keynes sur les indices et la théorie des erreurs, ceux de Massé sur la programmation dynamique, sans parler de l'histoire de la statistique entre 1895 et 1945 ?"⁸

Reprenant une hypothèse formulée par en 1967 par Kolm, Pradier dessine alors une généalogie intellectuelle qui conduit au modèle de Markowitz, et qui consiste en une périodisation en trois époques : Edgeworth (1888) – Wicksell (1898) – Fisher (1906), puis Hicks (1931) – Chambers (1934) – Marschak (1938), et enfin Massé (1953) – Allais (1955).

2.1.2 Le portefeuille optimal au sens de Markowitz (1952)

On définit un portefeuille de valeurs mobilières par l'ensemble des poids (en pourcentage) que chacune des valeurs représente dans la valeur totale, poids notés w_j pour chaque actif j , pour $j = 1, \dots, N$ dans le cas de N actifs disponibles sur le marché des valeurs mobilières. On note $w = (w_1, \dots, w_N)$ le vecteur des poids de chaque ligne de titres dans le portefeuille, et R est la rentabilité du portefeuille correspondant à l'allocation d'actifs w sur la période. L'espérance et la variance de la rentabilité du portefeuille sont respectivement notées $E(R)$ et $\text{var}(R)$. Le critère de Markowitz est le suivant : une allocation d'actifs w^* est dite "optimale" si et seulement si il n'existe pas de portefeuille w tel que $E(R) \geq E(R^*)$ et $\text{var}(R) < \text{var}(R^*)$.

La recherche de l'espérance de rentabilité la plus élevée pour un niveau de variance donné, noté σ_P^2 ,

7. Pradier fait référence à Covello-Mumpower [1985].

8. Suivant Pradier [2000, p.86].

revient à résoudre le programme d'optimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\{w_j\}} E(R) \\ \text{s.c.} \\ \text{var}(R) = \sigma_P^2 \\ \sum_{j=1}^N w_j = 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

qui est appelé le *programme d'optimisation de Markowitz*. On peut équivalentement écrire ce programme de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\{w_j\}} \text{var}(R) \\ \text{s.c.} \\ E(R) = \mu_P \\ \sum_{j=1}^N w_j = 1 \end{array} \right. \quad (2)$$

forme qui fixe la rentabilité μ_P à atteindre pour un niveau de variance minimum. Ce programme est un programme avec fonction objectif quadratique et deux contraintes linéaires. On appelle portefeuille optimal au sens de Markowitz, ou MV-optimal, un portefeuille obtenu par résolution du programme d'optimisation (1), pour un niveau de risque σ_P^2 donné, ou (2) pour un niveau de rentabilité μ_P donné.

Chaque titre étant caractérisé par un couple rentabilité-risque défini par l'espérance et la variance de R_j , c'est-à-dire $(E(R_j), \text{var}(R_j))$, en notant w_j le poids de l'actif j dans le portefeuille, on obtient comme expression de la rentabilité du portefeuille

$$R = \sum_{j=0}^N w_j R_j$$

d'où le couple rentabilité-risque du portefeuille

$$\left\{ \begin{array}{l} E(R) = \sum_{j=0}^N w_j E(R_j) \\ \text{var}(R) = \sum_{i,j} w_i \text{cov}(R_i, R_j) w_j \end{array} \right.$$

La résolution du programme d'optimisation (1) ou (2) conduit à l'obtention de l'ensemble des portefeuilles MV-optimaux, appelé la frontière efficiente de Markowitz, qui est une parabole dans le plan espérance-variance, ou une hyperbole dans le plan espérance-écart-type. Il faut noter qu'il existe une infinité de portefeuilles MV-optimaux, et autant de choix possibles pour les investisseurs. Un critère de décision doit donc être ajouté à la frontière efficiente pour pouvoir choisir entre tous les portefeuilles MV-optimaux, qui n'est pas immédiatement inclus dans la théorie de Markowitz.

Enfin et surtout, la décomposition de la variance du portefeuille en faisant apparaître les variances des titres qui le composent

$$\text{var}(R) = \sum_j w_j^2 \text{var}(R_j) + \sum_{i \neq j} w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad (3)$$

permet de voir que, pour N actifs, il y a N termes de variance et $N^2 - N$ termes de covariance. Autrement dit, pour N actifs, l'estimation des quantités de la matrice de variance-covariance de rang N nécessite de déterminer N termes de variances et $(N^2 - N)/2$ termes de covariance (car $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$), soit $N(N + 1)/2$ termes au total. Par exemple, pour $N = 100$ titres, cela conduit à l'estimation de 5 050 termes. En 1952, les capacités de calcul limitées des professionnels de la gestion rendent à peu près inapplicable cette méthode. Markowitz lui-même, dans son article de 1952, ne donne pas d'exemple numérique.

2.1.3 Une intuition de Markowitz restée sans suite (1959)

C'est la raison pour laquelle, en 1959, Markowitz a l'idée d'une simplification possible du problème du portefeuille. Cette simplification fait intervenir les "éléments de base du modèle linéaire"⁹ que sont la corrélation et la dépendance statistique. Markowitz part en effet de la constatation suivante.

"Les rentabilités de la plupart des titres sont *corrélées* (souligné par nous). Si l'indice Standard & Poor montait significativement, nous nous attendrions à une hausse des actions United Steel. Si l'indice Standard & Poor montait significativement, nous nous attendrions également à ce que les actions de Sweets Company of America montent aussi. Pour cette raison, le plus vraisemblable est que les performances de United Steel seront bonnes en même temps que celles de Sweets Company".¹⁰

Puis, dans la partie intitulée "L'investissement dans un *grand nombre* (souligné par nous) de titres", il rappelle cette constatation : "Les rentabilités des actions sont corrélées. Les conséquences de cette corrélation sont à présent abordées" (p. 109). Examinons de près cette intuition de Markowitz. La variance moyenne des N actions est :

$$\overline{\text{var}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{var}(R_j)$$

et la covariance moyenne entre les N actions est

$$\overline{\text{cov}} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j} \text{cov}(R_i, R_j)$$

Partant de l'équation (3), (avec $w_j = 1/N$ pour tout j), il vient que

$$\text{var}(R) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_j \text{var}(R_j) + 2 \sum_{i \neq j} \text{cov}(R_i, R_j) \right) = \frac{1}{N^2} \left(N \overline{\text{var}} + 2 \frac{N(N-1)}{2} \overline{\text{cov}} \right)$$

soit

$$\text{var}(R) = \frac{1}{N} \overline{\text{var}} + \frac{N-1}{N} \overline{\text{cov}} \quad (4)$$

On voit que cette relation (4) définit une *partition* du risque d'un portefeuille entre la moyenne des *causes propres* aux titres (le risque *spécifique* des titres), et la *cause moyenne commune* à tous les titres (le risque lié aux facteurs communs de variations à tous les titres), et donc que la covariance moyenne apparaîtrait comme la "cause commune" des variations.

Lorsque le nombre d'actions devient grand, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}(R) = \overline{\text{cov}} \quad (5)$$

qui montre que la variance totale du portefeuille converge vers la covariance moyenne entre les titres qui le composent. Il s'agit d'un risque non réductible. Donc :

- Si les titres sont parfaitement indépendants, la variance totale du portefeuille est nulle.
- Dans la réalité, il existe toujours une dépendance, et l'on voit que la variance totale décroît en fonction du niveau d'indépendance des titres.

L'augmentation du nombre de titres détenus dans le portefeuille correspond à une opération de *diversification*. La diversification permet ainsi de diminuer le risque jusqu'au niveau plancher de la "cause commune", et pas en-deçà.

9. Selon l'expression de Armatte [1995], p. 22.

10. Markowitz [1959], p. 32.

Markowitz ne poussa pas plus avant cette intuition, et laissa à son étudiant en thèse de doctorat, William Sharpe, son exploration. “Sharpe commença à travailler sur le problème de Markowitz en 1960. Il avait vingt-six ans et Markowitz trente-trois. Il finit un article contenant le développement complet de l'idée dans le courant de 1961, l'année où il obtint son doctorat. De façon très approprié, il intitula son article “A Simplified Model for Portfolio Analysis”. Il le soumit en décembre 1961 à “Management Science”, qui le publia dans le numéro de janvier 1963”¹¹.

2.2 L'apparition du modèle linéaire

2.2.1 Le modèle linéaire gaussien de Sharpe (1963)

En 1963, William Sharpe publie dans “Management Science” l'article intitulé “A Simplified Model for Portfolio Analysis”, qui introduit le modèle linéaire en finance. Le problème de l'estimation est simplifié en introduisant un *modèle linéaire* à indice de marché, ou modèle de marché des actifs risqués, dont le principe est une *diagonalisation de la matrice* de variance-covariance. Nous suivons William Sharpe dans ses développements.

“Markowitz a suggéré que le processus du choix des titres composant un portefeuille soit décomposé en trois parties : 1) l'estimation des performances futures des titres, 2) la détermination d'un ensemble de portefeuilles optimaux, et 3) le choix d'un portefeuille particulier parmi les portefeuilles optimaux, qui corresponde aux caractéristiques de l'investisseur. Cet article complète l'analyse de Markowitz sur le second point : l'analyse de portefeuille (...) [et] présente un *modèle simplifié* (souligné par nous) des relations entre les titres, en montrant comment cette simplification permet une simplification du problème du choix des titres. On fait apparaître comment ce modèle simplifié permet de réduire les coûts de traitement et ouvre la possibilité de l'utilisation de la méthode de Markowitz pour des applications pratiques”¹².

Après avoir rappelé les principes de la méthode de Markowitz, Sharpe insiste sur le fait que “l'analyse de portefeuille nécessite un grand nombre de comparaisons” et il estime qu’“une application pratique de cette méthode serait grandement facilitée par l'adjonction de quelques hypothèses qui réduiraient le traitement de calcul informatique nécessité par ces comparaisons” (p. 281). On en arrive alors à ce qui constitue la première introduction du modèle linéaire en finance, et qui se trouve en page 281 de l'article de 1963 :

“L'une de ces hypothèses (que l'on propose d'appeler le modèle diagonal) est décrite dans cet article. Ce modèle possède deux vertus principales : il est le plus simple qui puisse être construit sans évacuer l'importance de l'existence des interrelations entre les titres, et l'expérience montre qu'il peut capter une grande part de ces interrelations. La caractéristique principale du modèle diagonal est l'hypothèse selon laquelle les rentabilités des différents titres sont toutes reliées entre elles par le seul intermédiaire d'un facteur commun sous-jacent. La rentabilité de toute action sera alors déterminée seulement par cet élément commun extérieur à l'entreprise et des causes aléatoires”.

Modèle linéaire sur les titres Sharpe postule donc sans démonstration que la rentabilité de toute action j est liée à la rentabilité d'un indice I qui peut être “le niveau du marché dans son ensemble”, mais peut aussi représenter le PNB, tout autre indice de prix (l'économie, les cycles, la production etc.), dont l'indice de marché peut représenter un condensé commode, en fait “tout facteur susceptible d'exercer

11. Bernstein [1995], p. 84.

12. Sharpe [1963], p. 277.

l'influence la plus importante (the most important single influence) sur les rentabilités des titres". Dans le cas le plus courant, on considère le marché M et sa rentabilité R_M . La relation postulée par Sharpe s'écrit alors

$$R_j = a_j + b_j R_M + \varepsilon_j \quad j = 1, \dots, N \quad (6)$$

où a_j et b_j sont des coefficients qui dépendent de l'action j . Le terme aléatoire ε_j spécifique à l'action j est tel que $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pour tout $i \neq j$, $E(\varepsilon_j) = 0$, et $\text{cov}(\varepsilon_j, R_M) = 0$. Dans le modèle linéaire (6), le coefficient b_j est la pente de la droite de régression de R_j sur R_M . Par définition, cette pente a pour expression

$$b_j = \frac{\text{cov}(R_j, R_M)}{\text{var}(R_M)}$$

et est appelée le *bêta* du titre j relativement au marché M .

Ce modèle conduit à deux conséquences importantes, l'une calculatoire, et l'autre interprétative :
— D'une part, la covariance entre deux actions i et j devient simplement

$$\text{cov}(R_i, R_j) = b_i b_j \text{var}(R_M)$$

La matrice de variance-covariance se simplifie : le modèle linéaire fait passer la quantité de termes à estimer de $N(N+1)/2$ à $3N$. Pour $N = 100$ titres, on passe de 5 050 termes avec le modèle de Markowitz, à 300 termes avec le modèle de Sharpe, et pour $N = 2\,000$ titres, de 2 001 000 à 6 000 estimations.

— D'autre part, la variance de toute action j se décompose comme

$$\text{var}(R_j) = b_j^2 \text{var}(R_M) + \text{var}(\varepsilon_j) \quad (7)$$

c'est-à-dire deux termes qui correspondent à la variance produite par la cause commune des variations boursières (par exemple la rentabilité de l'indice de marché), et la variance propre à chaque titre j . Cette décomposition de la variance rejoint et précise la partition du risque de Markowitz entre cause propre au titre, et cause commune à tous les titres, décomposition dénommée "risque spécifique" et "risque systématique" : risque lié aux titres, et risque lié au facteur communs de variations à tous les titres.

Le modèle linéaire de Sharpe introduit donc en finance ce qui est appelé¹³ la *théorie des erreurs* sous sa forme de la synthèse de Laplace-Gauss (1809 – 1826) :

"La théorie des erreurs rassemble un corpus de résultats de mathématiques mixtes, produits par la communauté savante (...) sur une période qui est en gros celle des Lumières, étendue aux premières décennies du XIXème siècle. Plus précisément, si la mise à jour et la gestion des erreurs d'observation et de mesure dans les sciences naturelles remonte aux Anciens, et si les premières bases d'une théorie sont dans la physique de Galilée et Newton, sa mathématisation (...) ne commence guère avant les années 1750, pour trouver une sorte d'achèvement vers 1830 dans un jeu de formalisations que l'on désigne couramment sous le nom de synthèse de Laplace-Gauss, du nom des deux mathématiciens qui en ont stabilisé les principes"¹⁴.

En particulier, la décomposition financière du risque des actions entre risque systématique lié au marché et risque spécifique au titre recouvre *exactement* ce que Michel Armatte a qualifié de "grand partage"¹⁵ entre les erreurs systématiques, "attribuables à des causes ou raisons identifiées", et des erreurs accidentelles, "que l'on ne peut pas, que l'on ne sait pas, attribuer à une cause". Pour Laplace, cette partition des causes prendra la forme terminologique d'une opposition entre "causes constantes" et "causes accidentelles", et conduira à la conception du déterminisme selon lequel le hasard observé n'est que le résultat de notre ignorance sur les choses. Le grand partage représente alors un reflet de notre manque de connaissance sur les causes du phénomène observé. Dans cette perspective, la variance résiduelle d'une

13. La terminologie est due au mathématicien allemand J. Lambert, introduite dans son traité de 1765. Voir Armatte [1995], p. 218.

14. Armatte [1995], p. 218.

15. Armatte [1995], p. 220.

action correspondrait à notre *manque d'information* sur l'entreprise et les causes pouvant provoquer la volatilité du titre.

La réduction progressive des causes accidentelles vers les causes constantes, jusqu'à leur disparition théorique, c'est-à-dire la réduction de notre ignorance sur le monde, était un enjeu très présent dans la philosophie des Lumières. On peut trouver un écho contemporain de cet objectif philosophique du XVIIIème siècle dans le mouvement irriguant la profession financière vers une transparence toujours plus grande des résultats financiers, jusqu'à cet idéal inaccessible de la suppression de la volatilité spécifique par connaissance parfaite de la situation de l'entreprise, dont le prix de marché coté serait alors exactement égal à la juste valeur de la société. Nous laissons pour le moment cette analogie sur laquelle nous reviendrons dans un travail ultérieur.

Modèle linéaire sur le portefeuille Sharpe poursuit en développant les conséquences de l'hypothèse du modèle linéaire sur l'analyse de portefeuille. Pour tout portefeuille w , on a

$$R = \sum_{j=1}^N w_j R_j = \sum_{j=0}^N w_j (a_j + b_j R_M + \varepsilon_j) = a + b R_M + \varepsilon$$

avec $a = \sum_{j=0}^N w_j a_j$, $b = \sum_{j=0}^N w_j b_j$, et $\varepsilon = \sum_{j=0}^N w_j \varepsilon_j$. D'où le couple rentabilité-risque du portefeuille

$$\begin{cases} E(R) = a + bE(R_M) \\ \text{var}(R) = b^2 \text{var}(R_M) + \text{var}(\varepsilon) \end{cases}$$

Avec une approximation linéaire, comme celle faite par Markowitz ($w_j = 1/N$, qui correspond à une diversification équipondérée), la variance du portefeuille devient

$$\text{var}(R) = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_j \right)^2 \text{var}(R_M) + \text{var} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j \right)$$

soit

$$\text{var}(R) = \bar{b}^2 \text{var}(R_M) + \left(\frac{1}{N} \right)^2 \sum_{j=1}^N \text{var}(\varepsilon_j)$$

où $\bar{b} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_j$. Si l'on suppose de plus que $\text{var}(\varepsilon) \rightarrow 0$, alors quand le nombre d'actions devient grand ($N \rightarrow \infty$), on obtient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}(R) = \bar{b}^2 \text{var}(R_M) \tag{8}$$

et l'on peut comparer ce résultat avec le résultat (5) de Markowitz.

On voit que la diversification maximale conduit à ne considérer que les mouvements de la rentabilité R_M , et à gérer un portefeuille en fonction de la valeur donnée au coefficient b : "plus grande sera la diversification imposée au portefeuille (i.e. plus grand sera N), et plus $\bar{b}^2 \text{var}(R_M)$ sera proche de la variance totale du portefeuille"¹⁶.

Développements informatiques et tests Bernstein évoque la fascination de Sharpe pour les capacités de calcul des ordinateurs. En 1963, Sharpe développe un programme informatique approprié (RAND QP code) et indique (p. 285) que le temps de calcul nécessaire à la résolution du problème du portefeuille pour 100 titres passe de 33 minutes sur un ordinateur IBM 7090 avec le modèle de Markowitz, à 30

16. Sharpe [1967], p. 502.

secondes avec son propre modèle. Inversement, la capacité réduite requise pour son modèle permet de traiter plus de titres à temps égal : avec un ordinateur IBM 709 ou 7090, on peut traiter, soit 249 titres avec le modèle de Markowitz, soit plus de 2 000 avec le modèle linéaire. Ainsi, “l’extrême simplicité du modèle diagonal permet à tout investisseur d’obtenir un portefeuille optimal à moindre coût”¹⁷. Cependant, “il resterait possible que cette simplicité soit si contraignante en termes de description des rentabilités des titres que, en fin de compte, le gain en résultant pour le portefeuille soit faible”. Aussi, “dans le but d’estimer la capacité du modèle linéaire à condenser efficacement l’information sur la rentabilité des titres, un test simple a été entrepris”. Ce test revient à comparer la composition de deux portefeuilles selon que les caractéristiques des titres sont données telles quelles, ou bien à travers le modèle linéaire. Les deux graphiques 6a et 6b de l’article (voir reproduction en annexe) étant considérés comme visuellement similaires, Sharpe conclut que “le modèle diagonal a montré sa capacité à capter l’essentiel de l’information contenue dans l’échantillon”¹⁸. Aussi, Sharpe peut conclure son article par cet encouragement à l’utilisation de son modèle :

“Les résultats sont, naturellement, trop parcellaires pour être considérés comme définitivement concluants. Cependant, ils suggèrent que le modèle linéaire fait preuve d’une bonne capacité à représenter les interrelations entre les différents titres du marché, en sorte que l’analyse de portefeuille fondée sur son utilisation devrait être d’un rapport coût-rentabilité à son avantage. Pour ces raisons, le choix du modèle linéaire semble être excellent pour une première application pratique de la méthode de Markowitz.”

Quatre ans plus tard, en 1967, Sharpe publie un deuxième article intitulé “A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection”, pour étendre l’application du modèle linéaire aux choix de portefeuilles incluant des limites aux lignes de titres.

“Bien que Markowitz ait montré depuis déjà une dizaine d’années que l’analyse de portefeuille pouvait être considérée comme un problème d’optimisation quadratique, les applications pratiques de cette méthode sont relativement récentes, et remontent à l’apparition de capacités nouvelles de calcul des ordinateurs. (...) Récemment, un programme d’optimisation quadratique très rapide a été développé¹⁹ qui rend moins net l’intérêt informatique du modèle linéaire simple. Cependant, l’adjonction de nouvelles contraintes peut malgré cela rendre ce modèle toujours utile.”

Sharpe fait référence aux réglementations des investissements dans les fonds communs de placement (d’où le titre de l’article), qui obligent les gérants de ces fonds à répartir leur actif en respectant des ratios maxima de 5% par ligne (Investment Company Act de 1940). L’introduction de cette contrainte supplémentaire rend plus difficile le problème d’optimisation quadratique de Markowitz, et le modèle linéaire de Sharpe peut alors présenter une variante intéressante. Comme la réglementation des fonds communs de placement impose une forte diversification, on peut estimer que l’approximation est valide. Puis, un test est entrepris pour vérifier si l’approximation linéaire peut constituer une représentation adéquate du risque d’un fonds commun de placement, dont le résultat semble concluant. En conclusion, Sharpe indique que

“La méthode proposée ici semble utile pour les gérants de portefeuille de fonds communs de placement qui voudraient développer une compétence dans la gestion quantitative des portefeuilles. Dans la plupart des situations, on peut s’en servir pour un usage régulier, étant donné son efficacité, l’avantage de son rapport coût-rentabilité, et sa capacité à intégrer des contraintes variées dans un même cadre général.”²⁰

De nouveau quatre ans plus tard, en 1971, Sharpe publie un dernier article sur les aspects algorithmiques de la résolution du problème de Markowitz au moyen du modèle linéaire, intitulé “A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem”.

“Il y a près de vingt ans que Markowitz a proposé de considérer la question de l’allocation d’actifs comme un problème d’optimisation quadratique. (...) Pour faciliter l’utilisation pratique de cette méthode, des modèles linéaires ont été utilisés. (...) Des programmes informatiques

17. Sharpe [1963], p. 291.

18. Sharpe [1963], p. 292.

19. Sharpe fait référence au programme 3266 de la RAND Corporation (Product Form Quadratic Programming Code).

20. Sharpe [1967], p. 509.

ont été développés pour ces modèles, et des simplifications complémentaires ont encore été faites dans le cas de ratio de limites d’investissement par action. Pourtant, en dépit de l’ample reconnaissance de cette méthode par la communauté universitaire, et de quelques expériences réalisées parmi les gérants professionnels, peu de gestionnaires (sinon aucun) semblent avoir adopté cette méthode dans leur gestion de portefeuille au jour le jour. Si un certain nombre de raisons peuvent être invoquées, il semble que les limitations informatiques soient en partie la cause de cette non utilisation. Il est difficile de se procurer des programmes d’optimisation quadratique qui soient à la fois fiables, faciles à utiliser, et peu chers. D’autre part, les modèles linéaires actuels sont considérés comme inadéquats par la plupart des professionnels (...) [qui] y voient l’incapacité à capter l’essence du monde réel.”²¹

Sharpe développe une dernière fois une méthode pour favoriser la pénétration du modèle de Markowitz dans le monde de la gestion d’actifs professionnelle.

2.2.2 Le modèle linéaire non gaussien de Fama (1965)

Cependant, Sharpe attire l’attention sur le fait que “cette approximation linéaire est très fragile”²², car elle repose sur l’évacuation de la composante de risque spécifique “qui peut être rendue aussi petite que l’on veut grâce à la diversification”. Il est crucial de noter que l’hypothèse $\text{var}(\varepsilon) \rightarrow 0$ est absolument non triviale, et repose sur l’application de la forme classique du théorème central limite. Elle est contredite par les modèles de Mandelbrot, dans lesquels on peut avoir $\text{var}(\varepsilon) \rightarrow \infty$. Dans une note du bas de la page 502, Sharpe le rappelle. Mais, dans le cas classique envisagé initialement, l’argumentation tient bon.

En fait, des débats extrêmement violents vont naître à partir des années soixante sur la modélisation de l’erreur, reproduisant (ici également) comme en écho des débats plus anciens : “dans la mesure où une partie importante de l’écart entre les modèles théoriques et les observations est attribuée aux erreurs d’observation, celles-ci deviennent *le lieu où se concentrent les enjeux scientifiques, mais aussi sociaux* (souligné par nous), du progrès scientifique”²³. Ces débats rappellent, dans leur virulence, la célèbre controverse de 1853 qui opposa Cauchy à Bienaymé sur la forme de la loi des erreurs, dans laquelle Bienaymé qualifia la loi de Cauchy de “densité pathologique”, réaction qui n’est pas si éloignée de celle des universitaires américains des années soixante-dix face aux modèles de Mandelbrot.

En 1965, un élève de Mandelbot, Eugène Fama, développe une généralisation du modèle linéaire de Sharpe aux cas non gaussiens :

“L’objectif de cet article est de développer un modèle général pour les choix de portefeuille dans lequel on fait l’hypothèse que les marchés suivent des lois stables paréliennes. Notre principal objectif sera de faire apparaître que, de manière assez générale, le concept de diversification reste pertinent dans un contexte stable parélien, même si la variance ne peut plus être utilisée comme mesure de dispersion du risque du portefeuille (...) Nous utiliserons une généralisation du modèle diagonal suggéré par Markowitz et pleinement développé par Sharpe. Nous montrerons en fait que le modèle diagonal de Markowitz – Sharpe est un cas particulier du modèle que nous présentons ici, dans lequel toutes les distributions de probabilités sont gaussiennes.”²⁴

Quelques pages plus loin, Fama semble se contredire : “[ces résultats] ne doivent pas laisser supposer que la diversification est toujours un concept économique pertinent. Nous allons voir à présent que cette notion n’a un sens que pour une étroite bande de valeurs de l’exposant caractéristique α ”²⁵. Mais l’obtention de valeurs de l’exposant caractéristique α comprises entre 1 et 2, c’est-à-dire les “bonnes” valeurs de

21. Sharpe [1971], p. 1263.

22. Sharpe [1967], p. 502.

23. Armatte [1995], p. 152. Pour une mise en perspective historique et financière des quarante années de controverse à propos des aléas stables non gaussiens issus des hypothèses de Mandelbrot, voir Walter [2002a].

24. Fama [1965], p. 405.

25. Fama [1965], p. 410.

l'exposant²⁶ laisse supposer que “la diversification reste un outil efficace pour réduire le risque d'un portefeuille, même si la réduction n'est pas aussi rapide que dans le cas gaussien”²⁷.

Et Fama conclut en indiquant que, “quoique le modèle présenté est suffisant pour atteindre les objectifs fixés, il n'en reste pas moins qu'il est difficile à appliquer dans la pratique. La plupart des difficultés sont dues au fait que les modèles économiques utilisant les processus stables parétiens se sont développés plus rapidement que la théorie statistique des distributions correspondantes. Notre espoir est que cet article suscitera l'intérêt des statisticiens pour l'exploration plus approfondie des propriétés des distributions stables”²⁸. Fama aura été entendu : très vite, ce domaine statistique se développera, permettant tout d'abord une généralisation des estimateurs du coefficient de la droite de régression²⁹. Plus lentement, c'est la théorie elle-même des processus α -stables de Lévy qui sera approfondie dans les années quatre-vingt, puis les processus de Lévy non stables seront à leur tour étudiés intensivement, pour devenir, en 2003, un domaine de recherche très actif dans la finance théorique.

L'impact du choix de modélisation de l'erreur accidentelle La modélisation de l'erreur est au centre du débat sur la validité du concept de diversification. Dans un article de 1924, Paul Lévy attire l'attention sur les changements importants produits par l'introduction de “lois exceptionnelles” des erreurs³⁰, en soulignant que “les méthodes habituelles de compensation des erreurs, applicables dans le cas des lois L_α , α étant compris entre 1 et 2, doivent être complètement modifiées si α ne dépasse pas l'unité”³¹. Il revient sur cette question dans une conférence de 1930, qu'il conclut en insistant sur le fait que “si l'erreur n'obéit pas à la loi de Gauss, mais n'en diffère pas trop, ces méthodes conservent une valeur incontestable ; mais on ne peut plus affirmer qu'elles sont les meilleures possibles (...). Ces méthodes tombent au contraire complètement en défaut dans le cas des lois comportant une erreur quadratique moyenne infinie”³².

Dans le cas parétien des distributions α -stables, le risque de volatilité (mais pas le risque de saut) n'est plus mesuré par la variance, mais par le paramètre d'échelle : soit la volatilité γ , soit l'équivalent de la variance γ^α . Pour un niveau de risque de saut donné, chaque titre j est caractérisé par un couple rentabilité-échelle de R_j , soient $\delta(R_j) = \delta_j$ et $\gamma(R_j) = \gamma_j$. D'où le couple rentabilité-risque du portefeuille

$$\begin{cases} \delta(R) = \sum_{j=1}^N w_j \delta_j \\ \gamma^\alpha(R) = \sum_{i,j} w_i \text{cov}_\alpha(R_i, R_j) w_j \end{cases}$$

où $\text{cov}_\alpha(R_i, R_j)$ représente la α -covariation³³ entre les rentabilités des actifs i et j .

Dans le cas de la généralisation de Fama du modèle linéaire de Sharpe au cas parétien, on obtient le couple rentabilité-risque

$$\begin{cases} \delta(R) = a + b \delta(R_M) \\ \gamma^\alpha(R) = b^\alpha \gamma^\alpha(R_M) + \gamma^\alpha(\varepsilon) \end{cases}$$

qui représente la généralisation du modèle linéaire au cas d'aléas parétiens. La relation de diversification (avec à nouveau $w_j = 1/N$) devient

$$\gamma^\alpha(R) = \bar{b}^\alpha \gamma^\alpha(R_M) + \left(\frac{1}{N}\right)^\alpha \sum_{j=1}^N \gamma^\alpha(\varepsilon_j) \quad (9)$$

26. Voir Lévy Véhel et Walter [2002], et Walter [2002a], pour une synthèse sur ce sujet.

27. Fama [1965], p. 414.

28. Fama [1965], p. 418.

29. Généralisation réalisée par Blattberg et Sargent [1971], puis Kadiyala [1972].

30. Lévy [1924], p. 68.

31. Lévy [1924], p. 77.

32. Lévy [1930], p. 13.

33. Voir Lévy Véhel et Walter [2002] pour plus de détails sur le modèle de portefeuille dans un univers α -stable.

qui conduit à

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma^\alpha = \bar{b}^\alpha \gamma_M^\alpha + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^\alpha} \sum_{j=1}^N \gamma_{\varepsilon_j}^\alpha$$

Trois cas se présentent selon la valeur de l'exposant caractéristique α .

1. Cas $\alpha > 1$. Dans ce cas, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^\alpha} \sum_{j=1}^N \gamma_{\varepsilon_j}^\alpha = 0$, d'où $\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma^\alpha = \bar{b}^\alpha \gamma_M^\alpha$ et le principe de diversification fonctionne, quoique la convergence vers zéro est ralentie : le risque spécifique a tendance à demeurer plus longtemps. Il est nécessaire d'utiliser un plus grand nombre de titres pour parvenir à l'annulation du risque spécifique de chaque titre.
2. Cas $\alpha = 1$. Dans ce cas, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_{\varepsilon_j} = \bar{\gamma}_\varepsilon$, d'où $\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma = \bar{b} \gamma_M + \bar{\gamma}_\varepsilon$. Le risque du portefeuille ne décroît plus en fonction du nombre de titres. Le principe de diversification ne fonctionne plus, dans la mesure où l'adjonction d'un titre supplémentaire ne réduit pas pour autant la volatilité du portefeuille.
3. Cas $\alpha < 1$. Dans ce cas, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^\alpha} \sum_{j=1}^N \gamma_{\varepsilon_j}^\alpha = \infty$, d'où $\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma^\alpha = \infty$, et le principe de diversification est inversé. Le risque du portefeuille (sa volatilité) augmente au fur et à mesure que le nombre de titres augmente. Dans cette situation, le risque provient de l'adjonction de chaque nouveau titre entré en portefeuille.

Les travaux de Fama sur l'extension du modèle linéaire aux erreurs non gaussiennes ne trouveront pas d'écho direct dans la gestion des portefeuilles. En effet, dès 1964 (voir partie suivante), Sharpe fonde économiquement le modèle linéaire en opérant un changement de statut épistémologique sur la régression proposée en 1963, changement qui conduira à l'impossibilité technique³⁴ d'utiliser des erreurs non gaussiennes.

D'une part, cette solidification épistémologique va constituer un blindage gaussien sur la loi des erreurs, et l'on peut établir ici une analogie avec le mémoire de Bienaymé dans sa réponse à Cauchy pour les effets produits sur les développements de la théorie : "C'est à Bienaymé que l'on doit le début d'un dogme de la loi des erreurs. C'est également lui qui boucle la synthèse dite de Laplace-Gauss en affirmant que la moyenne quadratique n'est pas une mesure arbitraire de précision mais *la seule* (souligné par nous) mesure de dispersion [possible]."³⁵ D'autre part, beaucoup de protagonistes adopteront par la suite l'attitude autocontradictoire de Bienaymé, qui justifie par la pratique un argument mathématique. En 1846, Auguste Bravais, professeur à l'école Polytechnique, attire l'attention sur le fait "qu'il y a dix mille raisons physiques de penser que la loi des erreurs n'est pas gaussienne dans les cas concrets, et trois raisons mathématiques de penser le contraire"³⁶. Finalement, Poincaré aura le mot de la fin en lançant ce jugement qui semble clore le débat : "tout le monde y croit cependant, me disait un jour M. Lippman, car les expérimentateurs s'imaginent que c'est un théorème de mathématiques, et les mathématiciens que c'est un fait expérimental".³⁷

34. Il faudra attendre les années quatre-vingt pour qu'une généralisation complète soit possible. Voir Lévy Véhel et Walter [2002].

35. Armatte [1995], pp 311-312.

36. Armatte [1995], p. 316.

37. Poincaré [1896], p.

3 Le modèle linéaire comme hypothèse économique

3.1 Du portefeuille optimal au modèle linéaire

3.1.1 Une propriété du portefeuille optimal

La condition d'optimalité du premier ordre conduit à une relation intéressante. Le lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2)$ du programme (2) est

$$\mathcal{L} = \text{var}(R) - \lambda_1(E(R) - \mu_P) - \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^N w_j - 1 \right)$$

où λ_1 est le multiplicateur de Lagrange qui correspond à la contrainte qui fixe le niveau de rentabilité, et λ_2 le multiplicateur de la contrainte qui assure que la somme des poids de chaque titre est bien égale à 1.

La première condition d'optimalité (annulation du gradient $\nabla = [\partial/\partial w_j]_{j=1, \dots, N}$ qui fournit les points critiques de \mathcal{L}) s'écrit $\partial\mathcal{L}/\partial w_j = 0$ et conduit, pour tout titre j , à l'équation

$$E(R_j) = \mu + \lambda \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i \text{cov}(R_j, R_i) \quad j = 1, \dots, N$$

qui exprime une relation linéaire entre la rentabilité $E(R_j)$ de toute action j et la covariance. Comme $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_i \text{cov}(R_j, R_i) = \text{cov}(R_j, \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i R_i) = \text{cov}(R_j, \tilde{R})$, l'équation ci-dessus devient

$$E(R_j) = \mu + \lambda \text{cov}(R_j, \tilde{R}) \quad j = 1, \dots, N$$

Autrement dit, il existe une *relation linéaire* entre l'espérance de rentabilité de chaque titre j et la covariance de la rentabilité de ce titre avec la rentabilité \tilde{R} du portefeuille optimal.

On obtient la valeur des multiplicateurs de Lagrange λ et μ de la manière suivante.

- Si $\text{cov}(R_j, \tilde{R}) = 0$, alors $E(R_j) = \mu$: la quantité μ représente la rentabilité d'un portefeuille de covariance nulle avec le portefeuille optimal, ou d'un actif sans risque (s'il existe), notée r .
- Si $R_j = \tilde{R}$, alors $E(\tilde{R}) = r + \lambda \text{var}(\tilde{R})$, ce qui donne la valeur de λ : $\lambda = (E(\tilde{R}) - r) / \text{var}(\tilde{R})$. La quantité $\tilde{\lambda}$ représente le complément de rentabilité que le gérant peut espérer obtenir en augmentant le niveau de risque d'une unité supplémentaire.

On obtient finalement la relation

$$E(R_j) - r = \frac{\text{cov}(R_j, \tilde{R})}{\text{var}(\tilde{R})} (E(\tilde{R}) - r) \quad j = 1, \dots, N$$

soit, en vertu de la définition du bêta d'une action

$$E(R_j) - r = \beta_j (E(\tilde{R}) - r) \quad j = 1, \dots, N \tag{10}$$

qui donne la valeur de la prime de risque de tout actif j en fonction de la prime de risque du portefeuille optimal. Autrement dit, si un portefeuille de rentabilité \tilde{R} est optimal, alors on obtient pour tout actif j le *modèle linéaire* des rentabilités :

$$E(R_j) = a_j + b_j E(\tilde{R}) \quad j = 1, \dots, N$$

avec $a_j = r(1 - \beta_j)$ et $b_j = \beta_j$, soit

$$R_j = a_j + b_j \tilde{R} + \varepsilon_j \quad j = 1, \dots, N$$

Cette propriété de linéarité est issue de l’optimalité du portefeuille sur lequel on régresse les rentabilités des actions. A ce stade du raisonnement, même si l’on peut assimiler le portefeuille MV-optimal de rentabilité \bar{R} à la cause commune des variations des titres (qui le composent), ce portefeuille n’a pas de place particulière dans le marché : plus encore, comme il existe une infinité de portefeuilles MV-optimaux, il existe donc une infinité de relations linéaires possibles. Si un tel portefeuille MV-optimal devait constituer une “cause commune”, il serait donc nécessaire de trouver un critère de choix. C’est alors que James Tobin intervient dans le problème du choix de portefeuille, en publiant en 1958 un article intitulé “Liquidity Preference as Behavior Towards Risk”.

3.1.2 Le principe de séparation des fonds de Tobin (1958)

Que se passerait-il dans le modèle de Markowitz si l’un des actifs du marché utilisés dans la formation du portefeuille MV-optimal était sans risque (par exemple un bon du Trésor) ? Comme le rappelle lui-même Tobin, “si l’un des actifs du modèle de Markowitz était non risqué, cela aurait une conséquence intéressante”³⁸.

La résolution du programme d’optimisation avec un actif sans risque conduit à transformer l’hyperbole de Markowitz en demi-droite dont l’origine correspond à la position de l’actif sans risque dans le plan espérance-variance. Cette demi-droite est *tangente* à la frontière hyperbolique de Markowitz (c’est-à-dire sans actif non risqué), et au point de tangence correspond un portefeuille optimal très particulier, le *portefeuille optimal tangent*. Tobin va alors montrer que la *seule décision* à prendre pour un investisseur n’est pas de choisir ses titres ni un portefeuille donné de la frontière hyperbolique de Markowitz, mais seulement de choisir sa répartition entre la partie de son épargne investie sur ce portefeuille optimal tangent et celle restant prudemment placée sur un bon du trésor. En d’autres termes, l’*exposition au risque* de l’investisseur est indépendante du choix des actifs composant la part risquée du portefeuille : “le résultat très commode qui vient d’être obtenu est le suivant : la composition du portefeuille d’actifs risqués est indépendante de la répartition entre actif risqué et liquidités”³⁹. C’est en cela que, comme l’indique le titre de l’article de 1958, “le choix de la part investie en liquidités est identiquement le reflet d’une attitude particulière vis-à-vis de la prise de risque”.

Ce résultat absolument non trivial et totalement contre-intuitif signifie que, du point de vue de sa décision, tout investisseur ne doit se préoccuper que de cette répartition initiale (qui sera appelée “allocation stratégique”), et pas du reste. Bien plus, ce portefeuille optimal tangent est, par définition, *le même pour tous* les investisseurs (tous les clients des gestionnaires), ce qui permet d’obtenir d’importants gains de productivité en construisant une gamme produits avec un seul portefeuille bien choisi. C’est le principe dit “de séparation des fonds”, qui est la conséquence directe, détectée par Tobin, de la présence d’un actif sans risque dans le programme de Markowitz. Une étape conceptuelle importante a été franchie, mais il reste à identifier concrètement (c’est-à-dire sur le marché) ce portefeuille optimal tangent. Ce qui va de nouveau être l’objet d’un article de Sharpe.

3.2 La justification économique du modèle linéaire

3.2.1 Le modèle d’équilibre de Sharpe (1964)

En 1964, William Sharpe publie dans le Journal of Finance un article intitulé “Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”, qui introduit en finance le modèle d’équilibre

38. Tobin [1986], cité par Bernstein [1992], p. 72.

39. Tobin [1958], p. .

des actifs financiers (Capital Asset Pricing Model, ou CAPM dans la suite du texte). Par rapport aux résultats précédents de Markowitz (1952) et Tobin (1958) établissant

- une relation de type modèle linéaire entre les rentabilités des actifs et celle du portefeuille optimal,
- un principe de séparation des fonds à répartir entre actif sans risque et portefeuille optimal tangent,

et *indépendamment* de la première forme sémantique du modèle linéaire de Sharpe [1963], le CAPM représente une sorte de surcouche ajoutée, qui vient permettre d'*identifier*, d'explicitier le portefeuille optimal tangent, et c'est en cela que le CAPM représente la deuxième forme sémantique du modèle linéaire. Ce résultat a également été obtenu indépendamment par Lintner en 1965, puis par Jan Mossin en 1966, aussi l'on parle généralement du résultat de Sharpe – Lintner – Mossin, même si Lintner et Mossin ont été quelque peu oubliés depuis.

Le CAPM postule l'*identification du portefeuille optimal tangent de rentabilité \tilde{R} avec le portefeuille de marché* de rentabilité R_M , et de cette assertion provient son importance. On peut donc résumer le déplacement interprétatif en confrontant les deux manières de comprendre la “cause commune” des variations :

1. première forme sémantique : R_M non justifié économiquement
2. deuxième forme sémantique : $R_M = \tilde{R}$ dans un marché à l'équilibre.

Il a fallu douze années de gestation entre le passage du “tildé” au “ M ”, entre le modèle de Markowitz (1952) et le CAPM de Sharpe (1964), ce qui montre que le passage de l'un à l'autre n'était pas trivial. C'est ce passage du “tildé” au “ M ” qui valut à Sharpe le prix Nobel en 1990. Le point crucial du passage est donc la démonstration de ce que le portefeuille de marché est optimal tangent. On rappelle seulement son principe, présenté suivant l'élégant syllogisme de première figure proposé par Dumas et Allaz [1995, p.82] :

Majeure Toute combinaison convexe de portefeuilles optimaux est un portefeuille optimal.

Mineure A l'équilibre du marché, le portefeuille de marché est une combinaison convexe de portefeuilles optimaux.

Conclusion Par conséquent, à l'équilibre du marché, le portefeuille de marché est optimal : il se situe sur la frontière de Markowitz.

Les principaux résultats du CAPM ne représentent donc qu'une transposition au portefeuille de marché des résultats obtenus avec le portefeuille optimal. On peut les écrire brièvement. A l'équilibre du marché, il existe un nombre $\lambda_M > 0$ tel que, si R_M est la rentabilité du portefeuille de marché, R_j la rentabilité d'un titre j , alors, pour tout titre j , on a

$$E(R_j) - r = \lambda_M \text{cov}(R_j, R_M) \quad j = 1, \dots, N$$

où r est le taux d'intérêt sans risque, et λ_M représente le coefficient de peur du risque caractérisant l'attitude face au risque d'un investisseur “moyen”, ou encore “représentatif” : $\lambda_M^{-1} = \sum_i (\lambda_i)^{-1}$. En remplaçant λ_M par sa valeur comme précédemment pour le portefeuille optimal, on trouve la deuxième forme du CAPM :

$$E(R_j) - r = \beta_j (E(R_M) - r) \quad j = 1, \dots, N \tag{11}$$

avec $\beta_j = \text{cov}(R_j, R_M) / \text{var } R_M$. De l'équation (11) précédente, il vient

$$R_j = r(1 - \beta_j) + \beta_j R_M + \varepsilon_j$$

soit

$$R_j = a_j + b_j R_M + \varepsilon_j \quad j = 1, \dots, N$$

où $a_j = r(1 - \beta_j)$, $b_j = \beta_j$ caractérisent l'action j , ainsi que ε_j terme aléatoire tel que $E(\varepsilon_j) = 0$ et l'on voit que le coefficient β_j de l'action j correspond au coefficient de la droite de régression de R_j sur R_M . On retrouve le *modèle linéaire* de Sharpe [1963]. De cette manière, le CAPM de 1964 fournit une justification économique, et donc fonde économiquement, le modèle linéaire de 1963, qui n'avait été introduit qu'heuristiquement, dans le seul but de simplifier les calculs de la matrice de variance-covariance.

L'histoire financière des tests économétriques du CAPM illustre à la perfection les difficultés évoquées par Michel Armatte : “les applications aux problèmes économiques des méthodes statistiques centrées sur le modèle linéaire butent sur *les plus grandes difficultés* (souligné par nous)”⁴⁰. En particulier, la capacité explicative de la seule “cause commune” est plusieurs fois remise en question par les résultats des tests statistiques entrepris sur les marchés réels. On trouve par exemple dans un manuel récent d'économétrie consacré à une revue de synthèse de ces tests statistiques le commentaire suivant : “contrairement aux prévisions du CAPM, les *éléments spécifiques* (souligné par nous) propres aux entreprises semblent contribuer de manière significative aux rentabilités observées sur le marché, au-delà de la valeur attendue par le seul bêta du CAPM [la seule cause commune]”⁴¹. Autrement dit, les causes accidentelles semblent constituer une part non négligeable de la rentabilité boursière des sociétés, et ceci confirmerait cette idée assez répandue parmi les professionnels selon laquelle ce qui est important en finance, ce sont précisément les causes accidentelles, et non pas la cause commune⁴².

Pourtant, malgré ces anomalies, malgré la réticence des professionnels à laisser la cause commune devenir l'ultima ratio de la source de la rentabilité, une dérive interprétative majeure, et dont les conséquences pratiques seront considérables, va apparaître à la suite de l'utilisation du CAPM dans la mesure de performance de la gestion d'actifs, dérive qui va, tout au contraire, renforcer l'importance de la cause commune dans le sens de la théorie des moyennes de Quételet. On aborde à présent cette dérive.

3.2.2 Vers la théorie des moyennes (1965 – 1968)

Une conséquence inattendue de l'usage du CAPM apparaît alors en effet dans le domaine de la gestion d'actifs professionnelle. S'appuyant sur le modèle d'équilibre de 1964, et posant que la seule loi des erreurs est la loi normale, les universitaires américains en viennent, à partir de 1965, à s'interroger sur la performance des gérants professionnels⁴³.

La mesure de la performance des gérants avait déjà fait l'objet de l'attention d'Alfred Cowles après le krach boursier de 1929 : Cowles avait montré que la valeur ajoutée des gestions professionnelles, c'est-à-dire le savoir-faire des gérants de portefeuille n'était pas significative, et que des gestions se contentant de reproduire le comportement du marché seraient tout aussi efficaces et moins coûteuses pour l'ensemble de la société⁴⁴. Finalement, une fois corrigée la rentabilité par le risque pris, les gérants professionnels actifs obtenaient-ils des performances réellement meilleures que celles du marché ? Ou, en d'autres termes, “battaient-ils le marché ?”. Dans ses souvenirs, Bernstein, qui a été l'un de ces professionnels, relate une anecdote lors de sa première rencontre avec Sharpe.

“Un jour du printemps 69, une amie éditeur m'organisa un déjeuner avec un jeune professeur de Stanford nommé William Sharpe, en m'assurant que c'était quelqu'un que je devais absolument rencontrer. Sharpe entamait alors sa trentaine, c'était un homme charmant et sociable. Le charme accentua encore le choc quand, après les habituelles plaisanteries sur le temps qu'il faisait, il se tourna vers moi et me demanda : battez-vous le marché ? Personne ne m'avait jamais posé cette question auparavant. Dans le monde du conseil en investissements, il était considéré comme acquis que les investisseurs se tournaient toujours vers les conseils d'un professionnel car ils savaient qu'ils obtiendraient de meilleures performances en passant par nous plutôt que d'essayer de gérer seuls leurs fonds. Le seul sujet de discussion était de savoir lequel des gestionnaires professionnels réussissait à obtenir les performances les plus au-dessus

40. Armatte [1995], p. 20.

41. Campbell *et al.* [1997], p. 211.

42. On n'aborde pas ici la question soulevée par Roll [1977] sur la non MV-optimalité des indices de marché utilisés dans les tests du CAPM. Cette question relativement technique a fait l'objet de nombreux débats, et les travaux de Stambaugh (1982) et Kandel et Stambaugh (1987) ont provisoirement clos la controverse en validant l'usage d'indices non MV-optimaux par la détermination de régions d'acceptation ou de rejet des indices choisis.

43. Les débuts de cette interrogation sont le fait des travaux de Treynor [1965], Sharpe [1966], Treynor et Mazuy [1966], et Jensen [1968].

44. Voir Walter [1999] pour un développement sur cette question.

de la moyenne. Il était impensable que l'un de nos conseils puisse conduire à des performances *en dessous de la moyenne* (souligné par nous). Je répondis que je pensais que la réponse était évidente. Mais Sharpe ne fut pas satisfait par cette réponse.”⁴⁵

Le principe conceptuel de l'argument dérivait directement de la théorie des erreurs, inversée dans le sens de Quételet. Si l'on décomposait la variance du portefeuille selon la théorie des erreurs, suivant le grand partage entre erreur systématique et erreurs accidentelles, il apparaissait alors que la performance du portefeuille résultait donc principalement de la contribution de la cause commune, le marché, et secondairement, de la contribution du gérant, en tant qu'il adoptait une position différente de celle de la composition de l'indice de marché. En sorte que, si la contribution du gérant à la performance s'apparentait aux causes accidentelles, c'est donc que le savoir-faire des gérants était également assimilable à une cause accidentelle, autrement dit au hasard, et non au talent du professionnalisme. La boucle était bouclée avec les conclusions de Cowles, et le pas intellectuel était franchi pour lancer la gestion d'actifs professionnelle sur la route de l'indexation.

Or “le principe de la moyenne est un de ceux qui fit le plus couler d'encre au XIX^{ème} siècle”⁴⁶. L'usage imprudent de la moyenne et du modèle linéaire dans les travaux théoriques de mesure de performance, tout autant que dans les applications pratiques extrêmement nombreuses, ceci malgré les avertissements des plus éclairés des théoriciens⁴⁷, et la méconnaissance de l'ancienneté du débat séculaire sur la juste utilisation des moyennes, va conduire la communauté financière à disqualifier progressivement toutes les formes de gestions dites “classiques”, pour ne considérer comme “modernes” que des gestions indicielles (c'est-à-dire reproduisant mécaniquement le comportement d'un indice de marché), ou indicées (c'est-à-dire référencées en permanence à la performance d'un indice de marché). Les résistances des gérants professionnels classiques n'empêcheront pas les encours de gestion indicielle de passer de 5 millions de dollars en 1971 à plus de 1 000 milliards de dollar en 2000, et la gestion par les moyennes sera devenue le paradigme (le paradis) des modernistes⁴⁸.

Avec la mesure de performance des portefeuilles issue de la seconde forme sémantique du modèle linéaire de Sharpe [1964], c'est en fait la physique sociale de Quételet [1835], dans laquelle la fascination pour l'homme moyen est remplacée par la fascination pour la performance moyenne du marché, qui pénètre en force, cent ans après, dans la finance moderne. Nous laissons pour un travail ultérieur l'exploration systématique de cette pénétration et de sa postérité, pour aborder à présent la troisième forme sémantique du modèle linéaire, celle développée par la finance contemporaine.

4 Le modèle linéaire comme hypothèse financière

4.1 La reconstruction didactique de la théorie financière

4.1.1 La rupture de Harrison – Kreps – Pliska (1979 – 1981)

Le passage du modèle linéaire d'une hypothèse économique à une hypothèse financière pure correspond également à un moment de reconstruction de la théorie financière, qui intègre désormais le concept récemment axiomatisé et formalisé d'arbitrage. De ce point de vue, les articles fondamentaux tout autant que fondateurs de Harrison et Kreps [1979] et Harrison et Pliska [1981] marquent le début du mouvement de reconstruction, qui aboutira dix ans plus tard à une reconceptualisation à peu près complète des notions de base de la finance. Il y aura désormais en finance un “avant” et un “après” les travaux de

45. Bernstein [1992, p. 75] ou [1995, p. 81].

46. Armatte [1995], p. 304.

47. Comme par exemple la critique de Roll [1977] dont il a été fait mention précédemment.

48. Le récit des débuts mouvementés de la gestion indicielle est fait dans Walter [2002b], p. 136 *sq.*

Harrison – Kreps – Pliska, et les manuels de théorie financière se répartiront entre ceux qui présentent la finance selon la manière moderne, et les autres, qui conservent la façon ancienne. Selon l’expression de Michel Armatte, la matière financière aura été “brassée” : les savoirs théoriques en finance auront été reconstruits et auront “subi une transformation didactique dont le principe est en gros celui d’une présentation de type axiomatique qui brasse à nouveau la matière au point de faire disparaître à la fois les diversités paradigmatiques et les continuités chronologiques”⁴⁹.

A partir de la fin des années quatre-vingt dix, les traités de finance ne permettent plus de retrouver la trace de la lente construction de l’hypothèse du modèle linéaire, et l’ensemble des notions y est présentée presque ex nihilo, quoique dans une remarquable rigueur axiomatisée⁵⁰. On peut à ce titre comparer deux extraits d’avant-propos, qui illustrent de manière emblématique ce déplacement de point de vue, et que l’on pourrait presque transposer mot pour mot : celui du manuel de Linnik sur la méthode des moindres carrés, cité par Armatte [1995, p. 34], et celui du manuel de Pliska sur la finance mathématique.

“Suivant l’oeuvre classique de A. Markov sur ce sujet, un certain nombre de manuels, traitant de la théorie de cette méthode, apparaissent dans la littérature russe (...). Le lecteur peut trouver dans ces ouvrages l’étude détaillée de la partie pratique de cette méthode ainsi que de nombreux exemples et applications. Cependant la partie purement statistico-mathématique y est traitée *dans l’optique du siècle passé* (souligné par nous), sans que leurs auteurs tiennent compte des idées actuelles dans ce domaine et des progrès accomplis par la statistique mathématique qui considère maintenant la méthode des moindres carrés comme faisant partie, tout naturellement, de la théorie de l’estimation.

(...) Le présent ouvrage expose la théorie des moindres carrés en mettant l’accent sur la signification statistico-mathématique qu’il convient d’attribuer aux résultats obtenus par cette méthode.⁵¹”

Examinons à présent l’avant-propos au manuel de Pliska [1997].

Jusqu’à une période récente, la plupart des manuels traitant de la théorie des marchés de capitaux étaient écrits par des professeurs de finance, ce qui avait pour effet de donner trop d’importance aux aspects économiques de la finance, au détriment de la présentation de la modélisation probabiliste. (...) Certains ouvrages contiennent une partie probabiliste, mais, lorsque c’est le cas, cette partie est traitée *dans l’optique de la période passée* (souligné par nous)⁵².

(...) Le présent ouvrage expose la théorie financière en mettant l’accent sur la rigueur du traitement mathématique” (la signification mathématique qu’il convient d’attribuer aux résultats obtenus par la méthode d’évaluation sous condition de non existence d’arbitrage). Le lecteur recherchant des informations sur les actions, les produits dérivés et la gestion des portefeuilles ne les trouvera pas dans cet ouvrage, et est invité à les chercher ailleurs (sic!).⁵³”

A partir des années quatre-vingt, la finance connaît donc une importante mutation avec l’arrivée des mathématiciens probabilistes dans son champ usuel d’investigation. Or cette venue à la finance d’une population étrangère à toute connaissance pratique des objets financiers (au moins au départ), a pour effet d’opérer une transformation fondamentale dans les manières de penser les marchés de capitaux. On pourrait presque citer ici un développement de Jacques Maritain dans son cours de philosophie de la nature, dans lequel il propose cette image suggestive pour illustrer le déplacement conceptuel produit : “pour user d’une métaphore, on peut dire que l’esprit [du mathématicien] est ici comme un oiseau de mer qui s’empare d’un poisson [un instrument financier] et qui va le dévorer dans l’air, il ne pénètre pas dans l’océan du sensible [des objets financiers réels] mais il s’empare d’un intelligible [le concept sous-jacent aux objets financiers réels] pour le *dévorer dans un autre milieu* (souligné par nous)”⁵⁴, qui est le milieu

49. Armatte [1995], p. 33.

50. Voir par exemple les manuels de Pliska [1997], Karatzas et Shreve [1998], Föllmer et Schied [2002].

51. Linnik [1963]

52. Et l’on pourrait identiquement ajouter “sans que leurs auteurs tiennent compte des idées actuelles dans ce domaine et des progrès accomplis par la finance mathématique qui considère maintenant le modèle linéaire comme faisant partie, tout naturellement, de la théorie de l’évaluation sous condition de non existence d’arbitrage”.

53. Pliska [1995], pp vi et viii.

54. Maritain [1935], p.26.

des mathématiques.

De fait, pour paraphraser une nouvelle fois Michel Armatte, “tout se passe comme si la [théorie financière] ne pouvait se développer qu’en niant son enracinement dans des prénotions de caractère pratique qui empêchent une reconstruction scientifique”⁵⁵. La condition de non existence d’arbitrages est devenue le symbole de cette révolution conceptuelle.

4.1.2 La condition de non existence d’arbitrages

Le principe de base de l’évaluation de tout actif financier est simple : le prix d’un actif est une fonction des flux de paiements futurs (dividendes, coupons) qu’engendre pour son porteur sa détention. A partir de cette définition intuitive, il vient que si deux actifs procurent les mêmes flux de paiements futurs, ils doivent avoir le même prix. Corollairement, si le prix de deux actifs procurant des mêmes flux futurs est différent, il est possible de réaliser une intervention sur le marché en achetant l’un et vendant l’autre, et d’obtenir à l’échéance des titres un gain certain. Une telle opération, qui consiste à intervenir sur des prix d’actifs mal évalués, est appelée un arbitrage. Une définition plus précise de l’arbitrage est par exemple :

“L’arbitrage est fondé sur les différences de cours, soit dans la même Bourse, entre des valeurs similaires, soit, dans différentes Bourses, entre des cours de la même valeur ou de la même marchandise. Arbitrer ces valeurs ou ces marchandises, c’est alors vendre la plus chère là où elle est la plus chère, pour acheter la moins chère là où elle est la moins chère. (...) Les arbitrages se prêtent à de multiples combinaisons. Ils peuvent être faits au comptant ou à terme. L’arbitrage au comptant consiste dans l’échange de valeurs que l’on possède en portefeuille contre d’autres valeurs qui paraissent plus sûres ou d’un rendement supérieur, d’où le nom d’*arbitrage de portefeuille*. L’arbitrage à terme consiste à vendre à terme telle valeur, en achetant telle autre à la même échéance, en prévision d’une baisse sur la première et d’une hausse sur la seconde”⁵⁶.

Réciproquement, si les actifs sont tous bien évalués, plus aucun arbitrage n’est possible. Si les actifs sont bien évalués, cela signifie que l’information relative aux sociétés cotées est effectivement passée dans les prix⁵⁷ : l’arbitrage est l’opération qui rend le marché informationnellement efficace et, dans ce sens, représente la transposition opérationnelle du concept flou d’efficacité informationnelle des marchés. Corollairement, une bonne évaluation des actifs suppose que les prix soient arbitrés. La finance des années quatre-vingt a simplement axiomatisée cette intuition, de manière à systématiser le principe d’évaluation : c’est ce qui est appelé la “condition de non existence d’arbitrages”⁵⁸, qui constitue le pivot de toutes les méthodes d’évaluation des actifs financiers à l’heure actuelle, et qui exprime simplement que le “bon” prix est le prix arbitré, c’est-à-dire qui contient toute l’information nécessaire à l’évaluation correcte de l’actif financier.

Pour caractériser la condition de non existence d’arbitrage, on effectue un passage dans un monde dual d’individus indifférents au risque, avec un changement de probabilité. On commence par définir et noter le cours actualisé $S_j^*(1)$ d’un actif j en date 1 comme $S_j^*(1) \equiv S_1^j/(1+r)$ où r est le taux d’intérêt sans risque. En date $t=0$, on a évidemment $S_j^*(0) = S_0^j$. On note $\Delta S_j^* = S_j^*(1) - S_j^*(0)$ la différence des cours actualisés entre les dates $t=0$ et $t=1$, et ΔS_j^* représente donc la *valeur actuelle du gain* résultant de l’achat du titre j en date $t=0$ en vue de sa détention jusqu’à la date $t=1$, en choisissant comme taux d’actualisation le taux sans risque.

55. Armatte [1995], p.37. Pour éviter toute ambiguïté, on précise nettement que notre intention n’est en aucun cas de critiquer l’apport des mathématiques à la résolution de problèmes difficiles de la finance, car il est clair aujourd’hui que cet apport est réel et fécond (voir par exemple le livre de Bouleau [1998] pour l’apport de la modélisation aux pratiques des opérateurs de marché) mais seulement de faire apparaître comment une forte axiomatisation de la finance a conduit à repenser de manière radicale et anhistorique les pratiques financières concrètes.

56. Grand Larousse encyclopédique.

57. Comme disent les boursiers, “l’information est dans les cours”.

58. On traduit ainsi l’anglais “absence of opportunity of arbitrage”, ou condition AOA dans la littérature de recherche anglophone.

On définit alors une mesure de probabilité particulière notée Q , équivalente à P , telle que, *par construction*, on ait $E_Q(\Delta S_j^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, N$, où la notation $E_Q(X)$ désigne l'espérance mathématique de la variable aléatoire X évaluée avec la probabilité Q . Cette condition qui définit Q correspond donc concrètement à l'hypothèse explicite que l'espérance mathématique (calculée avec Q) de la valeur actuelle du gain est nulle.

En observant que la condition $E_Q(\Delta S_j^*) = 0$ est équivalente à $S_0^j = E_Q(S_1^j)/(1+r)$ qui indique que, en date $t = 0$, l'espérance mathématique des prix des actifs j actualisée au taux sans risque r est égale à leur prix à cette date, cela signifie que (comme on actualise à un taux d'intérêt sans risque), avec cette probabilité Q , les individus ne demandent pas de prime de risque correspondant à la rémunération de la prise de risque associée à la détention d'un actif risqué. La probabilité Q correspond ainsi une probabilité subjective d'agents qui seraient indifférents au risque, et tout se passe comme si on avait transformé le monde réel en un monde virtuel dans lequel une anamorphose des attitudes des agents face au risque rendait chacun indifférent au risque de perte (comme d'ailleurs aux chances de gain). Cette intuition fondamentale de la finance moderne est au fondement de toutes les techniques professionnelles récentes, et a permis tous les développements extraordinaires qu'ont connus les marchés depuis une vingtaine d'années.

Le théorème fondamental (presque le plus essentiel) de la finance moderne (Harrison et Kreps [1979], Harrison et Pliska [1891]) énonce que, *si les prix sont arbitrés, alors une telle probabilité existe*. On peut dire sans exagération que ce théorème est à ce point important que, sans sa connaissance, aucun marché financier moderne ne pourrait exister.

4.2 La justification financière du modèle linéaire

4.2.1 Une application du théorème de Radon – Nikodym

Pour passer du monde réel probabilisé avec la probabilité P au monde dual probabilisé avec la probabilité redressée Q , on introduit la variable aléatoire

$$L(\omega) \equiv \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

dont on montre qu'il s'agit de la densité des prix des états du monde, ou "actifs d'Arrow – Debreu". Avec cette variable aléatoire, pour toute variable aléatoire X , on a

$$E_P(XL) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)L(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)Q(\omega) = E_Q(X)$$

qui représente un *changement de probabilité* dans le calcul de l'espérance mathématique : c'est pour cela que L est appelé opérateur de changement de probabilité. En temps continu, ce changement de probabilité correspond exactement au théorème de Radon-Nykodin et conduit à la formule de passage d'une Q -martingale à une P -martingale qui, sous la forme brownienne (ou formule de Cameron-Martin-Girsanov) est devenue l'outil mathématique de base de la finance de marché moderne. On peut alors aborder la troisième forme sémantique du modèle linéaire.

La jonction entre la finance axiomatisée contemporaine et la finance "à l'ancienne" des années soixante-dix s'obtient en considérant la notion de prix du risque et son corollaire, la prime de risque. On a vu que la seconde forme sémantique du modèle linéaire était caractérisée par une relation entre la prime de risque espérée d'une action et la prime de risque espérée du marché, primes de risque définies en modèle statique monopériodique comme les écarts $E(R_j) - r$ et $E(R_M) - r$, où $E(R_j)$ et $E(R_M)$ représentent les rentabilités espérées de l'action j et du marché M entre les dates $t = 0$ et $t = 1$, et où r désigne le taux de

rentabilité d'un placement non risqué. Dans la seconde forme sémantique du modèle linéaire, c'est-à-dire le CAPM, cette prime de risque est définie précisément par la relation CAPM ou relation bêta :

$$E(R_j) - r = \beta_j(E(R_M) - r) \quad (12)$$

ou sous son autre forme

$$E(R_j) - r = \lambda_M \text{cov}(R_j, R_M) \quad (13)$$

qui relie linéairement la prime de risque à la covariance avec la rentabilité du marché. La troisième forme sémantique du modèle linéaire va reconsidérer la prime de risque, en parvenant à l'identifier d'une manière plus générale et plus puissante que celle utilisée par Sharpe en 1964. Cette démarche est une application directe du théorème de Radon-Nikodym, que l'on décrit ci-après.

En appliquant le théorème de Radon-Nykodin (changement de probabilité) aux rentabilités réelles des actions, on obtient

$$E_P(R_j L) = E_Q(R_j) = r$$

en vertu de la définition de la probabilité Q qui (rappelons-le) est telle que l'espérance de toute rentabilité est celle du taux sans risque. Le développement du terme sous l'espérance $E_P(\cdot)$ conduit à

$$E_P(R_j L) = E(R_j)E(L) + \text{cov}(R_j, L)$$

ce qui permet d'obtenir *directement* une expression de la prime de risque en fonction de la densité des prix d'états :

$$E(R_j) - r = -\text{cov}(R_j, L) \quad j = 1, \dots, N \quad (14)$$

qui généralise la relation (13) de Sharpe et montre que, dans un marché arbitré, la prime de risque espérée de tout actif j est fonction de la *covariance* de sa rentabilité avec la densité des prix d'état, et *non* de sa variance seule (sa volatilité), qui représente son risque total. On retrouve la propriété de Sharpe selon laquelle seul le *risque systématique* est rémunéré par le marché.

Pour généraliser la relation bêta, il ne reste plus qu'à considérer les valeurs que prend la densité $L_1(\omega)$ des prix d'état en date $t = 1$ comme les valeurs d'un portefeuille à cette date et construire un *portefeuille réplique* de L_1 au sens où l'on réplique les flux aléatoires qu'il engendre. La valeur de ce portefeuille réplique en date $t = 0$ est notée L_0 , qui est non aléatoire. La rentabilité du portefeuille θ_L est $R_L = (L_1 - L_0)/L_0$. Remplaçons dans l'équation (14) le terme L_1 par sa valeur $L_0(1 + R_L)$: cela donne

$$E(R_j) - r = -\text{cov}(R_j, L_0(1 + R_L)) = -L_0 \text{cov}(R_j, R_L)$$

relation qui est vraie pour le portefeuille θ_L lui-même :

$$E(R_L) - r = -L_0 \text{var } R_L$$

ce qui donne finalement la relation entre la prime de risque espérée d'une action j avec la rentabilité du portefeuille réplique de L :

$$E(R_j) - r = \frac{\text{cov}(R_j, R_L)}{\text{var } R_L} (E(R_L) - r)$$

soit, en introduisant le bêta de l'action j par rapport au portefeuille L comme la quantité $\text{cov}(R_j, R_L)/\text{var } R_L$, que l'on note β_j^L , la relation

$$E(R_j) - r = \beta_j^L (E(R_L) - r) \quad (15)$$

qui généralise la relation (12), et qui signifie que la prime de risque de l'action j est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille réplique de L , via le coefficient de proportionnalité bêta : la prime de risque d'une action est proportionnelle à son bêta en regard de la densité des prix d'états. Ce résultat *ressemble* à la relation du CAPM de Sharpe, si ce n'est que, dans ce cas, le portefeuille θ_L est une réplique de la densité des prix d'états, et non le portefeuille de marché.

Remarquons enfin que l'on peut écrire la relation (15) comme

$$E(R_j) = a_j + b_j E(R_L)$$

où les paramètres a_j et b_j caractérisent l'action j : c'est le *modèle linéaire* des rentabilités, sous la forme générale utilisant la densité des prix d'état. La reconceptualisation de la finance effectuée dans les années quatre-vingt a donc fait apparaître que *l'origine de l'existence d'un modèle linéaire des rentabilités se trouve dans la condition de non existence d'arbitrage*.

4.2.2 La forme linéaire de l'évaluation par arbitrage

Sachant que la rentabilité d'une action j entre les dates $t = 0$ et $t = 1$ est $R_j = (S_1^j - S_0^j)/S_0^j$, l'évaluation en date $t = 0$ de l'action j en date $t = 1$ est donnée par le retraitement simple de la relation bêta

$$S_0^j = \frac{E(S_1^j)}{1 + r + \beta_j(E(R_M) - r)}$$

ou, sous sa seconde forme

$$S_0^j = \frac{E(S_1^j) - \lambda_M \text{cov}(R_j, R_M)}{1 + r}$$

et c'est en cela que le CAPM est un modèle d'évaluation. La reconceptualisation de la finance dans les années quatre-vingt n'a pas supprimé cette idée d'évaluation par actualisation à un taux incluant une prime de risque, mais l'a approfondie en cherchant à exhumer les éléments les plus fondamentaux qui entraient dans la démarche d'actualisation. On s'est alors aperçu qu'il n'était pas nécessaire d'instrumenter une notion d'équilibre de marché, et qu'une condition plus restrictive, mais corollairement beaucoup plus puissante, suffisait : la condition de non existence d'arbitrage. L'évaluation de tout actif devenait alors une *forme linéaire*.

Enfin, en considérant la rentabilité d'un titre élémentaire notée ρ_k telle que $1 + \rho_k = e_1^k/e_0^k$, on obtient une décomposition générale de la prime de risque en fonction des primes de risque espérées des titres élémentaires

$$E(R_j) - r = \sum_{k=1}^K \beta_j^k (E(\rho_k) - r)$$

qui montre que la prime de risque espérée de tout actif j peut s'exprimer comme une relation multilinéaire des primes de risques espérées élémentaires, chacune pondérée par un coefficient β_j^k qui dépend de l'actif j et du facteur k . C'est la relation générale de l'évaluation par arbitrage (ou "Arbitrage Pricing Theory") de Ross (1976).

Markowitz – Tobin	1952 – 1958	$E(R_j) = r + \tilde{\beta}_j(E(\tilde{R}) - r)$
Sharpe – Lintner – Mossin	1964 – 1966	$E(R_j) = r + \beta_j^M(E(R_M) - r)$
Harrison – Kreps – Pliska	1979 – 1981	$E(R_j) = r + \beta_j^L(E(R_L) - r)$

TABLE 1 – Les trois formes sémantiques du modèle linéaire.

A Références bibliographiques

- ARMATTE M. [1995], *Histoire du modèle linéaire*, Thèse de doctorat EHESS.
- BERNSTEIN P. [1992], *Capital Ideas*, Free Press, New York ; trad. fr. *Des idées capitales*, 1995, PUF.
- BLATTBERG R., SARGENT T. [1971], “Regression with Non-Gaussian Stable Disturbances : Some Sampling Results”, *Econometrica*, vol. 39, n° 3, mai, pp 501-510.
- BOULEAU N. [1998], *Martingale et marchés financiers*, Odile Jacob.
- CAMPBELL J., LO A., MAC KINLAY A. [1997], *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- COVELLO V.T., MUMPOWER J. [1985], “Risk Analysis and Risk Management : a Historical Perspective”, *Risk Analysis*, vol. 5, pp 193-220.
- DUMAS B., ALLAZ B. [1995], *Les titres financiers*, PUF.
- FÖLLMER H., SCHIED A. [2002], *Stochastic Finance in Discrete Time*, Gruyter, New York.
- HARRISON J., KREPS D. [1979], “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory*, vol. 20, pp 381-408.
- HARRISON J., PLISKA S. [1979], “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and Applications*, vol. 11, pp 215-260.
- FAMA E. [1965], “Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market”, *Management Science*, vol. 11, n°3, janvier, pp 404-419.
- KADIYALA K. [1972], “Regression with Non-Gaussian Stable Disturbances : Some Sampling Results”, *Econometrica*, vol. 40, n° 4, juillet, pp 719-722.
- KARATZAS I., SHREVE S. [1998], *Methods of Mathematical Finance*, Springer, Berlin.
- LÉVY P. [1924], “La théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles”, *Bull. de la Société mathématique de France*, vol. 52, pp 49-85.
- LÉVY P. [1930], “Le théorème fondamental de la théorie des erreurs”, *Compte-rendu de conférence*, 13 pages.
- LÉVY VÉHEL J., WALTER C. [2002], *Les marchés fractals*, PUF.
- LINNIK Y. [1963], *Méthode des moindres carrés. Eléments du traitement de la théorie statistique des observations*, Dunod.
- MARITAIN J. [1935], *La philosophie de la nature : essai critique sur ses frontières et son objet*, Téqui (rééd. 1996).
- MARKOWITZ H. [1952], “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, vol. 7, n°1, mars, pp 77-91.

- MARKOWITZ H. [1959], *Portfolio Selection*, Cowles Foundation, Yale University.
- PLISKA S. [1997], *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell, Oxford.
- POINCARÉ H. [1896], *Calcul des probabilités*, G. Carré, rééd. 1912.
- PRADIER P.C. [2000], “Le hasard fait bien les choses : histoire du docteur Markowitz”, *Economie et sociétés*, série “Oeconomia”, vol. 30, n° 7, pp 85-118.
- QUÉTELET A. [1835], *Sur l’homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale*, Paris, Bachelier.
- SHARPE W. [1963], “A Simplified Model for Portfolio Analysis”, *Management Science*, janvier, pp 277-293.
- SHARPE W. [1964], “Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”, *Journal of Finance*, vol. 19, pp 425-442.
- SHARPE W. [1967], “A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection”, *Management Science*, vol. 13, n°7, mars, pp 499-510.
- SHARPE W. [1971], “A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, décembre, pp 1263-1275.
- TOBIN J. [1958], “Liquidity Preference as Behavior Towards Risk”, *Review of Economic Studies*, vol. 67, février, pp 65-86.
- TOBIN J. [1986], “James Tobin”, dans BREIT W., SPENCER W., *Lives of the Laureates : Seven Nobel Economists*, MIT Press.
- WALTER C. [1999], “Aux origines de la mesure de performance des fonds d’investissement : les travaux d’Alfred Cowles”, *Histoire et mesure*, vol. 14, n° 1-2, pp 163-197.
- WALTER C. [2002a], “La recherche de lois d’échelles sur les variations boursières”, dans ABRY P., GONÇALVÈS P. LÉVY VÉHEL J., *Lois d’échelle, fractales et ondelettes*, Hermès.
- WALTER C. [2002b], “From Bachelier’s dissertation to Portfolio Management Industry : One aspect of the Bachelier Heritage in Finance”, dans COURTAULT J.M., KABANOV Y., *Louis Bachelier, aux origines de la finance mathématique*, Presses universitaires Franc-Comtoises.