



HAL
open science

Planification de trajectoire d'un système non linéaire de type FitzHugh Nagumo

Emmanuelle Crépeau

► **To cite this version:**

Emmanuelle Crépeau. Planification de trajectoire d'un système non linéaire de type FitzHugh Nagumo. Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA), 2011, 45 (7-10), pp.631-643. 10.3166/jesa.45.631-643 . hal-04579062

HAL Id: hal-04579062

<https://hal.science/hal-04579062v1>

Submitted on 17 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Plannification de trajectoire d'un système non linéaire de type FitzHugh Nagumo

Emmanuelle Crépeau*

2011

Abstract

This paper concerns the nonlinear 1D FitzHugh Nagumo system with a Robin boundary control. We prove that this system is "flat-like" with the outflow electrical potential playing the role of the flat output. Indeed, the solution can be expressed in terms of an infinite series depending on the derivatives and the integrals of the flat output. This series is shown to be convergent provided that the flat output is Gevrey of order $1 < a \leq 2$. Numerical simulations are also presented.

Dans cet article, nous considérons le système non linéaire de FitzHugh Nagumo en 1D avec un contrôle frontière de type Robin. Nous prouvons que ce système est quasi "plat", le potentiel au bord jouant le rôle de la sortie plate. En effet, la solution du système peut s'exprimer sous la forme d'une série infinie dépendant des dérivées et primitives de la sortie plate. On montre que cette série est convergente si la sortie plate est de type Gevrey d'ordre $1 < a \leq 2$. Une illustration numérique est ensuite présentée.

Key words: Flatness, FitzHugh Nagumo's system.

mots clés: Platitude, système de FitzHugh Nagumo

1 Introduction

Nous considérons dans cet article le système non linéaire de FitzHugh Nagumo, en 1D, qui est un système de type réaction-diffusion avec une non-linéarité cubique. Les conditions au bord sont prises de type Robin. On se place sur un intervalle Ω borné, par commodité on prendra dans la suite $\Omega = [-1, 0]$.

$$(FHN) \begin{cases} y_t = y_{xx} + h(y) - z, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (-1, 0) \\ z_t = \delta y - \gamma z, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (-1, 0) \\ \alpha y_x(-1, t) + y(-1, t) = u(t), & t \in \mathbb{R}^+ \\ y_x(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ y(x, 0) = y^0(x), z(x, 0) = 0 & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

ici h est une non-linéarité de type cubique, i.e. $h(y) = -y(y - \beta)(y - 1)$ avec un paramètre $\beta > 0$. Dans ce système, y représente l'espèce qui diffuse et z l'espèce stockée, les paramètres $\delta > 0$, $\gamma \geq 0$ et α sont des constantes connues et u est le contrôle dans $L^2(0, T)$, on suppose que la composante z est nulle à l'instant initial.

*Laboratoire de Mathématiques de Versailles

Batiment Fermat - Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, 78035 Versailles. E-mail: crepeau@math.uvsq.fr

Ce type de système apparaît dans de nombreuses modélisations de systèmes chimiques, à la fois en biologie et en industrie. En 1952, Hodgkin et Huxley développent ce modèle pour représenter la conduction électro-chimique dans un nerf [5]. La variable y joue alors le rôle du potentiel électrique et z la concentration chimique. Il sert également de modèle pour la propagation de l'onde électrique dans le cœur. Dans ce cas, y représente le potentiel transmembranaire et z est une variable auxiliaire, u le signal d'entrée et on peut mesurer la réponse de sortie, $y(0, t)$, à l'aide d'un électrocardiogramme, voir [1].

De nombreux résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus pour ce système. Citons en particulier [10], [6], ou bien encore [11]. Pour le cas qui nous intéresse, dans un domaine borné avec les conditions de Robin, Rauch, dans [9], a montré le résultat d'existence de solutions globales suivant.

Théorème 1 ([9]) *Pour tout $y_0 \in H^2(\Omega)$, il existe un unique couple de solutions (y, z) dans $C([0, \infty), H^2(\Omega)^2) \cap C^1([0, \infty), L^2(\Omega)^2)$ au problème (FHN) homogène.*

Le problème de contrôlabilité pour ce type de problème a été assez peu étudié à notre connaissance. La contrôlabilité approchée d'une version linéarisée de ce système, *i.e.* lorsque $h(y) = -\beta y$ a déjà été démontrée dans [3] à l'aide d'une résolution de type platitude. On montre que toute condition finale dans $L^2(\Omega)$ peut être approchée aussi près que l'on veut par un contrôle dans $C^\infty(0, T)$.

Quant au problème non linéaire avec conditions de Dirichlet et contrôle interne, un résultat de contrôle optimal a été obtenu dans [2] à l'aide du formalisme de Dubovistky-Milyutin.

Dans cet article nous nous intéressons au problème de planification de trajectoire, *i.e.* étant donné une sortie, nous souhaitons reconstruire le signal sous la forme d'une série dépendant de cette sortie. La planification de trajectoires pour des EDP est étudiée dans [7] pour le problème de la chaleur, où il est démontré que lorsque la sortie plate est de type Gevrey, la série solution obtenue est convergente. D'autres résultats de platitude pour des équations paraboliques non-linéaires avec une non-linéarité quadratique sont donnés dans [8] et [4]. Dans cet article nous appliquons ces résultats à notre non-linéarité cubique.

Dans un premier temps, nous montrons que le système non linéaire est de type plat avec le potentiel électrique de sortie jouant le rôle de la sortie plate. En section 2, nous donnons la décomposition formelle de la solution en termes d'une série dépendant de la sortie plate. Ensuite nous montrons que sous certaines conditions de type Gevrey sur la sortie plate, cette série solution converge. La dernière section est consacrée à des illustrations numériques de contrôle de la sortie.

2 Solution formelle

À partir du système (FHN) on obtient facilement l'expression de z par une simple intégration en temps,

$$z(x, t) = \delta \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} y(x, s) ds, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (-1, 0).$$

Le système à étudier devient alors

$$\begin{cases} y_t = y_{xx} + h(y) - \delta \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} y(s) ds, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (-1, 0) \\ \alpha y_x(-1, t) + y(-1, t) = u(t), & t \in \mathbb{R}^+ \\ y_x(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ z(x, t) = \delta \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} y(x, s) ds & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (-1, 0) \end{cases}$$

On cherche une solution formelle du type, $y(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t) \frac{x^k}{k!}$ et on suppose dans un premier temps que la série converge et que les fonctions y_k sont suffisamment régulières. On obtient

alors la récurrence formelle suivante, pour tout entier k ,

$$(1) \quad \begin{aligned} y_{k+2} = & \dot{y}_k + \beta y_k - (1 + \beta) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} y_i y_{k-i} \\ & + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} y_i y_j y_{k-i-j} + \delta \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} y_k(s) ds \end{aligned}$$

où \dot{y}_k représente la dérivée en temps de y_k .

D'après les conditions au bord, les premiers termes deviennent

$$y_0(t) = y(0, t), \text{ et } y_1(t) = y_x(0, t) = 0.$$

Donc pour tout $(x, t) \in [-1, 0] \times [0, +\infty)$,

$$(2) \quad \begin{cases} y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t) \frac{x^k}{k!}, \\ z(x, t) = \delta \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} y(x, s) ds. \end{cases}$$

Le système est donc formellement quasi plat, la série-solution s'exprimant en fonction uniquement de la sortie dite plate y_0 , de ses dérivées et de ses primitives. On retrouve cette définition de quasi-platité dans [3]. Le système n'est pas plat au sens de [7] puisque la présence du terme intégral dans l'équation nécessite l'expression de la solution en fonction non seulement de la sortie et de ses dérivées mais également de ses primitives.

3 Convergence de la série solution formelle

Dans cette partie, nous allons donner des conditions suffisantes sur la sortie plate $y_0 = y(0, \cdot)$ pour assurer la convergence de la solution formelle donnée par (2).

Théorème 2 *Soit y_0 une fonction de Gevrey d'ordre $1 < a \leq 2$, i.e. une fonction C^∞ telle que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |y_0^{(l)}(t)| \leq m \frac{l!^a}{\rho^l}, \quad \forall l \geq 0,$$

où ρ et m sont constants. Alors le rayon de convergence R des solutions données sous forme de série (2) à l'aide de la formule de récurrence (1) sur un intervalle de temps $[0, T]$ est tel que

$$R \geq \frac{1}{\frac{1}{\rho} + |\beta| + |1 + \beta| \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2} + \delta(\rho + T)}$$

Preuve : Nous adaptons à notre cas comportant une non-linéarité cubique et un terme intégral, la preuve faite dans [8] et [4].

Nous allons dans un premier temps montrer par récurrence l'estimation suivante,

Lemme 3

$$(3) \quad \sup_{t \in [0, T]} |y_k^{(l)}(t)| \leq \frac{m M^k (k+l)!^a}{\rho^l k!^{a-1}}$$

pour tout $l, k \geq 0$, avec m constant et $M = \frac{1}{\rho} + |\beta| + |1 + \beta| \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2} + \delta(\rho + T)$, $\rho \leq \frac{1}{\gamma}$ et $1 \leq a \leq 2$.

La preuve étant très technique, nous renvoyons en annexe pour une démonstration complète. D'après les majorations du lemme 3, on a

$$\frac{k!}{y_k(t)} \geq \frac{1}{mM^k}$$

La règle de Cauchy-Hadamard sur la convergence des séries, nous donne alors un rayon de convergence de la série solution, R tel que

$$(4) \quad R \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{k!}{|y_k(t)|} \right)^{1/k} = \frac{1}{M}$$

Remarque 4 Comme la longueur spatiale du domaine est choisie égale à 1, on demande un rayon de convergence au moins égal à 1, donc

$$\frac{1}{\rho} + |\beta| + |1 + \beta| \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2} + \delta(\rho + T) \leq 1.$$

Remarque 5 Il est clair que z et u sont aussi des séries convergentes de rayon $1/M$.

4 Résultats numériques

Dans cette section, on illustre les résultats de platitude obtenus à l'aide de simulations numériques. On désire contrôler la sortie du système d'un état constant P_1 à un autre état P_2 . Pour cela, on définit la fonction bump usuelle, Φ_σ par

$$\Phi_\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{\int_0^{t/T} \exp(-1/(\tau(1-\tau))^\sigma) d\tau}{\int_0^1 \exp(-1/(\tau(1-\tau))^\sigma) d\tau} & 0 \leq t \leq T \\ 1 & t > T. \end{cases}$$

avec $\sigma \geq 1$. Cette fonction est Gevrey d'ordre $1 + 1/\sigma$.

Soit $y_0(t) = P_1 + (P_2 - P_1)\Phi_\sigma(t/T)$ avec $\sigma = 1$ de sorte que Φ_σ est Gevrey d'ordre 2 et on a la convergence de la série d'après les résultats précédents énoncés dans le théorème 2.

Les paramètres du modèle sont choisis comme suit,

$$\begin{cases} d = 1, \\ \beta = 0.3, \\ \delta = 1, \\ \gamma = 0.1, \end{cases}$$

et $P_1 = 0$, $P_2 = 1$ et $T = 1$. Les résultats obtenus sont présentés en figure 1 et concordent avec les résultats théoriques obtenus précédemment.

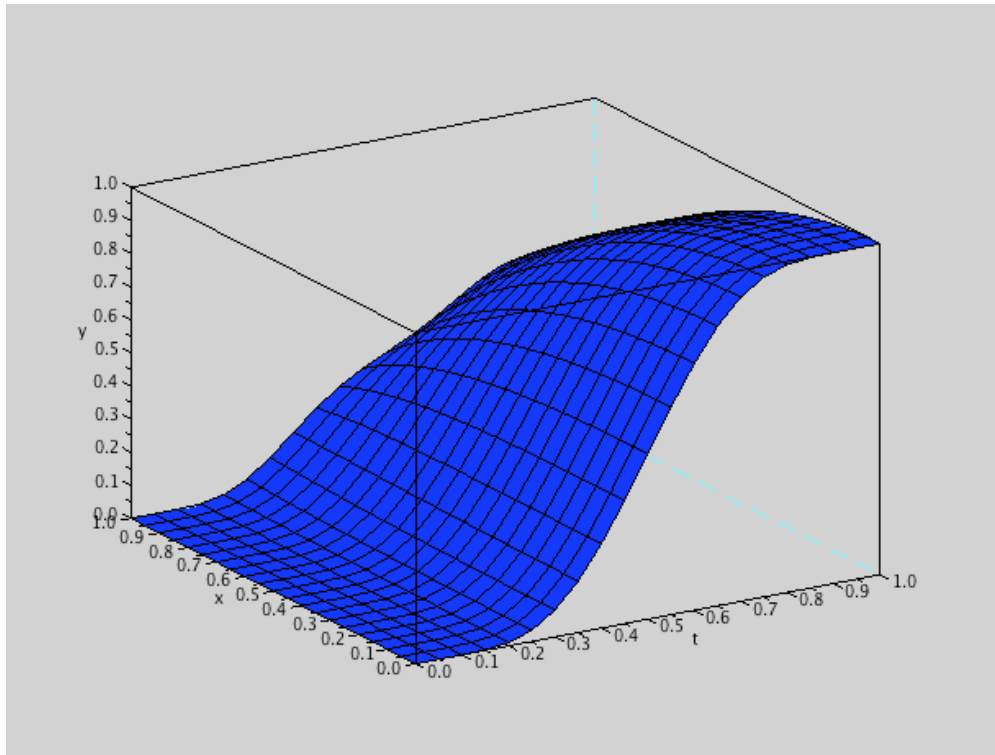


Figure 1: Évolution en temps de la composante y

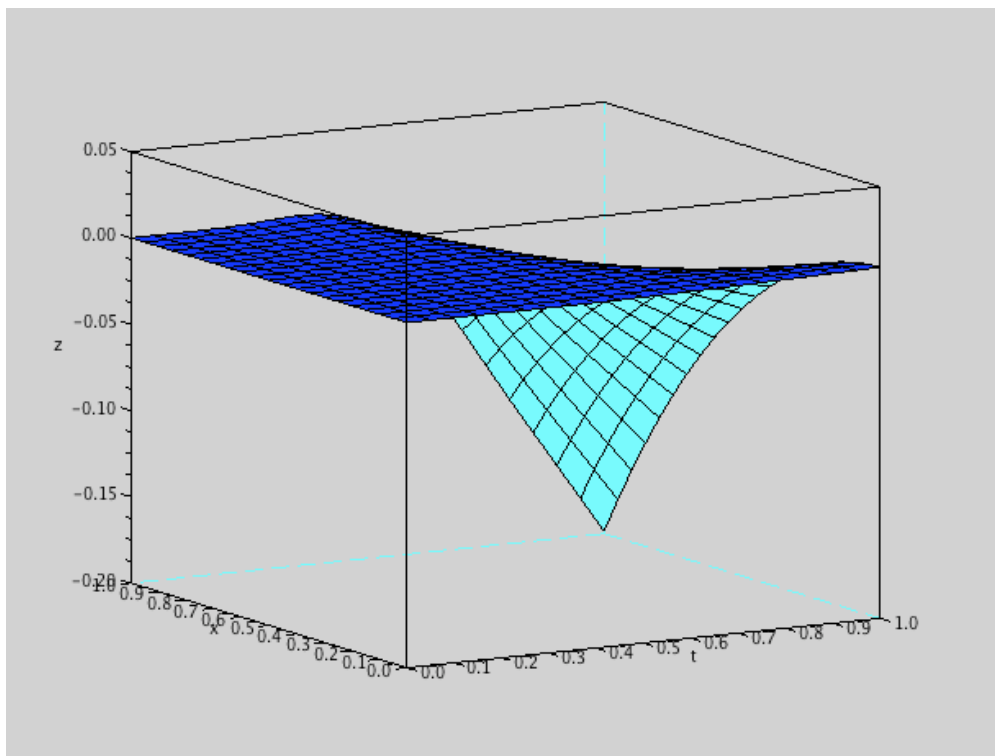


Figure 2: Évolution en temps de la composante z

5 Conclusion

Ce travail permet de paramétrer certaines trajectoires du système non linéaire de FitzHugh Nagumo sous la forme de séries infinies, fonctions d'une sortie plate, de ses dérivées et primitives. Il permet également de planifier des trajectoires allant d'un profil initial de sortie à un autre profil de sortie en fonction du contrôle u d'entrée. Ce résultat peut être intéressant notamment en cardiologie où on souhaite suivre des profils d'ecg, sortie mesurée, et peut être en particulier utilisé pour modéliser des cœurs artificiels. En revanche, de part la complexité apparente de l'expression de récurrence, on ne peut espérer contrôler même de manière approchée tout l'état du système comme dans [7] et [3], seule la sortie peut être contrôlée.

References

- [1] N. AYACHE, D. CHAPELLE, F. CLÉMENT, Y. COUDIÈRE, H. DELINGETTE, J. DÉSIDÉRI, M. SERMESANT, M. SORINE, AND J. URQUIZA, *Towards model-based estimation of the cardiac electro-mechanical activity from ecg signals and ultrasound images*, Lecture Notes in Computer Science, 2230 (2001), pp. 120–127.
- [2] A. BRANDAO, E. FERNANDEZ-CARA, P. MAGALHAES, AND M. ROJAS-MEDAR, *Theoretical analysis and control results for the fitzhugh-nagumo equation*, Electronic Journal of Differential equations, 164 (2008), pp. 1–20.
- [3] E. CRÉPEAU AND C. PRIEUR, *Approximate controllability of a reaction-diffusion system*, Systems & Control Letters, 57 (2008), pp. 1048–1057.
- [4] W. DUNBAR, N. PETIT, P. ROUCHON, AND P. MARTIN, *Motion planning for a nonlinear stefan problem*, ESAIM COCV, 9 (2003), pp. 275–296.
- [5] A. HODGKIN AND A. HUXLEY, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in a nerve*, J. Physiol., 117 (1952), pp. 500–544.
- [6] D. JACKSON, *Existence and regularity for the fitzhugh nagumo equations with inhomogeneous boundary equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 14 (1990), pp. 201–216.
- [7] B. LAROCHE, P. MARTIN, AND P. ROUCHON, *Motion planning for the heat equation*, J. Robust Nonlinear Control, 10 (2000), pp. 629–643.
- [8] A. LYNCH AND J. RUDOLPH, *Flatness-based boundary control of a nonlinear parabolic equation modelling a tubular reactor*, vol. 259, Springer, edited by a. isidori, f. lammabhi-lagarrigue and w. respondek ed., 2000.
- [9] J. RAUCH, *Global existence for the fitzhugh-nagumo equations*, Comm. Partial Differential Equations 1, 6 (1976), pp. 609–621.
- [10] J. RAUCH AND J. SMOLLER, *Qualitative theory of the fitzhugh nagumo equations*, Advances in Mathematics, 27 (1978), pp. 12–44.
- [11] M. SCHONBECK, *Boundary value problems for the fitzhugh nagumo equations*, J. of Differential Equations, 30 (1978), pp. 119–147.

6 Annexe. Preuve du lemme 3

Nous utiliserons deux lemmes techniques dont la preuve se trouve dans [8] et [4].

Lemme 6 $\forall i, j, l \in \mathbb{N}$

$$(5) \quad \frac{i!j!(i+j+l+1)!}{(i+j+1)!} = \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (j+r)!(i+l-r)!$$

Lemme 7 Soit $a \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$ et des réels, $c_r \geq 1$ and $b_r \geq 0$, pour $r = 0, \dots, l$ alors

$$(6) \quad \sum_{r=0}^l c_r (b_r)^a \leq \left(\sum_{r=0}^l c_r b_r \right)^a.$$

Nous allons donc montrer par récurrence sur k , la majoration

$$(7) \quad \sup_{t \geq 0} |y_k^{(l)}(t)| \leq \frac{mM^k (k+l)!^a}{\rho^l k!^{a-1}}$$

pour tout $l, k \geq 0$, avec M et m constants, $\rho \leq \frac{1}{\gamma}$ et $1 \leq a \leq 2$.

L'hypothèse (7) est vérifiée pour $k = 0$ et $k = 1$.

Supposons l'hypothèse (7) vérifiée jusqu'au rang k , pour tout $l \geq 0$,

En dérivant la formule de récurrence (1) l fois par rapport au temps, et à l'aide de la formule de Leibniz et du produit de Cauchy, on obtient

$$(8) \quad \begin{aligned} y_{k+2}^{(l)} &= y_k^{(l+1)} + \beta y_k^{(l)} - (1 + \beta) \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{r} y_i^{(l-r)} y_{k-i}^{(r)} \\ &+ \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^{l-r} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \binom{l}{r} \binom{l-r}{s} y_i^{(r)} y_j^{(s)} y_{k-i-j}^{(l-r-s)} \\ &+ \delta \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (-\gamma)^{l-r} e^{-\gamma t} \left(\int_0^t e^{\gamma s} y_k(s) ds \right)^{(r)}. \end{aligned}$$

Donc

$$(9) \quad \begin{aligned} |y_{k+2}^{(l)}| &\leq |y_k^{(l+1)}| + |\beta y_k^{(l)}| + |1 + \beta| \left| \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{r} y_i^{(l-r)} y_{k-i}^{(r)} \right| \\ &+ \left| \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^{l-r} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \binom{l}{r} \binom{l-r}{s} y_i^{(r)} y_j^{(s)} y_{k-i-j}^{(l-r-s)} \right| \\ &+ \left| \delta \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (-\gamma)^{l-r} e^{-\gamma t} \left(\int_0^t e^{\gamma s} y_k(s) ds \right)^{(r)} \right|. \end{aligned}$$

Nous allons majorer chaque terme de l'expression de droite séparément.

D'après l'hypothèse de récurrence (1), on a pour les deux premiers termes de droite,

$$(10) \quad \begin{aligned} |y_k^{(l+1)}| &\leq \frac{mM^k (k+l+1)!^a}{\rho^{l+1} k!^{a-1}} \\ &\leq \frac{mM^{k+2} (k+l+2)!^a}{\rho^l (k+2)!^{a-1}} \left(\frac{1}{M^2 \rho} \frac{((k+1)(k+2))^{a-1}}{(k+l+2)^a} \right) \\ &\leq \frac{mM^{k+2} (k+l+2)!^a}{\rho^l (k+2)!^{a-1}} \left(\frac{1}{M^2 \rho} \right) \end{aligned}$$

et

$$(11) \quad \begin{aligned} |\beta y_k^{(l)}| &\leq |\beta| \frac{mM^k (k+l)!^a}{\rho^l k!^{a-1}} \\ &\leq m \frac{M^{k+2} (k+l+2)!^a}{\rho^l (k+2)!^{a-1}} \left(|\beta| \frac{1}{M^2} \frac{((k+1)(k+2))^{a-1}}{((k+l+1)(k+l+2))^a} \right) \\ &\leq m \frac{M^{k+2} (k+l+2)!^a}{\rho^l (k+2)!^{a-1}} \left(|\beta| \frac{1}{M^2} \right) \end{aligned}$$

Pour le troisième terme, on reprend la preuve de [4] et [8],

$$\begin{aligned}
(12) \quad & \left| \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{r} y_i^{(l-r)} y_{k-i}^{(r)} \right| \\
& \leq \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{r} \left(\frac{mM^i (i+l-r)!^a}{\rho^{l-r} i!^{a-1}} \right) \left(\frac{mM^{k-i} (k-i+r)!^a}{\rho^r (k-i)!^{a-1}} \right) \\
& \leq \frac{m^2 M^k}{\rho^l} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{1}{i!^{a-1} (k-i)!^{a-1}} \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (i+l-r)!^a (k-i+r)!^a
\end{aligned}$$

Or d'après le lemme 7, et avec le lemme 6,

$$\begin{aligned}
(13) \quad & \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (i+l-r)!^a (k-i+r)!^a \leq \left(\sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (i+l-r)! (k-i+r)! \right)^a \\
& = \left(\frac{i!(k-i)!(k+l+1)}{(k+1)!} \right)^a
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(14) \quad & \left| \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{r} y_i^{(l-r)} y_{k-i}^{(r)} \right| \\
& \leq \frac{m^2 M^k}{\rho^l} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{1}{i!^{a-1} (k-i)!^{a-1}} \left(\frac{i!(k-i)!(k+l+1)}{(k+1)!} \right)^a \\
& \leq \frac{m^2 M^k (k+l+1)!^a}{\rho^l (k+1)!^{a-1}} \\
& \leq m \frac{M^{k+2} (k+l+2)!^a}{\rho^l (k+2)!^{a-1}} \left(\frac{m}{2M^2} \right)
\end{aligned}$$

Nous allons majorer la quatrième expression en utilisant la majoration précédente, en procédant en deux étapes.

D'après la majoration précédente, appliquée au rang $k-i$ et à ma dérivée $l-r$ en temps,

$$(15) \quad \left| \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{s=0}^{l-r} \binom{k-i}{j} \binom{l-r}{s} y_j^{(s)} y_{k-i-j}^{(l-r-s)} \right| \leq \frac{m^2 M^{k-i}}{\rho^{l-r}} \frac{(k-i+l-r+1)!^a}{(k-i+1)!^{a-1}}$$

Par conséquent,

$$(16) \quad \begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^{l-r} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \binom{l}{r} \binom{l-r}{s} y_i^{(r)} y_j^{(s)} y_{k-i-j}^{(l-r-s)} \right| \\ & \leq \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{r} \left(\frac{m M^i (i+r)!^a}{\rho^r i!^{a-1}} \right) \\ & \quad \left(\frac{m^2 M^{k-i}}{\rho^{l-r}} \frac{(k-i+l-r+1)!^a}{(k-i+1)!^{a-1}} \right) \\ & \leq \frac{m^3 M^k}{\rho^l} \sum_{i=0}^k \frac{\binom{k}{i}}{i!^{a-1} (k-i+1)!^{a-1}} \\ & \quad \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (i+r)!^a (k-i+1+l-r)!^a \end{aligned}$$

En appliquant successivement les lemmes 7 et 6, on obtient,

$$(17) \quad \begin{aligned} & \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (i+r)!^a (k-i+1+l-r)!^a \\ & \leq \left(\sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (i+r)! (k-i+1+l-r)! \right) \\ & \leq \left(\frac{i! (k-i+1)! (k+l+2)!}{(k+2)!} \right)^a \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(18) \quad \begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^{l-r} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \binom{l}{r} \binom{l-r}{s} y_i^{(r)} y_j^{(s)} y_{k-i-j}^{(l-r-s)} \right| \\ & \leq \frac{m^3 M^k}{\rho^l} \sum_{i=0}^k \frac{k! (k-i+1)}{i!^a (k-i+1)!^a} \\ & \quad \frac{i!^a (k-i+1)!^a (k+l+2)!^a}{(k+2)!^a} \\ & \leq \frac{m^3 M^k}{\rho^l} \frac{k! (k+l+2)!^a}{(k+2)!^a} \sum_{i=0}^k k-i+1 \end{aligned}$$

or $\sum_{i=0}^k k-i+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, on obtient donc la majoration,

$$\begin{aligned}
(19) \quad & \left| \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^{l-r} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \binom{l}{r} \binom{l-r}{s} y_i^{(r)} y_j^{(s)} y_{k-i-j}^{(l-r-s)} \right| \\
& \leq \frac{m^3 M^k k! (k+l+2)!^a (k+1)(k+2)}{\rho^l (k+2)!^a 2} \\
& \leq \frac{m^3 M^k (k+l+2)!^a}{2\rho^l (k+2)!^{a-1}} \\
& \leq \frac{mM^{k+2} (k+l+2)!^a}{\rho^l (k+2)!^{a-1}} \left(\frac{m^2}{2M^2} \right)
\end{aligned}$$

Il nous reste la dernière expression, sous forme d'intégrale à majorer. A l'aide de la formule de Leibnitz, on obtient,

$$\begin{aligned}
(20) \quad & \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (e^{-\gamma t})^{(l-r)} \left(\int_0^t e^{\gamma s} y_k(s) ds \right)^{(r)} = (-\gamma)^l e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} y_k(s) ds \\
& + \sum_{r=1}^l \binom{l}{r} (-\gamma)^{l-r} e^{-\gamma t} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} \gamma^{r-1-s} e^{\gamma t} y_k^{(s)}
\end{aligned}$$

Chaque terme peut se majorer séparément. Comme ρ peut être choisi aussi petit qu'on veut tel que $\gamma\rho \leq 1$, on obtient pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
(21) \quad & |(-\gamma)^l e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} y_k(s) ds| \leq \gamma^l T m M^k k! \\
& \leq \frac{mM^{k+2} (k+l+2)!^a}{\rho^l (k+2)!^{a-1}} \left(\frac{(\gamma\rho)^l T}{M^2} \right) \\
& \leq \frac{mM^{k+2} (k+l+2)!^a}{\rho^l (k+2)!^{a-1}} \left(\frac{T}{M^2} \right)
\end{aligned}$$

Le deuxième terme se majore de la manière suivante,

$$\begin{aligned}
(22) \quad & \left| \sum_{r=1}^l \binom{l}{r} (-\gamma)^{l-r} e^{-\gamma t} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} \gamma^{r-1-s} e^{\gamma t} y_k^{(s)} \right| \\
& \leq \sum_{r=1}^l \binom{l}{r} \gamma^{l-1} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} \gamma^{-s} \frac{mM^k (k+s)!^a}{\rho^s k!^{a-1}} \\
& \leq \frac{\gamma^{l-1}}{(\gamma\rho)^{l-1}} \frac{mM^k}{k!^{a-1}} \sum_{r=1}^l \binom{l}{r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} (k+s)!^a
\end{aligned}$$

À l'aide du lemme 7 appliqué deux fois, et du lemme 6, on obtient,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{r=1}^l \binom{l}{r} (-\gamma)^{l-r} e^{-\gamma t} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} \gamma^{r-1-s} e^{\gamma t} y_k^{(s)} \right| \\
& \leq \frac{1}{\rho^{l-1}} \frac{mM^k}{k!^{a-1}} \left(\sum_{r=1}^l \binom{l}{r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} (k+s)! \right)^a \\
& \leq \frac{1}{\rho^{l-1}} \frac{mM^k}{k!^{a-1}} \left(\sum_{r=1}^l \binom{l}{r} \frac{k!(k+r-1+1)!}{(k+1)!} \right)^a \\
(23) \quad & \leq \frac{1}{\rho^{l-1}} \frac{mM^k}{k!^{a-1}(k+1)^a} \left(\sum_{r=1}^l \binom{l}{r} (k+r)! \right)^a \\
& \leq \frac{1}{\rho^{l-1}} \frac{mM^k}{k!^{a-1}(k+1)^a} \left(\frac{k!(k+l+1)!}{(k+1)!} \right)^a \\
& \leq \frac{1}{\rho^{l-1}} \frac{mM^k}{k!^{a-1}(k+1)^{2a}} (k+l+1)!^a \\
& \leq \frac{mM^{k+2}}{\rho^l} \frac{(k+l+2)!^a}{(k+2)!^{a-1}} \left(\frac{\rho}{M^2} \frac{(k+2)^a}{(k+l+2)^a (k+1)^{a+1} (k+2)} \right)
\end{aligned}$$

or on a clairement, $\frac{(k+2)^a}{(k+l+2)^a (k+1)^{a+1} (k+2)} \leq 1$ donc,

$$\begin{aligned}
(24) \quad & \left| \sum_{r=1}^l \binom{l}{r} (-\gamma)^{l-r} e^{-\gamma t} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} \gamma^{r-1-s} e^{\gamma t} y_k^{(s)} \right| \\
& \leq \frac{mM^{k+2}}{\rho^l} \frac{(k+l+2)!^a}{(k+2)!^{a-1}} \left(\frac{\rho}{M^2} \right)
\end{aligned}$$

En regroupant toutes les inégalités obtenues précédemment, on trouve,

$$(25) \quad |y_{k+2}^{(l)}| \leq m \frac{M^{k+2}}{\rho^l} \frac{(k+l+2)!^a}{(k+2)!^{a-1}} \frac{\left(\frac{1}{\rho} + |\beta| + |1 + \beta| \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2} + \delta(\rho + T) \right)}{M^2}$$

Soit M tel que

$$(26) \quad \frac{1}{M^2} \left(\frac{1}{\rho} + |\beta| + |1 + \beta| \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2} + \delta(\rho + T) \right) = 1$$

On choisit donc

$$(27) \quad M = \sqrt{\frac{1}{\rho} + |\beta| + |1 + \beta| \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2} + \delta(\rho + T)}$$