



HAL
open science

La structure des courbes analytiques

Antoine Ducros

► **To cite this version:**

| Antoine Ducros. La structure des courbes analytiques. 2024. hal-04578777

HAL Id: hal-04578777

<https://hal.science/hal-04578777>

Preprint submitted on 17 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La structure des courbes analytiques

ANTOINE DUCROS

Institut de mathématiques de Jussieu
Projet *Topologie et géométrie algébriques*
4 place Jussieu 75005 Paris FRANCE

Table des matières

(Trop brève) introduction	9
1 Topologie : la théorie des graphes réels	11
1.1 Généralités	11
1.2 L'arbre des boules d'un espace ultramétrique E	13
Définition de l'espace $\aleph(E)$ des boules de E	13
Une compactification partielle : l'espace $\beth(E)$ des chaînes ouvertes saturées de $\aleph(E)$	14
Le compactifié d'Alexandrov $\widehat{\beth(E)}$ de $\beth(E)$	21
Complément : boules emboîtées de E et espace $\beth(E)$	24
1.3 Arbres et graphes : propriétés de base	26
Définitions et premiers exemples	26
Quelques propriétés locales des graphes	27
Parties convexes d'un arbre	27
Autour des sous-graphes d'un graphe donné	29
Composantes connexes de certains ouverts d'un graphe	30
Définition générale de la valence ; points isolés, unibranches et pluribranches	32
Existence de points unibranches dans le cas compact	33
La notion de partie convexe d'un graphe	34
1.4 La compactification arboricole	34
L'espace des bouts d'un graphe connexe	34
Propriété universelle de la compactification d'un graphe	37
L'enveloppe convexe d'une partie compacte d'un arbre	40
1.5 Sous-graphes admissibles et squelettes	48
Sous-graphes admissibles	48
Le squelette d'un graphe	49
La rétraction canonique sur un sous-graphe admissible	51
Dimension topologique d'un graphe paracompact	58
Sous-graphes admissibles et revêtements topologiques	59
1.6 Toises et homotopies	61
Toises sur un graphe	61
Homotopies	64
1.7 Branches d'un graphe	67
Images directe et réciproque d'une branche	69
Branches et étoiles	70
Branches et bouts	75
1.8 Cochaînes harmoniques sur un graphe localement fini	78

	Définition et premières propriétés	78
	Interprétation cohomologique	80
1.9	Quotients d'un graphe	80
	Action de G sur un graphe : premières propriétés	80
	Quotient d'un arbre sous l'action de G	84
	Compactification et quotient	89
	Étude locale autour d'un point fixe : sections et voisinages stables	92
	Quotient d'un graphe par une relation d'équivalence d'un type	
	particulier	95
	Quotients et toises	97
1.10	Espaces dont un quotient d'un certain type est un graphe	100
2	Algèbre commutative	107
2.1	Morphismes étales et anneaux locaux henséliens	107
	Schémas étales sur une base normale	107
	Généralités sur les μ_ℓ -torseurs	108
	La notion de résidu	109
	La suite exacte des résidus	110
	Anneaux locaux henséliens	111
	Hensélisé d'un anneau local	113
2.2	Algèbre commutative graduée	114
	Généralités	115
	Extensions de corps, degré de transcendance et théorie de	
	Galois	121
	Valuations	133
	Réduction à la Temkin	136
	Un théorème de Chevalley pour les espaces de Zariski-Riemann	
	gradués	140
	Exemples d'homéomorphismes entre espaces de Zariski-	
	Riemann gradués	141
2.3	Les corps henséliens et leurs extensions modérément ramifiées . .	142
	Rappels sur les prolongements d'une valuation à une extension	
	algébrique	142
	La notion de corps valué hensélien	143
	Groupe de décomposition, hensélisé d'un corps valué	145
	Théorie de Galois d'un corps valué hensélien	149
	Extensions modérément ramifiées	153
	Extensions non ramifiées	154
	Les μ_ℓ -torseurs sur un corps valué hensélien	156
	Extensions modérément ramifiées : le cas d'un corps résiduel	
	séparablement clos	157
3	Géométrie analytique	159
3.1	Espaces de Berkovich : rappels et notations	159
	Quelques conventions et notations	159
	Réduction à la Temkin : le cas affinoïde	160
	Réduction à la Temkin : le cas local	161
	Espaces quasi-lisses	163
3.2	Quelques compléments sur les espaces analytiques généraux . . .	164
	Morphismes finis et plats	164

	Points d'Abhyankar	166
	Descente des immersions compactes	170
	Descente des domaines analytiques	173
	Descente du caractère affinoïde	174
3.3	Les courbes analytiques : premières propriétés	178
	Classification des points	178
	Bonté des courbes analytiques	180
3.4	Étude détaillée de la droite projective	181
	L'arbre compact $\widehat{\mathfrak{A}}(k)$ se plonge dans $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$	184
	La courbe $\mathbb{P}_{k^a}^{1,\text{an}}$ s'identifie à l'arbre $\widehat{\mathfrak{B}}(k^a)$	186
	L'arbre $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ et certains de ses sous-arbres finis	187
3.5	Toute courbe analytique est un graphe	192
	Courbes analytiques : allure globale	192
	Morphismes finis et plats entre courbes analytiques : le degré d'une branche sur son image	193
	L'exemple des fonctions non constantes	194
3.6	Disques et couronnes déployés et virtuels	196
	Disques et couronnes plongés	196
	Disques et couronnes : le point de vue intrinsèque	204
	Revêtements de Kummer des couronnes	209
	Disques et couronnes virtuels	212
	Existence de toises sur les sous-graphes compacts d'une courbe analytique	218
3.7	Algébrisation	219
	Algébrisation des courbes analytiques propres	219
	Algébrisation des courbes formelles propres	222
4	Étude locale des courbes analytiques	225
4.1	Chirurgie sur les courbes analytiques	225
	Prolongement d'un revêtement étale	225
	La chirurgie proprement dite	226
4.2	Branches et valuations	228
	L'anneau associé à une branche	228
	Image d'une branche par un morphisme de dimension relative nulle	237
	Fonctions sur une branche et hensélisé de la valuation associée	239
4.3	Branches des courbes quasi-lisses	242
	Un lemme de Gabber et ses conséquences	243
	Sections coronaires : le cas d'un point singulier isolé et «déployé»	244
	Sections et voisinages coronaires en un point de type 2 ou 3 : le cas d'un corps de base algébriquement clos	245
	Sections coronaires : le cas d'un point singulier isolé quelconque	248
	Sections et voisinages coronaires en un point de type 2 ou 3 : le cas d'un corps de base quelconque	249
	Degré d'une branche sur la branche image et ramification résiduelle	252
	Stabilité des corps de degré de transcendance résiduel gradué maximal	255
4.4	Voisinages des points d'une courbe quasi-lisse sur un corps algébriquement clos	258

	Germes de toseurs	258
	Théorèmes de finitude globale	266
	Voisinages d'un point de type 4 et revêtements des disques et couroannes	267
4.5	Étude locale des courbes quasi-lisses sur un corps de base quelconque	271
	Étude locale des courbes quasi-lisses sur un corps de base quelconque : préliminaires	271
	Bases de voisinages sur une courbe quasi-lisse	271
	Toise canonique et paracompacité des courbes analytiques	273
	Variation du corps des constantes sur une courbe	274
	Modération des morphismes compacts et non constants entre courbes	276
	Variation des fonctions holomorphes et loi des nœuds	280
5	Triangulations des courbes analytiques quasi-lisses	283
5.1	Sous-graphes analytiquement admissibles, squelette analytique et triangulations	283
	Lemmes de fusion	283
	Sous-graphes analytiquement admissibles	286
	Le squelette analytique	289
	Les nœuds d'un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible	292
	Triangulations	293
	Ablation et adjonction de sommets	295
	Description du squelette analytique dans le cas algébriquement clos	298
5.2	Triangulations et cohomologie étale	300
	Une suite exacte	300
	Calcul de $H^1(X_{ét}, \mu_\ell)$ <i>via</i> une triangulation lorsque le corps de base est algébriquement clos	302
5.3	Extension des scalaires	306
	Premières propriétés	306
	Les composantes qui apparaissent sont des disques virtuels	308
	Effets sur les sous-graphes et sur les triangulations	309
5.4	Triangulations minimales d'une courbe analytique quasi-lisse compacte	313
	Triangulations des courbes de genre zéro	313
	Courbes compactes de squelette analytique vide	316
	Les nœuds du squelette analytique	317
	Courbes compactes de squelette analytique non vide	318
	Deux exemples en genre 1	321
	Récapitulation	322
5.5	Raffinement : le cas des courbes marquées	323
	Triangulations adaptées	323
	Triangulations des courbes marquées	326
	Exemples	329

6	Modèles formels d'une courbe analytique en théorie de Berkovich	331
6.1	Une alternative pour les courbes irréductibles compactes	331
6.2	Quelques compléments	336
	Branches non discales, nœuds du squelette analytique et morphismes finis	336
6.3	Espaces analytiques formels	338
	Reconstitution d'une structure formelle sur une courbe à partir de ses sommets	343
	Fonctorialité	347
6.4	Application : la réduction semi-stable	352
	Le cas analytique	352
	Le cas algébrique	353
6.5	Le cas particulier de la valuation discrète	353
	Disques unité maximaux sur une courbe quasi-lisse	355

(Trop brève) introduction

Le but de cette monographie, qui est très loin d'être sous sa forme définitive, est de procéder à une étude systématique des courbes analytiques *au sens de Berkovich* sur un corps ultramétrique complet. Nous considérerons comme connues et utiliserons librement, sans références les définitions et propriétés générales des espaces de Berkovich. Nous renvoyons plus précisément aux textes fondateurs [1] et [2], ainsi qu'aux travaux de l'auteur [5] et [7] sur la théorie de la dimension, la notion d'espace quasi-lisse ou celle de composante irréductible. Nous ferons également un grand usage de la théorie de la réduction (graduée) des germes d'espaces analytiques due à Temkin ([9]).

Au chapitre 4 de [1], Berkovich donne une première description des courbes analytiques en se fondant sur le théorème de réduction semi-stable. Dans le présent texte, nous changeons de point de vue : nous nous livrons à une étude directe locale et globale des courbes analytiques, ce qui nous permet de montrer que toute courbe admet une *triangulation* (5.1.13, théorème 5.1.14), et nous en *déduisons* le théorème de réduction semi-stable (6.4.3).

Nous avons déjà introduit et utilisé la notion de triangulation dans des travaux antérieurs sur la comparaison entre cohomologies étale et topologique d'une courbe analytique ([6]), mais nous avons alors adopté l'approche classique consistant à construire une triangulation à partir d'un modèle semi-stable et non l'inverse comme nous le faisons ici.

Insistons sur le fait que ce travail est encore en chantier, et que nous sommes conscients qu'il n'est pas publiable en l'état (il pêche notamment par manque criant de références à la littérature existante). Mais comme il a d'ores et déjà été utilisé et cité ([3], [4], [8]), il nous a semblé préférable de le rendre accessible de manière pérenne en le déposant sur `arXiv`.

Chapitre 1

Topologie : la théorie des graphes réels

1.1 Généralités

Nous allons rappeler quelques faits élémentaires que nous utiliserons librement par la suite.

(1.1.1) Si U est une partie d'un espace topologique X , on notera \overline{U}^X (resp. $\partial_X U$) l'adhérence (resp. le bord) de U dans X ; on écrira simplement \overline{U} et ∂U s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'espace ambiant.

(1.1.2) Nous dirons qu'une application continue $\varphi : Y \rightarrow X$ entre espaces topologiques est *compacte* si $\varphi^{-1}(\mathcal{K})$ est compact pour tout compact \mathcal{K} de Y ; une application compacte dont le but est localement compact est fermée.

(1.1.3) Si G est un groupe topologique agissant sur un espace topologique X il sera toujours sous-entendu, sauf mention expresse du contraire, que $G \times X \rightarrow X$ est continue.

(1.1.4) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ une application continue et compacte entre espaces topologiques séparés et localement connexes.

(1.1.4.1) Soit x un point de X et soit y un antécédent de x isolé dans $\varphi^{-1}(x)$. Si U est un voisinage ouvert connexe de x , on notera $\varphi^{-1}(U)_y$ la composante connexe de y dans $\varphi^{-1}(U)$; on dira que $\varphi^{-1}(U)$ *isole* y si y est le seul antécédent de x sur $\varphi^{-1}(U)_y$; si $\varphi^{-1}(x)$ est discrète, on dira que $\varphi^{-1}(U)$ *sépare les antécédents de* x s'il isole chacun d'eux.

Les ouvert de la forme $\varphi^{-1}(U)$, où U est un voisinage ouvert connexe de x , forment une base de voisinages de la fibre $\varphi^{-1}(x)$; par conséquent, si U est un voisinage ouvert suffisamment petit de x et si $\varphi^{-1}(x)$ est finie alors $\varphi^{-1}(U)$ sépare les antécédents de x .

(1.1.4.2) Supposons que φ est de plus *ouverte*. Si U est un ouvert de X et si V est une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$ alors $\varphi(V)$ est une partie, connexe non vide, ouverte et fermée de U ; c'en est donc une composante connexe; en particulier, si U est lui-même connexe on a $\varphi(V) = U$.

(1.1.5) Soit X un espace topologique connexe et localement connexe, soit E un sous-ensemble fermé et non vide de X , et soit U un ouvert contenu dans $X \setminus E$. Nous utiliserons systématiquement et de façon implicite l'équivalence des propriétés suivantes :

- i) U est une composante connexe de $X \setminus E$;
- ii) U est connexe, non vide et $\partial U \subset E$;
- iii) U est connexe, non vide, et ∂U est non vide et contenu dans E .

Justifions-la brièvement : si i) est vraie alors U est connexe, non vide, et fermée dans $X \setminus E$, d'où ii); si ii) est vrai le bord de U ne peut être vide car sinon l'ouvert non vide U de X serait également fermé, contredisant la connexité de X ; et si iii) est vraie alors U est une partie ouverte, connexe, non vide et fermée de $X \setminus E$, d'où i).

(1.1.6) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ une surjection continue entre espaces topologiques et soit \mathcal{R} la relation d'équivalence sur Y dont les classes sont les fibres de φ . Si Y est quasi-compact et si X est séparé la flèche naturelle $Y/\mathcal{R} \rightarrow X$ est un homéomorphisme.

(1.1.7) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ une application continue entre espaces topologiques séparés. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) X est localement compact et φ est compacte;
- ii) tout point de X possède un voisinage compact dont l'image réciproque est compacte.

En effet, il est clair que i) \Rightarrow ii). Réciproquement, supposons que ii) soit satisfaite; cela entraîne immédiatement la locale compacité de X . Soit \mathcal{K} un compact de X ; en vertu de l'hypothèse ii), on peut le recouvrir par un nombre fini de compacts \mathcal{K}_i tels que $\varphi^{-1}(\mathcal{K}_i)$ soit compact pour tout i . L'image réciproque de \mathcal{K} est alors fermée dans le compact $\bigcup \varphi^{-1}(\mathcal{K}_i)$, et est donc elle-même compacte.

Supposons que ces conditions sont satisfaites, et que φ est de surcroît surjective. Soit X' une partie de X dont l'image réciproque Y' est fermée. Si V est un compact de X alors $V \cap X'$ est égal à $\varphi(Y' \cap \varphi^{-1}(V))$; comme Y' est fermé et $\varphi^{-1}(V)$ compact, $V \cap X'$ est compact. Joint à la compacité locale de X , ceci entraîne que X' est fermé; par conséquent, X s'identifie au quotient de Y par la relation d'équivalence dont les classes sont les fibres de φ .

(1.1.8) Soit X un espace topologique localement connexe et soit G un groupe topologique agissant sur X . Si U est une composante connexe de X le stabilisateur de U est un sous-groupe ouvert de G : pour le voir, il suffit de choisir un point x sur U et de remarquer que le stabilisateur en question est l'image réciproque de U par l'application $g \mapsto g.x$.

(1.1.9) Soit X un espace topologique séparé et localement compact et soit G un groupe topologique compact agissant sur X . Nous allons montrer que X/G est séparé et localement compact, et que la flèche $X \rightarrow X/G$ est ouverte et compacte.

(1.1.9.1) *Le quotient X/G est séparé.* Soient x et y deux points distincts de X/G . Ils correspondent à deux orbites distinctes $G.\xi$ et $G.\eta$ de G . Par compacité de G et par séparation et locale compacité de X , il existe un voisinage

ouvert V de ξ tel que \bar{V} soit compact et ne rencontre pas $G.\eta$. Le sous-ensemble $G.\bar{V}$ de X est l'image de la partie compacte $G \times \bar{V}$ de $G \times X$, et est donc compact ; son complémentaire W dans X est un ouvert G -invariant qui contient $G.\eta$; par ailleurs, $G.V$ est un ouvert G -invariant qui contient $G.x$ et ne rencontre pas W .

Si l'on note V' (resp. W') l'image de V (resp. W) sur X/G alors V' (resp. W') est un voisinage ouvert de x (resp. y), et $V' \cap W' = \emptyset$; par conséquent, X/G est séparé.

(1.1.9.2) *Le quotient X/G est localement compact et $X \rightarrow X/G$ est compacte.* Soit $x \in X/G$; il correspond à une orbite $G.\xi$ de G . Choisissons un voisinage compact Ω de ξ ; le sous-ensemble $G.\Omega$ de X est compact (en tant qu'image de $G \times \Omega$), stable sous G , et est un voisinage de $G.\xi$; son image Ω' sur X/G est alors un voisinage de x qui est compact puisque $G.\Omega$ est compact et X/G séparé ; de plus, l'image réciproque de Ω' sur X est par construction égale à $G.\Omega$, et est en particulier compacte. On déduit alors de 1.1.7 que X/G est localement compact et que $X \rightarrow X/G$ est compacte.

(1.1.9.3) *La flèche quotient $X \rightarrow X/G$ est ouverte.* Soit U un ouvert de X et soit V son image sur X/G . L'image réciproque de V sur X coïncidant avec l'ouvert $G.U$ de X , le sous-ensemble V de X/G en est une partie ouverte.

(1.1.9.4) *Remarque.* Soit H un sous-groupe compact de G ; de ce qui précède (appliqué aux flèches quotients $X \rightarrow X/G$ et $X \rightarrow X/H$) et de la surjectivité de $X \rightarrow X/H$, on déduit que $X/H \rightarrow X/G$ est compacte et ouverte.

(1.1.10) Soit X un espace topologique localement connexe, soit V une partie fermée de X dont le bord est fini, et soit Y une partie connexe de X dont l'intersection avec V est localement connexe. Sous ces hypothèses, $V \cap Y$ a un nombre fini de composantes connexes.

En effet, si $Y \subset V$ c'est évident ; supposons maintenant que Y n'est pas contenu dans V , et soit Z une composante connexe de $Y \cap V$; comme Z est fermée dans $Y \cap V$, elle est fermée dans Y .

Supposons que $Z \cap \partial V = \emptyset$; dans ce cas, Z serait un ouvert de $Y \cap (V \setminus \partial V)$, donc un ouvert de Y ; par connexité de Y , on aurait $Z = Y$ et donc $Y \subset V$, ce qu'on a exclu. Il s'ensuit que Z rencontre ∂V ; comme celui-ci est fini, $Y \cap V$ a un nombre fini de composantes connexes.

(1.1.11) Si X est un espace topologique séparé et connexe par arcs, il est connexe par arcs *injectifs*.

1.2 L'arbre des boules d'un espace ultramétrique E

Définition de l'espace $\aleph(E)$ des boules de E

(1.2.1) Soit (E, d) un espace métrique ; on suppose que la distance d est *ultramétrique*. Pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$ on note $B(a, r)$ (resp. $B^\circ(a, r)$) la boule fermée (resp. ouverte) de E de centre a et de rayon r .

(1.2.1.1) On se donne un ensemble de symboles $\zeta_{a,r}$ indexé par $E \times \mathbb{R}_+$; on vérifie que la relation \mathcal{R} pour laquelle $\zeta_{a,r} \mathcal{R} \zeta_{b,s}$ si et seulement si $r = s$ et

$d(a, b) \leq r$ est une relation d'équivalence, et l'on note $\aleph(E)$ l'ensemble quotient. La relation « $\zeta_{a,r} \leq \zeta_{b,s}$ si et seulement si $r \leq s$ et $d(a, b) \leq s$ » passe au quotient et induit sur $\aleph(E)$ une relation d'ordre (partiel).

Soit $x \in \aleph(E)$; on peut l'écrire $\zeta_{a,r}$ pour un certain a et un certain r . Il résulte de la définition que le réel r ne dépend que de x , et pas de l'écriture choisie. On l'appelle le *rayon* de x , et on le note $\rho(x)$; l'application ρ est croissante. Si $a \in E$ alors $a \leq x$ si et seulement si $x = \zeta_{a,\rho(x)}$; si $a \leq x$ alors l'ensemble des éléments de E majorés par x est égal à $B(a, \rho(x))$.

(1.2.1.2) L'application $a \mapsto \zeta_{a,0}$ définit une bijection de E sur l'ensemble des points de rayon nul de $\aleph(E)$.

(1.2.1.3) Soit $a \in E$ et soit $r \geq 0$. Si y est un point de $\aleph(E)$ qui majore $\zeta_{a,r}$ alors $y = \zeta_{a,\rho(y)}$. Il s'ensuit que si F est une *chaîne*, c'est-à-dire une partie totalement ordonnée de $\aleph(E)$ alors ρ induit une injection croissante de F dans \mathbb{R}_+ . Nous dirons qu'une chaîne F est *ouverte saturée* (resp. *fermée saturée*) si $\rho(F)$ est de la forme $]r; +\infty[$ (resp. $[r; +\infty[$) pour un certain $r \geq 0$.

(1.2.1.4) *Lien avec les vraies boules de E* . Si $a \in E$ et si $r \geq 0$, il résulte des définitions que la boule fermée $B(a, r)$ ne dépend que de $\zeta_{a,r}$. On vérifie immédiatement que l'application $\zeta_{a,r} \mapsto B(a, r)$ est croissante, mais elle n'est pas injective en général. En effet, on a $B(a, r) = B(b, s)$ si et seulement si

$$(i) \quad d(a, b) \leq \min(r, s)$$

et

$$(ii) \quad \forall c \in E, (d(a, c) \leq r \iff d(a, c) \leq s).$$

La condition (i) équivaut à la conjonction des deux égalités $\zeta_{a,r} = \zeta_{b,r}$ et $\zeta_{a,s} = \zeta_{b,s}$, et implique que $\zeta_{a,r}$ et $\zeta_{b,s}$ sont comparables; ils sont alors égaux si et seulement si $r = s$. Mais la condition (ii) signifie seulement que l'application $d(a, \cdot)$ ne prend aucune valeur dans $] \min(r, s); \max(r, s)]$; cela peut se produire même si $r \neq s$, c'est-à-dire même si $\min(r, s) < \max(r, s)$. Notons toutefois que si $\max(r, s)$ appartient à l'image de $d(a, \cdot)$ alors dire que $d(a, \cdot)$ ne rencontre pas $] \min(r, s); \max(r, s)]$ signifie que $\min(r, s) = \max(r, s)$, c'est-à-dire que $r = s$.

En conséquence, si $B(a, r) = B(b, s)$ et si $\max(r, s)$ appartient à l'image de $d(a, \cdot)$ alors $\zeta_{a,r} = \zeta_{b,s}$.

Une compactification partielle : l'espace $\beth(E)$ des chaînes ouvertes saturées de $\aleph(E)$

On note $\beth(E)$ l'ensemble constitué des chaînes ouvertes saturées de $\aleph(E)$, muni de la relation d'ordre *opposée* à celle de l'inclusion. Pour des raisons psychologiques, on préférera souvent penser à $\beth(E)$ comme à un ensemble de points limite de $\aleph(E)$ plutôt que comme à un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\aleph(E))$; il arrivera donc que l'on parle de la chaîne ouverte saturée F de $\aleph(E)$ qui *correspond* à un point x de $\beth(E)$.

Si $x = \zeta_{a,r}$ est un élément de $\aleph(E)$ l'ensemble des majorants stricts $\aleph(E)^{>x}$ de x dans $\aleph(E)$ est égal à $\{\zeta_{a,s}\}_{s>r}$; c'est une chaîne ouverte saturée.

Soient x et y deux points de $\aleph(E)$. Si $x \leq y$ alors $\aleph(E)^{>y} \subset \aleph(E)^{>x}$. Réciproquement, supposons que $\aleph(E)^{>y}$ soit contenue dans $\aleph(E)^{>x}$. Écrivons $x = \zeta_{a,r}$ et $y = \zeta_{b,s}$. L'inclusion $\aleph(E)^{>y} \subset \aleph(E)^{>x}$ assure que pour tout $t > s$, on a $\zeta_{a,r} \leq \zeta_{b,t}$, c'est-à-dire $r \leq t$ et $d(a,b) \leq t$; il s'ensuit que $r \leq s$ et $d(a,b) \leq s$; par conséquent, $x \leq y$.

Si $x \in \aleph(E)$, vérifions que le point x est la borne inférieure de $\aleph(E)^{>x}$ (ce qui montrera en particulier que x est uniquement déterminé par $\aleph(E)^{>x}$). C'en est clairement un minorant. Donnons-nous maintenant un minorant y de $\aleph(E)^{>x}$; comme ce dernier est une chaîne ouverte saturée, il n'a pas de plus petit élément et ne contient donc pas y ; il s'ensuit que $\aleph(E)^{>x} \subset \aleph(E)^{>y}$, et donc que $y \leq x$ (cf. *supra*); on a donc bien ainsi $x = \inf \aleph(E)^{>x}$.

Il résulte de ce qui précède que $x \mapsto \aleph(E)^{>x}$ définit un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $\aleph(E)$ sur un sous-ensemble de $\beth(E)$, sous-ensemble que l'on *identifiera* désormais par ce biais à $\aleph(E)$; en vertu de 1.2.1.2, on considérera également E lui-même comme un sous-ensemble de $\beth(E)$.

Si F est une chaîne ouverte saturée de $\aleph(E)$ et si $\rho(F) =]r; +\infty[$ on définit le *rayon* de F comme étant égal à r ; si F est de la forme $\aleph(E)^{>x}$ pour un certain $x \in \aleph(E)$, le rayon de F est égal à celui de x : on a ainsi prolongé la fonction croissante $\rho : \aleph(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ en une fonction strictement croissante $\beth(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ que l'on note encore ρ .

Il existe une notion de chaîne ouverte saturée (resp. fermée saturée) de $\beth(E)$: il suffit de décalquer *verbatim* les définitions données sur $\aleph(E)$; toute chaîne ouverte saturée (resp. fermée saturée) de $\aleph(E)$ est encore une chaîne ouverte saturée (resp. fermée saturée) de $\beth(E)$.

(1.2.1.5) Soit F une chaîne saturée de $\aleph(E)$ et soit $y \in F$. Les sous-ensembles $F^{>y}$ et $\aleph(E)^{>y}$ sont deux chaînes ouvertes saturées dont l'image par ρ est égale à $]\rho(y); +\infty[$; comme $F^{>y} \subset \aleph(E)^{>y}$, on a $F^{>y} = \aleph(E)^{>y}$.

(1.2.1.6) Soit $x \in \beth(E)$ et soit F la chaîne ouverte saturée de $\aleph(E)$ qui lui correspond. Nous allons montrer que $\beth(E)^{>x}$ coïncide avec F , et est en particulier une chaîne ouverte saturée de $\beth(E)$ contenue dans $\aleph(E)$.

Montrons que $F \subset \beth(E)^{>x}$. Soit $y \in F$; d'après le 1.2.1.5, l'ensemble $F^{>y}$ est égal à $\aleph(E)^{>y}$; on a donc $\aleph(E)^{>y} \subset F$, et cette inclusion est stricte puisque y n'appartient pas à $\aleph(E)^{>y}$. Comme les points de $\beth(E)$ correspondant aux chaînes saturées $\aleph(E)^{>y}$ et F sont respectivement y et x , il vient $y > x$; par conséquent, $F \subset \beth(E)^{>x}$.

Montrons que $\beth(E)^{>x} \subset F$. Soit $y \in \beth(E)^{>x}$ et soit G la chaîne ouverte saturée de $\aleph(E)$ qui lui correspond. Comme $y > x$, la chaîne G est contenue strictement dans F , et possède de ce fait une borne inférieure z dans F . La chaîne G est alors égale à $F^{>z}$, et donc à $\aleph(E)^{>z}$ en vertu de 1.2.1.5. Le point de $\beth(E)$ qui correspond à G est par conséquent le point z de $\aleph(E)$, ce qui signifie que $y = z$, entraîne que $y \in F$, et achève la démonstration.

(1.2.1.7) Soit F une chaîne ouverte saturée de $\beth(E)$ et soit $y \in F$. La chaîne F n'ayant pas de plus petit élément, il existe $z \in F$ tel que $z < y$; par conséquent, $y \in \beth(E)^{>z}$, lequel est contenu dans $\aleph(E)$ d'après le 1.2.1.6. Ainsi, $F \subset \aleph(E)$; il s'ensuit que F est une chaîne ouverte saturée de $\aleph(E)$. Si x est le point qui lui correspond dans $\beth(E)$, il résulte de 1.2.1.6 que $F = \beth(E)^{>x}$.

Le point x est égal à la borne inférieure de $F = \beth(E)^{>x}$. En effet, x est un minorant de $\beth(E)^{>x}$. Soit y un minorant de $\beth(E)^{>x}$; comme F n'a pas de plus petit élément, $y \notin F$; il s'ensuit que $\beth(E)^{>x} \subset \beth(E)^{>y}$, ce qui signifie, compte-tenu de 1.2.1.6, que $y \leq x$ et achève la preuve.

(1.2.2) Notons quelques conséquences de ce qui précède.

(1.2.2.1) L'application $x \mapsto \beth(E)^{>x}$ (resp. $x \mapsto \beth(E)^{\geq x}$) établit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre $\beth(E)$ et l'ensemble de ses chaînes saturées ouvertes (resp. fermées), dont la réciproque envoie une chaîne sur sa borne inférieure (resp. son plus petit élément); les chaînes saturées ouvertes de $\beth(E)$ sont par ailleurs toutes contenues dans $\aleph(E)$.

(1.2.2.2) Si F est une chaîne saturée de $\beth(E)$ et si $y \in F$ alors $F^{>y} = \beth(E)^{>y}$: on le voit en remarquant que ce sont deux chaînes saturées comparables pour l'inclusion et ayant même image par ρ .

(1.2.2.3) Si $z \in \beth(E) - \aleph(E)$ ou si $\rho(z) = 0$, alors z est un élément minimal de $\beth(E)$. En effet, soit $t \leq z$.

La chaîne ouverte saturée $\beth(E)^{>t}$ est contenu dans $\aleph(E)$, et son image par ρ est égale à $]\rho(t); +\infty[$ qui ne contient pas 0. Il s'ensuit que z ne peut appartenir à $\beth(E)^{>t}$, et l'on a donc $t = z$.

(1.2.2.4) Soient x et y deux éléments de $\beth(E)$ tels que $y > x$. Le point y appartient alors à la chaîne ouverte saturée $\beth(E)^{>x}$, laquelle est contenue dans $\aleph(E)$; on a en particulier $y \in \aleph(E)$. De l'inégalité $\rho(y) > \rho(x) \geq 0$ il vient $\rho(y) > 0$; par conséquent, y est de la forme $\zeta_{a,r}$ où $a \in E$ et où $r > 0$.

(1.2.3) Il résulte de 1.2.2.1 que si x et y sont deux éléments de $\beth(E)$, il existe une chaîne saturée les contenant si et seulement si ils sont comparables. Supposons que ce soit le cas, et que l'on ait par exemple $x \leq y$; et soit F une chaîne saturée les contenant. En vertu de 1.2.2.2, l'ensemble des points z de F tels que $x \leq z \leq y$ est égal à l'ensemble des points z de $\beth(E)$ tels que $x \leq z \leq y$; il ne dépend donc pas de F , et nous le noterons $[x; y]$. On utilisera de même les notations $]x; y[$, $]x; y]$, $[x; y[$ dans un sens évident.

Si $x \in \beth(E)$ on désignera par $[x; \infty[$ (resp. $]x; \infty[$) la chaîne saturée $\beth(E)^{\geq x}$ (resp. $\beth(E)^{>x}$).

Remarquons que si x et y sont deux points de $\beth(E)$ et si $]y; \infty[\subset [x; \infty[$ alors $y \in [x; \infty[$; c'est en effet évident si $y = x$; et sinon, on a $]y; \infty[\subset]x; \infty[$, ce qui équivaut d'après 1.2.2.1 à l'inégalité $x \leq y$.

(1.2.4) On dira qu'une chaîne F de $\beth(E)$ est *convexe* si $[x; y] \subset F$ pour tout couple (x, y) d'éléments de F . Toute chaîne saturée est convexe, et l'intersection de deux chaînes convexes est une chaîne convexe.

(1.2.5) Soient x et y deux points de $\beth(E)$. Nous allons montrer que l'intersection des chaînes saturées fermées $[x; \infty[$ et $]y; \infty[$ est une chaîne saturée fermée.

Cette intersection est non vide. Choisissons en effet $x' \in [x; \infty[$ et $y' \in]y; \infty[$; les points x' et y' peuvent respectivement s'écrire $\zeta_{a,r}$ et $\zeta_{b,s}$ pour a, b, r et s convenables (1.2.2.4). Si l'on pose $R = \max(r, s, d(a, b))$ alors $\zeta_{a,R}$ majore x' et y' , et *a fortiori* x et y ; par conséquent, $[x; \infty[\cap]y; \infty[\neq \emptyset$.

Si z est un point de $\beth(E)$ majorant x et y alors $[z; \infty[\subset [x; \infty[\cap [y; \infty[$, ce qui montre que $[x; \infty[\cap [y; \infty[$ est une chaîne saturée. Enfin, si z est un point de $\beth(E)$ tel que $]z; \infty[\subset [x; \infty[\cap [y; \infty[$ alors $z \in [x; \infty[\cap [y; \infty[$ (fin du 1.2.3); il en découle que la chaîne saturée $[x; \infty[\cap [y; \infty[$ est fermée, ce qui achève la preuve.

On notera $x \wedge y$ le plus petit élément de $[x; \infty[\cap [y; \infty[$; on peut également le définir comme la borne supérieure de $\{x, y\}$.

(1.2.6) Si $a \in E$ et si $r > 0$, on note $\mathbb{B}(a, r)$ l'ensemble $\beth(E)^{\leq \zeta_{a,r}}$. Remarquons que $\mathbb{B}(a, r)$ ne dépend que de $\zeta_{a,r}$, et que $\zeta_{a,r}$ se retrouve à partir de $\mathbb{B}(a, r)$: c'est son plus grand élément. Le réel r est donc égal au maximum de ρ sur $\mathbb{B}(a, r)$.

(1.2.6.1) Il découle immédiatement de la définition que si $a \in E$ et si $r > 0$ alors $\mathbb{B}(a, r) \cap E = B(a, r)$.

(1.2.6.2) Soient a et b dans E et r et s deux réels strictement positifs. L'inclusion $\mathbb{B}(b, s) \subset \mathbb{B}(a, r)$ équivaut à l'inégalité $\zeta_{b,s} \leq \zeta_{a,r}$, qui est vérifiée si et seulement si $s \leq r$ et $d(a, b) \leq r$; on a donc $\mathbb{B}(b, s) = \mathbb{B}(a, r)$ si et seulement si $r = s$ et $d(a, b) \leq r$, c'est-à-dire encore si et seulement si $\mathbb{B}(b, s) \subset \mathbb{B}(a, r)$ et $r = s$.

(1.2.6.3) Soient a et b deux éléments de E et soit r et s deux réels strictement positifs. *Supposons que $\mathbb{B}(a, r) \cap \mathbb{B}(b, s)$ soit non vide.* Il existe alors x tel que $x \leq \zeta_{a,r}$ et $x \leq \zeta_{b,s}$. Les points $\zeta_{a,r}$ et $\zeta_{b,s}$ appartenant dès lors tous deux à la chaîne $[x; \infty[$, ils sont comparables, d'où il découle que $\mathbb{B}(a, r) \subset \mathbb{B}(b, s)$ ou $\mathbb{B}(b, s) \subset \mathbb{B}(a, r)$.

(1.2.7) Si $a \in E$ et si $r > 0$, on note $\mathbb{B}^\circ(a, r)$ la réunion des $\mathbb{B}(a, t)$ pour $0 < t < r$. Remarquons que r est égal à $\sup_{x \in \mathbb{B}^\circ(a, r)} \rho(x)$.

(1.2.7.1) Il découle immédiatement de la définition que si $a \in E$ et si $r > 0$ alors $\mathbb{B}^\circ(a, r) \cap E = B^\circ(a, r)$.

(1.2.7.2) Soient a et b dans E et r et s deux réels strictement positifs. On déduit de 1.2.6.2 que l'inclusion $\mathbb{B}^\circ(b, s) \subset \mathbb{B}^\circ(a, r)$ est vérifiée si et seulement si $s \leq r$ et $d(a, b) < r$; on a donc $\mathbb{B}^\circ(b, s) = \mathbb{B}^\circ(a, r)$ si et seulement si $r = s$ et $d(a, b) < r$, c'est-à-dire encore si et seulement si $\mathbb{B}^\circ(b, s) \subset \mathbb{B}^\circ(a, r)$ et $r = s$.

(1.2.7.3) Soient a et b deux éléments de E et soit r et s deux réels strictement positifs. *Supposons que $\mathbb{B}^\circ(a, r) \cap \mathbb{B}^\circ(b, s)$ soit non vide.* On déduit de 1.2.6.3 que $\mathbb{B}^\circ(a, r) \subset \mathbb{B}^\circ(b, s)$ ou $\mathbb{B}^\circ(b, s) \subset \mathbb{B}^\circ(a, r)$.

(1.2.8) Soient x et y deux points de $\beth(E)$ tels que $(x \wedge y) > x$ et $(x \wedge y) > y$. D'après 1.2.2.4, il existe $a \in E$ et $r > 0$ tels que $x \wedge y = \zeta_{a,r}$. Choisissons un point x' quelconque sur $]x; x \wedge y[$. Comme $x' > x$, il est égal à $\zeta_{b,s}$ pour un certain $b \in E$ et un certain $s > 0$ (toujours en vertu de 1.2.2.4). Comme $\zeta_{b,s} < \zeta_{a,r}$ on a $b \in B(a, r)$, $s < r$, et $\zeta_{a,r} = \zeta_{b,r}$. Si $z \in [x; x \wedge y[$ il existe un élément de $[z; x \wedge y[$ qui appartient aussi à $[x'; x \wedge y[$ et est donc égal à $\zeta_{b,t}$ pour un certain $t \in [s; r[$; par conséquent, $z \in \mathbb{B}^\circ(b, r)$. Ainsi, $[x; x \wedge y[\subset \mathbb{B}^\circ(b, r)$. Et il existe de même $c \in B(a, r)$ tel que $[y; x \wedge y[\subset \mathbb{B}^\circ(c, r)$.

L'intersection $\mathbb{B}^\circ(b, r) \cap \mathbb{B}^\circ(c, r)$ est vide. En effet, il suffit de vérifier par symétrie que l'on ne peut avoir $\mathbb{B}^\circ(c, r) \subset \mathbb{B}^\circ(b, r)$. Supposons que ce soit le cas. Les points x et y appartenant tous deux à $\mathbb{B}^\circ(b, r)$, il existerait r' et r'' dans $]0; r[$

tels que $x \leq \zeta_{b,r'}$ et $y \leq \zeta_{b,r''}$; mais cela impliquerait que $\zeta_{b,\max(r',r'')}$ majore x et y , ce qui est absurde puisque $\zeta_{b,\max(r',r'')} < \zeta_{b,r} = x \wedge y$.

(1.2.9) Soit F une chaîne convexe de $\mathfrak{J}(E)$, soit $a \in E$ et soit $r > 0$.

(1.2.9.1) Posons $G = F \cap \mathbb{B}(a, r)$ et $H = F \setminus G$; nous allons montrer que l'on est dans l'un (et un seul) des trois cas suivants :

- $G = F$ et $H = \emptyset$;
- $G = \emptyset$ et $H = F$;
- G et H sont tous deux non vides, $\zeta_{a,r}$ appartient à F , et G (resp. H) est l'ensemble des éléments z de F tels que $z \leq \zeta_{a,r}$ (resp. $z > \zeta_{a,r}$).

Il suffit de vérifier que si G et H sont non vides alors $\zeta_{a,r} \in F$. Supposons donc qu'il existe $x \in G$ et $y \in H$. Comme $x \leq \zeta_{a,r}$ et comme $y \notin G$, on ne peut avoir $y \leq x$. Par conséquent $y > x$ et $[x; y] \subset [x; \infty[$. D'autre part, $\zeta_{a,r}$ appartient aussi à $[x; \infty[$. Puisque $y \notin G$, on ne peut avoir $y \leq \zeta_{a,r}$; dès lors $\zeta_{a,r} \leq y$ et $\zeta_{a,r} \in [x; y] \subset F$, ce qu'on souhaitait établir.

(1.2.9.2) Posons $G' = F \cap \mathbb{B}^\circ(a, r)$ et $H' = F \setminus G'$; nous allons montrer que l'on est dans l'un (et un seul) des trois cas suivants :

- $G' = F$ et $H' = \emptyset$;
- $G' = \emptyset$ et $H' = F$;
- G' et H' sont tous deux non vides, $\zeta_{a,r}$ appartient à F , et G' (resp. H') est l'ensemble des éléments z de F tels que $z < \zeta_{a,r}$ (resp. $z \geq \zeta_{a,r}$).

En effet, supposons que G' et H' soient non vides. Vérifions tout d'abord que $\zeta_{a,r} \in F$. Choisissons $x \in G'$ et $y \in H'$. Comme $x \leq \zeta_{a,t}$ pour un certain $t < r$ et comme $y \notin G'$, on ne peut avoir $y \leq x$. Par conséquent $y > x$ et $[x; y] \subset [x; \infty[$. D'autre part, $\zeta_{a,s}$ appartient aussi à $[x; \infty[$ pour tout $s \geq t$; en particulier, $\zeta_{a,r} \in [x; \infty[$. Puisque $y \notin G'$, on ne peut avoir $y \leq \zeta_{a,s}$ si $s < r$; dès lors $\zeta_{a,s} \in [x; y[$ pour tout $s \in [t; r[$, d'où il découle que $\zeta_{a,r} \in [x; y] \subset F$, ce qu'on souhaitait établir.

Il reste à s'assurer que G' est exactement l'ensemble des éléments z de F tels que $z < \zeta_{a,r}$. Il est clair que tout élément de G' est strictement majoré par $\zeta_{a,r}$; réciproquement, si z appartient à F et est strictement inférieur à $\zeta_{a,r}$ il existe $s \in [t; r[$ tel que $\zeta_{a,s} \in]z; \zeta_{a,r}[$. On par conséquent, $z \leq \zeta_{a,s}$; dès lors, $z \in \mathbb{B}^\circ(a, r)$, et partant à G' .

(1.2.10) Soit $a \in E$ et soit $r > 0$. On notera $\Theta(a, r)$ le quotient de $B(a, r)$ obtenu en identifiant deux points dont la distance est strictement inférieure à r . Si b et c sont deux points de $B(a, r)$ alors $\mathbb{B}^\circ(b, r) = \mathbb{B}^\circ(c, r)$ si et seulement si ils ont même image dans $\Theta(a, r)$. On appellera *système complet de centres* de $B(a, r)$ tout système de représentants de la relation d'équivalence définissant $\Theta(a, r)$.

Il découle immédiatement des définitions que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $B(a, r) = B^\circ(a, r)$;
- ii) $\Theta(a, r)$ est un singleton ;
- iii) $\{a\}$ est un système complet de centres de $B(a, r)$.

(1.2.11) On munit $\beth(E)$ de la topologie engendrée (par unions quelconques et intersections finies) par les parties U de l'une des formes suivantes :

- $U = \beth(E) - \mathbb{B}(a, r)$ avec $a \in E$ et $r > 0$;
- $U = \mathbb{B}^\circ(a, r)$ avec $a \in E$ et $r > 0$.

En vertu de 1.2.6.1 et 1.2.7.1, la topologie de E induite par celle de $\beth(E)$ est sa topologie d'espace métrique.

(1.2.12) Soit $x \in E$.

(1.2.12.1) Il découle de 1.2.6.3 et 1.2.7.3 que si $x \in \beth(E)$ il possède une base de voisinages de la forme $\mathbb{B}^\circ(a, r) - \prod_{i \in I} \mathbb{B}(a_i, r_i)$, où I est fini et où $\mathbb{B}(a_i, r_i)$ est contenue dans $\mathbb{B}^\circ(a, r)$ pour tout i .

(1.2.12.2) Supposons que $x = \eta_{b,s}$ pour un certain $b \in E$ et un certain $s > 0$. Si $a \in E$ et si r est un réel strictement positif tel que $x \in \mathbb{B}^\circ(a, r)$ alors $r > s$ et $\mathbb{B}^\circ(a, r) = \mathbb{B}^\circ(b, r)$; par conséquent, x possède une base de voisinages de la forme $\mathbb{B}^\circ(b, r) - \prod_{i \in I} \mathbb{B}(a_i, r_i)$, où $r > s$, où I est fini et où $\mathbb{B}(a_i, r_i) \subset \mathbb{B}^\circ(b, r)$ pour tout i .

Faisons maintenant deux remarques.

- Soit $c \in \mathbb{B}(b, s)$, soit $n \geq 1$ et soient $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{B}(b, s)$ tels que $d(c, c_i) < s$ pour tout i . Si s_1, \dots, s_n sont des réels appartenant à $]0; s[$ et si

$$R = \max(s_1, \dots, s_n, d(c, c_1), \dots, d(c, c_n))$$

alors $R < s$, $\mathbb{B}(c, R) \subset \mathbb{B}(b, s)$ et $\mathbb{B}(c, R)$ contient chacune des $\mathbb{B}(c_i, s_i)$.

- Soit $r > ss$, soit $n \geq 1$, soient $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{B}^\circ(b, r) - \mathbb{B}(b, s)$ et soient r_1, \dots, r_n des réels strictement supérieurs à s tels que $d(c_i, b) > r_i$ pour tout i . Posons $R = \min r_i$; on a alors $r > R > s$, et $\mathbb{B}^\circ(b, R)$ ne contient aucune des $\mathbb{B}(c_i, r_i)$.

Fixons un système complet \mathcal{S} de centres de $\mathbb{B}(b, s)$. On déduit des deux remarques ci-dessus que le point $x = \eta_{b,s}$ possède une base de voisinages de la forme $\mathbb{B}^\circ(b, r) - \prod_{i \in I} \mathbb{B}(a_i, r_i)$ où $r > s$, où I est fini, où $r_i < s$ pour tout i , et où les a_i sont des éléments deux à deux distincts de \mathcal{S} .

Notons un cas particulier, celui où $B(b, s) = B^\circ(b, s)$, c'est-à-dire où $\{b\}$ est un système complet de centres de $B(b, s)$: le point $x = \eta_{b,s}$ possède alors une base de voisinages de la forme $\mathbb{B}^\circ(b, r) - \mathbb{B}(b, r')$ où $r > s > r'$.

(1.2.12.3) Supposons que $\rho(x) = 0$ ou que $x \in \beth(E) - \aleph(E)$, et soient $a \in E$ et $r > 0$ tels que $x \notin \mathbb{B}(a, r)$.

Posons $y = x \wedge \zeta_{a,r}$. Comme $y \geq \zeta_{a,r}$ il est égal à $\zeta_{a,R}$ pour un certain $R \geq r$. Comme $y \geq x$ et comme $x \notin \mathbb{B}(a, r)$, on a nécessairement $R > r$; et l'hypothèse faite sur x assure d'autre part que $x \neq \zeta_{a,R}$ et donc que $x < \zeta_{a,R}$. On déduit alors de 1.2.8 qu'il existe $b \in E$ tel que $x \in \mathbb{B}^\circ(b, R)$ et tel que $\mathbb{B}^\circ(b, R) \cap \mathbb{B}^\circ(a, R) = \emptyset$; l'intersection de $\mathbb{B}^\circ(b, R)$ et $\mathbb{B}(a, r)$ est *a fortiori* vide.

Il découle de ce qui précède, de 1.2.6.3 et de 1.2.7.3 que x possède une base de voisinages de la forme $\mathbb{B}^\circ(b, R)$.

(1.2.13) *L'espace topologique $\sqsupset(E)$ est séparé.* En effet, soient x et y deux points distincts de $\sqsupset(E)$; nous allons chercher à les séparer par deux ouverts disjoints.

Le cas où x et y sont comparables. Supposons par exemple que $x < y$ et choisissons $z \in]x; y[$. Comme $z > x$ il est de la forme $\zeta_{a,r}$ avec $a \in E$ et $r > 0$; on a dès lors $y = \zeta_{a,R}$ pour un certain $R > r$. Soit $s \in]r; R[$. Les ouverts $\mathbb{B}^\circ(a, s)$ et $\sqsupset(E) - \mathbb{B}(a, s)$ sont disjoints, le premier contient x et le second y .

Le cas où x et y ne sont pas comparables. Posons $z = x \wedge y$. On a alors $z > x$ et $z > y$. On déduit de 1.2.8 qu'il existe a et b dans E et $r > 0$ tels que $x \in \mathbb{B}^\circ(a, r)$, tels que $y \in \mathbb{B}^\circ(b, r)$, et tels que $\mathbb{B}^\circ(a, r) \cap \mathbb{B}^\circ(b, r) = \emptyset$.

(1.2.14) Soit $x \in \sqsupset(E)$; l'application ρ induit une bijection ρ_x entre $\sqsupset(E)^{\geq x}$ et $[\rho(x); +\infty[$; nous allons montrer qu'il s'agit d'un homéomorphisme.

(1.2.14.1) *L'application ρ_x est continue.* Soit $r \in]\rho(x); +\infty[$; il suffit de vérifier que $\rho_x^{-1}(]r; +\infty[)$ et $\rho_x^{-1}([\rho(x); r])$ sont ouverts. Choisissons $s \in]\rho(x); r[$. On peut écrire $s = \rho(y)$ pour un certain $y \in]x; \infty[$. Appartenant à $]x; \infty[$, le point y est égal à $\zeta_{a,s}$ pour un certain $a \in E$. Il s'ensuit que $\zeta_{a,r}$ appartient à $]x; \infty[$, et c'est nécessairement l'unique antécédent de r par ρ_x . La chaîne $]x; \infty[$ rencontre $\mathbb{B}^\circ(a, r)$ (elle contient $\zeta_{a,s}$) et le complémentaire de $\mathbb{B}(a, r)$ (elle contient $\rho_x^{-1}(]r; +\infty[)$ qui est constitué de majorants stricts de $\zeta_{a,r}$). Il découle alors de 1.2.9.1 et 1.2.9.2 que

$$\rho_x^{-1}(]r; +\infty[) =]x; \infty[\setminus \mathbb{B}(a, r) \text{ et } \rho_x^{-1}([\rho(x); r]) =]x; \infty[\cap \mathbb{B}^\circ(a, r),$$

d'où l'assertion.

(1.2.14.2) *L'application ρ_x est ouverte.* Soient $a \in E$ et $r > 0$. Il suffit de s'assurer que $\rho_x(]x; \infty[\cap \mathbb{B}^\circ(a, r))$ et $\rho_x(]x; \infty[\setminus \mathbb{B}(a, r))$ sont ouverts dans $[\rho(x); +\infty[$; mais c'est une conséquence immédiate de 1.2.9.1 et 1.2.9.2.

(1.2.15) Soit $a \in E$ et soit $r > 0$; nous allons montrer que $\mathbb{B}(a, r)$ est compact. Pour ce faire, on se donne un ensemble I muni d'un ultrafiltre \mathcal{U} , et une suite (x_i) d'éléments de $\mathbb{B}(a, r)$ indexée par I ; on va prouver qu'elle converge le long de \mathcal{U} , ce qui permettra de conclure. Pour tout $i \in I$, la chaîne fermée saturée $]x_i; \infty[$ contient $[\zeta_{a,r}; \infty[$. Il s'ensuit que pour tout J appartenant à \mathcal{U} , le sous-ensemble $F_J := \bigcap_{i \in J}]x_i; \infty[$ de $\sqsupset(E)$ est une chaîne fermée saturée contenant $[\zeta_{a,r}; \infty[$. Comme $(F_J)_{J \in \mathcal{U}}$ est une famille filtrante de chaînes fermées saturées contenant $[\zeta_{a,r}; \infty[$, la réunion F des F_J est une chaîne saturée (ouverte ou fermée) contenant $\zeta_{a,r}$. Elle possède une borne inférieure (1.2.1.7); appelons-la x . Comme $\zeta_{a,r} \in F$, on a $x \in \mathbb{B}(a, r)$; nous allons maintenant vérifier que x est une valeur d'adhérence de (x_i) . Soit $b \in E$ et soit $s > 0$.

(1.2.15.1) *Supposons que $x \in \mathbb{B}^\circ(b, s)$.* Il existe $t < s$ tel que $x \leq \zeta_{b,t}$. Quitte à rapprocher t de s , on peut supposer que $x \neq \zeta_{b,t}$. Comme F est égale ou bien à $]x; \infty[$ ou bien à $]x; \infty[$, on a $\zeta_{b,t} \in F$. Il existe dès lors $J \in \mathcal{U}$ tel que $\zeta_{b,t} \in F_J$. Par définition de ce dernier, cela signifie que $x_i \leq \zeta_{b,t}$ pour tout $i \in J$; par conséquent, $x_i \in \mathbb{B}^\circ(b, s)$ pour tout $i \in J$.

(1.2.15.2) *Supposons que $x \in \sqsupset(E) - \mathbb{B}(b, s)$.* Soit J l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $x_i \leq \zeta_{b,s}$. Si J appartenait à \mathcal{U} la chaîne $[\zeta_{b,s}; \infty[$ serait contenue dans F_J , et a fortiori dans F , ce qui entraînerait l'inégalité $x \leq \zeta_{b,s}$, contredisant

notre hypothèse sur x . Par conséquent $I \setminus J \in \mathcal{U}$; et par définition de J , on a $x_i \in \sqsupset(E) - \mathbb{B}(b, s)$ pour tout $i \in I \setminus J$, ce qui termine la preuve que $x_i \rightarrow x$ le long de \mathcal{U} .

(1.2.16) Soit $x \in \sqsupset(E)$. Choisissons un point $y \in]x; \infty[$. Il est de la forme $\zeta_{a,r}$ avec $a \in E$ et $r > 0$ (1.2.2.4). Comme $x \leq \zeta_{a,r}$, on a $x \in \mathbb{B}^\circ(a, r+1) \subset \mathbb{B}(a, r+1)$; en vertu de 1.2.15 et sq., $\mathbb{B}(a, r+1)$ est compact, et $\sqsupset(E)$ est donc localement compact.

(1.2.17) Soit $a \in E$ et soit \mathcal{K} une partie compacte de $\sqsupset(E)$. On peut recouvrir \mathcal{K} par un nombre fini d'ouverts du type décrit au 1.2.12; il existe *a fortiori* une famille finie (a_i) d'éléments de E et, pour tout i , un réel $r_i > 0$, tels que $\mathcal{K} \subset \bigcup \mathbb{B}^\circ(a_i, r_i)$. Soit r un réel strictement supérieur pour tout i à r_i ainsi qu'à $d(a, a_i)$; on a alors $\mathcal{K} \subset \mathbb{B}(a, r)$.

Le compactifié d'Alexandrov $\widehat{\sqsupset(E)}$ de $\sqsupset(E)$

(1.2.18) Remarquons que si E est vide alors $\sqsupset(E)$ est vide aussi. On suppose à partir de maintenant que E est non vide. L'espace $\sqsupset(E)$ n'est alors pas compact. En effet, choisissons $a \in E$. Si $\sqsupset(E)$ était compact, il serait d'après 1.2.17 contenu dans $\mathbb{B}(a, r)$ pour un certain $r > 0$, ce qui est absurde puisque $\zeta_{a,r+1}$ (par exemple) n'appartient pas à $\mathbb{B}(a, r)$.

(1.2.19) Désignons par $\widehat{\sqsupset(E)}$ le compactifié d'Alexandrov de l'espace localement compact et non compact $\sqsupset(E)$. On peut écrire $\widehat{\sqsupset(E)} = \sqsupset(E) \cup \{\infty\}$; une base de voisinages de ∞ est constituée des parties de la forme $\widehat{\sqsupset(E)} \setminus \mathcal{K}$, où \mathcal{K} est un compact de $\sqsupset(E)$.

Il résulte de 1.2.17 que si l'on se donne un élément a de E alors les parties de la forme $\widehat{\sqsupset(E)} - \mathbb{B}(a, r)$ où $r > 0$, forment une base de voisinages ouverts de ∞ .

(1.2.20) Prolongeons la relation d'ordre sur $\sqsupset(E)$ à $\widehat{\sqsupset(E)}$ en décrétant que ∞ est son plus grand élément. Si $x \in \widehat{\sqsupset(E)}$ l'ensemble $[x; \infty]$ des éléments y de $\widehat{\sqsupset(E)}$ tels que $x \leq y \leq \infty$ est alors égal au singleton $\{\infty\}$ si $x = \infty$, et à $[x; \infty[\cup \{\infty\}$ sinon (où $[x; \infty[$ a le sens donné au 1.2.3).

Toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de $\widehat{\sqsupset(E)}$ admet une borne supérieure, à savoir ∞ si x ou y est égal à ∞ , et $x \wedge y$ sinon; on pourra donc noter cette borne $x \wedge y$ dans tous les cas sans risque de confusion.

(1.2.21) Si l'on prolonge ρ à $\widehat{\sqsupset(E)}$ en posant $\rho(\infty) = +\infty$ alors pour tout $x \in \widehat{\sqsupset(E)}$ l'application ρ induit une bijection $[x; \infty] \simeq [\rho(x); +\infty]$.

Cette bijection est un homéomorphisme. Il suffit, par compacité de $[\rho(x); +\infty]$ et par séparation de $\widehat{\sqsupset(E)}$, de montrer que sa réciproque est continue; le cas $x = \infty$ est évident, ce qui permet de supposer que $x \neq \infty$. On sait que la bijection naturelle $[\rho(x); +\infty] \simeq [x; \infty[$ est continue; il reste donc à s'assurer de la continuité en $+\infty$. Soit r un réel strictement supérieur à $\rho(x)$. Le point y de $[x; \infty[$ qui lui correspond est strictement supérieur à x , et est donc égal à $\zeta_{a,r}$ pour un certain $r > 0$. L'ensemble des ouverts de $\widehat{\sqsupset(E)}$ de la forme $\widehat{\sqsupset(E)} - \mathbb{B}(a, R)$, pour $R > r$, est une base de voisinages ouverts

de ∞ . Or si $R > 0$ l'image réciproque de $\widehat{\mathfrak{I}}(E) - \mathbb{B}(a, R)$ sur $[\rho(x); +\infty]$ est précisément $]R; \infty]$ qui est ouvert ; ceci achève de prouver notre assertion.

(1.2.22) La notation $[x; y]$ a un sens dès que x et y sont deux points comparables de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$. On l'étend à *tout* couple (x, y) de points de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ en posant $[x; y] = [x; x \wedge y] \cup [y; x \wedge y]$ (notons que cette formule est trivialement vraie lorsque x et y sont comparables, puisque $x \wedge y$ est alors égal à l'un des deux).

Pour tout couple (x, y) de points de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$, le sous-ensemble $[x; y]$ de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ est homéomorphe à un intervalle compact d'extrémités x et y (on l'a déjà vu si x et y sont comparables ; le cas général en résulte en vertu de 1.1.6). Nous étendons la définition de la convexité (qui ne s'appliquait jusqu'ici qu'aux chaînes) de façon naturelle : nous dirons qu'une partie X de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ est *convexe* si $[x; y] \subset X$ dès que x et y appartiennent à X . Toute partie convexe est connexe par arcs, ce qui s'applique notamment à $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ lui-même ; l'intersection d'une famille de parties convexes est convexe.

Soit $a \in E$ et soit $r > 0$.

(1.2.22.1) *Le fermé $\mathbb{B}(a, r)$ est convexe.* Soient en effet x et y deux points de $\mathbb{B}(a, r)$. Ils sont tous deux majorés par $\zeta_{a,r}$; par conséquent, $\zeta_{a,r} \geq x \wedge y$, et tout élément de $[x; y]$ est donc majoré par $\zeta_{a,r}$, ce qu'il fallait établir.

(1.2.22.2) *L'ouvert $\mathbb{B}^\circ(a, r)$ est convexe.* En effet, si x et y appartiennent à $\mathbb{B}^\circ(a, r)$, il existe $s < r$ tel que tous deux soient situés sur $\mathbb{B}(a, s)$. On a alors d'après le 1.2.22.1 ci-dessus $[x; y] \subset \mathbb{B}(a, s) \subset \mathbb{B}^\circ(a, r)$.

(1.2.22.3) *L'ouvert $\widehat{\mathfrak{I}}(E) - \mathbb{B}(a, r)$ est convexe.* En effet, soient x et y deux points de $\widehat{\mathfrak{I}}(E) - \mathbb{B}(a, r)$, et soit $z \in [x; y]$. Par définition de $[x; y]$ le point z majore x ou y , ce qui exclut que l'on ait $z \leq \zeta_{a,r}$; ainsi, $[x; y] \subset \widehat{\mathfrak{I}}(E) - \mathbb{B}(a, r)$.

(1.2.23) Il découle de 1.2.22.2 et 1.2.22.3 que tout point de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ possède une base de voisinages convexes ; en particulier, $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ est localement connexe par arcs.

(1.2.24) Soit $a \in E$ et soit $r > 0$. Si b et c sont deux points de $\mathbb{B}(a, r)$ alors $\mathbb{B}^\circ(b, r) = \mathbb{B}^\circ(c, r)$ si et seulement si $d(b, c) < r$, c'est-à-dire si et seulement si ils ont même image dans l'ensemble $\Theta(a, r)$ défini au 1.2.10 ; si $\beta \in \Theta(a, r)$ on peut donc définir sans ambiguïté $\mathbb{B}^\circ(\beta, r)$ comme étant égale à $\mathbb{B}^\circ(b, r)$ pour *n'importe quel* antécédent b de β dans $\mathbb{B}(a, r)$.

(1.2.24.1) Soit x un élément de $\mathbb{B}(a, r)$ différent de $\zeta_{a,r}$; choisissons $y \in]x; \zeta_{a,r}[$. Étant strictement supérieur à x , le point y est égal à $\zeta_{b,s}$ pour un certain $b \in E$ et un certain $s > 0$. Comme $y < \zeta_{a,r}$ on a $b \in \mathbb{B}(a, r)$ et $s < r$; par conséquent, $x \in \mathbb{B}(b, s) \subset \mathbb{B}^\circ(b, r)$.

On peut ainsi écrire $\mathbb{B}(a, r) \setminus \{\zeta_{a,r}\} = \coprod_{\beta \in \Theta(a, r)} \mathbb{B}^\circ(\beta, r)$, et partant

$$\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{\zeta_{a,r}\} = \left(\coprod_{\beta \in \Theta(a, r)} \mathbb{B}^\circ(\beta, r) \right) \coprod \left(\widehat{\mathfrak{I}}(E) - \mathbb{B}(a, r) \right).$$

(1.2.24.2) Les différents termes dont le membre de droite est la réunion disjointe sont des ouverts non vides et connexes de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ (1.2.22.2 et 1.2.22.3) ; ce sont donc les composantes connexes de $\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{\zeta_{a,r}\}$. Comme $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ est lui-même connexe, chacune de ces composantes a pour bord $\{\zeta_{a,r}\}$.

(1.2.25) Soient x et y deux points de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$. Nous allons montrer que $[x; y]$ est l'unique fermé de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ homéomorphe à un segment d'extrémités x et y . Soit F un tel fermé ; il suffit de montrer que F contient $[x; y]$.

(1.2.25.1) Le fermé F contient $x \wedge y$. En effet, si $x \wedge y = x$ ou $x \wedge y = y$ c'est évident. Dans le cas contraire, ni x ni y ne sont égaux à ∞ , et il découle de 1.2.8 qu'il existe b et c dans E et $r > 0$ tels que $x \wedge y = \zeta_{b,r} = \zeta_{c,r}$, tels que $x \in \mathbb{B}^\circ(b, r)$ et $c \in \mathbb{B}^\circ(c, r)$, et tels que $\mathbb{B}^\circ(b, r) \cap \mathbb{B}^\circ(c, r) = \emptyset$; en vertu du 1.2.24.2 ci-dessus, $\mathbb{B}^\circ(b, r)$ et $\mathbb{B}^\circ(c, r)$ sont deux composantes connexes distinctes de $\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{x \wedge y\}$. Par conséquent, $x \wedge y \in F$.

(1.2.25.2) Il suffit maintenant de vérifier que $]x; x \wedge y[\subset F$ et $]y; x \wedge y[\subset F$. Par symétrie, on peut se contenter de traiter le cas de $]x; x \wedge y[$; soit donc $z \in]x; x \wedge y[$. Comme $z > x$ il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que $z = \zeta_{a,r}$. Comme $x < z$ il appartient à $\mathbb{B}(a, r) \setminus \{\zeta_{a,r}\}$; comme $x \wedge y > z$ il appartient à $\widehat{\mathfrak{I}}(E) - \mathbb{B}(a, r)$. En vertu du 1.2.24.2 ci-dessus, x et y sont situés sur deux composantes connexes différentes de $\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{\zeta_{a,r}\}$; par conséquent, $z = \zeta_{a,r}$ appartient à F , ce qui achève la démonstration.

(1.2.26) On déduit du 1.2.25 ci-dessus, de 1.2.22.2, 1.2.22.3, et de 1.2.24.2, que tout point de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$ possède une base de voisinages ouverts U possédant les deux propriétés suivantes :

- ∂U est fini ;
- pour tout couple (x, y) d'éléments de U , il existe un et un seul fermé de U homéomorphe à un segment d'extrémités x et y .

(1.2.27) Soit x un point de $\widehat{\mathfrak{I}}(E)$; nous nous proposons d'étudier le cardinal de $\pi_0(\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{x\})$.

(1.2.27.1) Si x est de la forme $\zeta_{a,r}$ avec $r > 0$, autrement dit si $x \in \aleph(E)$ et si $\rho(x) > 0$ il résulte de 1.2.24.2 que

$$\pi_0(\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{x\}) = \#\Theta(a, r) + 1.$$

Il s'ensuit que le cardinal de $\pi_0(\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{x\})$ vaut au moins deux, et qu'il est infini si et seulement si $\Theta(a, r)$ est infini.

Notons que $\#\pi_0(\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{x\}) = 2$ si et seulement si $\#\Theta(a, r) = 1$, et que cela équivaut à l'égalité $B(a, r) = B^\circ(a, r)$.

(1.2.27.2) Supposons que $x \in \widehat{\mathfrak{I}}(E) - \aleph(E)$ ou que $x \in \aleph(E)$ et que $\rho(x) = 0$. et soient y et z deux éléments de $\widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{x\}$. Si $t \in [y; z]$ alors par définition de ce dernier on a $t \geq y$ ou $t \geq z$; si $t = y$ ou si $t = z$ il est différent de x par hypothèse, et si $t > y$ ou $t > z$ il résulte de la minimalité de x (1.2.2.3) que $t \neq x$; par conséquent, $[y; z] \subset \widehat{\mathfrak{I}}(E) \setminus \{x\}$ et ce dernier est connexe.

(1.2.27.3) Supposons que $x = \infty$. Si y et z sont deux points appartenant à $\widehat{\beth(E)} \setminus \{x\} = \beth(E)$ il résulte de la définition de $[y; z]$ que $[y; z] \in \beth(E)$; par conséquent $\widehat{\beth(E)} \setminus \{x\}$ est connexe.

Complément : boules emboîtées de E et espace $\beth(E)$

(1.2.28) Soit \mathcal{B} une chaîne de boules fermées de E . On dira que \mathcal{B} est *évanescence* si l'intersection des boules appartenant à \mathcal{B} est vide; comme E est non vide, cela force \mathcal{B} elle-même à être non vide; cela la force également à ne contenir aucun singleton.

(1.2.28.1) Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux chaînes évanescences de boules fermées de E , on dira qu'elles sont *équivalentes* si $B \cap B' \neq \emptyset$ pour tout $(B, B') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}'$. Cette terminologie est raisonnable dans la mesure où nous définissons bien ainsi une relation d'équivalence. Pour le voir, il suffit d'en vérifier la transitivité, la réflexivité et la symétrie étant évidentes.

Soient donc $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et \mathcal{B}'' trois chaînes évanescences de boules fermées de E telles que \mathcal{B} et \mathcal{B}' soient équivalentes, et telles que \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' soient équivalentes. Soit B une boule appartenant à \mathcal{B} et soit B'' une boule appartenant à \mathcal{B}'' . Comme \mathcal{B}' est évanescence, il existe $B'_0 \in \mathcal{B}'$ ne contenant pas B , et il existe $B'_1 \in \mathcal{B}'$ ne contenant pas B'' . Soit B' l'intersection de B'_0 et B'_1 ; c'est une boule appartenant à \mathcal{B}' . Par construction, B' ne contient pas B ; comme \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont équivalentes, on a alors nécessairement $B' \subset B$. Par le même raisonnement $B' \subset B''$. Ainsi $B \cap B''$ contient B' et est en particulier non vide, ce qu'il fallait établir.

(1.2.28.2) Soit \mathcal{B} une chaîne évanescence de boules fermées de E et soit $\overline{\mathcal{B}}$ l'ensemble des boules fermées de E qui contiennent une boule appartenant à \mathcal{B} . Il est immédiat que $\overline{\mathcal{B}}$ est une chaîne évanescence de boules fermées qui est équivalente à \mathcal{B} et contient cette dernière.

La chaîne $\overline{\mathcal{B}}$ est la plus grande chaîne évanescence de boules fermées de E équivalente à \mathcal{B} . En effet, soit \mathcal{B}' une chaîne évanescence de boules fermées de E équivalente à \mathcal{B} et soit $B' \in \mathcal{B}'$. Comme \mathcal{B} est évanescence, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que B ne contienne pas B' ; comme les chaînes \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont équivalentes, on a $B \cap B' \neq \emptyset$, et partant $B \subset B'$; ainsi, $B' \in \overline{\mathcal{B}}$, et l'on a bien $\mathcal{B}' \subset \overline{\mathcal{B}}$, ce qu'il fallait démontrer.

On en déduit que l'ensemble des classes d'équivalence de chaînes évanescences de boules fermées de E est en bijection naturelle avec l'ensemble des chaînes évanescences maximales de boules fermées de E .

(1.2.29) Soit $x \in \beth(E)$. On note $E^{\leq x}$ l'ensemble des éléments de E majorés par x . Si $x \in \aleph(E)$ il est égal à $\zeta_{a,r}$ pour un certain $a \in E$ et un certain $r \geq 0$, et $E^{\leq x}$ est alors la boule fermée $B(a, r)$ de E ; si $x \notin \aleph(E)$ c'est un élément minimal de $\beth(E)$ en vertu de 1.2.2.3, et $E^{\leq x}$ est donc vide. Le point x étant par ailleurs la borne inférieure de $]x; \infty[$, on a

$$E^{\leq x} = \bigcap_{y \in]x; \infty[} E^{\leq y}.$$

(1.2.30) Si F est une chaîne ouverte saturée de $\aleph(E)$ dont la borne inférieure n'appartient pas à $\aleph(E)$, il découle de ce qui précède que $\mathfrak{b}(F) := \{E^{\leq y}\}_{y \in F}$ est une chaîne évanescence de boules fermées de E . Cette chaîne est maximale : en effet, soit $B \in \mathfrak{b}(F)$ et soit B' une boule fermée de E contenant B . La boule B est de la forme $E^{\leq y}$ pour un certain $y \in F$; écrivons $y = \zeta_{a,r}$ avec $a \in E$ et $r \geq 0$; on a alors $B = B(a,r)$.

Comme $B' \supset B$, on a $a \in B'$ et B' est de ce fait égal à $B(a,s)$ pour un certain $s \geq 0$. Si $s \leq r$ alors $B' \subset B$, d'où l'égalité $B' = B$; si $s > r$ alors $\zeta_{a,s} \in]y; \infty[\subset F$ et $B' = B(a,s) = E^{\leq \zeta_{a,s}} \in \mathfrak{b}(F)$. On a donc $B' \in \mathfrak{b}(F)$ dans tous les cas; par conséquent $\mathfrak{b}(F) = \overline{\mathfrak{b}(F)}$, ce qui équivaut d'après 1.2.28.2 à la maximalité de $\mathfrak{b}(F)$.

(1.2.31) Soit \mathcal{B} une chaîne évanescence maximale de boules fermées de E , et soit $\mathfrak{f}(\mathcal{B})$ l'ensemble des éléments y de $\aleph(E)$ tels que $E^{\leq y} \in \mathcal{B}$.

L'ensemble $\mathfrak{f}(\mathcal{B})$ est une chaîne ouverte saturée de $\aleph(E)$ dont la borne inférieure n'appartient pas à $\aleph(E)$, et $\mathfrak{b}(\mathfrak{f}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$. En effet, la chaîne \mathcal{B} est non vide et contient donc $B(a,r)$ pour un certain $a \in E$ et un certain $r \geq 0$; l'élément $\zeta_{a,r}$ de $\aleph(E)$ appartient alors à $\mathfrak{f}(\mathcal{B})$, et il résulte immédiatement de la définition de $\mathfrak{f}(\mathcal{B})$ et de la maximalité de \mathcal{B} que $\mathfrak{f}(\mathcal{B})$ contient $[\zeta_{a,r}; \infty[$.

Soient y et z deux éléments de $\mathfrak{f}(\mathcal{B})$. Les boules $E^{\leq y}$ et $E^{\leq z}$ appartenant à \mathcal{B} , leur intersection est non vide; il en va *a fortiori* de même de $\beth(E)^{\leq y} \cap \beth(E)^{\leq z}$, ce qui entraîne que $\beth(E)^{\leq y}$ et $\beth(E)^{\leq z}$ sont comparables pour l'inclusion. Par conséquent, y et z sont comparables, et $\mathfrak{f}(\mathcal{B})$ est une chaîne; comme elle contient $[\zeta_{a,r}; \infty[$, elle est saturée.

Par définition, l'ensemble $\{E^{\leq y}\}_{y \in \mathfrak{f}(\mathcal{B})}$ est égal à la chaîne \mathcal{B} ; celle-ci étant évanescence, $\bigcap_{y \in \mathfrak{f}(\mathcal{B})} E^{\leq y} = \emptyset$. Cela exclut que $\mathfrak{f}(\mathcal{B})$ puisse avoir un plus petit élément x dans $\aleph(E)$ (car sinon, $E^{\leq x}$ serait contenue dans l'intersection précédente), et elle est en conséquence ouverte; il découle dès lors de 1.2.29 que sa borne inférieure n'appartient pas à $\aleph(E)$.

L'égalité $\{E^{\leq y}\}_{y \in \mathfrak{f}(\mathcal{B})} = \mathcal{B}$ se réécrit sous la forme $\mathfrak{b}(\mathfrak{f}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$, ce qui achève de prouver l'assertion requise.

(1.2.32) Soit F une chaîne ouverte saturée de $\aleph(E)$ dont la borne inférieure n'appartient pas à $\aleph(E)$; nous allons montrer que $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}(F)) = F$. Notons x la borne inférieure de F , et x' celle de $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}(F))$, qui est une chaîne ouverte saturée d'après 1.2.31.

Si $y \in F$ alors $E^{\leq y} \in \mathfrak{b}(F)$; il résulte donc des définitions que $F \subset \mathfrak{f}(\mathfrak{b}(F))$, ce qui signifie que $x' \leq x$. Comme $x \notin \aleph(E)$, il est minimal en vertu de 1.2.2.3. Par conséquent, $x' = x$, ce qui entraîne que $F = \mathfrak{f}(\mathfrak{b}(F))$.

(1.2.33) Conclusion. Il découle de 1.2.30, 1.2.31 et 1.2.32 que $F \mapsto \mathfrak{b}(F)$ et $\mathcal{B} \mapsto \mathfrak{f}(\mathcal{B})$ établissent une bijection entre l'ensemble des chaînes ouvertes saturées de $\aleph(E)$ dont la borne inférieure n'appartient pas à $\aleph(E)$ et l'ensemble des chaînes évanescences maximales de boules fermées de E .

On peut reformuler cette assertion de la façon suivante : les applications $x \mapsto \mathfrak{b}([x; \infty[)$ et $\mathcal{B} \mapsto \inf \mathfrak{f}(\mathcal{B})$ établissent une bijection entre $\beth(E) - \aleph(E)$ et l'ensemble des chaînes évanescences maximales de boules fermées de E ; rappelons que ce dernier peut lui-même être canoniquement identifié à

l'ensemble des classes d'équivalence de chaînes évanescentes de boules fermées de E (1.2.28.2).

1.3 Arbres et graphes : propriétés de base

Définitions et premiers exemples

(1.3.1) Nous dirons qu'un espace topologique X est un *graphe* s'il possède les propriétés suivantes :

- i) X est séparé et localement compact ;
- ii) X possède une base d'ouverts U satisfaisant les conditions suivantes :
 - α) pour tout couple (x, y) de points de U il existe un et un seul fermé $[x; y]$ de U homéomorphe à un segment d'extrémités x et y ;
 - β) le bord de U dans X est fini.

Si de plus X lui-même vérifie la propriété α), nous dirons que c'est un *arbre*. Si X est un graphe, nous qualifierons de *sous-graphe* (resp. *sous-arbre*) de X tout sous-ensemble localement fermé de X qui est un graphe (resp. un arbre) pour la topologie induite. Il résulte des définitions qu'un graphe (resp. un arbre) est localement connexe par arcs (resp. connexe par arcs). Tout ouvert d'un graphe en est un sous-graphe ; un espace topologique est un graphe si et seulement si il est séparé et si chacun de ses points possède un voisinage ouvert qui est un arbre.

(1.3.2) Exemples.

(1.3.2.1) Soit E un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et soit \mathfrak{G}_E le sous-ensemble

$$\{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}^\times, |z| < 1 \text{ et } \text{Arg } z \in E\}$$

de \mathbb{C} ; l'espace topologique \mathfrak{G}_E est un arbre. Si X est un graphe et si x appartient à X , on dira que X est *fini en x* si x possède dans X un voisinage admettant, pour un certain E , un homéomorphisme sur \mathfrak{G}_E qui envoie x sur 0. Le cardinal de l'ensemble E en question est alors bien déterminé ; on l'appelle la *valence* de (X, x) ; on parlera parfois plus simplement de la valence de x , s'il n'y a pas d'ambiguïté sur X .

On dira qu'un graphe est *localement fini* s'il est fini en chacun de ses points. Si X est un graphe localement fini, on appellera *sommet topologique* de X (on omettra souvent l'épithète «topologique» s'il n'y a pas d'ambiguïté), tout point de X qui ne possède pas de voisinage homéomorphe à un intervalle ouvert, c'est-à-dire encore tout point x de X tel que la valence de (X, x) soit différente de 2 ; on dira d'un graphe qu'il est *fini* s'il est localement fini et n'a qu'un nombre fini de sommets et de composantes connexes ; tout graphe compact et localement fini est fini.

Si X est un graphe fini et compact, tout sous-graphe fermé de X est fini et compact ; on en déduit que tout sous-graphe d'un graphe localement fini est localement fini.

(1.3.2.2) Soit X un graphe dont tout point x a un voisinage U qui est un arbre vérifiant l'égalité $U = \bigcup [y_i; x]$, où $\{y_i\}$ est un ensemble *fini* de points de U et

où $[y_i; x] \cap [y_j; x] = \{x\}$ pour tout $i \neq j$. Il résulte du 1.1.6 que le graphe X est localement fini.

(1.3.2.3) Soit E un espace métrique ultramétrique. L'espace topologique $\widehat{\mathfrak{A}}(E)$ défini au 1.2.19 est un arbre compact en vertu de 1.2.26.

Quelques propriétés locales des graphes

(1.3.3) Soit X un graphe *connexe*.

(1.3.3.1) Soit $x \in X$ et soit U un voisinage ouvert de x dans X ; pour presque toute composante connexe V de $X \setminus \{x\}$, le sous-ensemble $V \cup \{x\}$ de X est compact, V est un arbre et $V \subset U$ (ce qui entraîne que V est une composante connexe de $U \setminus \{x\}$).

En effet, il existe un voisinage ouvert W de x dans X qui est contenu dans U , relativement compact et satisfait α) et β); comme ∂W est fini, il ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes de $X \setminus \{x\}$. Soit V une composante connexe de $X \setminus \{x\}$ ne rencontrant pas ∂W ; on a $\partial V = \{x\}$, ce qui entraîne que V rencontre W ; puisque V ne rencontre pas ∂W , l'intersection $V \cap W$, qui est ouverte et non vide, est fermée dans V ; par connexité de V , elle est égale à V , ce qui signifie que V est contenue dans W , et *a fortiori* dans U . Comme W est relativement compact, $\overline{V} = V \cup \{x\}$ est compact; comme W est un arbre, V est un arbre.

(1.3.3.2) Soit $x \in X$, soit V une composante connexe de $X \setminus \{x\}$ et soit U un voisinage ouvert connexe de x . Toute composante connexe de $V \cap U$ est un ouvert connexe et non vide de U de bord contenu dans $\{x\}$; c'est donc une composante connexe de $U \setminus \{x\}$.

Le cardinal de $\pi_0(U \cap V)$ est par ailleurs non nul et fini. En effet, il est non nul puisque x adhère à V ; et il est fini car sinon il existerait une infinité de composantes connexes de $U \setminus \{x\}$ qui ne soient pas des composantes connexes de $X \setminus \{x\}$, en contradiction avec 1.3.3.1.

Soit W une composante connexe de $U \setminus \{x\}$ qui est relativement compacte dans U et est contenue dans V . Comme $W \cup \{x\}$ est compacte, c'est une partie fermée de $V \cup \{x\}$; il s'ensuit que l'ouvert non vide W de V en est également un fermé. On a donc $W = V$, et V est *a fortiori* relativement compacte dans X .

Parties convexes d'un arbre

(1.3.4) Soit X un arbre. On dira qu'une partie E de X est *convexe* si $[x; y] \subset E$ pour tout couple (x, y) de points de E .

(1.3.4.1) Si x, y et z sont trois points de X et si $[x; z] \cap [z; y] = \{z\}$ alors $[x; z] \cup [y; z]$ est un segment d'extrémités x et y (1.1.6), et est donc égal à $[x; y]$. En général, $[x; y] \cap [y; z]$ est convexe et est donc de la forme $[z; t]$ pour un certain $t \in X$; on a $[x; t] \cap [t; y] = \{t\}$ et donc $[x; y] = [x; t] \cup [t; y] \cup [y; z]$.

Il s'ensuit aisément (sans utiliser 1.1.11) que si U est un ouvert de X et si $x \in U$ alors l'ensemble des points y de U tels que $[x; y] \subset U$ est ouvert et fermé dans U ; par conséquent, U est connexe si et seulement si il est convexe, c'est-à-dire si et seulement si c'est un sous-arbre de X .

(1.3.4.2) L'intersection de deux parties convexes de X est convexe; en particulier, l'intersection de deux sous-arbres ouverts de X est un sous-arbre ouvert de X . La réunion de deux parties convexes de X qui se rencontrent est une partie convexe de X (on le déduit du 1.3.4.1 ci-dessus).

(1.3.4.3) Soit E une partie localement fermée et convexe de X ; c'est un espace séparé et localement compact, et pour tout couple (x, y) de points de E il existe un unique fermé de E homéomorphe à un segment d'extrémités x et y , à savoir $[x; y]$. Par ailleurs, si $x \in E$ il possède une base de voisinages dans E satisfaisant les conditions α) et β) du 1.3.1. En effet, il possède une telle base dans X , et si U est un voisinage de x dans X satisfaisant α) et β) alors $\partial_E(U \cap E) \subset \partial_X U$, et est donc fini; de plus, $U \cap E$ est une partie convexe de l'arbre U , et satisfait dès lors β) en vertu de ce qui précède. Par conséquent, E est un arbre.

Il s'ensuit que si F et G sont deux sous-arbres fermés de X d'intersection non vide alors $F \cup G$ est un sous-arbre fermé de X ; si de plus F et G sont localement finis alors $F \cup G$ est localement fini : cela résulte de 1.3.4.1 et de 1.3.2.2.

(1.3.4.4) Si $x \in X$, si U est un voisinage ouvert et connexe de x , et si V est une composante connexe de $X \setminus \{x\}$ alors $V \cap U$ est connexe, et est donc une composante connexe de $U \setminus \{x\}$ (1.3.3.2); il s'ensuit que l'application naturelle $\pi_0(U \setminus \{x\}) \rightarrow \pi_0(X \setminus \{x\})$ est bijective.

(1.3.4.5) Si x et y sont deux points distincts de X alors $]x; y[$ est exactement l'ensemble des $z \in X \setminus \{x, y\}$ tels que x et y soient situés sur deux composantes connexes distinctes de $X \setminus \{z\}$. En effet, soit $z \in X$. Si x et y sont situés sur la même composante connexe de $X \setminus \{z\}$, celle-ci contient nécessairement $[x; y]$, et par conséquent z n'appartient pas à $]x; y[$. Supposons maintenant que x et y soient situés sur deux composantes connexes différentes, respectivement notées U et V , de $X \setminus \{z\}$. L'intervalle ouvert $[x; z[$ (resp. $]y; z]$ est alors contenu dans U (resp. V); il s'ensuit que $[x; z] \cap [z; y] = \{z\}$; par conséquent $[x; z] \cup [z; y] = [x; y]$ et l'on a bien $z \in]x; y[$.

(1.3.4.6) Soient x, y et z appartenant à X . Si x et y sont situés sur deux composantes connexes différentes de $X \setminus \{z\}$ alors $z \in]y; x[$ d'après le 1.3.4.5 ci-dessus, et l'on a donc $[y; z] \cap [x; z] = \{z\}$. Si x et y sont situés sur la même composante connexe U de $X \setminus \{z\}$ alors $[y; z] \cap [x; z]$ est de la forme $[t; z]$ pour un certain t qui appartient à U (et est donc différent de z). En effet $[y; z] \cap [x; z]$ est de la forme $[t; z]$ avec $t \in [x; z]$ (1.3.4.1); comme $[x; z] \subset U$, il reste à s'assurer que $t \neq z$. Si l'on avait $t = z$, l'on aurait $[y; z] \cap [x; z] = \{z\}$, et donc $[y; z] \cup [x; z] = [y; x]$, d'où $z \in]y; x[$; mais cela contredirait l'hypothèse que y et x sont situés sur la même composante connexe de $X \setminus \{z\}$.

(1.3.4.7) Soit E une partie non vide et convexe de X ; un point x de X appartient à \overline{E} si et seulement $]y; x[\subset E$ pour tout $y \in E$. La condition est en effet clairement suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, on suppose que x appartient à \overline{E} . Soit $y \in E$. L'intersection de E et $]y; x]$ est convexe et contient y , c'est donc un intervalle non vide de $]y; x]$; soit t sa borne supérieure; nous allons montrer par l'absurde que $t = x$. On suppose que ce n'est pas le cas; la composante connexe de $X \setminus \{t\}$ qui contient $]t; x]$ est alors un voisinage ouvert de x , qui par conséquent rencontre E ; soit z un point de E situé sur cette

composante. L'intersection de $[t; z]$ et $[t; x]$ est de la forme $[t; t']$ avec $t' \neq t$; on a $[t; t'] \subset [t; x]$ et $[y; t'] \subset E$ puisque ce dernier est convexe; dès lors

$$[y; t'] \subset [y; x] \cap E,$$

ce qui contredit la définition de t .

Fixons x dans E . Si y et z sont deux points de \overline{E} alors

$$[y; z] \subset [x; y] \cup [x; z] \subset \overline{E}$$

en vertu de ce qui précède. Par conséquent, \overline{E} est convexe et est donc un sous-arbre fermé de X (1.3.4.3). Remarquons que cette dernière assertion s'étend trivialement au cas où $E = \emptyset$.

(1.3.4.8) Soit S un sous-ensemble fermé de X et soit U une composante connexe de $X \setminus S$; supposons que ∂U contienne deux éléments *distincts* x et y de S . Choisissons $z \in U$; en vertu du 1.3.4.7, les intervalles $[z; x[$ et $[z; y[$ sont contenus dans U . L'intersection $[z; x] \cap [z; y]$ est convexe, compacte, et contient z ; elle est donc de la forme $[z; t]$ pour un certain $t \in U$. On a alors $[x; t] \cap [t; y] = \{t\}$ et donc $[x; y] = [x; t] \cup [t; y]$. Par conséquent, $]x; y[\subset U$, et ne rencontre *a fortiori* pas S ; l'ouvert U est alors nécessairement *la* composante connexe de $X \setminus S$ contenant $]x; y[$.

(1.3.4.9) Appliquons ce qui précède au cas où S est un sous-arbre fermé et non vide de X . Soit U une composante connexe de $X \setminus S$; l'ensemble ∂U est une partie non vide de S , et nous allons montrer par l'absurde que c'est un singleton. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existerait alors deux points distincts x et y dans $\partial_X U$. On aurait alors $]x; y[\subset U \subset X \setminus S$ d'après le 1.3.4.8, et $]x; y[\subset S$ puisque S est un sous-arbre fermé; on aboutit ainsi à une contradiction.

Soit x l'unique point de ∂U , soit $y \in U$ et soit $z \in S$. L'intersection $[y; z] \cap S$ est alors égale à $[y; x]$; en effet, c'est une partie fermée et convexe de $[y; z]$ qui contient z ; elle est donc de la forme $[t; z]$ pour un certain $t \in S$. L'intervalle ouvert $[y; t[$ ne rencontrant pas S , il est contenu dans une composante connexe de $X \setminus S$ qui est nécessairement celle de y , à savoir U ; dès lors $t \in \partial U$ et $t = x$.

Autour des sous-graphes d'un graphe donné

(1.3.5) Soit X un graphe connexe et soit $x \in X$. On déduit de 1.3.4.5 et 1.3.4.6 que l'ensemble des points pouvant être joints à x par un arc injectif est à la fois ouvert et fermé dans X ; on en déduit, sans avoir à utiliser 1.1.11, que X est connexe par arcs injectifs.

(1.3.6) Soit X un graphe et soient E et F deux sous-graphes de X . Soit V un sous-arbre ouvert de X . Les intersections $E \cap V$ et $F \cap V$ sont des sous-graphes de V ; les composantes connexes de chacune d'elles sont donc des sous-arbres de V , fermés (resp. ouverts, resp. localement finis) si E et F sont fermés (resp. ouverts resp. localement finis). On en déduit, à l'aide de 1.3.4.3 : que $E \cap F \cap V$ est un sous-graphe de V , localement fini si E et F sont localement finis; et que $(E \cup F) \cap V$ est un sous-graphe de V si E et F sont tous deux fermés ou bien tous deux ouverts, qui est là encore localement fini si E et F sont localement finis.

Par conséquent, $E \cap F$ est un sous-graphe de X , localement fini si E et F sont localement finis; et si E et F sont tous deux fermés ou bien tous deux ouverts, $E \cup F$ est un sous-graphe de X , localement fini si E et F sont localement finis.

(1.3.7) Soit X un graphe. Si x et y sont deux points de X , et si I et J sont deux arcs injectifs joignant x à y , la réunion $I \cup J$ est un sous-graphe compact et fini de X (1.3.6). Il s'ensuit que s'il existe deux segments distincts I et J joignant y à x , leur réunion contient une boucle (*i.e.* un compact homéomorphe à S^1).

Par conséquent, un graphe connexe est un arbre si et seulement si il ne contient aucune boucle.

(1.3.8) Soit X un graphe et soit E un sous-graphe connexe de X . Soit $x \in \overline{E}$. Il existe un voisinage V de x dans X qui est un arbre compact dont le bord est fini. L'intersection $E \cap V$ est, en vertu du 1.3.6 ci-dessus, un sous-graphe de X ; elle est en particulier localement connexe. Il découle alors de 1.1.10 que $E \cap V$ a un nombre fini de composantes connexes; appelons-les E_1, \dots, E_r . Si V' désigne l'intérieur de V dans X , chacune des intersections $E_i \cap V'$ est un sous-arbre de V' . L'intersection $\overline{E}^X \cap V'$ est égale à l'adhérence dans V' de $\bigcup E_i \cap V'$, c'est-à-dire à la réunion des $\overline{E_i \cap V'}^{V'}$; par conséquent, $\overline{E}^X \cap V'$ est réunion disjointe de sous-arbres fermés de V' ; en particulier, x possède un voisinage dans \overline{E}^X qui est un arbre, et \overline{E}^X est donc un sous-graphe fermé de X .

De plus, le point x appartient à $\overline{E_i \cap V'}^{V'}$ pour au moins un i ; cela force $E_i \cap V'$ à être non vide. Choisissons $y \in E_i \cap V'$; il découle du 1.3.4.7 que $[y; x[\subset E_i \cap V' \subset E$.

On a ainsi démontré l'existence, pour tout $x \in \overline{E}^X$, d'un point y de E et d'un segment I d'extrémités x et y tel que $I \setminus \{x\} \subset E$. Il est clair, réciproquement, que si x est un point de X pour lequel existent un tel y et un tel I , alors $x \in \overline{E}^X$.

(1.3.9) Soit X un graphe, soit E un sous-graphe connexe de X et soient x et y deux points distincts de $\overline{E} \setminus E$. En vertu du 1.3.8 ci-dessus, il existe un segment I_x aboutissant à x , non réduit à $\{x\}$ et tel que $I_x \setminus \{x\} \subset E$; on note x' sa deuxième extrémité, et l'on définit de même I_y et y' . Par connexité de E , il existe un segment J d'extrémités x' et y' tracé sur E ; la réunion Γ de I_x, I_y et J est un sous-arbre compact et connexe de X tel que $\Gamma \setminus \{x, y\} \subset E$. Comme Γ est connexe, il existe un segment I tracé sur Γ et reliant x à y ; on a alors $I \setminus \{x, y\} \subset E$.

Composantes connexes de certains ouverts d'un graphe

(1.3.10) Soit X un graphe connexe et soit \mathcal{K} une partie compacte de X . Soit Π un sous-ensemble de $\pi_0(X \setminus \mathcal{K})$ tel que toutes les composantes connexes appartenant à Π soient relativement compactes. La réunion $Y := \mathcal{K} \cup \bigcup_{V \in \Pi} V$ est alors une partie compacte de X .

En effet, donnons-nous une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X qui recouvrent Y . Nous allons prouver que l'on peut en extraire un sous-recouvrement fini; on se ramène, quitte à raffiner (U_i) , au cas où les U_i sont à bord fini. Comme \mathcal{K}

est compact, il existe un sous-ensemble fini I' de I tel que \mathcal{K} soit contenu dans $U := \bigcup_{i \in I'} U_i$; notons que ∂U est fini.

Soit $V \in \Pi$. Comme ∂V est un sous-ensemble non vide de \mathcal{K} , l'intersection $U \cap V$ est un ouvert non vide de V ; si de plus V ne rencontre pas ∂U , cet ouvert est également fermé dans V , et donc égal à V , ce qui signifie que $V \subset U$.

Soient V_1, \dots, V_r les composantes connexes appartenant à Π qui rencontrent ∂U . Comme chacune d'elles est relativement compacte, la réunion $\bigcup \overline{V_j}$ est une partie compacte de X contenue dans Y . Il existe donc un sous-ensemble fini I'' de I tel que $\bigcup \overline{V_j}$ soit contenue dans $\bigcup_{i \in I''} U_i$.

Par construction, $Y \subset \bigcup_{i \in I' \cup I''} U_i$, ce qui achève la démonstration.

(1.3.11) Soit X un graphe connexe et soit S un sous-ensemble fini de X .

(1.3.11.1) Presque toute composante connexe W de $X \setminus S$ est un arbre relativement compact et à bord singleton.

Pour le voir, on procède par récurrence sur le cardinal de S ; si $S = \emptyset$ il n'y a rien à démontrer. On suppose $S \neq \emptyset$ et le résultat établi en cardinal strictement inférieur à celui de S ; on choisit un point s dans l'ensemble non vide S , et l'on note U l'ouvert de X complémentaire de $S \setminus \{s\}$; c'est un voisinage ouvert de s . Soit Π le sous-ensemble de $\pi_0(X \setminus \{s\})$ constitué des composantes W telles que $W \subset U$, telles que W soit un arbre, et telles que $W \cup \{s\}$ soit compact; en vertu du 1.3.3.1, le complémentaire de Π dans $\Pi_0(X \setminus \{s\})$ est fini; soient W_1, \dots, W_r ses éléments.

Fixons i . L'ouvert W_i de X est un graphe connexe, et le cardinal de $W_i \cap S$ est strictement inférieur à celui de S (puisque $s \notin W_i$). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : presque toutes les composantes connexes de $W_i \setminus S$ sont des arbres relativement compacts et à bord singleton dans W_i , et sont *a fortiori* relativement compacts et à bord singleton dans X ; soient $W_{i,1}, \dots, W_{i,r_i}$ les composantes connexes de $W_i \setminus S$ qui ne sont pas des arbres relativement compacts et à bord singleton dans W_i .

Par construction, si W est ou bien une composante connexe de $X \setminus \{s\}$ qui appartient à Π ou bien une composante connexe de $W_i \setminus S$ pour l'un des W_i , alors W est une partie ouverte, connexe et non vide de $X \setminus S$ telle que $\partial_X W \subset S$; par conséquent, W est une composante connexe de $X \setminus S$.

Réciproquement, si W est une composante connexe de $X \setminus S$ et si elle n'appartient pas à Π , elle est nécessairement contenue dans W_i pour un certain i ; c'est une partie connexe, ouverte et non vide de $W_i \setminus S$ telle que $\partial_{W_i} W \subset \partial_X W \subset S$, et partant une composante connexe de $W_i \setminus S$.

Les composantes connexes de $X \setminus S$ sont donc exactement les éléments de Π et les composantes connexes des $W_i \setminus S$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$; par construction, ce sont toutes des arbres relativement compacts et à bord singleton dans X , à l'exception des $W_{i,j}$ qui sont en nombre fini, ce qui achève la démonstration.

(1.3.11.2) Soit Π un sous-ensemble de $\pi_0(X \setminus S)$. Le sous-ensemble

$$Y := \bigcup_{W \in \Pi} \overline{W}$$

de X en est un sous-graphe fermé, qui est compact si chacune des composantes appartenant à Π est relativement compacte.

En effet, soit T la réunion des ∂W pour W parcourant Π . Toute composante connexe appartenant à Π est alors une composante connexe de $X \setminus T$; comme Y est réunion de T et des W pour $W \in \Pi$, son complémentaire $X - Y$ est réunion de composantes connexes de $X \setminus T$ et est donc ouvert; ainsi, Y est un sous-ensemble fermé de X . Il hérite à ce titre du caractère séparé et localement compact de ce dernier.

Soit $y \in Y$; si $y \notin T$ il est situé sur une certaine composante connexe V de $X \setminus T$ qui est contenue dans Y , et il possède alors un voisinage dans V , et *a fortiori* dans Y , qui est un arbre.

Supposons maintenant que $y \in T$; choisissons un voisinage U de y dans X qui est un arbre et qui ne rencontre aucun autre élément de T . Si V est une composante connexe de $X \setminus T = (X - (T \setminus \{y\})) \setminus \{y\}$ alors $V \cap U$ est réunion finie de composantes connexes de $U \setminus \{y\}$ (1.3.3.2). Par conséquent, $U \cap Y$ est réunion de $\{y\}$ et de composantes connexes de $U \setminus \{y\}$; si W est l'une d'elles, alors pour tout $x \in W$ l'intervalle $[x; y]$ est contenu dans $W \cup \{y\}$ (1.3.4.7) et donc dans $U \cap Y$; il en découle que le fermé $U \cap Y$ de U (qui est un voisinage ouvert de y dans Y) est convexe; c'est par conséquent un arbre (1.3.4.3).

On déduit de ce qui précède que Y est un graphe.

Supposons maintenant que chacune des composantes appartenant à Π est relativement compacte; il résulte alors de 1.3.10, appliqué avec $\mathcal{K} = T$, que Y est compact.

Définition générale de la valence; points isolés, unibranches et pluribranches

(1.3.12) Si X est un graphe, si $x \in X$ et si U est un voisinage ouvert de x dans X qui est un arbre, le cardinal de $\pi_0(U \setminus \{x\})$ ne dépend que de x , et pas de U (1.3.4.4); nous l'appellerons la *valence* de (X, x) ; cette définition est compatible avec la précédente (donnée au 1.3.2.1) lorsque X est fini en x . On dira que x est un point *unibranche* (resp. *pluribranche*) de X si la valence de (X, x) est égale à 1 (resp. strictement supérieure à 1). Remarquons que la valence de (X, x) peut être nulle; cela se produit si et seulement si x est un point isolé de X .

Notons que si x appartient à un intervalle ouvert I tracé sur X , il est nécessairement pluribranche: en effet, supposons que ce soit le cas fixons un voisinage ouvert U de x qui est un arbre. Soit J la composante connexe de x dans $U \cap I$; c'est un intervalle ouvert. Choisissons deux points y et z sur $J \setminus \{x\}$ situés de part et d'autre de x ; on a alors $x \in [y; z]$, et les composantes connexes de $U \setminus \{x\}$ contenant y et z sont donc distinctes, d'où notre assertion.

Donnons un corollaire de cette remarque: si X est un graphe connexe non réduit à un point, les points pluribranches sont denses dans X : cela provient du fait que si U est un ouvert connexe et non vide de X alors U n'est lui-même pas réduit à un point et contient donc un intervalle ouvert non vide.

(1.3.13) Soit X un graphe et soit $x \in X$. Nous allons montrer qu'il possède un voisinage ouvert V dans X possédant les propriétés suivantes:

- i) V est un arbre;
- ii) \bar{V} est un arbre compact;

iii) ∂V est fini, constitué de points pluribranches, et est un singleton si x est unibranche.

Si x est isolé, l'on peut prendre $V = \{x\}$; on suppose maintenant que x n'est pas isolé. On se ramène immédiatement, quitte à restreindre X , au cas où ce dernier est un arbre, nécessairement non réduit à $\{x\}$; le point x possède un voisinage ouvert U à bord fini et relativement compact dans X qui n'est pas X tout entier; le bord de U est alors non vide. Le compact $\Gamma := \bigcup_{y \in \partial U} [x; y]$ est un

sous-arbre fini de X (1.3.4.3) qui contient x . Soit S l'ensemble des sommets de Γ autres que x . Pour tout $y \in \partial U$ on a $[x; y] \subset U$ (1.3.4.7); par conséquent, $\Gamma \setminus \partial U$ est égal à $\Gamma \cap U$ qui est convexe; on en déduit que $\partial U \subset S$. La composante connexe Δ de x dans $\Gamma \setminus S$ est de la forme $\bigcup_{1 \leq i \leq r} [x; y_i[$ où r est un entier non nul,

où $y_i \in \bar{U}$ pour tout i , et où $[x; y_i] \cap [x; y_j] = \{x\}$ dès que $i \neq j$. Si de plus x est unibranche l'ouvert $X \setminus \{x\}$ est connexe, et il résulte alors de 1.3.4.6 que $r = 1$.

Choisissons pour tout i un point z_i sur $]x; y_i[$; chacun des z_i appartient à un intervalle ouvert tracé sur X est de ce fait pluribranche (1.3.12). Soit V la composante connexe de x dans $X \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$. Comme $[x; z_i] \subset V$ pour tout i , le bord de V est exactement $\{z_i\}_{1 \leq i \leq r}$; il est donc fini, constitué de points pluribranches, et est un singleton dès que $r = 1$, ce qui est notamment le cas dès que x est unibranche.

Il suffit pour conclure de prouver que V est relativement compact; pour ce faire, on va démontrer qu'il est contenu dans l'ouvert relativement compact U . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $v \in V - U$. Le segment $[v; x]$ est inclus dans V par convexité de celui-ci et contient nécessairement un point y de ∂U ; l'ensemble $S \cap [y; x]$ est fini et non vide (car $y \in S$), et son élément le plus proche de x est égal à y_i pour un certain i . On a alors $[y_i; x] \subset [v; x] \subset V$ et donc $z_i \in V$, ce qui est contradictoire.

Existence de points unibranches dans le cas compact

(1.3.14) Soit X un arbre et soit $x \in X$. Pour tout couple (y, z) d'éléments de X , la relation \leq définie par la condition $z \leq y$ si et seulement si $y \in [z; x]$ est une relation d'ordre partiel pour laquelle x est le plus grand élément de X . Si $y \in X$ l'ensemble $X_{\leq y}$ des éléments z tels que $z \leq y$ est la réunion de $\{y\}$ et des composantes connexes de $X \setminus \{y\}$ qui ne contiennent pas x ; c'est donc un sous-arbre fermé de X (1.3.11.2).

Supposons de plus que X soit *compact*. Pour tout $y \in X$, l'ensemble $X_{\leq y}$ est alors compact; ceci entraîne immédiatement (compte-tenu du fait que X est non vide) que toute partie totalement ordonnée de X admet un minorant; autrement dit, X est inductif et possède, par le lemme de Zorn, un élément minimal x_0 .

Comme x est le plus grand élément de X , on a $x_0 \neq x$ dès que X n'est pas réduit à $\{x\}$. Plaçons-nous sous cette dernière hypothèse. Le point x_0 est alors unibranche: en effet dans le cas contraire $X \setminus \{x_0\}$ aurait au moins deux composantes connexes, et donc au moins une composante connexe U ne contenant pas x ; mais on aurait alors $y < x_0$ pour tout $y \in U$, ce qui contredirait la minimalité de x_0 .

La notion de partie convexe d'un graphe

(1.3.15) Soit X un graphe; nous dirons qu'un sous-ensemble Y de X est *convexe* si pour tout couple (x, y) de points de Y , tout segment d'extrémités x et y tracé sur X est contenu dans Y ; dans le cas où X est un arbre, on retrouve la notion usuelle de convexité. Il découle de la définition que l'intersection d'une famille de parties convexes de X est convexe.

(1.3.15.1) Soit Y une partie localement fermée et convexe de X . Si V est un sous-arbre de X alors $Y \cap V$ est une partie localement fermée et convexe de V ; c'est donc un sous-arbre de X .

Soit $y \in Y$. Il existe un voisinage ouvert V de y dans X qui est un arbre; l'intersection $V \cap Y$ est un voisinage de y dans Y , et est un arbre d'après ce qui précède; en conséquence, Y est un sous-graphe de X .

(1.3.15.2) Soit Y une partie de X telle que $X - Y$ soit réunion d'ouverts de X dont le bord a au plus un élément; le sous-ensemble Y de X est alors un sous-graphe fermé et convexe de X .

En effet, Y est fermé en vertu de notre hypothèse; pour voir que c'est un sous-graphe convexe, il suffit en vertu de 1.3.15.1 d'en vérifier la convexité.

On raisonne par l'absurde. On suppose donc qu'il existe deux points x et y de Y , un segment I les joignant, et un point z sur $J := I \setminus \{x, y\}$ qui n'appartient pas à Y . Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert U de z dans X qui ne rencontre pas Y et tel que ∂U ait au plus un élément. Soit J_0 la composante connexe de z dans $U \cap J$; le bord de U ayant au plus un élément, il existe une extrémité t de J_0 qui est située sur U . Comme U ne rencontre pas Y , le point t n'est égal ni à x , ni à y ; il appartient donc à $U \cap J$, ce qui contredit le fait que le composante J_0 est fermée dans $U \cap J$.

(1.3.16) Soit X un graphe, soit Γ un sous-graphe convexe et fermé de X , et soit U une composante connexe de $X - \Gamma$. Le bord de U comprend alors au plus un élément. En effet, s'il existait deux points distincts x et y sur ∂U , l'on pourrait en vertu de 1.3.9 tracer un segment I reliant x à y et tel que $I \setminus \{x, y\} \subset U$, contredisant ainsi la convexité de Γ .

1.4 La compactification arboricole

L'espace des bouts d'un graphe connexe

(1.4.1) Soit X un graphe connexe. Pour tout sous-ensemble fini S de X , on note $\mathcal{K}_X(S)$ la réunion de S et des composantes connexes de $X \setminus S$ qui sont relativement compactes. C'est un sous-graphe compact de X , et $X \setminus \mathcal{K}_X(S)$ est réunion disjointe d'un nombre fini de composantes connexes de $X \setminus S$ (1.3.11.2 et 1.3.11.1).

(1.4.1.1) La famille des $\mathcal{K}_X(S)$, où S parcourt l'ensemble des parties finies de X constituée de points pluribranches, est cofinale dans celle de toutes les parties compactes de X . En effet, soit Y un compact de X ; on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts relativement compacts et à bord fini constitué de points pluribranches (1.3.13). La réunion U des ouverts en question est elle-même relativement compacte, et son bord S est fini et constitué de points

pluribranches. Toute composante connexe de U est une composante connexe relativement compacte de $X \setminus S$; par conséquent, $\mathcal{K}(S) \supset U \supset Y$.

(1.4.1.2) Remarquons que si S et S' sont deux sous-ensembles finis de X avec $S \subset S'$ et si U est une composante connexe de $X \setminus S$ alors $U \setminus S'$ est réunion de composantes connexes de $X \setminus S'$, qui sont relativement compactes si U est relativement compacte; il s'ensuit que $\mathcal{K}_X(S) \subset \mathcal{K}_X(S')$.

(1.4.1.3) On désignera par ∂X l'ensemble $\lim_{\leftarrow} \pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))$, où S parcourt l'ensemble des parties finies de X ; on appellera *bout* de X tout élément de ∂X , et \widehat{X} la réunion disjointe de X et ∂X . Remarquons qu'en vertu de 1.4.1.1, on pourrait tout aussi bien définir ∂X comme étant égal à $\lim_{\leftarrow} \pi_0(X \setminus \mathcal{K})$ où \mathcal{K} parcourt l'ensemble des parties compactes de X .

Si U un ouvert de X , il résulte de 1.3.11.2 que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un ensemble fini $S \subset X$ tel que U soit une réunion de composantes connexes (ou encore un ouvert fermé) de $X \setminus S$;
- ii) ∂U est fini.

Si ces conditions sont vérifiées, le sous-ensemble S de i) peut toujours être pris égal à ∂U .

Soit U un ouvert de X à bord fini, et soit S comme dans i); remarquons que l'ouvert U contient une composante connexe de $X \setminus \mathcal{K}_X(S)$ si et seulement si il n'est pas relativement compact; on peut voir $\pi_0(U)$ comme un sous-ensemble de $\pi_0(X \setminus \partial U)$. L'image réciproque de $\pi_0(U)$ par la flèche

$$\pi_0(X \setminus S) \rightarrow \pi_0(X \setminus \partial U)$$

est égale à $\pi_0(U)$; par conséquent, l'image réciproque de $\pi_0(U)$ par la flèche canonique $\partial X \rightarrow \pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S)) \subset \pi_0(X \setminus S)$ est égale à l'image réciproque de $\pi_0(U)$ par la flèche canonique $\partial X \rightarrow \pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(\partial_X U)) \subset \pi_0(X \setminus \partial_X U)$; elle ne dépend donc que de U , et pas de S . La réunion de U et de cette image réciproque est un sous-ensemble de \widehat{X} que l'on notera \widehat{U}^X ; si U et V sont deux ouverts de X à bord fini et si $V \subset U$ (resp. $V \cap U = \emptyset$) alors $\widehat{V}^X \subset \widehat{U}^X$ (resp. $\widehat{U}^X \cap \widehat{V}^X = \emptyset$): on prouve la première affirmation en considérant V comme un ouvert fermé de $X \setminus (\partial V \cup \partial U)$, et la seconde en considérant V et U comme deux ouverts fermés disjoints de $X \setminus (\partial V \cup \partial U)$.

(1.4.1.4) Si U est un ouvert à bord fini de X les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) $\widehat{U}^X = U$;
- b) $\widehat{U}^X \cap \partial X = \emptyset$;
- c) U est relativement compact.

En effet, il résulte des définitions que a) \iff b) et que c) \implies b). Supposons maintenant que l'ouvert U n'est pas relativement compact, et montrons que $\widehat{U}^X \cap \partial X \neq \emptyset$. Comme U n'est pas relativement compact, il existe une composante connexe de U qui n'est pas contenue dans $\mathcal{K}_X(\partial U)$, c'est-à-dire qui n'est elle-même pas relativement compacte; quitte à remplacer U par cette composante, on peut supposer que U est connexe et non vide. Soit S

un sous-ensemble fini de X contenant ∂U . Comme U n'est pas relativement compact, il n'est pas contenu dans $\mathcal{K}_X(S)$ et appartient donc à l'image de l'application $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S)) \rightarrow \pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(\partial U))$; ceci valant quelle que soit la partie finie S de X contenant $\partial_X U$, il existe un élément de $\mathfrak{d}X$ dont l'image dans $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(\partial U))$ est égale à U , c'est-à-dire un élément de $\mathfrak{d}X \cap \widehat{U}^X$.

On en déduit que X est compact si et seulement si $\mathfrak{d}X = \emptyset$: il suffit d'appliquer ce qui précède avec $U = X$.

(1.4.1.5) On munit \widehat{X} de la topologie engendrée par les parties de la forme \widehat{U}^X , où U est ouvert à bord fini de X ; on définit la même topologie en se restreignant aux ouverts U à bord fini qui sont connexes et non vides. Par construction, X est un ouvert de \widehat{X} , et tout point de $\mathfrak{d}X$ adhère à X ; par conséquent, X est dense dans \widehat{X} ; son bord dans \widehat{X} est précisément $\mathfrak{d}X$. La restriction de la topologie de \widehat{X} à $\mathfrak{d}X$ coïncide avec la topologie de limite projective sur ce dernier ; dès lors, le sous-ensemble $\mathfrak{d}X$ de \widehat{X} est profini.

(1.4.1.6) Soit U un ouvert à bord fini de X . L'intersection $\widehat{U}^X \cap \mathfrak{d}X$ est précisément l'ensemble des points de $\mathfrak{d}X$ qui adhèrent à U , et également l'ensemble des points de $\mathfrak{d}X$ qui adhèrent à \widehat{U}^X . En effet, soit x un point de $\mathfrak{d}X$; il existe une unique composante connexe V de $X \setminus \partial U$ telle que $x \in \widehat{V}^X$.

Si $V \not\subset U$ alors $x \notin \widehat{U}^X$, et \widehat{V}^X est un voisinage ouvert de x qui ne rencontre pas \widehat{U}^X ; par conséquent, x n'adhère pas à \widehat{U}^X , et *a fortiori* pas à U .

Si $V \subset U$ alors $x \in \widehat{U}^X$; si W est un ouvert à bord fini de X tel que $x \in \widehat{W}^X$ alors $\widehat{W}^X \cap \widehat{U}^X \neq \emptyset$; par conséquent, $W \cap U \neq \emptyset$, et \widehat{W}^X rencontre U ; le point x adhère donc à U , et *a fortiori* à \widehat{U}^X , ce qui achève de prouver les équivalences requises.

On déduit de ce qui précède que U est dense dans \widehat{U}^X , ce qui entraîne que \widehat{U}^X est connexe dès que U est connexe ; on en déduit aussi que $\partial_{\widehat{X}} \widehat{U}^X = \partial_X U$; il s'ensuit que $\partial_{\widehat{X}} \widehat{U}^X$ est fini.

(1.4.2) Proposition. *Soit X un graphe connexe. L'espace topologique \widehat{X} est compact.*

Démonstration. Nous procédons en deux temps.

(1.4.2.1) *L'espace \widehat{X} est séparé.* Soient x et y deux points distincts de \widehat{X} ; nous allons exhiber deux ouverts disjoints de \widehat{X} contenant respectivement x et y .

Si x et y appartiennent à X , on le fait en utilisant la séparation de X .

Supposons que $x \in \mathfrak{d}X$ et $y \in X$; soit U un voisinage ouvert de y dans X , relativement compact et dont le bord S est fini, et soit V la composante connexe de $X \setminus \mathcal{K}_X(S)$ égale à l'image de x . Les ouverts $\widehat{U}^X = U$ et \widehat{V}^X de \widehat{X} sont disjoints, le premier contient x et le second y .

Supposons maintenant que x et y appartiennent tous deux à $\mathfrak{d}X$. Comme ils sont distincts, il existe une partie finie S de X telles que les images respectives U et V de x et y dans $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))$ soient distinctes ; les ouverts \widehat{U}^X et \widehat{V}^X de \widehat{X} sont alors disjoints ; le premier contient x et le second y .

(1.4.2.2) *L'espace \widehat{X} est quasi-compact.* Soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert de \widehat{X} ; nous allons en extraire un sous-recouvrement fini. On peut supposer que les ouverts qui constituent \mathcal{U} appartiennent tous de la forme \widehat{U}^X , où U est un ouvert à bord fini de X . Comme $\mathfrak{d}X$ est compact, il existe un ensemble

fini $\{U_1, \dots, U_n\}$ de tels ouverts de X tels que les \widehat{U}_i^X appartiennent à \mathcal{U} et recouvrent ∂X .

Soit S la réunion des $\partial_X U_i$; si V est une composante connexe de $X \setminus \mathcal{K}_X(S)$ alors \widehat{V}^X rencontre ∂X (1.4.1.4); par conséquent, \widehat{V}^X rencontre \widehat{U}_i^X pour un certain i ; dès lors, V rencontre U_i (1.4.1.3); comme U_i est un ouvert fermé de $X \setminus \partial_X U_i$, on a $V \subset U_i$.

On peut de ce fait écrire $X = \mathcal{K}_X(S) \cup \bigcup U_i$ et donc

$$\widehat{X} = X \cup \partial X = \mathcal{K}_X(S) \cup \bigcup \widehat{U}_i^X;$$

comme $\mathcal{K}_X(S)$ est compact, il existe une famille finie (V_j) d'ouverts de \mathcal{U} qui le recouvrent; les \widehat{U}_i^X et les V_j constituent alors un sous-recouvrement fini du recouvrement \mathcal{U} de \widehat{X} . \square

(1.4.3) Lemme. *Soit X un graphe connexe tel que ∂X soit fini. Il existe un sous-ensemble fini S_0 de X tel que pour tout ensemble fini S de X vérifiant la condition $\mathcal{K}_X(S) \supset \mathcal{K}_X(S_0)$, la flèche naturelle de ∂X vers $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))$ soit bijective.*

Démonstration. Comme ∂X est fini, il existe un sous-ensemble fini S_0 de X tel que l'application naturelle $\partial X \rightarrow \pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S_0))$ soit injective. Soit S une partie finie de X tel que $\mathcal{K}_X(S) \supset \mathcal{K}_X(S_0)$. Comme l'application $\partial X \rightarrow \pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S_0))$ se factorise par $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))$, la flèche de ∂X vers $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))$ est injective aussi. Elle est par ailleurs surjective en vertu du 1.4.1.4, et donc bijective. \square

Propriété universelle de la compactification d'un graphe

(1.4.4) Théorème. *Soit X un espace topologique compact et soit Y un sous-ensemble localement fermé de X qui est un graphe connexe. Supposons que tout point $x \in \overline{Y} - Y$ possède dans X une base de voisinages ouverts à bord fini, et dont l'intersection avec Y est connexe. Il existe alors un homéomorphisme canonique $\overline{Y} \simeq \widehat{Y}$.*

Démonstration. Pour tout $x \in \overline{Y} - Y$ on notera \mathcal{V}_x l'ensemble des voisinages ouverts et à bord fini de x dont l'intersection avec Y est connexe; c'est par hypothèse une base de voisinages de x .

Soit $x \in \overline{Y} - Y$ et soit S un sous-ensemble fini de Y . Il existe $V \in \mathcal{V}_x$ tel que $V \cap \mathcal{K}_Y(S) = \emptyset$. L'intersection $V \cap Y$ étant connexe et non vide, elle est contenue dans une unique composante connexe $\varpi(V, S)$ de $X \setminus \mathcal{K}_X(S)$. Celle-ci ne dépend en réalité pas de V : si V' est un autre élément de \mathcal{V}_x évitant $\mathcal{K}_Y(S)$ il existe V'' appartenant à \mathcal{V}_x et contenu dans $V \cap V'$, et il est clair que $\varpi(V, S) = \varpi(V'', S) = \varpi(V', S)$; on peut donc écrire $\varpi(S)$ au lieu de $\varpi(V, S)$. L'inclusion $(V \cap Y) \subset \varpi(S)$ pour tout $V \in \mathcal{V}_x$ permet de caractériser $\varpi(S)$ comme la seule composante connexe de $Y \setminus \mathcal{K}_Y(S)$ à laquelle x adhère.

La donnée pour tout S de la composante $\varpi(S)$ définit un point de ∂Y que l'on notera $\varphi(x)$. En posant $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in Y$, on étend φ en une application de \overline{Y} vers \widehat{Y} , dont nous allons montrer que c'est un homéomorphisme. Il suffit, par compacité, de s'assurer qu'elle est continue et bijective.

(1.4.4.1) *L'application φ est continue.* Comme Y est localement fermé, Y est ouvert dans \bar{Y} ; par conséquent, φ est continue en tout point de Y . Il reste à montrer que φ est continue en tout point de $\bar{Y} - Y$; soit donc x un tel point.

Soit S un sous-ensemble fini de Y et soit U la composante connexe de $Y \setminus S$ telle que $\varphi(x) \in \hat{U}^Y$; il suffit de prouver que $\varphi^{-1}(\hat{U}^Y)$ est un voisinage de x dans \bar{Y} .

Soit $V \in \mathcal{V}_x$ tel que $V \cap \mathcal{K}_Y(S) = \emptyset$; par définition de φ , on a $V \cap Y \subset U$.

Soit $y \in V \cap \bar{Y}$. Si $y \in Y$ alors $\varphi(y) = y \in V \subset U \subset \hat{U}^Y$. Si $y \in \bar{Y} - Y$ alors l'inclusion $(V \cap Y) \subset U$ implique que la seule composante de $Y \setminus \mathcal{K}_Y(S)$ à laquelle y adhère est nécessairement U ; il s'ensuit, là encore par définition de φ , que $\varphi(y) \in \hat{U}^Y$.

Par conséquent, le voisinage $V \cap \bar{Y}$ de x dans \bar{Y} est contenu dans \hat{U}^Y , ce qui achève d'établir la continuité de φ .

(1.4.4.2) *L'application φ est injective.* Par la définition même de φ , la seule chose qu'il y a à vérifier est l'injectivité de $\varphi|_{\bar{Y}-Y}$.

Donnons-nous donc deux points distincts x et y sur $\bar{Y} - Y$. En vertu du caractère séparé de Y il existe $V \in \mathcal{V}_x$ et $W \in \mathcal{V}_y$ tels que $V \cap W = \emptyset$. Soit S l'ensemble fini $Y \cap (\partial V \cup \partial W)$. L'intersection $V \cap Y$ est connexe, non vide, ouverte et fermée dans $Y \setminus S$; c'est donc une composante connexe de $Y \setminus S$; il en va de même de $W \cap Y$. Comme $V \cap W = \emptyset$, les deux composantes connexes $Y \cap V$ et $Y \cap W$ de $Y \setminus S$ sont distinctes; par définition de φ , il vient $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, ce qui achève de prouver l'injectivité de $\varphi|_{\bar{Y}-Y}$, et partant celle de φ .

(1.4.4.3) *L'application φ est surjective.* Soit $x \in \hat{Y}$; si $x \in Y$ alors $\varphi(x) = x$; supposons maintenant que $x \in \partial Y$. Pour toute famille finie S de points de Y , notons $\varpi(S)$ la composante connexe de $Y \setminus \mathcal{K}_Y(S)$ égale à l'image de x ; l'intersection des $\varpi(S)$ est non vide par compacité de X ; elle est contenue dans \bar{Y} .

Soit $y \in Y$; il existe un voisinage ouvert U de y dans Y qui est relativement compact et à bord fini; comme $\varpi(\partial Y U)$ est une composante connexe de $Y \setminus \partial Y U$ qui n'est pas relativement compacte, $y \notin \overline{\varpi(\partial Y U)}$; il s'ensuit que l'ensemble non vide $\bigcap_S \overline{\varpi(S)}$ est contenu dans $\bar{Y} - Y$; si z désigne un point de cet ensemble on a par construction $\varphi(z) = x$; par conséquent, φ est surjective. \square

(1.4.5) **Corollaire.** *Soit X un graphe et soit Y un sous-graphe connexe de X . Supposons que ∂Y est fini et que $\bar{Y} - Y$ a un cardinal supérieur ou égal à celui de ∂Y . Il existe alors un homéomorphisme canonique $\bar{Y} \simeq \hat{Y}$.*

Démonstration. Quitte à remplacer X par l'adhérence de Y , on peut supposer que Y est un ouvert dense de X . Soit N le cardinal de ∂Y . Soit $r \geq N$ et soit (x_1, \dots, x_r) une famille de points deux à deux distincts de ∂Y . Il existe une famille (V_1, \dots, V_r) d'ouverts de X qui satisfait les conditions suivantes :

α) pour tout i , l'ouvert V_i est un voisinage connexe et relativement compact de x_i dont le bord est fini;

β) les V_i sont deux à deux disjoints.

Soit S l'ensemble fini $Y \cap (\bigcup \partial V_i)$. On a $Y = \mathcal{K}_Y(S) \amalg U_1 \amalg \dots \amalg U_s$, où les U_j sont les composantes connexes non relativement compactes (dans Y) de $Y \setminus S$.

Fixons $i \in \{1, \dots, r\}$. Le point x_i adhère à Y ; comme $\mathcal{K}_Y(S)$ est compact, x_i n'adhère pas à $\mathcal{K}_Y(S)$; il existe donc un indice $j(i)$ tel que x_i adhère à $U_{j(i)}$; la composante $U_{j(i)}$ rencontre alors V_i . Comme $Y \cap \partial V_i \subset S$, l'intersection $U_{j(i)} \cap V_i$ est fermée dans $U_{j(i)}$; étant par ailleurs ouverte et non vide, elle coïncide avec $U_{j(i)}$; autrement dit, $U_{j(i)} \subset V_i$.

Ainsi, chacun des ouverts V_i contient une composante $U_{j(i)}$. Comme les V_i sont deux à deux disjoints, l'application $i \mapsto j(i)$ est injective, d'où il découle que $s \geq r \geq N$. D'autre part, l'application naturelle $\partial Y \rightarrow \pi_0(Y \setminus \mathcal{K}_Y(S))$ est surjective (1.4.1.4), d'où la majoration $s \leq N$, puis les égalités $s = r = N$. Cela implique que le cardinal de ∂Y est égal à N , et que $\{x_1, \dots, x_r\} = \partial Y$; on renumérote les U_j de sorte que U_i soit contenu dans V_i pour tout i .

Fixons i . Comme $V_i \cap V_j = \emptyset$ pour tout $j \neq i$, l'ouvert V_i ne rencontre pas S . Si U est une composante connexe de $Y \setminus S$ qui diffère de U_i l'intersection $U \cap V_i$ est un ouvert fermé strict de V_i , et est donc vide par connexité de ce dernier; par conséquent, $V_i \cap X$ coïncide avec U_i , et est en particulier connexe.

Si W est un voisinage ouvert connexe à bord fini de x_i dans V , la famille $(V_1, \dots, V_{i-1}, W, V_{i+1}, \dots, V_N)$ satisfait encore les conditions α) et β) ci-dessus; par conséquent, $W \cap Y$ est connexe. Ainsi, x_i possède une base de voisinages à bord fini dont l'intersection avec Y est connexe.

Le graphe X est la réunion de $\mathcal{K}_Y(S)$, des U_i et de $\partial Y = \{x_1, \dots, x_N\}$; puisque $U_i \subset V_i \subset \bar{V}_i$ pour tout i , il vient $X = \mathcal{K}_Y(S) \cup \coprod \bar{V}_i$; comme $\mathcal{K}_Y(S)$ et les \bar{V}_i sont compacts, X est compact. Par ce qui précède, chacun des points de ∂Y a une base de voisinages à bord fini dont l'intersection avec Y est connexe; le théorème 1.4.4 assure alors qu'il existe un homéomorphisme canonique entre \bar{Y} (qui ici n'est autre que X) et \hat{Y} . \square

(1.4.6) Corollaire. *Soit X un arbre et soit Y un sous-arbre de X . La compactification $\bar{Y}^{\hat{X}}$ de Y s'identifie à \hat{Y} .*

Démonstration. Soit $x \in \partial_{\hat{X}} Y$. Soit S un sous-ensemble fini de X et soit U la composante connexe de $X \setminus S$ telle que $x \in \hat{U}^X$. On a les égalités

$$\hat{U}^X \cap Y = (\hat{U}^X \cap X) \cap Y = U \cap Y.$$

Par convexité, $U \cap Y$ est connexe; par conséquent, x possède dans \hat{X} une base de voisinages ouverts et à bord fini dont l'intersection avec Y est connexe, et le corollaire découle alors aussitôt du théorème 1.4.4. \square

(1.4.7) Corollaire. *Soit X un graphe et soit U un sous-graphe ouvert et connexe de X . Le bord de U dans X possède une base d'ouverts compacts; il est en particulier totalement discontinu, et profini s'il est compact.*

Démonstration. Soit $x \in \partial U$; il s'agit de montrer qu'il possède une base de voisinages ouverts compacts dans ∂U . Soit V un voisinage de x dans X qui est un arbre compact et à bord fini. En vertu de 1.1.10, l'ensemble $\pi_0(U \cap V)$ est fini; soient U_1, \dots, U_r les composantes connexes de $V \cap U$ dont l'adhérence contient x . La question étudiée étant locale, il suffit de démontrer que x possède une base de voisinages ouverts compacts dans $\bigcup \partial_V U_i$.

Soit W une composante connexe de $V \setminus \{x\}$. Soient i et j deux indices tels que U_i et U_j soient incluses dans W . Soit $y \in U_i$ et soit $z \in U_j$; comme x adhère

à U_i et U_j , les deux intervalles $[y; x[$ et $[z; x[$ sont respectivement inclus dans U_i et U_j ; leur intersection étant non vide (elle est de la forme $[t; x[$ avec $t \in W$), on a nécessairement $i = j$.

Ainsi chaque composante connexe de $V \setminus \{x\}$ contient *au plus* un ouvert U_i ; on en déduit que $\partial_V U_i \cap \partial_V U_j = \{x\}$ pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$.

Fixons i . Il résulte du corollaire 1.4.6 que $\overline{U_i}^V$ s'identifie à $\widehat{U_i}$; par conséquent, $\partial_V U_i$ est homéomorphe à ∂U_i , et est en particulier profini; il s'ensuit que x possède une base de voisinages ouverts compacts dans $\partial_V U_i$.

Soit Ω un voisinage de x dans $\bigcup \partial_V U_i$. Par ce qui précède, il existe pour tout i un sous-ensemble compact \mathcal{K}_i de $\partial_V U_i$ dont le complémentaire \mathcal{K}_i' dans $\partial_V U_i$ est compact, contient x et est contenu dans Ω ; si i et j sont deux indices distincts alors $\mathcal{K}_i \cap \partial_V U_j = \emptyset$ puisque $\partial_V U_i \cap \partial_V U_j = \{x\}$.

La réunion des \mathcal{K}_i est un compact de $\bigcup \partial_V U_i$ dont le complémentaire dans $\bigcup \partial_V U_i$ est le compact $\bigcup \mathcal{K}_i'$, qui contient x et est contenu dans Ω ; ceci achève la démonstration. \square

(1.4.8) Si X est un arbre, si Y est un sous-arbre de X , et si $\omega \in \partial X$, nous dirons que Y *aboutit* à ω si ce dernier appartient à ∂Y modulo l'identification entre \widehat{Y} et $\widehat{Y}^{\widehat{X}}$ fournie par le corollaire 1.4.6.

L'enveloppe convexe d'une partie compacte d'un arbre

(1.4.9) On dira qu'un espace topologique est une *droite éventuellement longue* s'il est connexe, non vide, non compact, et localement homéomorphe à \mathbb{R} . Une droite éventuellement longue est une «vraie» droite (*i.e.*, est homéomorphe à \mathbb{R}) si et seulement si elle est paracompacte, ou encore si et seulement si elle est métrisable; toute droite éventuellement longue est un arbre à deux bouts.

Si x et y sont deux points d'un espace topologique X , on dira que X est un *segment éventuellement long d'extrémités x et y* si $X = \{x\} = \{y\}$ ou s'il existe une droite éventuellement longue I et un homéomorphisme $X \simeq \widehat{I}$ envoyant $\{x, y\}$ sur ∂I .

Si x est un point d'un espace topologique X , on dira que X est une *demi-droite éventuellement longue issue de x* s'il existe une droite éventuellement longue I et un plongement topologique de X dans \widehat{I} envoyant x sur l'un des deux points de ∂I et identifiant $X \setminus \{x\}$ à I .

(1.4.10) Proposition. *Soit X un arbre et soit S un sous-ensemble fermé et discret de X . Soit $(I_j)_{j \in J}$ une famille de sous-arbres fermés de X tels que chacun des I_j soit ou bien une droite éventuellement longue, ou bien une demi-droite éventuellement longue issue d'un point de S . La réunion Γ des I_j est alors un sous-graphe fermé localement fini de X .*

Démonstration. Soit V un sous-arbre ouvert de X relativement compact, à bord fini, et rencontrant au plus un point de S ; nous allons montrer que $\Gamma \cap V$ est un sous-graphe fini et fermé de V , ce qui suffira à conclure puisque X admet un recouvrement par de tels V .

Soit \mathcal{I} l'ensemble des sous-arbres I de V tels que l'une des deux propriétés suivantes soit satisfaite :

- il existe deux points distincts x et y de ∂V tels que $I =]x; y[$;
- $V \cap S$ est un singleton $\{z\}$ et il existe $t \in \partial V$ tel que $I = [z; t[$.

L'ensemble \mathcal{S} est fini, et chacun de ses éléments est un sous-arbre fermé et fini de V .

Soit $j \in J$. L'intersection $I_j \cap V$ est un ouvert convexe et relativement compact de I_j , ce qui implique que $\overline{V \cap I_j}$ est ou bien vide, ou bien un segment tracé sur le fermé I_j . Supposons que $V \cap I_j$ est non vide, et distinguons deux cas.

Le cas où I_j est une droite éventuellement longue. L'intersection $I_j \cap V$ est alors de la forme $]x; y[$ où x et y sont deux points distincts de I_j situés sur ∂V , et l'on a donc $(I_j \cap V) \in \mathcal{S}$.

Le cas où I_j est une demi-droite éventuellement longue issue d'un point z de S . L'intersection $I_j \cap V$ peut sous cette hypothèse : ou bien être de la forme $]x; y[$ où x et y sont deux points de I_j situés sur ∂V , et l'on a alors $(I_j \cap V) \in \mathcal{S}$; ou bien être de la forme $[z; t[$ où t est un point de I_j situé sur ∂V , et l'on a encore $(V \cap I_j) \in \mathcal{S}$.

Ainsi $V \cap I_j$ appartient-il à \mathcal{S} dès qu'il est non vide. Par conséquent, $V \cap \Gamma$ est réunion d'éléments de \mathcal{S} . Comme \mathcal{S} est un ensemble fini de sous-arbres fermés et finis de V , l'intersection $V \cap \Gamma$ est un sous-graphe fermé et fini de V , ce qui achève la démonstration. \square

(1.4.11) Soit X un arbre et soit E une partie de X . La réunion $\text{Conv } E$ des segments $[x; y]$, où (x, y) parcourt E^2 , est visiblement l'*enveloppe convexe* de E , c'est-à-dire la plus petite partie convexe de X contenant E .

(1.4.12) Théorème. Soit X un arbre et soit E une partie compacte de X . L'ensemble $\text{Conv } E$ est un sous-arbre compact de X . Si x est un point de $\text{Conv } E$ tel que $x \notin E$ ou tel que x soit un point isolé de E , l'arbre $\text{Conv } E$ est fini en x .

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

(1.4.12.1) Réduction au cas où X est compact. Tout point de X ayant un voisinage qui est un arbre compact, on peut recouvrir le compact E par une famille finie V_1, \dots, V_n d'arbres compacts non vides. Pour tout i , on choisit un point x_i sur V_i . La réunion des V_i et des segments $[x_i; x_j]$ où (i, j) parcourt $\{1, \dots, n\}$ est un compact convexe, et donc un sous-arbre compact de X ; par construction, il contient E , et $\text{Conv } E$; en le substituant à X , on se ramène au cas où ce dernier est compact.

(1.4.12.2) Posons $U = X \setminus E$; c'est une réunion disjointe d'arbres. Si V désigne une composante connexe de U alors $V \cap \text{Conv } E$ est une réunion d'intervalles ouverts de la forme $]y; z[$ avec $y \in E$ et $z \in E$; ils sont tous fermés dans V . Il résulte de la proposition 1.4.10 que $V \cap \text{Conv } E$ est un sous-graphe fermé et localement fini de V . Par conséquent, $U \cap \text{Conv } E$ est un sous-graphe fermé et localement fini de U ; cela entraîne que $E \cup (U \cap \text{Conv } E) = \text{Conv } E$ est une partie fermée, et partant compacte, de X . Comme elle est convexe par construction, c'en est un sous-arbre compact, dont on vient de voir qu'il est fini en tout point de U .

(1.4.12.3) Soit $x \in E$ tel que $E \setminus \{x\}$ soit compact; posons $E' = E \setminus \{x\}$, et soit U' la composante connexe de $x-$ dans $X \setminus E'$. L'intersection $U' \cap \text{Conv } E$

est réunion d'intervalles ouverts de la forme $]y; z[$ avec $y \in E'$ et $z \in E'$ et d'intervalles semi-ouverts de la forme $[x; t[$ avec $t \in E'$; chacun d'eux est fermé dans U' . En vertu de la proposition 1.4.10, $U' \cap \text{Conv } E$ est un graphe localement fini; en particulier, $\text{Conv } E$ est fini en x . \square

(1.4.13) Proposition. *Soit X un arbre compact et soit U un sous-arbre ouvert de X . L'espace topologique U est dénombrable à l'infini.*

Démonstration. Si U est vide il n'y a rien à démontrer. On suppose U non vide, on choisit $x \in U$, et l'on munit X de la relation d'ordre partiel définie par x (1.3.14). Le fermé ∂U est une partie compacte et totalement discontinue de X (cor. 1.4.7). L'enveloppe convexe $\text{Conv}(\partial U \cup \{x\})$ coïncide avec la réunion des $]y; x[$ où y parcourt ∂U . Comme x est un point isolé de $\partial U \cup \{x\}$, l'intersection

$$\Gamma := \text{Conv}(\partial U \cup \{x\}) \cap U$$

est un arbre localement fini en vertu du théorème 1.4.12 ci-dessus; il contient $]y; x[$ pour tout $y \in \partial U$ (1.3.4.7). On note S l'ensemble des sommets de Γ ; c'en est une partie fermée et discrète.

(1.4.13.1) Soit $y \in \partial U$. Nous allons définir une suite $(\sigma_i(y))_i$ de points de $]y; x[$ par le procédé récursif suivant.

On pose $\sigma_0(y) = x$. Si i est un entier tel que $\sigma_i(y)$ soit défini, on distingue deux cas : ou bien $S \cap]y; \sigma_i(y)[$ est non vide, et l'on définit alors $\sigma_{i+1}(y)$ comme son plus grand élément (qui existe en raison du caractère fermé et discret de S); ou bien il est vide, et l'on interrompt alors la construction de la suite, qui ne sera donc définie que jusqu'au rang i .

Par construction, $(\sigma_i(y))_i$ est une suite strictement décroissante de points de $]y; x[$, et $\{\sigma_i(y)\}_{i>0}$ est égal à $S \cap]y; x[$. Il résulte alors du caractère fermé et discret de S que si la suite $(\sigma_i(y))_i$ est infinie, $\sigma_i(y)$ tend vers y quand i tend vers l'infini.

Supposons que $(\sigma_i(y))_i$ soit finie, et soit j le plus grand indice de son domaine de définition. L'intervalle $[\sigma_j(y); y[$ ne comporte alors aucun sommet de Γ ; on choisit une suite arbitraire et strictement décroissante de points de $]\sigma_j(y); y[$ qui tend vers y , et que l'on numérote $\sigma_{j+1}(y), \sigma_{j+2}(y)$, etc. On prolonge ainsi la suite finie $(\sigma_i(y))_i$ en une suite définie sur \mathbb{N} .

(1.4.13.2) Supposons qu'un point z de Γ soit égal à $\sigma_j(y)$ pour un certain entier j et un certain $y \in \partial U$, et qu'il existe un point y' de ∂U distinct de y et tel que $z \in]y'; x[$; nous allons montrer que $z = \sigma_j(y')$.

Si $z = x$ on a $j = 0$ et $z = \sigma_0(y')$; si $z \neq x$ alors $j \neq 0$. Plaçons-nous sous cette dernière hypothèse; l'intersection de $]y; x[$ et $]y'; x[$ contient z , elle est donc de la forme $[t; x[$ avec $t \neq x$; comme $y \neq y'$, comme $]y; x[\subset \Gamma$ et comme $]y'; x[\subset \Gamma$, on a $t \in \Gamma$.

Par construction, $]y; t[\cap]y'; t[=]y; t[\cap [t; x[=]y'; t[\cap [t; x[= \{t\}$; par conséquent, la valence de (Γ, t) est au moins 3, et t est un sommet de Γ . L'intersection $S \cap [t; x[$ est finie et contient t ; elle est donc de la forme $\{t_1, \dots, t_r\}$ où (t_i) est une suite strictement décroissante telle que $t_r = t$. On a par construction $\sigma_i(y) = t_i$ et $\sigma_i(y') = t_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, et $\sigma_i(y) < t$ et $\sigma_i(y') < t$ pour tout $i > r$; comme $z \in [t; x[$ il est égal à t_s pour un certain s compris entre 1 et r ; on a par conséquent, $j = s$ et $z = \sigma_j(y')$, comme annoncé.

(1.4.13.3) Qualifions de *point marqué* de Γ tout point de la forme $\sigma_i(y)$ pour un certain i et un certain $y \in \partial U$; en vertu de 1.4.13.2, l'entier i ne dépend pas du choix de y ; on l'appellera *l'indice* du point marqué en question. Si $y \in \partial U$, il découle de 1.4.13.2 que l'ensemble des points marqués de Γ appartenant à $[y; x]$ est exactement l'ensemble $\{\sigma_i(y)\}_i$. Par construction, tout sommet de Γ est marqué.

Nous allons montrer par récurrence sur i que l'ensemble des points marqués de Γ d'indice i est fini. C'est évident pour $i = 0$, puisque x est le seul point marqué d'indice 0. Supposons que ce soit vrai à un certain rang $i > 0$, et montrons-le au rang $i + 1$. Si z est un point marqué d'indice $i + 1$, l'ensemble des points marqués de l'intervalle $[z; x]$ est une suite strictement décroissante $x = z_0, z_1, \dots, z_{i+1} = z$, où chacun des z_j est d'indice j . L'intervalle $]z; z_i[$ ne contient aucun point marqué de Γ .

Soit maintenant t un point marqué d'indice i de Γ et soient w et w' deux points marqués distincts d'indice $i + 1$ tels que $]w; t[$ et $]w'; t[$ ne contiennent aucun point marqué de Γ . L'intersection $]w; t[\cap]w'; t[$ est de la forme $]w''; t[$. Comme w et w' sont tous deux marqués et distincts, on ne peut avoir $w \in]w'; t[$ ou $w' \in]w; t[$; par conséquent, $w'' \neq w$ et $w'' \neq w'$. Si w'' était distinct de t , on aurait alors $]w; w''[\cap]w'; w''[=]w; w''[\cap]w''; t[=]w'; w''[\cap]w''; t[= \{w''\}$, et la valence de (Γ, w'') serait au moins égale à 3, ce qui est absurde puisque $]w; t[$ ne contient aucun point marqué de Γ , et *a fortiori* aucun sommet. On a dès lors $w'' = t$; par conséquent, $]w; t[\cap]w'; t[= \{t\}$.

Il s'ensuit que l'ensemble des points marqués w d'indice $i + 1$ tels que $]w; t[$ ne contienne aucun point marqué de Γ est fini, et plus précisément de cardinal majoré par la valence de (Γ, t) .

On déduit de ce qui précède et de la finitude du nombre de points marqués d'indice i de Γ , qui constitue notre hypothèse de récurrence, que le nombre de points marqués d'indice $i + 1$ de Γ est fini, ce qu'on souhaitait établir.

(1.4.13.4) Pour tout $i > 0$, notons E_i l'ensemble fini des points marqués d'indice i de Γ , et désignons par U_i la composante connexe de $U \setminus E_i$ qui contient x .

L'adhérence $\overline{U_i}$ est contenue dans U . Pour le voir, on raisonne par l'absurde : si ce n'était pas le cas, il existerait $y \in \partial U$ qui soit adhérent à U_i . L'intervalle $]y; x]$ serait alors contenu dans l'ouvert U_i (1.3.4.7); un tel intervalle rencontrant E_i , on aboutirait à une contradiction.

Tout point de U appartient à U_i pour un certain i . En effet, soit $y \in U$. Nous allons montrer que $]y; x]$ ne contient qu'un nombre fini de points marqués de Γ ; cela entraînera l'existence d'un entier i tel que $]y; x] \cap E_i = \emptyset$, c'est-à-dire tel que $y \in U_i$. On distingue deux cas.

Si $y \in \Gamma$ il est situé sur un intervalle $[z; x]$ pour un certain $x \in \partial U$, et l'intervalle $]y; x] \subset [z; x]$ ne contient alors qu'un nombre fini de points marqués de Γ .

Supposons maintenant que $y \notin \Gamma$, et soit V la composante connexe de $U - \Gamma$ contenant y . Le bord de V dans U est un singleton $\{t\}$ pour un certain $t \in \Gamma$, et $]y; x] \cap \Gamma = [t; x]$ (1.3.4.9); par le raisonnement suivi ci-dessus, $[t; x]$ ne contient qu'un nombre fini de points marqués de Γ , et l'intervalle $]y; x]$ ne contient donc lui-même qu'un nombre fini de points marqués de Γ .

Conclusion. Pour tout entier i , le compact $\overline{U_i}$ de X est contenu dans U ; comme U est égal à la réunion des U_i , il est *a fortiori* égal à la réunion des $\overline{U_i}$, et est de ce fait dénombrable à l'infini. \square

(1.4.14) Théorème. *Soit X un graphe paracompact et soit U un ouvert de X ; l'espace U est paracompact.*

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où les graphes U et X sont connexes; l'espace X est alors dénombrable à l'infini, et il s'agit de montrer qu'il en va de même de U .

Tout point de X possède un voisinage qui est un arbre compact à bord fini (1.3.13). Par conséquent, X est réunion dénombrable de sous-arbres compacts à bord fini. Soit Y un tel sous-arbre. L'intersection $Y \cap U$ est un sous-graphe de X (1.3.6) et est donc localement connexe. D'après le 1.1.10, le sous-graphe $Y \cap U$ a un nombre fini de composantes connexes. En vertu de la proposition 1.4.13, chacune d'elle est dénombrable à l'infini; il s'ensuit que $Y \cap U$ est dénombrable à l'infini. Ceci valant quel que soit Y , l'ouvert U est dénombrable à l'infini. \square

(1.4.15) Théorème. *Soit X un arbre et soient x et y deux points de \widehat{X} . Il existe un unique fermé $[x; y]$ de \widehat{X} qui soit un segment éventuellement long extrémités x et y , et $]x; y[$ est le sous-ensemble de X formé des points z tels que x et y appartiennent à deux composantes connexes distinctes de $\widehat{X} \setminus \{z\}$. Si U est un ouvert connexe et à bord fini de X tel que x et y appartiennent à \widehat{U}^X alors $[x; y] \subset \widehat{U}^X$.*

Démonstration. Si $x = y$ le théorème est évident; on suppose maintenant que $x \neq y$.

(1.4.15.1) Soit I l'ensemble des points z de $X \setminus \{x, y\}$ tels que x et y soient situés sur deux composantes connexes différentes de $\widehat{X} \setminus \{z\}$. Rappelons que si U est un ouvert à bord fini de X , on a $\partial_{\widehat{X}} \widehat{U}^X = \partial_X U$ (1.4.1.6).

Soient U et V deux ouverts connexes, non vides et à bord fini de X , tels que $x \in \widehat{U}^X$ et $y \in \widehat{V}^X$, et tels que $(\widehat{U}^X \cup \partial_X U) \cap (\widehat{V}^X \cup \partial_X V) = \emptyset$. Choisissons $z \in U$ et $t \in V$. Comme $t \notin U$, l'intersection de $[z; t]$ et de U est de la forme $[z, u[$ avec $u \in \partial_X U$; de même, $[z; t] \cap V$ est de la forme $]v; t]$ avec $v \in \partial_X V$. Comme $U \cup \partial_X U$ et $V \cup \partial_X V$ sont disjoints, $u < v$ si l'on oriente $[z; t]$ de z vers t ; nous allons montrer que l'intersection de I avec $X - (U \cup V)$ est égale à $[u; v]$ (cela entraînera que u et v ne dépendent pas de z et t , ce que l'on pourrait vérifier directement).

On procède par double inclusion. Soit w un élément de $X - (U \cup V)$ qui n'appartient pas à $[u; v]$. Comme $u \in \partial_X U$ et comme $v \in \partial_X V$, la réunion

$$\widehat{U}^X \cup [u; v] \cup \widehat{V}^X$$

est une partie connexe de $\widehat{X} \setminus \{w\}$, qui contient x et y ; par conséquent, $w \notin I$; il s'ensuit que $I \cap (X - (U \cup V)) \subset [u; v]$.

Réciproquement, soit $w \in [u; v]$ et soit U' (resp. V') la composante connexe de $X \setminus \{w\}$ qui contient U (resp. V). Comme $w \in [z; t]$ ces deux composantes sont distinctes. Il s'ensuit que \widehat{U}'^X et \widehat{V}'^X sont disjoints. Or $\widehat{X} \setminus \{w\}$ est réunion disjointe des \widehat{W}^X , où W parcourt $\pi_0(X \setminus \{w\})$; par conséquent, \widehat{U}'^X et \widehat{V}'^X sont

deux composantes connexes disjointes de $\widehat{X} \setminus \{w\}$; la première contient x et la seconde y , ce qui montre que $w \in I$, et partant que $[u; v] \subset I \cap (X - (U \cup V))$.

Comme \widehat{X} est compact, les ouverts de la forme $\widehat{U}^X \amalg \widehat{V}^X$, où U et V sont comme ci-dessus, forment une base de voisinages de $\{x, y\}$; compte-tenu de ce qui précède, on en déduit les faits suivants :

- I est non vide;
- si w et w' sont deux points de I il existe un ouvert de I contenant w et w' et homéomorphe à \mathbb{R} ;
- le compact $\overline{I}^{\widehat{X}}$ contient x et y .

Il en découle que I est une variété topologique connexe et non vide de dimension 1; comme son bord dans \widehat{X} est non vide (il contient x et y), l'espace topologique I n'est pas compact; c'est donc une droite éventuellement longue.

L'ensemble $\mathfrak{d}I$ comprend deux éléments, et $\partial_{\widehat{X}}I$ comprend au moins deux éléments, à savoir x et y ; en vertu de la proposition 1.4.5, $\overline{I}^{\widehat{X}}$ s'identifie alors à \widehat{I} , et est donc un segment éventuellement long d'extrémités x et y .

(1.4.15.2) Montrons maintenant que $\overline{I}^{\widehat{X}}$ est le seul fermé de \widehat{X} qui soit un segment éventuellement long d'extrémités x et y . Soit J un tel fermé et soit w un point de $X \setminus \{x, y\}$ qui n'appartient pas à J . Comme J est connexe et contient $\{x, y\}$, les points x et y sont situés sur la même composante connexe de $\widehat{X} \setminus \{w\}$; par conséquent, $w \notin I$. Il s'ensuit que $I \subset J$; par compacité de J , on a $\overline{I}^{\widehat{X}} \subset J$. Si z est un point de J différent de x et y alors $J \setminus \{z\}$ a deux composantes connexes; il en découle que toute partie connexe de J qui contient x et y coïncide avec J ; en particulier, $\overline{I}^{\widehat{X}} = J$.

(1.4.15.3) Soit U un ouvert connexe et à bord fini de X tel que x et y appartiennent à \widehat{U}^X . Si w est un point de $X - U$ et si U' désigne la composante connexe de $X \setminus \{w\}$ contenant U (celui-ci est non vide puisque x et y appartiennent à \widehat{U}^X) alors x et y appartiennent à \widehat{U}'^X ; il s'ensuit que $w \notin]x; y[$; comme on a par ailleurs $]x; y[\subset X$, cela signifie que $]x; y[\subset U$; par conséquent, $]x; y[\subset \widehat{U}^X$, ce qui achève la démonstration. \square

(1.4.16) *Remarque.* Soient X, x et y comme dans le théorème ci-dessus, et soit z un point de $\mathfrak{d}X \setminus \{x, y\}$. Comme $]x; y[\subset X$, on a $]x; y[\subset \widehat{X} \setminus \{z\}$; le segment éventuellement long $]x; y[$ étant connexe, x et y sont situés sur la même composante connexe de $\widehat{X} \setminus \{z\}$; ainsi, $]x; y[$ peut être caractérisé comme l'ensemble des points z de \widehat{X} (et pas seulement de X) tels que x et y soient situés sur deux composantes connexes distinctes de $\widehat{X} \setminus \{z\}$: les résultats du 1.3.4.5 s'étendent donc *mutatis mutandis* à \widehat{X} .

Il en va de même, de façon évidente, de ceux énoncés au début du 1.3.14: si $x \in \widehat{X}$ la relation \leq définie par la condition $z \leq y$ si et seulement si $y \in]z; x]$ est une relation d'ordre partiel pour laquelle x est le plus grand élément de \widehat{X} ; si $y \in \widehat{X}$ l'ensemble $\widehat{X}_{\leq y}$ des éléments z tels que $z \leq y$ est la réunion de $\{y\}$ et des composantes connexes de $\widehat{X} \setminus \{y\}$ qui ne contiennent pas x ; par conséquent, $\widehat{X} - \widehat{X}_{< y}$ est réunion de composantes connexes de $\widehat{X} \setminus \{y\}$, et $\widehat{X}_{\leq y}$ est ainsi une partie fermée de \widehat{X} .

(1.4.17) Lemme. Soit X un arbre, soient x et y deux points de X et soit $z \in \partial X$; l'intersection $[x; z] \cap [y; z]$ est de la forme $[t; z]$ pour un certain $t \in X$.

Démonstration. Comme $[x; z]$ est compact, $[x; z[$ est un fermé de X ; son intersection avec $[y; x]$ est donc de la forme $[y; t]$ pour un certain t ; la réunion de $[y; t]$ et de $[t; z]$ est un segment éventuellement long joignant y à z , c'est donc $[y; z]$ et l'on a alors $[y; z] \cap [x; z] = [t; z]$. \square

(1.4.18) Lemme. Soit X un arbre, soit Y un sous-arbre de X et soit $\omega \in \partial X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe $x \in X$ tel que $[x; \omega] \subset Y$;
- ii) Y aboutit à ω ;
- iii) Y est non vide et $[x; \omega] \subset Y$ pour tout $x \in Y$.

Démonstration. Il est clair que i) \Rightarrow ii) et que iii) \Rightarrow i). Il reste à s'assurer que ii) \Rightarrow i). Supposons donc que Y aboutit à ω . Dans ce cas, $Y \neq \emptyset$ puisque ∂Y contient ω . Soit $x \in Y$; comme ∂Y contient ω , il existe un segment éventuellement long joignant x à ω sur \hat{Y} ; ce dernier coïncide nécessairement avec l'unique segment éventuellement long joignant x à ω sur X , c'est-à-dire avec $[x; \omega]$. Par conséquent, $[x; \omega] \subset \hat{Y}$; il s'ensuit que $[x; \omega] \subset Y$. \square

(1.4.19) Proposition. Soit X un arbre. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un plus petit arbre compact contenant X comme sous-arbre;
- ii) il existe un arbre compact contenant X comme sous-arbre;
- iii) X est paracompact;
- iv) \hat{X} est un arbre.

Si elles sont satisfaites, \hat{X} est le plus petit arbre compact contenant X comme sous-arbre.

Démonstration. L'implication i) \Rightarrow ii) est évidente. Supposons que ii) soit vraie, et soit Y un arbre compact dont X est un sous-arbre. Étant localement fermé dans Y , l'arbre X est ouvert dans \bar{X}^Y , qui est un arbre compact (1.3.4.7); la proposition 1.4.13 assure alors que X est paracompact.

Supposons maintenant que iii) soit vraie, et prouvons iv). Nous allons tout d'abord vérifier que les propriétés α) et β) de 1.3.1 sont satisfaites par tout ouvert de la forme \hat{U}^X , où U est un ouvert connexe et à bord fini de X .

Soit donc U un tel ouvert; comme $\partial_{\hat{X}} \hat{U}^X$ est égal à $\partial_X U$ (1.4.1.6), il est fini et \hat{U}^X satisfait β).

Montrons maintenant qu'il satisfait α). Soient x et y dans \hat{U}^X ; le théorème 1.4.15 assure l'existence d'un unique segment éventuellement long joignant x à y et tracé sur \hat{U}^X .

Il suffit maintenant de s'assurer que $[x; y]$ est un «vrai» segment, autrement dit que $]x; y[$ est une «vraie» droite. Mais l'on a $]x; y[= [x; y] \cap (X \setminus \{x, y\})$. Comme X est paracompact, $X \setminus \{x, y\}$ est paracompact (1.4.14); son fermé $]x; y[$ est donc paracompact, et est de ce fait une vraie droite, ce qui achève de prouver que \hat{U}^X satisfait α).

L'espace \hat{X} est compact, et chacun de ses points a une base de voisinages satisfaisant α) et β); de plus, \hat{X} lui-même satisfait α) : il suffit d'appliquer ce qui précède avec $U = X$. Par conséquent, \hat{X} est un arbre.

Enfin, supposons que iv) soit vraie, et soit Y un arbre compact contenant X comme sous-arbre. D'après le théorème 1.4.6, \overline{X}^Y s'identifie à \widehat{X} , qui est un arbre par hypothèse ; c'est donc le plus petit arbre compact contenant X comme sous-arbre. \square

(1.4.20) Corollaire. *Soit X un graphe et soit U un sous-arbre ouvert de X ; supposons que ∂U est fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) \overline{U}^X s'identifie à \widehat{U} ;
- ii) \overline{U}^X est un arbre compact ;
- iii) le cardinal de $\partial_X U$ est égal à celui de ∂U ;
- iv) le cardinal de $\partial_X U$ est supérieur ou égal à celui de ∂U .

Démonstration. Supposons que i) soit vraie. On sait que \overline{U}^X est un sous-graphe compact de X (1.3.8), qui est connexe puisque U est connexe. Si x et y sont deux points de \overline{U}^X il existe donc un segment d'extrémités x et y tracé sur \overline{U}^X ; on déduit alors du théorème 1.4.15 ci-dessus qu'un tel segment est unique ; par conséquent, \overline{U}^X est un arbre compact.

Supposons que ii) soit vraie. Dans ce cas, U est un ouvert dense de l'arbre compact \overline{U}^X ; par conséquent, \overline{U}^X s'identifie à \widehat{U} en vertu du théorème 1.4.6 ; en particulier, $\partial_X U$ s'identifie à ∂U , d'où iii).

Il est clair que iii) \Rightarrow iv). Si iv) est vraie, on déduit i) de la proposition 1.4.5. \square

(1.4.21) Soit X un graphe et soit U un sous-arbre ouvert de X . Dans la suite, nous utiliserons abondamment, sans la rappeler explicitement, l'équivalence des propositions ci-dessous, qui résulte du corollaire 1.4.20 :

- a) U a exactement un bout et est relativement compact ;
- b) U a exactement un bout et $\partial_X U$ est non vide ;
- c) $\partial_X U$ est un singleton et \overline{U}^X est un arbre compact.

Ainsi, on peut par exemple reformuler le 1.3.11.1 comme suit : si X est un graphe connexe et si S est un sous-ensemble fini de X , presque toute composante connexe de $X \setminus S$ est un arbre à un bout relativement compact ; ou déduire de 1.3.13 que si X est un graphe et x un point unibranche de X , alors x possède un voisinage dans X qui est un arbre à un bout relativement compact.

(1.4.22) Corollaire. *Soit X un arbre et soit Y un sous-arbre fermé et non vide de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\partial Y = \partial X$;
- ii) toute composante connexe de $X - Y$ est relativement compacte ;
- iii) toute composante connexe de $X - Y$ est un arbre à un bout relativement compact.

Démonstration. Comme Y est un sous-arbre fermé et non vide de l'arbre X , le bord de toute composante connexe de $X - Y$ est un singleton ; par conséquent, ii) \iff iii).

Supposons que i) soit vraie. Soit U une composante connexe de $X - Y$; nous allons montrer que \overline{U}^X est compacte, ce qui revient à démontrer qu'elle est fermée dans \widehat{X} , c'est-à-dire encore que $\partial_{\widehat{X}} U$ ne rencontre pas ∂X . On raisonne par l'absurde, en supposant que $\partial_{\widehat{X}} U$ contient un bout ω de X .

Choisissons $x \in U$. Comme $\omega \in \partial_{\widehat{X}}U$, l'on a $[x; \omega[\subset U$. Par ailleurs, on déduit du lemme 1.4.18 et de i) qu'il existe $y \in Y$ tel que $[y; \omega[\subset Y$. L'intersection $[x; \omega[\cap [y; \omega[$ est de la forme $[t; \omega[$ pour un certain $t \in X$ et est en particulier non vide; mais elle est d'autre part contenue dans $U \cap Y$ qui est vide, ce qui est contradictoire.

Supposons que ii) soit vraie. Soit $\omega \in \partial X$; nous allons montrer que $\omega \in \partial Y$, en raisonnant par l'absurde; on suppose donc que $\omega \notin \partial Y$. Choisissons un point y sur l'arbre non vide Y . Comme Y n'aboutit pas à ω , il existe $z \in [y; \omega[$ tel que $z \notin Y$; comme $y \in Y \cap [y; \omega[$ et comme $Y \cap [y; \omega[$ est convexe, $[z; \omega[$ ne rencontre pas Y . Si U désigne la composante connexe de $X - Y$ contenant $[z; \omega[$ alors $\omega \in \overline{U}^{\widehat{X}}$; ceci entraîne que \overline{U}^X n'est pas fermée dans \widehat{X} , et partant pas compacte, ce qui contredit ii). \square

1.5 Sous-graphes admissibles et squelettes

Sous-graphes admissibles

(1.5.1) Soit X un graphe. On dira qu'un sous-graphe Γ de X est *admissible* s'il est fermé et si toute composante connexe de $X - \Gamma$ est un arbre à un bout relativement compact.

(1.5.1.1) Si Γ est un sous-arbre admissible de X alors toute composante connexe de $X - \Gamma$ a un bord non vide; il s'ensuit que Γ rencontre toutes les composantes connexes de X ; il est notamment non vide dès que X est non vide.

(1.5.1.2) Si Γ est un sous-arbre admissible de X , il est convexe en vertu de 1.3.15.2.

(1.5.1.3) Si Γ est un sous-arbre admissible de X et si V est une composante connexe de $X - \Gamma$ alors \overline{V} est un sous-graphe convexe de X . En effet, soient x et y deux points de V , et soit I un segment les joignant. Pour montrer que $I \subset \overline{V}$, on raisonne par l'absurde; on suppose donc que I rencontre $X - \overline{V}$, et l'on choisit une composante connexe J de $(X - \overline{V}) \cap I$. Comme J ne contient ni x ni y , son bord dans I compte deux éléments; mais ce bord est contenu dans ∂V qui est un singleton, d'où une contradiction.

(1.5.2) Soit X un arbre non vide. Il résulte du lemme 1.4.22, de 1.5.1.1 et de 1.5.1.2 qu'un sous-graphe fermé Y de X est admissible si et seulement si Y est un arbre non vide tel que $\partial Y = \partial X$.

(1.5.2.1) Supposons que l'arbre X soit compact, autrement dit que $\partial X = \emptyset$. On déduit du 1.5.2 ci-dessus que si $x \in X$ alors $\{x\}$ est un sous-graphe admissible de X . Comme tout sous-graphe admissible de X est non vide, il s'ensuit que les sous-graphes admissibles minimaux de X sont exactement les singletons; si X lui-même n'est pas un singleton, il ne possède donc pas de plus petit sous-graphe admissible.

(1.5.2.2) Supposons que l'arbre X ait exactement un bout, que l'on note ω . On déduit du 1.5.2 ci-dessus que pour tout $x \in X$, le sous-arbre $[x; \omega[$ de X est admissible.

Par ailleurs, si Γ un sous-graphe admissible de X contenant x , il aboutit à ω , là encore en vertu de 1.5.2, et contient dès lors $[x; \omega[$; pour tout t différent de x et situé sur $[x; y[$, l'intervalle $[t; y[$ est encore un sous-graphe admissible de X , qui est contenu *strictement* dans Γ .

Il découle de ce qui précède, et du fait que tout sous-graphe admissible de X est non vide, que X ne possède pas de sous-graphe admissible minimal.

Le squelette d'un graphe

(1.5.3) Soit X un graphe. Le sous-ensemble de X formé des points admettant un voisinage qui est un arbre ayant au plus un bout est un ouvert de X ; son fermé complémentaire est noté $\mathbf{S}(X)$ et est appelé le *squelette* de X . Il résulte immédiatement de la définition : que si U est un ouvert (resp. une composante connexe) de X alors $\mathbf{S}(X) \cap U \subset \mathbf{S}(U)$ (resp. $\mathbf{S}(X) \cap U = \mathbf{S}(U)$); et que $\mathbf{S}(X)$ est contenu dans tout sous-graphe admissible de X .

(1.5.4) Soit X un graphe. Si C est une boucle de X , elle est contenue dans $\mathbf{S}(X)$. Pour le voir, on raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe $x \in C$ et un voisinage ouvert U de x qui soit un arbre ayant au plus un bout. Comme U est un arbre, C n'est pas contenu dans U . La composante connexe I de x dans $C \cap U$ est alors un intervalle ouvert, dont chacune des deux extrémités appartient à ∂U . Ce dernier ayant au plus un élément, les deux extrémités en question coïncident, ce qui signifie que $\bar{I} = C$, et implique que $C \subset \bar{U}$; mais \bar{U} est un arbre (compact), et l'on aboutit ainsi à une contradiction.

(1.5.5) Soit X un graphe; il découle de 1.3.15.2 que $\mathbf{S}(X)$ est un sous-graphe fermé et convexe de X .

(1.5.6) Lemme. *Soit X un graphe, soit U un ouvert de X tel que $\partial U \subset \mathbf{S}(X)$, et soit I un fermé de U qui est une droite éventuellement longue. Le sous-graphe I de X est contenu dans $\mathbf{S}(X)$.*

Démonstration. Soit $x \in I$. Pour montrer que $x \in \mathbf{S}(X)$, on raisonne par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas. Il existe alors un voisinage ouvert V de x dans X qui est un arbre ayant au plus un bout. Soit J la composante connexe de x dans $I \cap V$; c'est une droite éventuellement longue. L'adhérence de J dans \widehat{V} s'identifie à \widehat{J} ; par conséquent, $\partial_{\widehat{V}} J$ compte exactement deux éléments. Comme $\widehat{V} - V$ contient par hypothèse au plus un élément, $\partial_V J$ est non vide; soit $y \in \partial_V J$. La composante J étant fermée dans $I \cap V$, le point y ne peut appartenir à I ; il est donc situé sur $\partial I \subset \partial U$, et par conséquent sur $\mathbf{S}(X)$ en vertu de notre hypothèse. Mais cela contredit le fait que y appartient à l'ouvert V , qui est un arbre ayant au plus un bout. \square

(1.5.7) Corollaire *Soit X un graphe et soit I un fermé de X qui est une droite éventuellement longue. Le sous-graphe I de X est contenu dans $\mathbf{S}(X)$.*

Démonstration. C'est simplement l'énoncé du lemme 1.5.6 ci-dessus, dans le cas particulier où $U = X$. \square

(1.5.8) Proposition. *Soit X un graphe et soit U un sous-arbre ouvert de X tel que $\partial U \subset \mathbf{S}(X)$. L'intersection $\mathbf{S}(X) \cap U$ est alors égale à la réunion des $]x; y[$, où (x, y) parcourt $(\partial U)^2$.*

Démonstration. On procède par double inclusion. Posons $\Gamma = \bigcup_{(x,y) \in (\partial U)^2}]x; y[$.

Montrons que $S(X) \cap U \subset \Gamma$. Nous allons en fait établir que $S(U) \subset \Gamma$ ce qui suffira à conclure puisque $S(X) \cap U \subset S(U)$.

Il résulte de 1.4.10 que Γ est un sous-graphe fermé (et localement fini) de U ; comme Γ est convexe par construction, c'est même un sous-arbre fermé de U dont l'ensemble des bouts, là encore par construction, coïncide avec ∂U . On déduit alors de 1.5.2 que si ∂U est non vide, Γ est un sous-arbre admissible de U , contenant de ce fait $S(U)$; et si $\partial U = \emptyset$ alors U est un arbre compact et l'on a $S(U) = \emptyset = \Gamma$.

Montrons que $\Gamma \subset S(X) \cap U$. Cela découle directement du lemme 1.5.6 ci-dessus. \square

(1.5.9) Corollaire. *Soit X un arbre. Le squelette $S(X)$ coïncide avec la réunion des $]x; y[$, où (x, y) parcourt $(\partial X)^2$.*

Démonstration. C'est simplement l'énoncé de la proposition 1.5.8 ci-dessus, dans le cas particulier où $U = X$. \square

(1.5.10) Proposition. *Soit X un graphe connexe. Son squelette est vide si et seulement si X est un arbre ayant au plus un bout.*

Démonstration. Si X est un arbre ayant au plus un bout, son squelette est vide par définition. Réciproquement, supposons que le squelette de X soit vide. Comme toute boucle de X est contenue dans son squelette, X n'a pas de boucle et est un arbre; on déduit alors du corollaire 1.5.9 que ∂X a au plus un élément. \square

(1.5.11) Proposition. *Soit X un graphe connexe dont le squelette est non vide. Toute composante connexe de $X - S(X)$ est un arbre à un bout relativement compact.*

Démonstration. Soit U une composante connexe de $X - S(X)$; comme $S(X)$ est non vide, ∂U est un sous-ensemble non vide de $S(X)$.

Toute boucle de X étant contenue dans $S(X)$, l'ouvert U ne contient aucune boucle et est donc un arbre. L'inclusion $\partial U \subset S(X)$ implique, d'après la proposition 1.5.8, que $S(X) \cap U$ est égale à la réunion des $]x; y[$ pour (x, y) parcourant $(\partial U)^2$. Mais $S(X) \cap U = \emptyset$ par définition de U ; il s'ensuit que U a au plus un bout. Si ∂U était vide, U serait compact et son bord dans X serait vide, ce qui est absurde; dès lors U est un arbre à un bout, relativement compact puisque ∂U est non vide. \square

(1.5.12) Théorème. *Soit X un graphe. Le graphe $S(X)$ est localement fini, et la valence de $(S(X), x)$ est au moins égale à 2 pour tout $x \in S(X)$.*

Démonstration. Soit U un ouvert de X qui est un arbre à bord fini dont l'adhérence est un arbre compact. Le squelette $S(U)$ s'identifie, d'après le corollaire 1.5.9, à $\bigcup]x; y[$ pour (x, y) parcourant $(\partial U)^2$. Comme \bar{U} est un arbre compact, $\partial U \simeq \partial \bar{U}$ et est en particulier fini; il s'ensuit que $S(U)$ est un arbre fini. L'arbre $S(X) \cap U$ est contenu dans $S(U)$, et est par conséquent un arbre fini; ceci valant quel que soit U , le squelette $S(X)$ est un graphe localement fini.

Soit maintenant $x \in \mathcal{S}(X)$, et soit Γ un voisinage ouvert de x dans $\mathcal{S}(X)$ qui est un arbre à bord fini; l'arbre Γ est une composante connexe de $\mathcal{S}(X) \setminus \partial\Gamma$.

Soit U la composante connexe de $X \setminus \partial\Gamma$ contenant Γ . On a $U \cap \mathcal{S}(X) = \Gamma$. En effet, supposons qu'il existe un point y de $U \cap \mathcal{S}(X)$ n'étant pas situé sur Γ ; par connexité de U , il existerait un segment I d'extrémités x et y tracé sur U , et qui ne rencontrerait dès lors pas $\partial\Gamma$. En vertu de la convexité de $\mathcal{S}(X)$, le segment I serait contenu dans $\mathcal{S}(X)$; mais il n'existe pas de segment tracé sur $\mathcal{S}(X)$ et reliant x à un point de $\mathcal{S}(X) - \Gamma$ sans passer par $\partial\Gamma$, d'où une contradiction.

Comme $U \cap \mathcal{S}(X) = \Gamma$, toute boucle de U est contenue dans Γ qui est un arbre; il s'ensuit que U n'a pas de boucle et est donc un arbre. Son bord est par construction contenu dans $\mathcal{S}(X)$. La proposition 1.5.8 assure alors que $\mathcal{S}(X) \cap U$ est égal à la réunion des $]x; y[$ où (x, y) parcourt $(\partial U)^2$; on en déduit que la valence de $(\mathcal{S}(X) \cap U, y)$ est au moins égale à 2 pour tout $y \in \mathcal{S}(X) \cap U$; en particulier, la valence de $(\mathcal{S}(X), x)$ est au moins égale à 2, ce qui achève la démonstration. \square

(1.5.13) Proposition. *Soit X un graphe. Il existe un sous-graphe admissible et localement fini de X .*

Démonstration. En raisonnant composante connexe par composante connexe, on se ramène au cas où X est connexe et non vide. Si $\mathcal{S}(X)$ est non vide, il répond à la question; sinon X est un arbre ayant au plus un bout, et l'on conclut à l'aide de 1.5.2.1 et 1.5.2.2. \square

La rétraction canonique sur un sous-graphe admissible

(1.5.14) Soit X un graphe et soit Γ un sous-graphe admissible de X . Soit r l'application de X vers Γ que l'on définit comme suit :

- si $x \in \Gamma$ alors $r(x) = x$;
- si $x \notin \Gamma$ alors $r(x)$ est l'unique point du bord de la composante connexe de x dans $X - \Gamma$.

Par construction, l'application r est une rétraction de l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow X$; on l'appelle la *rétraction canonique* de X sur Γ .

(1.5.15) Soit X un graphe, soit Γ un sous-graphe admissible de X et soit r la rétraction canonique de X sur Γ .

(1.5.15.1) Soit $x \in X$. Il existe un et un seul segment I tracé sur X et joignant x à $r(x)$. Si $x \notin \Gamma$ alors $I \setminus \{r(x)\}$ est contenu dans la composante connexe de x dans $X - \Gamma$.

En effet, c'est évident si $x = r(x)$. Sinon, soit U la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant x . Son adhérence \bar{U} est un arbre, et $\partial U = \{r(x)\}$; par conséquent, il existe un unique segment I tracé sur \bar{U} et joignant x à $r(x)$, et l'on a $I \setminus \{r(x)\} \subset U$. D'autre part, \bar{U} est une partie convexe de X (1.5.1.3); il s'ensuit que I est l'unique segment tracé sur X et joignant x à $r(x)$.

Nous nous permettrons de désigner cet unique segment joignant x à $r(x)$ par $[x; r(x)]$ même lorsque X n'est pas un arbre; notons que $[x; r(x)] \cap \Gamma = \{r(x)\}$.

(1.5.15.2) Soient x et y deux points de X , et soit I un segment tracé sur X et joignant x à y . Le graphe Γ étant convexe, $J := I \cap \Gamma$ est un intervalle.

S'il existe une composante connexe U de $X - \Gamma$ qui contient x et y alors I est contenu dans U , puisque ce dernier est un arbre ; par conséquent, $J = \emptyset$.

Si ce n'est pas le cas alors J est non vide. Soit z (resp. t) la borne de J située du côté de x (resp. de y) ; on a ou bien $z = x$, ou bien $[x; z[\subset X - \Gamma$, et de même avec y et t . Il s'ensuit que $z = r(x)$ et $t = r(y)$; autrement dit, $I = [x; r(x)] \cup J \cup [r(y); y]$, et J est un segment tracé sur Γ et joignant $r(x)$ à $r(y)$; on a $J \cap [x; r(x)] = \{x\}$ et $J \cap [r(y); y] = \{y\}$.

(1.5.15.3) Si Δ est une partie de X contenant Γ telle que $\Delta \cap \bar{V}$ soit un sous-arbre compact de \bar{V} pour toute composante connexe V de $X - \Gamma$ alors Δ est un sous-graphe fermé convexe de X .

Pour le voir, commençons par remarquer que les hypothèses faites sur Δ entraînent que $[x; r(x)] \subset \Delta$ pour tout $x \in \Delta$.

Le sous-ensemble Δ de X est fermé. Comme $\Gamma \subset \Delta$, on peut écrire $X - \Delta$ comme la réunion des $\bar{V} - (\Delta \cap \bar{V})$ pour V parcourant $\pi_0(X - \Gamma)$. Si $V \in \pi_0(X - \Gamma)$ le singleton ∂V est contenu dans Γ , d'où l'égalité $\bar{V} - (\Delta \cap \bar{V}) = V - (\Delta \cap \bar{V})$; et ce dernier est, par compacité de $\Delta \cap \bar{V}$, un ouvert de X . Il s'ensuit que Δ est un fermé de X .

Le sous-ensemble Δ de X est convexe. Soient x et y deux points de Δ et soit I un segment les joignant. En vertu du 1.5.15.2 ci-dessus deux cas peuvent se présenter :

- ou bien x et y sont situés sur une même composante connexe U de $X - \Gamma$, et $I \subset U$; comme $\Delta \cap \bar{U}$ est un sous-arbre de \bar{U} , on a alors $I \subset \Delta$;
- ou bien I est de la forme $[x; r(x)] \cup J \cup [y; r(y)]$ où J est un segment tracé sur Γ et joignant $r(x)$ à $r(y)$; étant alors réunion de trois intervalles contenus dans Δ , le segment I est lui-même contenu dans Δ .

Ainsi, Δ est un sous-ensemble à la fois fermé et convexe de X ; c'en est donc un sous-graphe fermé et convexe.

(1.5.16) Théorème. Soit X un graphe, soit Γ un sous-graphe admissible de X , soit U un ouvert connexe, non vide et à bord fini de Γ , et soit Δ un sous-graphe de Γ . Soit r la rétraction canonique de X vers Γ .

i) L'image réciproque $r^{-1}(U)$ est la composante connexe de $X \setminus \partial_\Gamma U$ contenant U .

ii) L'application $r : X \rightarrow \Gamma$ est continue et compacte.

iii) L'image réciproque $r^{-1}(\Delta)$ est un sous-graphe de X .

iv) Le sous-graphe Δ de $r^{-1}(\Delta)$ est admissible, et la rétraction canonique de $r^{-1}(\Delta)$ sur Δ est la restriction de r .

v) L'on a $\partial_X(r^{-1}(\Delta)) = \partial_\Gamma \Delta$, et $r^{-1}(\Delta)$ est relativement compact si et seulement si Δ est relativement compact.

vi) Le sous-graphe $\bar{\Delta}$ de $\overline{r^{-1}(\Delta)}$ est admissible, et la rétraction canonique de $\overline{r^{-1}(\Delta)}$ sur $\bar{\Delta}$ est la restriction de r .

Démonstration. On prouve chacune des assertions séparément.

(1.5.16.1) Preuve de i). On appelle V la composante connexe de $X \setminus \partial_\Gamma U$ qui contient U et l'on procède par double inclusion.

Soit $x \in r^{-1}(U)$. Si $x \in \Gamma$ alors $r(x) = x$ et l'on a donc $x \in U \subset V$. Sinon, soit W la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant x ; c'est un arbre ouvert relativement compact de X de bord $\{r(x)\}$. Comme $r(x)$ adhère à W et comme V est un voisinage de $r(x)$, l'ouvert $V \cap W$ de W est non vide; le bord de V est contenu dans $\partial_\Gamma U$, donc dans Γ , et ne rencontre de ce fait pas W ; par conséquent, $V \cap W$ est également fermé dans W , et partant égal à W tout entier. Autrement dit, $W \subset V$; en particulier, $x \in V$.

Soit $x \in V$. Si $x \in U$ alors $x \in r^{-1}(U)$. Sinon, soit W la composante connexe de $V - U$ contenant x ; son bord dans V est une partie non vide de U , au sein de laquelle on choisit un point y .

La composante W ne rencontre pas Γ . En effet s'il existait un point z de Γ situé sur W , l'on pourrait, en vertu de la connexité de V , tracer sur V un segment d'extrémités y et z ; ce segment serait contenu dans Γ par convexité de ce dernier (1.3.15.2), et relierait le point y de U au point z de $\Gamma - U$ sans passer par $\partial_\Gamma U$ (puisque $V \cap \partial_\Gamma U = \emptyset$), ce qui est absurde.

La composante connexe W de $V - U$ ne rencontre pas Γ , et son bord est contenu dans $(U \cup \partial V) \subset \Gamma$; par conséquent, W est une composante connexe de $X - \Gamma$; on a alors nécessairement $y = r(x)$, et donc $x \in r^{-1}(U)$.

(1.5.16.2) Preuve de ii). La continuité découle de i), et du fait que les ouverts connexes, non vides et à bord fini forment une base de la topologie de Γ .

Soit \mathcal{K} une partie compacte de Γ . Toute composante connexe de $X - \Gamma$ dont l'unique point du bord appartient à \mathcal{K} est une composante connexe relativement compacte de $X \setminus \mathcal{K}$; on déduit alors de la définition de r et de 1.3.10 que $r^{-1}(\mathcal{K})$ est compact.

(1.5.16.3) Preuve de iii). Comme r est continue, $r^{-1}(\Delta)$ est une partie localement fermée de X . Nous allons montrer que c'est un graphe.

Étape technique intermédiaire. On suppose provisoirement que Δ est un arbre, et l'on se donne deux points x et y sur $r^{-1}(\Delta)$; nous allons vérifier qu'il existe un unique segment d'extrémités x et y tracé sur $r^{-1}(\Delta)$.

- *Existence.* Si x et y sont situés sur une même composante connexe V de $X - \Gamma$, on peut prendre le segment joignant x à y sur l'arbre V ; sinon, on peut prendre la réunion $[x; r(x)] \cup I \cup [r(y); y]$, où I est le segment joignant $r(x)$ à $r(y)$ sur l'arbre Δ .

- *Unicité.* Si x et y sont situés sur une même composante connexe V de $X - \Gamma$, la convexité de \bar{V} (1.5.1.3) assure que le seul segment joignant x à y sur X est celui qui les relie sur \bar{V} (et qui est en fait contenu dans V); sinon, tout segment joignant x à y sur $r^{-1}(\Delta)$ est, en vertu de 1.5.15.2, de la forme $[x; r(x)] \cup J \cup [r(y); y]$, où J est un segment joignant $r(x)$ à $r(y)$ tracé sur $\Gamma \cap r^{-1}(\Delta) = \Delta$; l'unicité souhaitée découle alors du fait qu'il y a, sur l'arbre Δ , un unique segment joignant $r(x)$ à $r(y)$.

Fin de la preuve de iii). On ne suppose plus que Δ est un arbre. Il suffit maintenant de montrer que tout point de $r^{-1}(\Delta)$ a un voisinage ouvert dans $r^{-1}(\Delta)$ qui est un arbre. Soit donc $x \in r^{-1}(\Delta)$, et soit Γ_0 un voisinage ouvert de $r(x)$ dans Γ qui est un arbre tel que $\Gamma_0 \cap \Delta$ soit un sous-graphe

fermé de Γ_0 . Soit Δ_0 la composante connexe de $r(x)$ dans $\Delta \cap \Gamma_0$; c'est un ouvert de Δ , et un sous-arbre fermé de Γ_0 . D'après l'étape technique ci-dessus, l'ouvert $r^{-1}(\Gamma_0)$ de X est un arbre, et son fermé $r^{-1}(\Delta_0)$ en est une partie convexe, et est donc elle-même un arbre. Or $r^{-1}(\Delta_0)$ est un ouvert de $r^{-1}(\Delta)$ qui contient x , ce qui achève de prouver iii).

(1.5.16.4) Preuve de iv). Par la définition même de r , toute composante connexe de $r^{-1}(\Delta) - \Delta$ est une composante connexe de $X - \Gamma$, et est en particulier un arbre à un bout relativement compact; comme on a par ailleurs, là encore par définition de r , l'égalité $\Delta = \Gamma \cap r^{-1}(\Delta)$, le graphe Δ est fermé dans $r^{-1}(\Delta)$ et est donc un sous-graphe admissible de ce dernier. Quant à la rétraction canonique de $r^{-1}(\Delta)$ sur Δ , il résulte immédiatement de sa définition qu'elle est égale à $r|_{r^{-1}(\Delta)}$.

(1.5.16.5) Preuve de v). Montrons tout d'abord l'égalité $\partial_X r^{-1}(\Delta) = \partial_\Gamma \Delta$; on procède par double inclusion.

Soit $x \in \partial_\Gamma \Delta$. Si U est un voisinage ouvert de x dans X alors U rencontre $\Delta \subset r^{-1}(\Delta)$, et U rencontre aussi $\Gamma - \Delta \subset r^{-1}(\Gamma - \Delta) = X - r^{-1}(\Delta)$. Par conséquent, $x \in \partial_X r^{-1}(\Delta)$.

Réciproquement, soit $x \in \partial_X r^{-1}(\Delta)$; on a alors $x \in r^{-1}(\overline{\Delta}^X)$. Montrons tout d'abord que $x \in \overline{\Delta}^X$. Si ce n'était pas le cas, la composante connexe de x dans $X - \Gamma$ serait un ouvert de X contenu dans $r^{-1}(r(x))$ et serait donc ou bien contenue dans $r^{-1}(\Delta)$, ou bien contenue dans son complémentaire, contredisant ainsi l'hypothèse que $x \in \partial_X r^{-1}(\Delta)$.

Montrons maintenant que $x \in \partial_\Gamma \Delta$. Si ce n'était pas le cas, il existerait un ouvert Γ_0 de Γ contenu dans Δ et contenant x , et $r^{-1}(\Gamma_0)$ serait alors un voisinage ouvert de x inclus dans $r^{-1}(\Delta)$, contredisant là encore l'appartenance de x à $\partial_X r^{-1}(\Delta)$.

On donc bien démontré que $\partial_X r^{-1}(\Delta) = \partial_\Gamma \Delta$. Il reste à s'assurer que $r^{-1}(\Delta)$ est relativement compact si et seulement si il en va de même pour Δ ; mais c'est une conséquence formelle de la compacité et de la surjectivité de r .

(1.5.16.6) Preuve de vi. En vertu de v), on a $\overline{r^{-1}(\Delta)} = r^{-1}(\Delta) \cup \partial \Delta$; par conséquent, toute composante connexe de $\overline{r^{-1}(\Delta)} - \overline{\Delta}$ est une composante connexe de $r^{-1}(\Delta) - \Delta$, et vi) est alors une conséquence immédiate de iv). \square

(1.5.17) Soit X un graphe, soit Γ un sous-graphe admissible de X et soit r la rétraction canonique de X sur Γ .

(1.5.17.1) La continuité de r établie par le théorème 1.5.16 ci-dessus assure que l'application naturelle $\pi_0(\Gamma) \rightarrow \pi_0(X)$ est injective. Mais Γ rencontre par ailleurs toutes les composantes connexes de X ; il en découle que $\pi_0(\Gamma) \simeq \pi_0(X)$.

(1.5.17.2) Si X est connexe (cela équivaut par ce qui précède à la connexité de Γ) alors X est un arbre si et seulement si Γ est un arbre: cela résulte du fait que Γ contient $S(X)$, qui lui-même contient toutes les boucles de X .

(1.5.17.3) Si \mathcal{K} est une partie compacte de X alors $r(\mathcal{K})$ est une partie compacte de Γ , et $r^{-1}(r(\mathcal{K}))$ est, par compacité de r , un compact de X contenant \mathcal{K} . L'ensemble des parties de X de la forme $r^{-1}(\Delta)$, où Δ est un compact de Γ , est donc cofinal dans l'ensemble des compacts de X . On en

déduit, en se fondant sur 1.5.17.1, que les espaces topologiques $\mathbf{b}(\Gamma)$ et $\mathbf{b}(X)$ sont naturellement homéomorphes. Dans le cas où X et Γ sont des arbres, cela signifie plus précisément que l'inclusion naturelle $\widehat{\Gamma} \subset \widehat{X}$ identifie $\partial\Gamma$ et ∂X , ce que l'on savait déjà (1.5.2).

(1.5.18) Lemme. *Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue entre graphes, et soit Γ un sous-graphe admissible de X tel que $f^{-1}(\Gamma)$ soit un sous-graphe admissible de Y ; soient r et ρ les rétractions canoniques respectives de X sur Γ et de Y sur $f^{-1}(\Gamma)$. On a l'égalité $f \circ \rho = r \circ f$.*

Démonstration. Soit $y \in Y$. Si $y \in f^{-1}(\Gamma)$ alors $f(y) \in \Gamma$ et l'on a donc $f(\rho(y)) = f(y) = r(f(y))$. Supposons maintenant que $y \notin f^{-1}(\Gamma)$, soit V la composante connexe de y dans $Y - f^{-1}(\Gamma)$ et soit U la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant $f(V)$. Le point $\rho(y)$ est par définition l'unique point de ∂V ; son image $f(\rho(y))$ est donc un point de Γ adhérent à U ; c'est de ce fait l'unique point de ∂U , et il vient $r(f(y)) = f(\rho(y))$. \square

(1.5.19) Proposition. *Soit X un graphe, soit Γ un sous-graphe admissible de X , et soit Δ un sous-graphe fermé de X contenant Γ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) Δ est admissible;
- ii) $\pi_0(\Gamma) \rightarrow \pi_0(\Delta)$ est une bijection;
- iii) pour toute composante connexe V de $X - \Gamma$, l'intersection $\Delta \cap \overline{V}$ est un arbre;
- iv) Δ est convexe.

Démonstration. Si i) est vraie alors ii) est vraie en vertu de 1.5.17.1.

Supposons que ii) est vraie, et soit V une composante connexe de $X - \Gamma$; soit x l'unique point de ∂V . L'intersection $\Delta \cap \overline{V}$ est un sous-graphe compact de \overline{V} contenant x . Si ce graphe n'était pas un arbre, il posséderait une composante connexe Δ' ne contenant pas x . On aurait donc $\Delta' \subset V$, et Δ' serait par conséquent ouverte dans $\Delta \cap V$, et partant dans Δ ; étant par ailleurs compacte, connexe et non vide, Δ' serait une composante connexe de Δ ne rencontrant pas Γ , ce qui contredirait ii); par conséquent, iii) est vraie.

Si iii) est vraie, la propriété iv) découle de 1.5.15.3.

Supposons que iv) soit vraie et soit W une composante connexe de $X - \Delta$. Nous allons montrer que W est un arbre à un bout relativement compact, ce qui achèvera la démonstration. La composante connexe W' de $X - \Gamma$ qui contient W est un arbre à un bout relativement compact; il s'ensuit que W est un arbre relativement compact et à bord non vide; la convexité de Δ garantit alors, en vertu de 1.3.16, que ∂W est un singleton. \square

(1.5.20) Proposition. *Soit X un graphe, soit Γ un sous-graphe admissible de X et soit Δ un sous-graphe fermé de X . Pour toute composante connexe V de $X - \Gamma$, désignons par $T(V)$ l'enveloppe convexe de $(\Delta \cap \overline{V}) \cup \partial V$ dans l'arbre \overline{V} ; la réunion $\Theta := \Gamma \cup \bigcup_{V \in \pi_0(X - \Gamma)} T(V)$ est alors l'enveloppe convexe de $\Gamma \cup \Delta$; c'est aussi le plus petit sous-graphe admissible de X contenant $\Gamma \cup \Delta$, et Θ est localement fini dès que Γ et Δ le sont.*

Démonstration. On a par construction $\Theta \supset \Delta \cup \Gamma$. Il découle de 1.5.15.3 que Θ est un sous-graphe fermé et convexe de X ; comme il est par ailleurs clair

que toute partie convexe de X contenant Γ et Δ contient Θ , celui-ci est bien l'enveloppe convexe de $\Gamma \cup \Delta$. On déduit alors de la proposition 1.5.19 que Θ est le plus petit sous-graphe admissible de X contenant $\Gamma \cup \Delta$.

Supposons maintenant que Γ et Δ sont localement finis. Dans ce cas, si $V \in \pi_0(X - \Gamma)$ alors $\Delta \cap \bar{V}$ est un graphe compact et fini, d'où il découle que $T(V)$ est lui-même compact et fini : en effet, si l'on note y l'unique point de ∂V et si l'on choisit un sous-ensemble fini S de $\Delta \cap \bar{V}$ rencontrant chacune de ses composantes connexes, l'on a $T(V) = \bigcup_{z \in S} [z; y]$.

Soit maintenant $x \in \Theta$ et soit Γ_0 un voisinage de $r(x)$ dans Γ qui est un sous-graphe compact et fini de ce dernier. L'intersection de Δ et du compact $r^{-1}(\Gamma_0)$ est un graphe compact et fini ; par conséquent, $(\Delta \cap r^{-1}(\Gamma_0)) - \Gamma_0$ a un nombre fini de composantes connexes ; il s'ensuit que l'ensemble Π des composantes connexes de $r^{-1}(\Gamma_0) - \Gamma_0$ qui rencontrent Δ est fini.

On a par construction $\Theta \cap r^{-1}(\Gamma_0) = \Gamma_0 \cup \bigcup_{V \in \Pi} T(V)$. Comme Π est fini, et comme $T(V)$ est pour tout $V \in \pi_0(X - \Gamma)$ un arbre compact et fini (*cf. supra*), l'intersection de Θ et de $r^{-1}(\Gamma_0)$ est un graphe fini. Ainsi, x possède un voisinage dans Θ qui est un graphe fini ; par conséquent, Θ est localement fini. \square

(1.5.21) Lemme. *Soit X un graphe et soit Γ un sous-arbre admissible de X . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\Gamma = \mathcal{S}(X)$;
- ii) Γ ne possède aucun point isolé ou unibranche.

Démonstration. L'implication i) \Rightarrow ii) est une partie du théorème 1.5.12. Prouvons maintenant que ii) \Rightarrow i) ; nous allons en réalité établir l'implication contraposée ; on suppose donc que Γ contient strictement $\mathcal{S}(X)$ (ce qui entraîne que $X \neq \emptyset$) et l'on va établir qu'il possède au moins un point isolé ou unibranche.

En raisonnant composante par composante, on se ramène au cas où X est connexe.

Si $\mathcal{S}(X)$ est non vide c'est un sous-arbre admissible de X strictement contenu dans Γ .

Si $\mathcal{S}(X)$ est vide alors X est ou bien un arbre à un bout, auquel cas Γ contient strictement un sous-arbre admissible de X (1.5.2.2), ou bien un arbre compact et non vide ; dans ce dernier cas, Γ peut ou bien être un singleton, auquel cas il consiste en un point isolé et la démonstration est terminée, ou bien compter au moins deux points, et le choix d'un point quelconque de Γ définit alors un sous-arbre admissible de X (1.5.2.1), qui est strictement contenu dans Γ .

On peut donc faire l'hypothèse que Γ contient strictement un sous-arbre admissible Γ' de X . Il existe dès lors une composante connexe V de $X - \Gamma'$ et un point x sur $V \cap \Gamma$; le bord de V est un singleton $\{y\}$ pour un certain $y \in \Gamma'$.

En vertu de la proposition 1.5.19, l'intersection $\Gamma \cap \bar{V}$ est un arbre compact, qui n'est pas réduit à $\{y\}$ puisqu'il contient x . D'après 1.3.14, l'arbre $\Gamma \cap \bar{V}$ possède un point z distinct de y et unibranche. Comme z appartient à l'ouvert $V \cap \Gamma$ de Γ , c'est un point unibranche de Γ . \square

(1.5.22) Théorème. *Soit X un graphe et soit Δ un sous-graphe de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) il existe un sous-graphe admissible Γ de X dont Δ est un ouvert ;
 ii) il existe un ouvert U de X dont Δ est un sous-graphe admissible.*

De plus, si elles sont satisfaites :

- le graphe Γ de *i)* peut être choisi localement fini si $\overline{\Delta}$ est localement fini ;
- l'ouvert U de *ii)* est unique ;
- si Γ est comme dans *i)* et si r désigne la rétraction canonique de X sur Γ alors l'unique ouvert U de *ii)* est égal à $r^{-1}(\Delta)$ (qui ne dépend donc pas du choix de Γ).

Démonstration. On procède par double implication, en établissant en cours de preuve les assertions supplémentaires énoncées en fin de théorème.

(1.5.22.1) Remarques préliminaires. Soit U un ouvert dont Δ est un sous-graphe admissible et soit V une composante connexe de $U - \Delta$; c'est un arbre à un bout relativement compact dans U , dont l'unique point x du bord est situé sur Δ ; c'est *a fortiori* un arbre à un bout relativement compact dans X de bord $\{x\}$.

Soit Γ un sous-graphe admissible de X dont Δ est un ouvert. On a alors $V \cap \Gamma = \emptyset$: en effet, s'il existait $y \in \Gamma \cap V$ le segment $[y; x]$ de l'arbre \overline{V} serait contenu dans Γ (1.5.1.2) ; mais alors tout voisinage de x dans Γ rencontrerait $[y; x[$ et donc $\Gamma - \Delta$, contredisant le fait que Δ est ouvert dans Γ .

Par conséquent, V est une composante connexe de $X - \Gamma$.

(1.5.22.2) On suppose que *i)* est vraie. Soit r la rétraction canonique de X sur Γ . On sait que $r^{-1}(\Delta)$ est un ouvert de X dont Δ est un sous-graphe admissible. Soit maintenant U un ouvert de X dont Δ est un sous-graphe admissible ; nous allons montrer que $U = r^{-1}(\Delta)$.

Montrons que $U \subset r^{-1}(\Delta)$. Soit V une composante connexe de $U - \Delta$. C'est en vertu de 1.5.22.1 une composante connexe de $X - \Gamma$ dont l'unique point x du bord est situé sur Δ ; par définition de r , on a $r(y) = x \in \Delta$ pour tout $y \in V$. Il s'ensuit que $r(U - \Delta) \subset \Delta$; comme par ailleurs $r(\Delta) \subset \Delta$, on a $r(U) \subset \Delta$, ce que nous voulions prouver.

Montrons que $r^{-1}(\Delta) \subset U$. Soit $x \in r^{-1}(\Delta)$. Si $x \in \Gamma$, on a $r(x) = x$ et x appartient donc à Δ , et en particulier à U . Sinon, soit V la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant x ; son bord est $\{r(x)\}$. Comme U est un voisinage de $r(x)$, il rencontre V . Soit W une composante connexe de $U - \Delta$ telle que $W \cap V \neq \emptyset$. D'après 1.5.22.1, W est une composante connexe de $X - \Gamma$; l'on a donc $V = W$ et $V \subset U$; en particulier, $x \in U$.

(1.5.22.3) On suppose que *ii)* est vraie. Choisissons un sous-graphe admissible localement fini Θ de X , et soit Ξ le plus petit sous-graphe admissible de X contenant $\overline{\Delta}$ et Θ (prop. 1.5.20) ; si $\overline{\Delta}$ est localement fini, Ξ est localement fini.

Soit Γ le fermé $\Xi - (U - \Delta)$ de Ξ ; on a $\Gamma \cap U = \Delta$, et Δ est donc un ouvert de Γ . Nous allons montrer que Γ est un sous-graphe admissible de X ; en tant que sous-graphe fermé de Ξ , il sera alors automatiquement localement fini si Ξ est localement fini, et donc si $\overline{\Delta}$ est localement fini.

Soit V une composante connexe de $X - \Gamma$; le but de ce qui suit est de prouver que V est un arbre à un bout relativement compact, ce qui permettra de conclure. On distingue deux cas.

Supposons que $V \cap U = \emptyset$. Dans ce cas V ne rencontre pas Ξ (puisque $\Xi \cap (X - U) = \Gamma \cap (X - U)$), et son bord est contenu dans $\Gamma \subset \Xi$; par conséquent, V est une composante connexe de $X - \Xi$, et est donc un arbre à un bout relativement compact.

Supposons que V rencontre U . Soit $x \in V \cap U$. Comme $\Gamma \cap U = \Delta$, le point x n'est pas situé sur Δ , et la composante connexe U' de x dans $U - \Delta$ ne rencontre pas Γ ; elle est donc contenue dans V . L'ouvert U' de X est un arbre à un bout relativement compact dont l'unique point du bord est situé sur $\Delta \subset \Gamma$ (1.5.22.1). Par conséquent, U' est fermé dans V ; il s'ensuit que V est égal à U' , et est donc bien un arbre à un bout relativement compact. \square

(1.5.23) Soit X un graphe. On dira d'un sous-graphe Δ de X qui satisfait les conditions équivalentes du théorème 1.5.22 ci-dessus qu'il est *faiblement admissible*; si c'est le cas, l'unique ouvert de X dont Δ est un sous-graphe admissible sera noté Δ^b .

(1.5.23.1) Si Δ est un sous-graphe admissible de X alors Δ est faiblement admissible et $\Delta^b = X$.

(1.5.23.2) Si U est un ouvert de X et si Δ est un sous-graphe faiblement admissible de U , il existe un ouvert V de U dont Δ est un sous-graphe admissible; par conséquent, Δ est un sous-graphe faiblement admissible de X , et l'on $\Delta^b = V$ indépendamment du fait que l'on voie Δ comme un sous-graphe faiblement admissible de U ou de X ; nous utiliserons ce fait implicitement à plusieurs reprises.

(1.5.23.3) Soit Δ un sous-graphe faiblement admissible de X . On déduit alors des assertions v) et vi) du théorème 1.5.16 les faits suivants : $\partial_X \Delta^b = \overline{\Delta} - \Delta$, et Δ^b est relativement compact si et seulement si $\overline{\Delta}$ est compact; de plus, $\overline{\Delta}$ est un sous-graphe admissible de $\overline{\Delta^b}$.

Dimension topologique d'un graphe paracompact

(1.5.24) Proposition. *Soit X un graphe paracompact non vide. La dimension topologique de X vaut 0 si X est discret, et 1 sinon.*

Démonstration. Si le graphe X est discret, sa dimension topologique est nulle. Réciproquement, si sa dimension topologique est nulle, tout recouvrement ouvert de X peut être raffiné en un recouvrement constitué d'ouverts deux à deux disjoints; cela interdit à deux points de X de se trouver sur la même composante connexe de X , et ce dernier est dès lors discret.

Il suffit donc maintenant de démontrer (sans plus s'inquiéter de savoir si X est discret ou non) que la dimension topologique de X est majorée par 1. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X ; nous allons montrer qu'il peut être raffiné en un recouvrement localement fini par des ouverts dont les intersections trois à trois sont vides, ce qui permettra de conclure.

Comme X est paracompact, et comme il possède une base d'ouverts connexes à bord fini, on peut raffiner (U_i) en un recouvrement localement fini (V_j) où les V_j sont des ouverts connexes, non vides et à bord fini. Pour tout j , choisissons un point x_j sur V_j . Comme (V_j) est localement fini, la réunion des ∂V_j et des $\{x_j\}$

est une partie fermée et discrète de X ; celle-ci est contenue dans un sous-graphe admissible et localement fini Γ de X , et l'on note r la rétraction canonique de X sur Γ .

Fixons j . L'ouvert V_j est une composante connexe de $X \setminus \partial V_j$. Si l'on désigne par Δ_j la composante connexe de $\Gamma \setminus \partial V_j$ qui contient x_j alors $r^{-1}(\Delta_j)$ est une composante connexe de $X \setminus \partial V_j$ contenant x_j ; par conséquent, $r^{-1}(\Delta_j) = V_j$. Remarquons qu'on a alors $r(V_j) = \Delta_j$, ce qui entraîne que les Δ_j recouvrent Γ .

En tant que fermé de X , le graphe Γ est paracompact. Comme il est localement fini, il est localement de dimension topologique majorée par 1 ; il s'ensuit que la dimension topologique de Γ est majorée par 1.

On peut de ce fait raffiner (Δ_j) en un recouvrement localement fini (Θ_ℓ) de Γ constitué d'ouverts dont les intersections trois à trois sont vides. La famille $(r^{-1}(\Theta_\ell))$ constitue alors un recouvrement localement fini de X par des ouverts dont les intersections trois à trois sont vides ; par construction, ce recouvrement raffine (V_j) , et *a fortiori* (U_i) . \square

Sous-graphes admissibles et revêtements topologiques

(1.5.25) Si X est un graphe, on notera $\text{Revtop } X$ la catégorie des revêtements topologiques de X .

(1.5.26) Si X est un graphe (resp. un graphe localement fini) et si $Y \rightarrow X$ est un revêtement topologique alors Y est séparé, et tout point de Y a un voisinage ouvert qui est un arbre (resp. un arbre localement fini) ; par conséquent, Y est un graphe (resp. un graphe localement fini).

(1.5.27) Proposition. *Soit X un arbre. Tout revêtement topologique de X est trivial.*

Démonstration. Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement topologique de X ; nous allons montrer qu'il est trivial. On peut raisonner composante par composante, et partant supposer que Y est connexe et non vide ; il s'agit alors de vérifier que les fibres de $Y \rightarrow X$ sont des singletons.

On raisonne par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un point x de X et deux antécédents distincts y_1 et y_2 de x sur Y . Soit I un segment tracé sur Y et d'extrémités y_1 et y_2 , et soit Γ l'image de I sur X .

Comme $Y \rightarrow X$ est un revêtement, $I \rightarrow X$ est localement injective sur sa source. Joint à la compacité de I , cela entraîne que Γ est une réunion finie de segments ; étant par ailleurs connexe, Γ est un sous-arbre compact et fini de X .

L'arbre compact et fini Γ contient x , sans être réduit à $\{x\}$ (la flèche $I \rightarrow X$ est localement injective, et en particulier non constante) ; par conséquent, Γ possède au moins un point unibranche ξ qui est différent de x ; choisissons un antécédent η de ξ sur $I \setminus \{y_1, y_2\}$. Comme $I \rightarrow \Gamma$ est injective au voisinage de η , il existe un intervalle ouvert tracé sur Γ et contenant ξ , ce qui contredit le caractère unibranche de ce dernier et achève la démonstration. \square

(1.5.28) Théorème. *Soit X un graphe et soit Γ un sous-graphe admissible de X . Soit j l'inclusion de Γ dans X et soit r la rétraction canonique de X sur Γ . Les foncteurs j^* et r^* établissent une équivalence entre $\text{Revtop } X$ et $\text{Revtop } \Gamma$.*

Démonstration. Nous procédons en deux temps.

(1.5.28.1) *Généralités sur les revêtements d'un graphe.* Soit Y un graphe, et soit \mathcal{F} un ensemble de sous-arbres ouverts *non vides* de Y qui recouvrent Y ; notons $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ l'ensemble des triplets (Z, Z', U) où Z et Z' appartiennent à \mathcal{F} et où U est une composante connexe de $Z \cap Z'$. Il résulte de la proposition 1.5.27 que $\text{Revtop } Y$ est équivalente de manière naturelle à la catégorie $\mathbf{C}_{\mathcal{F}}$ dont la définition suit.

- Un objet de $\mathbf{C}_{\mathcal{F}}$ consiste en :
 - ◊ pour tout $Z \in \mathcal{F}$, un ensemble \mathbf{E}_Z ;
 - ◊ pour tout $(Z, Z', U) \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, un isomorphisme $\iota_{Z, Z', U} : \mathbf{E}_Z \simeq \mathbf{E}_{Z'}$;
 ces données étant sujettes aux conditions de cocycle usuelles.
- Une flèche entre deux objets $((\mathbf{E}_Z), (\iota_{Z, Z', U}))$ et $((\mathbf{F}_Z), (\nu_{Z, Z', U}))$ consiste en une famille d'applications $(\mathbf{E}_Z \rightarrow \mathbf{F}_Z)$ compatible aux isomorphismes $\iota_{Z, Z', U}$ et $\nu_{Z, Z', U}$.

(1.5.28.2) *Retour à la preuve proprement dite.* Soit \mathcal{F} un ensemble de sous-arbres ouverts non vides de Γ qui recouvrent Γ . Notons \mathcal{G} l'ensemble des $r^{-1}(\Delta)$ pour Δ parcourant \mathcal{F} ; c'est un ensemble de sous-arbres ouverts non vides de X qui recouvrent X .

Pour tout ouvert Ω de Γ , on a $\Omega = \Gamma \cap r^{-1}(\Omega)$, et $\pi_0(\Omega) \simeq \pi_0(r^{-1}(\Omega))$. Il s'ensuit :

- que $\Delta \mapsto r^{-1}(\Delta)$ et $Z \mapsto \Gamma \cap Z$ mettent \mathcal{F} et \mathcal{G} en bijection;
- que $(\Delta, \Delta', \Omega) \mapsto (r^{-1}(\Delta), r^{-1}(\Delta'), r^{-1}(\Omega))$

$$\text{et } (Z, Z', U) \mapsto (\Gamma \cap Z, \Gamma \cap Z', \Gamma \cap U)$$

mettent $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ en bijection.

Ces bijection permettent de définir deux foncteurs $\mathbf{C}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbf{C}_{\mathcal{G}}$ et $\mathbf{C}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{C}_{\mathcal{F}}$ quasi-inverses (et même *strictement* inverses) l'un de l'autre, et partant deux foncteurs $\text{Revtop } \Gamma \rightarrow \text{Revtop } X$ et $\text{Revtop } X \rightarrow \text{Revtop } \Gamma$ quasi-inverses l'un de l'autre. Par construction, ces deux derniers sont respectivement isomorphes à r^* et j^* , ce qui achève la démonstration. \square

(1.5.29) Corollaire. *Soit X un graphe et soit ℓ un entier au moins égal à 2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *tout revêtement topologique de X est trivial;*
- ii) $\mathbf{H}^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$;
- iii) *les composantes connexes de X sont des arbres.*

Démonstration. Il est clair que i) \Rightarrow ii). Montrons que ii) \Rightarrow iii); nous allons plus précisément établir la contraposée. On fait donc l'hypothèse que l'une des composantes connexes de X n'est pas un arbre; il existe alors une boucle C sur X . Choisissons un sous-graphe admissible et localement fini Γ de X ; il contient $\mathbf{S}(X)$, et partant C . Nous allons montrer que $\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell) \neq 0$, ce qui entraînera, en vertu du théorème 1.5.28, que $\mathbf{H}^1(X, \mathbb{Z}/\ell) \neq 0$ et achèvera ainsi la preuve.

Comme C est un cercle, il existe un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur connexe $C' \rightarrow C$. Le graphe Γ étant localement fini, il existe un intervalle ouvert I non vide tracé sur C ne rencontrant aucun sommet de Γ ; l'intervalle I est alors un ouvert de Γ ; fixons $x \in I$.

Le toseur C' est déployé au-dessus de $C \setminus \{x\}$; donnons-nous un isomorphisme $\iota : C' \times_C (C \setminus \{x\}) \simeq (C \setminus \{x\}) \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Soit Γ' le $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur sur Γ obtenu en recollant $(\Gamma \setminus \{x\}) \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ et $C' \times_C I$ via la restriction de ι à $I \setminus \{x\}$. Par construction, $\Gamma' \times_{\Gamma} C \simeq C'$; en conséquence $\Gamma' \rightarrow \Gamma$ n'est pas trivial et $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \neq 0$, ce qu'on souhaitait prouver.

Enfin l'implication iii) \Rightarrow i) est une conséquence directe du lemme 1.5.27. \square

1.6 Toises et homotopies

Toises sur un graphe

(1.6.1) Soit X un graphe et soit Y une partie de X ; soit \mathcal{S} l'ensemble des segments tracés sur Y . On appellera *toise* sur Y toute application l de \mathcal{S} dans \mathbb{R}_+ possédant les propriétés suivantes :

- si $x \in Y$ et si I est un segment issu de x et tracé sur Y alors $t \mapsto l([x; t])$ induit un homéomorphisme $I \simeq [0; l(I)]$;
- si $I \in \mathcal{S}$ et si I' et I'' sont deux segments tracés sur I tels que $I = I' \cup I''$ alors $l(I) = l(I') + l(I'') - l(I \cap I'')$.

On parlera du réel $l(I)$ comme de la *longueur* de I (relative à la toise l). On dira qu'une toise l sur Y est bornée par un réel M si $l(I) \leq M$ pour tout $I \in \mathcal{S}$.

(1.6.2) *Remarque.* Soit X un graphe muni d'une toise l . Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$ notons $\mathcal{B}(x, r)$ l'ensemble des points y de X tels qu'il existe un segment tracé sur X joignant y à x et de longueur strictement inférieure à r . Les $\mathcal{B}(x, r)$ constituent, pour x parcourant X et r parcourant \mathbb{R}_+^\times , une base d'une topologie sur X . On prendra garde que celle-ci est en général *strictement plus fine* que la topologie de X (elle permet de sectionner simultanément toutes les branches issues d'un point donné); c'est pour cette raison que nous avons choisi d'utiliser le terme «toise» plutôt que «métrique», qui nous a semblé être implicitement supposé définir la topologie de l'espace considéré.

Notons toutefois un cas dans lequel la topologie définie par l coïncide avec la topologie de X : c'est celui où X est localement fini. Dans cette situation, une toise n'est donc rien d'autre qu'une métrique au sens classique, sans ambiguïté ni risque de confusion; un graphe localement fini muni d'une toise (resp. admettant une toise) est simplement un graphe localement fini métrisé (resp. métrisable).

(1.6.3) **Proposition.** *Soit X un graphe localement fini et soit S un sous-ensemble fermé et discret de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) X admet une toise;
- ii) $X \setminus S$ admet une toise;
- iii) X est paracompact.

Démonstration. Il est clair que i) \Rightarrow ii).

(1.6.3.1) *Montrons que ii) entraîne i) et iii).* On fait l'hypothèse qu'il existe une toise l_0 sur $X \setminus S$. Quitte à agrandir S , on peut supposer que celui-ci contient tous les sommets de X , ainsi qu'au moins un point sur chaque composante connexe de X qui est une boucle. Soit I une composante connexe de $X \setminus S$; c'est une droite éventuellement longue. Si $x \in I$, la toise l_0 permet d'immerger chacune des deux demi-droites de I issues de x dans \mathbb{R}_+ ; par conséquent, I est paracompact et est donc une vraie droite. Il existe dès lors un homéomorphisme $\iota_I : I \simeq]0; 1[$.

Les homéomorphismes ι_I permettent de définir la longueur $l_1(J)$ de tout intervalle (compact ou non) tracé sur $X \setminus S$; c'est un réel appartenant à $[0; 1]$.

Soit I un segment tracé sur X ; l'ensemble $I \cap S$ est fini, et $I \setminus S$ a donc un nombre fini de composantes connexes. On note alors $l(I)$ la somme des $l_1(J)$, où J parcourt $\pi_0(I \setminus S)$. Il est immédiat que l'application l ainsi construite est une toise sur X .

Nous allons montrer que X est paracompact; soit X' une composante connexe de X , et soit $x \in X'$. Pour tout $N \geq 1$, notons X'_N la réunion des segments I tracés sur X' et issus de x possédant les propriétés suivantes :

- i) $I \cap (S \cup \{x\})$ possède au plus N éléments ;
- ii) si y désigne l'autre extrémité de I et si z désigne le point de $I \cap (S \cup \{x\})$ le plus proche de y alors $l([y; z]) \leq 1 - 1/N$.

Il résulte de la construction de l que chacun des X'_N est compact, et que les X'_N recouvrent X' . Par conséquent, X' est dénombrable à l'infini et X est paracompact.

(1.6.3.2) *Montrons que iii) entraîne i).* Supposons X paracompact, et soit Σ un sous-ensemble fermé et discret de X contenant ses sommets ainsi qu'au moins un point par composante connexe de X qui est une boucle. Chaque composante connexe de $X - \Sigma$ est un ouvert de X et est donc paracompacte; comme une telle composante est par ailleurs une droite éventuellement longue, les composantes connexes de $X - \Sigma$ sont finalement de vraies droites. Il existe dès lors une toise sur $X - \Sigma$; en vertu de l'implication ii) \Rightarrow i) déjà établie, cela entraîne l'existence d'une toise sur X . \square

(1.6.4) Corollaire. *Soit X un graphe. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) *tout sous-graphe localement fini de X admet une toise ;*
- ii) *il existe un sous-graphe localement fini et admissible de X admettant une toise ;*
- iii) *X est paracompact.*

Démonstration. Il est clair que i) \Rightarrow ii).

Supposons que ii) soit vraie et soit Γ un sous-graphe admissible et localement fini de X admettant une toise. En vertu de la proposition 1.6.3 ci-dessus, Γ est paracompact. La rétraction canonique de X sur Γ étant compacte, iii) est vérifiée.

Supposons que iii) soit vraie et soit Δ un sous-graphe localement fini de X . Comme X est paracompact, Δ est paracompact; il résulte alors de la proposition 1.6.3 ci-dessus que Δ admet une toise; par conséquent, i) est vérifiée, ce qui achève la démonstration. \square

(1.6.5) Soit X un graphe et soit \mathcal{E} un ensemble fini de sous-graphes fermés de X recouvrant X ; supposons que chacun des graphes appartenant à \mathcal{E} admette une toise; il existe alors une toise sur X lui-même. Pour le voir, on choisit pour tout $Y \in \mathcal{E}$ une toise l_Y sur Y ; on étend par additivité la définition de $l_Y(I)$ à tout compact I de Y qui est une réunion finie disjointe de segments.

L'application $I \mapsto \sum_{Y \in \mathcal{E}} l_Y(I \cap Y)$ est alors une toise sur X .

(1.6.6) Soit X un arbre, soit Y une partie convexe de X et soit $x \in Y$. Une toise partielle sur Y basée en x est une application $\delta : Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que δ induise pour tout $y \in Y$ un homéomorphisme $[x; y] \simeq [0; \delta(y)]$.

Soit δ une toise partielle sur Y basée en x . Soit I un segment tracé sur Y , soient y et z ses deux extrémités et soit t le point tel que $[y; x] \cap [z; x] = [t; x]$. Posons $l(I) = \delta(y) + \delta(z) - \delta(t)$; on vérifie aussitôt : que l est une toise sur Y , que l'on dira induite par δ ; que $l([y; x]) = \delta(y)$ pour tout $y \in Y$; et que si δ est bornée par un réel M alors l est bornée par $2M$.

(1.6.7) Soit X un arbre et soit Y un sous-ensemble convexe de X . Supposons que Y admet une toise l ; il admet alors une toise l' bornée par 1.

En effet, si Y est vide c'est évident; supposons maintenant $Y \neq \emptyset$ et choisissons x sur Y . L'application δ de Y dans \mathbb{R}_+ qui envoie y sur $\frac{l([y; x])}{2(1 + l([y; x]))}$ est une toise partielle basée en x , qui est par construction bornée par $1/2$; on peut alors prendre pour l' la toise sur Y induite par δ .

(1.6.8) Soit X un graphe et soit Γ un sous-graphe admissible de X . Supposons données :

- une toise l_Γ sur Γ ;
- pour toute composante connexe U de $X - \Gamma$, une toise l_U sur \bar{U} .

Si $x \in X$ on pose $\delta(x) = 0$ si $x \in \Gamma$, et $\delta(x) = l_U([x; r(x)])$ sinon, où U est la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant x . Soit I un segment tracé sur X et soient x et y ses extrémités. On définit le réel $l(I)$ comme suit :

- si $I \cap \Gamma = \emptyset$, on pose $l(I) = l_U(I)$ où U est la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant I ;
- sinon, on sait (cf. 1.5.15.2) que I est de la forme $[x; r(x)] \cup J \cup [r(y); y]$, où J est un segment tracé sur Γ joignant $r(x)$ à $r(y)$, et l'on pose alors

$$l(I) = \delta(x) + \delta(y) + l_\Gamma(J).$$

On vérifie aussitôt que l est une toise sur X , dont on dira qu'elle est obtenue par concaténation de l_Γ et des l_U .

(1.6.9) Lemme. Soit X un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) X admet une toise;
- ii) tout sous-graphe compact de X admet une toise et tout sous-graphe localement fini de X admet une toise;
- iii) X est paracompact et tout sous-graphe compact de X admet une toise.

Démonstration. Il est clair que i) \Rightarrow ii), et ii) \iff iii) se déduit du corollaire 1.6.4.

Supposons que ii) soit vérifiée. Choisissons un sous-graphe localement fini et admissible Γ de X . Par hypothèse, Γ admet une toise l_Γ . Si U est une composante connexe de $X - \Gamma$, son adhérence \bar{U} est compacte et admet donc une toise l_U . La concaténation des l_U et de l_Γ fournit alors une toise sur X ; ainsi, ii) \Rightarrow i), ce qui achève la démonstration. \square

Homotopies

(1.6.10) Soit X un graphe, soit Γ un sous-graphe admissible de X et soit r la rétraction canonique de X sur Γ . Si U est une composante connexe de $X - \Gamma$, l'unique point de son bord sera noté γ_U .

Supposons donnée pour toute composante connexe U de $X - \Gamma$ une toise l_U bornée par 1 sur l'arbre \bar{U} ; nous allons construire explicitement, en fonctions des l_U , une homotopie reliant r à l'identité.

Si $x \in X$ on posera $\delta(x) = 0$ si $x \in \Gamma$ et $\delta(x) = l_U([x; \gamma_U])$ si $x \notin \Gamma$ et si U est la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant x ; par construction, δ est majorée par 1 et induit pour tout x un homéomorphisme entre $[r(x); x]$ et $[0; \delta(x)]$.

(1.6.11) Proposition. *On reprend les notations du 1.6.10 ci-dessus. L'application h de $[0; 1] \times X$ vers X qui envoie un couple (x, t) sur $\delta_{[[r(x); x]]}^{-1}(t)$ si $t \leq \delta(x)$ et sur x sinon est continue; on a $h(0, \cdot) = r$ et $h(1, \cdot) = \text{Id}_X$.*

Démonstration. Seule la continuité de h nécessite une preuve; celle-ci requiert un certain nombre de préliminaires.

(1.6.11.1) *Images réciproques par h de sous-ensembles particuliers.* Fixons une composante connexe U de $X - \Gamma$ et soit x un point de U .

Soit V une composante connexe de $\bar{U} \setminus \{x\}$ ne contenant pas γ_U , c'est-à-dire encore une composante connexe relativement compacte de $U \setminus \{x\}$; il résulte de la définition de h que $h^{-1}(V) \subset [0; 1] \times U$. Le complémentaire de V dans \bar{U} est un compact qui est réunion de $\{x\}$ et de composantes connexes de $\bar{U} \setminus \{x\}$; il est donc convexe. Il s'ensuit que si $z \in \bar{U} - V$ alors $[z; \gamma_U] \subset \bar{U} - V$, et l'on a donc $h(t, z) \in \bar{U} - V$ pour tout t ; par conséquent, $h^{-1}(V) \subset [0; 1] \times V$.

Si $z \in V$ alors $[z; \gamma_U]$ contient x , et $[z; \gamma_U] \cap V = [z; x]$; dès lors $h(t, z) \in V$ si et seulement si $t > \delta(x)$.

En conclusion, on a démontré que $h^{-1}(V) =]\delta(x); 1] \times V$; c'est un ouvert de $[0; 1] \times X$.

Soit W la composante connexe de γ_U dans $\bar{U} \setminus \{x\}$; son fermé complémentaire dans \bar{U} est le compact $\mathcal{K}_U(x)$. Il résulte de la définition de h que

$$h^{-1}(\mathcal{K}_U(x)) \subset [0; 1] \times U.$$

Si $z \in W$ alors $[z; \gamma_U] \subset W$, et l'on a donc $h(t, z) \in W$ pour tout t ; par conséquent, $h^{-1}(\mathcal{K}_U(x)) \subset [0; 1] \times \mathcal{K}_U(x)$.

Si $z \in \mathcal{K}_U(x)$ alors $[z; \gamma_U]$ contient x , et $[z; \gamma_U] \cap \mathcal{K}_U(x) = [z; x]$; dès lors $h(t, z) \in \mathcal{K}_U(x)$ si et seulement si $t \geq \delta(x)$.

En conclusion, on a démontré que $h^{-1}(\mathcal{K}_U(x)) = [\delta(x); 1] \times \mathcal{K}_U(x)$; c'est un compact de $[0; 1] \times X$.

(1.6.11.2) On désigne toujours par U une composante connexe de $X - \Gamma$. Soit V un ouvert connexe, non vide et à bord fini de \bar{U} pose $S = \partial_{\bar{U}} V$. Si W est

une composante connexe de $\bar{U} \setminus S$ autre que V , c'est une composante connexe de $\bar{U} - \bar{V}$, et comme \bar{V} est un arbre, le bord de W est nécessairement un singleton, dont l'unique élément appartient à S .

Soit $x \in S$. On peut écrire \bar{U} comme la réunion disjointe de $\{x\}$, des composantes connexes de $\bar{U} - \bar{V}$ de bord $\{x\}$, de V , de $S \setminus \{x\}$, et des composantes connexes de $\bar{U} - \bar{V}$ dont l'unique point du bord diffère de x . La réunion de V , de $S \setminus \{x\}$, et des composantes connexes de $\bar{U} - \bar{V}$ dont l'unique point du bord diffère de x étant convexe, c'est une composante connexe de $\bar{U} \setminus \{x\}$.

(1.6.11.3) Les faits énoncés ci-dessus se déclinent comme suit dans deux cas particuliers.

Supposons que V contient γ_U . On a alors

$$\bar{U} - V = \coprod_{x \in S} \mathcal{K}_U(x).$$

Supposons que $V \subset U$ et que $\gamma_U \notin S$ (autrement dit, V est relativement compact dans U). Soit x l'unique point du bord de la composante connexe de $\bar{U} - \bar{V}$ contenant γ_U , et soit W la composante connexe de $\bar{U} \setminus \{x\}$ contenant V . On a alors

$$V = W - \coprod_{y \in S \setminus \{x\}} \mathcal{K}_U(y).$$

(1.6.11.4) *Continuité de h .* Il s'agit de montrer que si V est un ouvert de X alors $h^{-1}(V)$ est ouvert; il suffit bien entendu se limiter au cas où V appartient à une base donnée de la topologie de X . Il est donc loisible de supposer que V est connexe, non vide, et à bord fini; on peut de surcroît faire l'hypothèse que si V ne rencontre pas Γ , il est relativement compact dans $X - \Gamma$.

Le cas où V est un ouvert relativement compact de $X - \Gamma$. Soit U la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant V ; l'ouvert V est connexe, non vide, relativement compact et à bord fini dans U . D'après 1.6.11.3 il existe $x \in \partial V$ et une composante connexe relativement compacte W de $V \setminus \{x\}$ tels que $V = W - \coprod_{y \in \partial V \setminus \{x\}} \mathcal{K}_U(y)$. Il découle alors de 1.6.11.1 que $h^{-1}(V)$ est un ouvert de $[0; 1] \times X$.

Le cas où V rencontre Γ . Soit V_0 l'intersection de V et de Γ . C'est un ouvert non vide de Γ dont le bord est l'ensemble fini $\partial V \cap \Gamma$; de plus, V_0 est connexe en vertu de 1.5.1.2. Le théorème 1.5.16 assure alors que $r^{-1}(V_0)$ est la composante connexe de $X - (\partial V \cap \Gamma)$ contenant V_0 ; il s'ensuit que $V \subset r^{-1}(V_0)$.

Soit U une composante connexe de $r^{-1}(V_0) - V_0$; en d'autres termes, U est une composante connexe de $X - \Gamma$ telle que $\gamma_U \in V_0$. Comme $\gamma_U \in V$, l'intersection $V \cap U$ est un ouvert non vide de U .

Si U ne rencontre pas ∂V , cet ouvert est fermé dans U et coïncide donc avec U , ce qui signifie que $U \subset V$.

Supposons que U rencontre ∂V (comme ce dernier est fini, cela ne se produit que pour un ensemble fini de composantes connexes de $r^{-1}(V_0) - V_0$), et soit S l'ensemble fini $U \cap \partial V$. Si $x \in U \cap V$ la connexité de V entraîne l'existence d'un segment I tracé sur V et joignant x à γ_U . Soit J la composante connexe de x

dans $I \cap U$; sa borne supérieure appartient à ∂U et est donc égale à γ_U ; par conséquent, I est le segment $[x; \gamma_U]$ de l'arbre \bar{U} , et $[x; \gamma_U] \subset V$. Il s'ensuit que l'ouvert $V \cap \bar{U}$ de \bar{U} est connexe; son bord dans \bar{U} est par construction égal à S .

Il découle alors de 1.6.11.3 que $\bar{U} - V = \coprod_{x \in S} \mathcal{K}_U(x)$.

Pour tout $x \in \partial V - \Gamma$, notons U_x la composante connexe de $X - \Gamma$ qui contient x . Il résulte de ce qui précède que

$$V = r^{-1}(V_0) - \coprod_{x \in \partial V - \Gamma} \mathcal{K}_{U_x}(x).$$

On voit immédiatement à l'aide de la définition de h que $h^{-1}(r^{-1}(V_0))$ est égal à $[0; 1] \times r^{-1}(V_0)$; et d'après 1.6.11.1, $h^{-1}(\mathcal{K}_{U_x}(x))$ est compact pour tout $x \in \partial V - \Gamma$; par conséquent, $h^{-1}(V)$ est un ouvert de $[0; 1] \times X$. \square

(1.6.12) Rappelons qu'un espace topologique X est dit *fortement contractile* s'il est non vide et si X se rétracte par déformation sur *chacun* de ses points.

(1.6.13) Théorème. *Soit X un graphe admettant une toise.*

- 1) *Soit Γ un sous-graphe admissible de X et soit r la rétraction canonique de X sur Γ . L'inclusion de Γ dans X est une équivalence homotopique; plus précisément il existe une application continue $h : [0; 1] \times X \rightarrow X$ telle que $h(0, \cdot) = r$, $h(1, \cdot) = \text{Id}_X$ et $h(t, x) = x$ pour tout $t \in [0; 1]$ et tout $x \in \Gamma$.*
- 2) *Le graphe X est paracompact.*
- 3) *Le graphe X est localement fortement contractile, et a le type d'homotopie d'un graphe localement fini métrisable.*
- 4) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
 - i) *X est fortement contractile ;*
 - ii) *X est contractile ;*
 - iii) *X est un arbre non vide.*

Démonstration. Choisissons un sous-graphe localement fini et admissible Δ de X .

(1.6.13.1) *Preuve de 1.* Soit U une composante connexe de $X - \Gamma$; par restriction, l'arbre compact \bar{U} admet par hypothèse une toise l_U , et il résulte de 1.6.7 qu'on peut choisir l_U bornée par 1; la proposition 1.6.11 fournit alors l'homotopie requise.

(1.6.13.2) *Preuve de 2) et d'une partie de 3).* Par restriction, le graphe localement fini Δ admet une toise (ce qui revient à dire qu'il est métrisable), et le corollaire 1.6.4 assure alors que X est paracompact. D'après l'assertion 1) déjà prouvée, X est homotopiquement équivalent à Δ , et a donc bien le type d'homotopie d'un graphe localement fini métrisable.

(1.6.13.3) *Preuve de 4) et conclusion..*

Supposons que X soit fortement contractile; il est alors clairement contractile.

Supposons que X soit contractile. Ceci entraîne que X est connexe, non vide, et que chacun de ses revêtements topologiques est trivial; il découle dès lors du corollaire 1.5.29 que X est un arbre non vide.

Supposons que X soit un arbre non vide. Soit $x \in X$; il existe un sous-graphe localement fini et admissible Δ' de X contenant x ; étant admissible dans X , le graphe Δ' est lui-même un arbre non vide. Pour tout $y \in \Delta'$ et tout $t \in [0; 1]$ notons $h(t, y)$ l'unique point z de $[x; y]$ tel que $l([x; z]) = tl([x; y])$; l'application h définit alors une rétraction par déformation de Δ' sur $\{x\}$; comme X admet une rétraction par déformation sur Δ' (assertion 1) , il admet par concaténation une rétraction par déformation sur $\{x\}$; en conséquence, X est fortement contractile.

Enfin tout point de X a un voisinage ouvert qui est un arbre, admettant par restriction une toise, et est donc par ce qui précède fortement contractile ; ainsi, X est localement fortement contractile, ce qui achève la preuve de 3) et la démonstration. \square

1.7 Branches d'un graphe

(1.7.1) Soit X un graphe et soit $x \in X$; on notera $\text{Arb}(X, x)$ l'ensemble des sous-arbres ouverts de X contenant x . Une *branche issue de x* sera un élément de $\lim_{\overleftarrow{V}} \pi_0(V \setminus \{x\})$ pour V parcourant $\text{Arb}(X, x)$; on notera $\text{br}(X, x)$ l'ensemble des branches de X issues de x ; la flèche naturelle $\text{br}(X, x) \rightarrow \pi_0(V \setminus \{x\})$ est une bijection pour tout $V \in \text{Arb}(X, x)$.

(1.7.1.1) Le cardinal de $\text{br}(X, x)$ est égal à la valence de (X, x) .

(1.7.1.2) Si b est une branche issue de x et si $V \in \text{Arb}(X, x)$, on notera $b(V)$ l'image de b dans $\pi_0(V \setminus \{x\})$; si $V \in \text{Arb}(X, x)$ et si $V' \in \text{Arb}(V, x)$ alors $b(V') = b(V) \cap V'$.

(1.7.1.3) Si b est une branche issue de x , une *section* de b sera un ouvert de X de la forme $b(V)$ pour un certain V ; on désignera par $\text{Sec } b$ l'ensemble des sections de b ; remarquons que deux sections de b se rencontrent toujours.

On notera $\text{Secbr}(X, x)$ l'ensemble des ouverts de X qui appartiennent à $\text{Sec } b$ pour au moins une branche b issue de x .

(1.7.1.4) Si $\{b_1, \dots, b_r\}$ est un ensemble fini de branches de X issues de x , si Z_i est pour tout i une section de b_i , et si U est un voisinage ouvert de x , il existe $V \in \text{Arb}(X, x)$ que $b_i(V) \subset Z_i$ pour tout i : il suffit de se donner pour tout i un élément W_i de $\text{Arb}(X, x)$ tel que $b_i(W_i) = Z_i$, et de prendre pour V n'importe quel élément de $\text{Arb}(U \cap \bigcap W_i, x)$.

(1.7.1.5) **Lemme.** Soit U un ouvert connexe et non vide de X .

1) Si $U \in \text{Secbr}(X, x)$ il existe une unique branche $b \in \text{br}(X, x)$ telle que $U \in \text{Sec } b$.

2) Si $U \in \text{Secbr}(X, x)$ alors x est un point isolé de ∂U .

3) Si x est un point isolé de ∂U et si \overline{U} est un arbre alors $U \in \text{Secbr}(X, x)$.

Démonstration. Supposons que $U \in \text{Sec } b$ pour une certaine $b \in \text{br}(X, x)$, et soit $V \in \text{Arb}(X, x)$ tel que $b(V) = U$. Si β est une branche issue de x et différente de b , la composante $\beta(V)$ de $V \setminus \{x\}$ est disjointe de $b(V)$; c'est donc une section de β qui ne rencontre pas U , ce qui exclut que U lui-même soit une section de β , d'où 1).

Supposons que $U \in \text{Secbr}(X, x)$; il existe alors $V \in \text{Arb}(X, x)$ tel que U soit une composante connexe de $V \setminus \{x\}$. On a alors $V \cap \partial U = \{x\}$, et x est bien un point isolé de ∂U , d'où 2).

Supposons maintenant que x soit un point isolé de ∂U et que \bar{U} soit un arbre. Comme x est isolé dans ∂U , il existe un voisinage compact W de x dans X qui est un arbre et ne rencontre pas $\partial U \setminus \{x\}$. Nous allons tout d'abord montrer que le voisinage $W \cup \bar{U}$ de x est un arbre.

Par construction, $W \cup \bar{U}$ est un sous-graphe fermé et connexe de X ; pour s'assurer que c'est un arbre, on peut se contenter de vérifier qu'il ne contient aucune boucle. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe une boucle C tracée sur $W \cup \bar{U}$. Comme W est un arbre, il existe un point y sur $C - W$; comme \bar{U} est un arbre, il existe un point z sur $C - \bar{U}$. Comme $\partial_{\bar{U} \cup W} \bar{U} = \{x\}$, chacun des deux intervalles ouverts tracés sur C et joignant y à z contient x , ce qui est contradictoire.

Soit V la composante connexe de x dans l'intérieur de $W \cup \bar{U}$; c'est un sous-arbre ouvert de X qui contient $U \cup \{x\}$. Comme W est par ailleurs un compact ne rencontrant pas $\partial U \setminus \{x\}$, aucun point de $\partial U \setminus \{x\}$ n'appartient à l'intérieur de $W \cup \bar{U}$; par conséquent $\partial U \cap V = \{x\}$. Il s'ensuit que U est une partie ouverte, fermée, connexe et non vide de $V \setminus \{x\}$, c'est-à-dire une composante connexe de $V \setminus \{x\}$; ainsi, $U \in \text{Secbr}(X, x)$. \square

(1.7.1.6) Si $U \in \text{Secbr}(X, x)$, l'unique branche issue de x dont U soit une section (cf. lemme 1.7.1.5 ci-dessus) sera appelée la branche *définie par* U .

(1.7.1.7) Soit b une branche de X issue de x . Soit $V \in \text{Arb}(X, x)$ et soit U un élément de $\text{Secbr}(X, x)$ contenu dans $b(V)$. Le lemme 1.7.1.5 assure que x est un point isolé de ∂U ; c'est *a fortiori* un point isolé de $\partial_V U$. Comme \bar{U}^V est nécessairement un arbre puisque V en est un, on déduit de l'assertion 3) du lemme 1.7.1.5 l'existence de $V_0 \in \text{Arb}(V, x)$ tel que U soit une composante connexe de $V_0 \setminus \{x\}$; il découle alors de l'inclusion $U \subset b(V)$ que $U = b(V_0)$.

Notons qu'en vertu de ce qui précède, deux éléments de $\text{Secbr}(X, x)$ qui sont comparables pour l'inclusion définissent la même branche.

(1.7.1.8) Si b est une branche de X issue de x , nous dirons par abus qu'un ouvert U de X *contient* b s'il en contient une section. Si U est un ouvert de X contenant b alors $x \in \bar{U}$: cela résulte du fait que x adhère à toute section de b .

(1.7.1.9) Si V est un voisinage ouvert connexe de x dans X et si W est une composante connexe de $X \setminus \{x\}$ alors W contient au moins une branche issue de x : cela résulte immédiatement du fait que si $U \in \text{Arb}(V, x)$ alors $U \cap W$ est une réunion de composantes connexes de $U \setminus \{x\}$ qui est non vide puisque x adhère à W .

(1.7.1.10) Si b est une branche de X issue de x , on appellera *base* de sections de b tout sous-ensemble \mathcal{B} de $\text{Sec } b$ tel que pour tout $U \in \text{Sec } b$, il existe V appartenant à \mathcal{B} et contenue dans U .

(1.7.1.11) Si b est une branche de X issue de x , on peut retrouver x et b elle-même à partir de $\text{Sec } b$: le point x est l'unique point de X adhérent à tout ouvert élément de $\text{Sec } b$; et l'assertion 1) du lemme 1.7.1.5 assure qu'une branche issue de x est uniquement déterminée par *n'importe laquelle* de ses sections.

Cette remarque permet de définir une branche de X comme un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ qui est l'ensemble des sections d'une branche β issue d'un point ξ de X ; dans ce cas β et ξ sont uniquement déterminés, et l'on dira parfois que ξ est l'*origine* de β .

Si E est un sous-ensemble de X , et si U est un ouvert de X , on notera $\text{br}(X, E)$ (resp. $\text{br}(X, E)_{\subset U}$) l'ensemble des branches de X dont l'origine appartient à E (resp. dont l'origine appartient à E et qui sont contenues dans U).

Images directe et réciproque d'une branche

(1.7.2) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ une application continue entre graphes, soit x un point de X dont la fibre est finie, et soit y un antécédent de x .

Soit U un élément de $\text{Arb}(X, x)$ et soit V un élément de $\text{Arb}(\varphi^{-1}(U), y)$ qui ne rencontre pas $\varphi^{-1}(x) \setminus \{y\}$. Soit W une composante connexe de $V \setminus \{y\}$; son image est contenue dans une composante connexe de $U \setminus \{x\}$. Modulo les bijections

$$\text{br}(X, x) \simeq \pi_0(U \setminus \{x\}) \text{ et } \text{br}(Y, y) \simeq \pi_0(V \setminus \{y\}),$$

on définit ainsi une application $\text{br}(Y, y) \rightarrow \text{br}(X, x)$ qui ne dépend pas du choix de U et V et sera notée $b \mapsto \varphi(b)$. Si $a \in \text{br}(X, x)$ on désignera par $\varphi^{-1}(a)$ l'ensemble des branches b de Y telles que $\varphi(b) = a$.

(1.7.3) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ une application continue *compacte et ouverte* entre graphes, soit x un point de X dont la fibre est finie et soit $a \in \text{br}(X, x)$. Soit U_0 un élément de $\text{Arb}(X, x)$ tel que $\varphi^{-1}(U_0)$ soit une réunion disjointe d'arbres séparant les antécédents de x .

(1.7.3.1) L'ouvert $\varphi^{-1}(U_0)$ est la réunion disjointe des $\varphi^{-1}(U_0)_y$ où y parcourt la fibre $\varphi^{-1}(x)$. Soit W une composante connexe de $\varphi^{-1}(a(U_0))$; elle est contenue dans $\varphi^{-1}(U_0)_y$ pour un certain y uniquement déterminé, et est plus précisément une composante connexe de $\varphi^{-1}(U_0)_y \setminus \{y\}$. Elle définit donc une branche b_W de Y issue de y ; il résulte de la définition de l'image d'une branche que $W \mapsto b_W$ établit une bijection entre $\pi_0(\varphi^{-1}(a(U_0)))$ et $\varphi^{-1}(a)$; nous noterons $b \mapsto b(U_0)$ la bijection réciproque. Pour tout $y \in \varphi^{-1}(x)$ la composante $\varphi^{-1}(U_0)_y$ se surjecte sur U_0 , ce qui entraîne l'existence d'une branche b appartenant à $\varphi^{-1}(a)$ telle que $b(U_0) \subset \varphi^{-1}(U_0)_y$, c'est-à-dire encore telle que l'origine de b soit égale à y .

Soit $U \in \text{Arb}(U_0, x)$. On a $\varphi^{-1}(U)_y = \varphi^{-1}(U_0)_y \cap \varphi^{-1}(U)$ pour tout élément y de $\varphi^{-1}(x)$; il s'ensuit que si $b \in \varphi^{-1}(a)$ alors

$$b(U) = b(U_0) \times_{U_0} U = b(U_0) \times_{a(U_0)} a(U).$$

(1.7.3.2) Soit $b \in \varphi^{-1}(a)$ et soit y l'origine de b . Soit $\Omega \in \text{Arb}(\varphi^{-1}(U_0)_y, y)$. Il existe $U \in \text{Arb}(U_0, x)$ tel que $\varphi^{-1}(U)_y \subset \Omega$; on a alors $b(U) \subset \Omega$; la composante connexe de $\Omega \setminus \{y\}$ qui contient $b(U)$ coïncide nécessairement avec $b(\Omega)$ (1.7.1.7); ainsi, $b(U) \subset b(\Omega)$. Par conséquent, $\{b(U)\}_{U \in \text{Arb}(U_0, x)}$ est une base de sections de b .

(1.7.3.3) Soit V une section de a telle que $\varphi^{-1}(V)$ soit de la forme $\coprod W_i$ où W_i est pour tout i un ouvert de Y possédant les propriétés suivantes :

- $\overline{W_i}$ contient un unique antécédent y_i de x ;
- $W_i \in \text{Secbr}(Y, y_i)$.

Si b_i désigne pour tout i la branche issue de y_i et définie par W_i , alors $\{b_i\}_i$ coïncide avec $\varphi^{-1}(a)$. En effet, soit $U \in \text{Arb}(U_0, x)$ tel que $a(U) \subset V$; on a alors $\varphi^{-1}(a(U)) = \coprod_{b \in \varphi^{-1}(a)} b(U)$. Pour tout i , le produit fibré $W_i \times_V a(U)$ est

un ouvert fermé de $\varphi^{-1}(a(U))$, qui est non vide puisque W se surjecte sur V ; il s'écrit donc $\coprod_{b \in \mathcal{B}_i} b(U)$, où \mathcal{B}_i est un sous-ensemble non vide de $\varphi^{-1}(a)$; on a

$$a \varphi^{-1}(a) = \coprod \mathcal{B}_i.$$

Fixons i . Si $b \in \mathcal{B}_i$ l'origine de la branche b adhère à $b(U)$, et *a fortiori* à W_i ; elle est donc égale à y_i . Les ouverts $b(U)$ et W_i appartiennent alors tous deux à $\text{Secbr}(Y, y_i)$, et $b(U) \subset W_i$. Il s'ensuit qu'ils définissent la même branche issue de y_i (1.7.1.7), et donc que $b = b_i$. Ainsi, $\mathcal{B}_i = \{b_i\}$ pour tout i , et l'on a finalement bien $\varphi^{-1}(a) = \{b_i\}_i$.

(1.7.3.4) Soit y un antécédent de x , et soit b une branche issue de y appartenant à $\varphi^{-1}(a)$. Soit W une section de b telle que $\varphi(W) \in \text{Secbr}(X, x)$; la branche définie par $\varphi(W)$ coïncide alors avec a . En effet, on déduit de 1.7.3.2 que W contient une section W' de b telle que $\varphi(W')$ soit une section de a ; comme $\varphi(W') \subset \varphi(W)$, il résulte de 1.7.1.7 que $\varphi(W)$ est une section de a .

(1.7.4) Soit X un graphe, soit Y un sous-graphe de X et soit $x \in Y$; nous allons montrer que $\text{br}(Y, x) \rightarrow \text{br}(X, x)$ est *injective*. Soit $X' \in \text{Arb}(X, x)$ et soit $Y' \in \text{Arb}(Y \cap X', x)$; soit U une composante connexe de $X' \setminus \{x\}$, et soient V et W deux composantes connexes de $Y' \setminus \{x\}$ contenues dans U . Choisissons v dans V et choisissons w dans W . Les intervalles $[v; x[$ et $[w; x[$ sont respectivement tracés sur V et W ; mais ils sont également tous deux tracés sur U , puisque v et w appartiennent à U ; leur intersection est donc non vide (elle est de la forme $[t; x[$ avec $t \in U$), ce qui entraîne que $V = W$; ainsi, $\text{br}(Y, x)$ s'injecte dans $\text{br}(X, x)$, comme annoncé.

Pour cette raison, nous identifierons le plus souvent implicitement $\text{br}(Y, x)$ à un sous-ensemble de $\text{br}(X, x)$. Modulo cette convention, on peut par exemple écrire que si X et Y sont des arbres et si $b \in \text{br}(Y, x)$ alors $b(Y) = b(X) \cap Y$.

Notons par ailleurs une conséquence triviale de l'injectivité de la flèche $\text{br}(Y, x) \rightarrow \text{br}(X, x)$: si Y est localement fini, le cardinal de $\text{br}(X, x)$ est minoré par la valence de Y en x .

Branches et étoiles

(1.7.5) Soit X un graphe et soit $x \in X$.

(1.7.5.1) Nous dirons qu'un intervalle ouvert tracé sur X aboutit *proprement* à x si $x \in \partial I$ et si \overline{I} est un arbre ; cela revient à demander que \overline{I} soit ou bien un segment dont x est l'une des extrémités, ou bien une demi-droite dont x est l'extrémité. Si I aboutit proprement à x alors $I \cup \{x\}$ est un graphe localement fini dont x est un point unibranche ; lorsqu'on verra l'unique branche de $I \cup \{x\}$ comme un élément de $\text{br}(X, x)$, on dira que c'est la branche *définie par* I .

(1.7.5.2) L'ensemble des intervalles ouverts tracés sur X et aboutissant proprement à X sera noté $\text{Interv}(X, x)$; le sous-ensemble de $\text{Interv}(X, x)$

formé des intervalles faiblement admissibles (resp. relativement compacts, resp. faiblement admissibles et relativement compacts) dans X sera noté $\text{Interv}_a(X, x)$ (resp. $\text{Interv}_c(X, x)$, resp. $\text{Interv}_{a,c}(X, x)$). Si $b \in \text{br}(X, x)$, le sous-ensemble de $\text{Interv}(X, x)$ formé des intervalles définissant une branche b donnée sera désigné par $\text{Interv}(X, b)$; si $I \in \text{Interv}(X, x)$, le sous-ensemble de $\text{Interv}(X, x)$ formé des intervalles contenus dans I sera noté $\text{Interv}(X, x)_{\subset I}$.

On emploiera également, avec un sens évident, des notations telles $\text{Interv}_a(X, b)$, $\text{Interv}_a(X, x)_{\subset I}$, $\text{Interv}(X, b)_{\subset I}$, $\text{Interv}_a(X, b)_{\subset I}$, etc.

(1.7.5.3) Soit $b \in \text{br}(X, x)$ et soit $I \in \text{Interv}_a(X, b)$. Comme $\partial I^b = \partial I$, lequel contient au plus deux éléments dont x , le point x est isolé dans ∂I^b ; comme \bar{I} est un arbre, I^b est un arbre. On déduit alors du lemme 1.7.1.5 que $I^b \in \text{Secbr}(X, x)$; comme $I \subset I^b$, la branche définie par I^b est égale à b .

(1.7.6) Une *étoile* est la donnée d'un arbre fini Γ et d'un point x distingué sur Γ , que l'on appelle son *sommet*, et qui est tel que $\Gamma \setminus \{x\}$ soit réunion finie disjointe d'intervalles ouverts, que l'on appelle les *arêtes* de Γ ; le nombre de ces intervalles est égal à la valence de (Γ, x) ; on l'appellera simplement la valence de Γ .

Si X est un graphe, si $x \in X$ et si Γ est un sous-arbre de X contenant x , on dira par abus que Γ est une étoile de sommet x si le couple (Γ, x) définit une étoile de sommet x , c'est-à-dire si et seulement si $\Gamma \setminus \{x\}$ est réunion finie disjointe d'intervalles ouverts; on dira aussi d'un tel Γ qu'il est une étoile de sommet x tracée sur X .

(1.7.6.1) Si Γ est une étoile et si x est son sommet, la valence de Γ est nulle (resp. égale à 1, resp. égale à 2) si et seulement si $\Gamma = \{x\}$ (resp. Γ est un intervalle ouvert, resp. Γ est une demi-droite d'origine x).

(1.7.6.2) Si Γ est une étoile et si x est son sommet, la valence de (Γ, y) est égale à 2 pour tout $y \in \Gamma \setminus \{x\}$; si la valence de Γ est différente de 2, le point x ne dépend donc que du graphe localement fini Γ et peut être caractérisé comme son unique sommet *topologique*.

Notons par contre que si I est un intervalle ouvert et si y est *n'importe quel* point de I alors I peut être considéré comme une étoile de sommet y .

(1.7.6.3) Si Γ est une étoile et si x est son sommet, on appellera *sous-étoile* de Γ tout voisinage ouvert convexe de x dans Γ ; les sous-étoiles de Γ sont exactement les étoiles de sommet x tracées sur Γ .

(1.7.7) Soit X un graphe et soit $x \in X$. On notera $\text{St}(X, x)$ l'ensemble des étoiles de sommet x tracées sur X dont l'adhérence dans X est un arbre. Un sous-graphe Γ de X appartient à $\text{St}(X, x)$ si et seulement si il est de la forme $\{x\} \cup \bigcup_{i \in E} I_i$ où E est un ensemble fini, où chacun des I_i est un intervalle ouvert aboutissant proprement à x et où $\bar{I}_i \cap \bar{I}_j = \{x\}$ dès que $i \neq j$. Si c'est le cas, les I_i sont alors les arêtes de Γ .

Le sous-ensemble de $\text{St}(X, x)$ formé des étoiles dont toutes les arêtes sont faiblement admissibles dans X sera noté $\text{St}_a(X, x)$; celui formé des étoiles relativement compacts dans X sera noté $\text{St}_c(X, x)$; on désignera par $\text{St}_{a,c}(X, x)$ l'intersection de $\text{St}_a(X, x)$ et $\text{St}_c(X, x)$.

(1.7.7.1) Pour tout $\Gamma \in \text{St}(X, x)$, le sous-ensemble $\text{br}(\Gamma, x)$ de $\text{br}(X, x)$ est constitué des branches définies par les arêtes de Γ .

(1.7.7.2) Si Δ est un sous-graphe de X , on notera $\text{St}(X, x)_{\subset \Delta}$ le sous-ensemble de $\text{St}(X, x)$ formé des étoiles contenues dans Δ ; on utilisera à l'occasion les notations $\text{St}_a(X, x)_{\subset \Delta}$, etc., dans un sens évident.

Si Δ contient x et est fini en x , et si N désigne la valence de (Δ, x) alors les étoiles de valence N appartenant à $\text{St}(X, x)_{\subset \Delta}$ constituent une base de voisinages ouverts de x dans Δ .

(1.7.8) Nous utiliserons librement dans la suite le fait élémentaire suivant : soit X un graphe, soit $x \in X$ et soit \mathcal{B} un sous-ensemble fini de $\text{br}(X, x)$; il existe alors $\Gamma \in \text{St}(X, x)$ telle que $\text{br}(\Gamma, x) = \mathcal{B}$. En effet, choisissons $V \in \text{Arb}(X, x)$; donnons-nous pour chaque $b \in \mathcal{B}$ un point x_b de $b(V)$. Pour tout $b \in \mathcal{B}$, l'intervalle $[x_b; x[$ est tracé sur $b(V)$; il s'ensuit que $\Gamma := \{x\} \cup \bigcup_{b \in \mathcal{B}}]x_b; x[$ est une étoile de sommet x tracée sur X et que $\text{br}(\Gamma, x) = \mathcal{B}$.

(1.7.9) Soit X un graphe, soit $x \in X$ et soient Γ et Γ' deux étoiles tracées sur X de sommet x .

(1.7.9.1) Il existe $\Delta \in \text{St}(X, x)$ possédant les propriétés suivantes :

- Δ est un ouvert de $\Gamma \cup \Gamma'$;
- $\text{br}(\Delta, x) = \text{br}(\Gamma, x) \cup \text{br}(\Gamma', x)$.
- la réunion de $\{x\}$ et des $b(\Delta)$ où b parcourt $\text{br}(\Gamma, x)$ (resp. $\text{br}(\Gamma', x)$) est égale à l'ouvert $\Delta \cap \Gamma$ (resp. $\Delta \cap \Gamma'$) de Γ (resp. Γ').

Pour le voir, on choisit $V \in \text{Arb}(X, x)$; la composante connexe Γ_0 (resp. Γ'_0) de x dans $V \cap \Gamma$ (resp. $V \cap \Gamma'$) appartient à $\text{St}(V, x)$; il existe un voisinage ouvert convexe W de x dans V tel que $W \cap \Gamma \subset \Gamma_0$ et $W \cap \Gamma' \subset \Gamma'_0$; par convexité, $W \cap \Gamma$ (resp. $W \cap \Gamma'$) appartient à $\text{St}(W, x)$; quitte à remplacer X par W et Γ et Γ' par leurs intersections avec W , il est loisible de supposer que X est un arbre.

Il est alors clair que l'on peut prendre pour Δ la réunion de $\{x\}$ et de

$$\bigcup_{b \in \text{br}(\Gamma, x) - \text{br}(\Gamma', x)} b(\Gamma) \cup \bigcup_{b \in \text{br}(\Gamma', x) - \text{br}(\Gamma, x)} b(\Gamma') \cup \bigcup_{b \in \text{br}(\Gamma, x) \cap \text{br}(\Gamma', x)} b(\Gamma) \cap b(\Gamma') .$$

(1.7.9.2) Soit $\Delta \in \text{St}(X, x)$ satisfaisant les conditions énoncées au 1.7.9.1 ci-dessus; toute sous-étoile de Δ les satisfait encore. L'ouvert $\Delta \cap \Gamma \cap \Gamma'$ de $\Gamma \cap \Gamma'$ est égal à $\{x\} \cup \bigcup_{b \in \text{br}(\Gamma, x) \cap \text{br}(\Gamma', x)} b(\Delta)$; c'est une étoile tracée sur X dont l'ensemble des branches issues de x est égal à $\text{br}(\Gamma, x) \cap \text{br}(\Gamma', x)$.

(1.7.9.3) Comme Γ et Γ' sont deux sous-graphes localement finis, l'intersection $\Gamma \cap \Gamma'$ est un graphe localement fini. Comme $\bar{\Gamma}$ et $\bar{\Gamma}'$ sont deux sous-graphes localement finis et *fermés* de X , leur réunion est un sous-graphe fermé et localement fini de X . Le complémentaire de $\Gamma \cup \Gamma'$ dans celui-ci est contenu dans $\partial \Gamma \cup \partial \Gamma'$, et partant fini; il est en particulier fermé. Par conséquent, $\Gamma \cup \Gamma'$ est un ouvert de $\bar{\Gamma} \cup \bar{\Gamma}'$ est de ce fait un sous-graphe localement fini de X .

Il découle de 1.7.9.1 et 1.7.9.2 que $\text{br}(\Gamma \cap \Gamma', x) = \text{br}(\Gamma, x) \cap \text{br}(\Gamma', x)$, et que $\text{br}(\Gamma \cup \Gamma', x) = \text{br}(\Gamma, x) \cup \text{br}(\Gamma', x)$;

(1.7.10) Soit X un graphe, soit $x \in X$ et soit Γ une étoile de somme x tracée sur X . Pour tout $b \in \text{br}(\Gamma, x)$, donnons-nous une section U_b de b . Nous allons montrer qu'il existe $\Delta \in \text{St}_{a,c}(X, x)_{\subset \Gamma}$ telle que pour tout $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ l'arête $b(\Delta)$ de Δ soit contenue dans U_b .

Il existe $V \in \text{Arb}(X, x)$ tel que $b(V) \subset U_b$ pour tout $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ (1.7.1.4); la composante connexe Γ_0 de x dans $\Gamma \cap V$ est une sous-étoile de Γ ; il existe un sous-graphe admissible et localement fini Γ' de V qui contient Γ_0 .

Soit $b \in \text{br}(\Gamma, x)$. Comme Γ' est localement fini, il existe un point x_b sur $b(\Gamma_0)$ tel que $]x_b; x[$ ne contienne aucun sommet de Γ' ; l'intervalle $]x_b; x[$ est dès lors ouvert dans Γ' , et partant faiblement admissible dans V .

Comme $\partial(]x_b; x[^b) = \partial(]x_b; x]) = \{x_b, x\}$, l'ouvert $]x_b; x[^b$ est inclus dans $V \setminus \{x\}$; comme il est connexe et rencontre $b(V)$ (puisqu'il contient $]x_b; x[$), il est contenu dans $b(V)$, et *a fortiori* dans U_b .

La réunion $\Delta := \{x\} \cup \bigcup]x_b; x[$ satisfait alors les conditions requises.

Remarque. Si Δ est une sous-étoile de Γ possédant les propriétés énoncées ci-dessus, il en va de même de toute sous-étoile de Δ .

(1.7.11) Soit X un graphe, soit $x \in X$ et soit $\Gamma \in \text{St}_a(X, x)$. Soit V la composante connexe de x dans $X \setminus \partial\Gamma$.

(1.7.11.1) Soit I une arête de Γ et soit b la branche qu'elle définit. L'ouvert I^b appartient à $\text{Secbr}(X, x)$ et la branche qu'il définit est précisément b (1.7.5.3); il est connexe, non vide, et son bord est contenu dans $\{x\} \cup \partial\Gamma$; il est donc fermé dans $V \setminus \{x\}$ et en est de ce fait une composante connexe. Soit J une arête de Γ distincte de I et soit β la branche définie par J ; comme l'ouvert J^b appartient à $\text{Secbr}(X, x)$ et définit β , il diffère de I^b ; les composantes connexes I^b et J^b de $V \setminus \{x\}$ sont dès lors disjointes.

(1.7.11.2) Soit N la valence de Γ et soient I_1, \dots, I_N ses arêtes; les I_i^b sont en vertu de ce qui précède des composantes connexes deux à deux distinctes de $V \setminus \{x\}$. Comme toute composante connexe de $V \setminus \{x\}$ contient une branche issue de x (1.7.1.9), les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) le cardinal de $\text{br}(X, x)$ est égal à N ;
- ii) $V \setminus \{x\} = \coprod I_i^b$.

Supposons qu'elles soient satisfaites et soit W une composante connexe de $V - \Gamma$. Si $\partial W = \{x\}$ alors W est une composante connexe de $V \setminus \{x\}$ qui évite Γ et ne peut donc être l'un des I_i^b , ce qui contredit ii); par conséquent, il existe i et un point $y \in I_i$ tel que $y \in \partial W$. L'intersection $W \cap I_i^b$ est alors non vide, ouverte et fermée dans W (puisque $\partial I_i^b \subset \{x\} \cup \partial\Gamma$); elle coïncide donc avec W , ce qui signifie que $W \subset I_i^b$. Dès lors, W est une composante connexe de $I_i^b - I_i$; comme I_i est un sous-graphe admissible de I_i^b , la composante W est un arbre à un bout relativement compact.

Il s'ensuit que le sous-graphe fermé Γ de V est admissible; par conséquent, Γ est faiblement admissible et $V = \Gamma^b$.

(1.7.12) Soit X un graphe et soit $x \in X$. Supposons que $\text{br}(X, x)$ soit fini, et notons N son cardinal.

Soit Γ un élément de $\text{St}(X, x)$ de valence N et soient I_1, \dots, I_n ses arêtes.

Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- i) $\Gamma \in \text{St}_a(X, x)$, *i.e.* les I_i sont faiblement admissibles ;
- ii) Γ est faiblement admissible.

En effet, i) \Rightarrow ii) est une conséquence du 1.7.11.2 ci-dessus, et ii) \Rightarrow i) découle du fait que chacun des I_i est un ouvert de Γ . Si ces conditions sont satisfaites, il découle de 1.7.11.2 que les I_i^b sont exactement les composantes connexes de $\Gamma^b \setminus \{x\}$.

(1.7.12.1) Soit Γ un élément de $\text{St}(X, x)$ de valence N (ce qui revient à demander que $\text{br}(\Gamma, x) = \text{br}(X, x)$). Nous allons montrer que x possède une base de voisinages ouverts de la forme Δ^b , où $\Delta \in \text{St}_{a,c}(X, x)_{\subset \Gamma}$.

Soit V un voisinage ouvert de x ; il contient une sous-étoile Γ_0 de Γ , qui est une x -étoile de V . On déduit de 1.7.10 qu'il existe une sous-étoile Δ de Γ_0 dont les arêtes sont faiblement admissibles dans V ; il découle alors de 1.7.11.2 que Δ est faiblement admissible dans V ; cela équivaut à dire que Δ est faiblement admissible dans X et que $\Delta^b \subset V$, ce qui achève notre preuve.

(1.7.12.2) Si Γ est un élément de $\text{St}_a(X, x)$ de valence N , l'ouvert Γ^b est un arbre à N bouts relativement compact dont Γ est un sous-arbre admissible, et est même le squelette si $N \geq 2$, puisque la valence de (Γ, y) est alors au moins égale à 2 pour tout point y de Γ . Ainsi, le point x possède en particulier une base de voisinages qui sont des arbres à N bouts.

(1.7.13) Soit X un graphe et soit $x \in X$. Nous allons montrer que $\text{br}(X, x)$ est fini si et seulement si il existe un entier n tel que x possède une base de voisinages formée d'arbres à n bouts, et que si c'est le cas, le cardinal de $\text{br}(X, x)$ est le plus petit entier n à satisfaire cette propriété. Compte-tenu du 1.7.12.2 ci-dessus, il suffit de vérifier que si x possède une base de voisinages formée d'arbres à n bouts, alors $\text{br}(X, x)$ a pour cardinal au plus n .

On raisonne par contraposition. On suppose donc qu'il existe $n+1$ éléments distincts b_1, \dots, b_{n+1} dans $\text{br}(X, x)$. En vertu de 1.7.10, il existe $\Gamma \in \text{St}_a(X, x)$ telle que $\text{br}(\Gamma, x) = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$. Si V désigne la composante connexe de x dans $X \setminus \partial\Gamma$, il découle de 1.7.11.1 que les ouverts $b_1(\Gamma)^b, \dots, b_{n+1}(\Gamma)^b$ sont des composantes connexes deux à deux distinctes de $V \setminus \{x\}$.

Soit W un sous-arbre ouvert de V contenant x ; nous allons montrer que W a au moins $n+1$ bouts, ce qui permettra de conclure. Il suffit de s'assurer que $W \setminus \{x\}$ a au moins $n+1$ composantes connexes non compactes. Fixons i , et soit W_i une composante connexe de $W \setminus \{x\}$ contenue dans $b_i(\Gamma)^b$ (il en existe au moins une car W rencontre $b_i(\Gamma)^b$, à laquelle x adhère). Si W_i était compacte, ce serait un ouvert fermé non vide de I_i^b , et donc I_i^b elle-même, qui n'est pas compacte (c'est un arbre à deux bouts) ; par conséquent W_i n'est pas compacte, ce qui achève la démonstration.

(1.7.14) Soit X un graphe et soit $x \in X$. Les résultats énoncés ci-dessus s'appliquent notamment au cas des étoiles de sommet x dont la valence 1, c'est-à-dire au cas des demi-droites issues de x ; ils se déclinent alors comme suit.

Si $b \in \text{br}(X, x)$, il existe $I \in \text{Interv}(X, b)$ (1.7.8 ; nous utiliserons librement ce fait dans la suite) ; si I et I' sont deux intervalles appartenant à $\text{Interv}(X, b)$, il existe un intervalle I'' appartenant à $\text{Interv}(X, b)$ qui est contenu dans $I \cap I'$ (1.7.9.1) ; et si $I \in \text{Interv}(X, b)$ les ouverts J^b , où $J \in \text{Interv}_{a,c}(X, x)_{\subset J}$, forment une base de sections de b (1.7.10).

Le point x est unibranche si et seulement si il est non isolé et possède une base de voisinages ouverts constituée d'arbres à un bout (1.7.13); si c'est le cas et si $I \in \text{Interv}(X, x)$ alors :

- pour tout $J \in \text{Interv}_a(X, x)_{\subset I}$ la demi-droite $J \cup \{x\}$ est faiblement admissible dans X (1.7.11.2);
- les arbres à un bout $(J \cup \{x\})^b$ constituent, lorsque l'intervalle J parcourt $\text{Interv}_a(X, x)_{\subset I}$, une base de voisinages ouverts de x (1.7.12.1).

(1.7.15) Soit X un graphe, soit $x \in X$ et soit $b \in \text{br}(X, x)$. Pour tout intervalle non vide I , on note $\text{Or}(I)$ l'ensemble des orientations de I . Soient I et I' deux intervalles appartenant à $\text{Interv}(X, b)$. D'après le 1.7.14 ci-dessus, il existe un intervalle I'' appartenant à $\text{Interv}(X, b)$ qui est contenu dans $I \cap I'$. La famille $\{\text{Or}(I)\}_{I \in \text{Interv}(X, b)}$ apparaît ainsi comme un système filtrant dont toutes les flèches de transition sont des isomorphismes. On note $\text{Or}(b)$ sa limite (à la fois inductive et projective, selon le sens dans lequel on considère les isomorphismes); c'est un ensemble à deux éléments appelées *orientations* de la branche b . Pour tout $I \in \text{Interv}(X, b)$, on dispose d'un isomorphisme naturel $\text{Or}(I) \simeq \text{Or}(b)$.

On dit que b est orientée si on a choisi une orientation de b ; on dit que b est orientée *vers* x si on a choisi l'orientation induisant sur tout $I \in \text{Interv}(X, b)$ l'orientation vers x , et *depuis* x sinon.

Branches et bouts

(1.7.16) Proposition. Soit X un graphe et soit S un sous-ensemble fini de X . Soit U une composante connexe de $X \setminus S$, soit \mathcal{F} l'ensemble des fermés de X contenus dans U et soit Π l'ensemble $\varprojlim_{Y \in \mathcal{F}} \pi_0(U - Y)$.

i) Pour tout $x \in S$ l'ensemble $\text{br}(X, x)_{\subset U}$ est fini, et non vide si et seulement si $x \in \partial U$.

ii) Si Z_b est pour tout $b \in \text{br}(X, S)_{\subset U}$ une section de b contenue dans U alors $U - \bigcup Z_b$ est un fermé de X .

iii) Pour tout $Y \in \mathcal{F}$, il existe $Y' \in \mathcal{F}$ tel que $Y \subset Y'$ et tel que $U - Y'$ s'écrive

$$\coprod_{b \in \text{br}(X, S)_{\subset U}} Z_b,$$

où Z_b est pour tout b une section de b ; on dispose donc d'une bijection naturelle $\text{br}(X, S)_{\subset U} \simeq \Pi$.

iv) La flèche naturelle $\Pi \rightarrow \mathfrak{d}U$ est injective, et bijective si et seulement si U est relativement compacte. On dispose donc en vertu de iii) d'une injection $\text{br}(X, S)_{\subset U} \hookrightarrow \mathfrak{d}U$ qui est bijective si et seulement si U est relativement compacte.

Démonstration. On procède en plusieurs temps.

(1.7.16.1) Réduction au cas où $S = \partial U$. Le bord de U est contenu dans S , et U est une composante connexe de $X \setminus \partial U$. Par ailleurs, si x est un élément de S tel qu'il existe une branche de X issue de x et contenue dans U alors $x \in \partial U$; on peut donc, pour établir la proposition, remplacer S par ∂U , c'est-à-dire supposer que $S = \partial U$.

(1.7.16.2) Remarques générales et preuve de i). Soit x un point de S et soit $V \in \text{Arb}(X, x)$ tel que $V \cap S = \{x\}$. Soit X' la composante connexe de x dans $X - (S \setminus \{x\})$; on a $V \subset X'$; comme $x \in \partial U$, l'ouvert U est contenu dans X' et U est ainsi une composante connexe de $X' \setminus \{x\}$. Par conséquent $V \cap U$ est une réunion finie de composantes connexes de $V \setminus \{x\}$ (1.3.3.2), qui est non vide puisque $x \in \partial U$; les composantes en question sont nécessairement celles qui sont de la forme $b(V)$ où $b \in \text{br}(X, x)_{\subset U}$. On en déduit notamment que $\text{br}(X, x)_{\subset U}$ est fini et non vide, d'où l'assertion i).

(1.7.16.3) Soit V un voisinage ouvert de S . Comme $S = \partial U$, le fermé $U - V$ de U est également fermé dans X .

(1.7.16.4) L'ensemble fini S possède une base de voisinages de la forme $\coprod V_x$, où V_x est pour tout $x \in S$ un élément relativement compact et à bord fini de $\text{Arb}(X, x)$, et où les V_x sont deux à deux disjoints. Si $V = \coprod V_x$ est un tel voisinage et si l'on pose $T = U \cap \partial V$ les faits suivants sont vérifiés :

- $V \cap U = \coprod_{x \in S, b \in \text{br}(X, x)_{\subset U}} b(V_x)$ (cela résulte de 1.7.16.2);
- $U - V$ est fermé dans X (1.7.16.3);
- chacune des $b(V_x)$ est une composante connexe de $U \setminus T$, qui n'est pas relativement compacte dans U puisque $x \in \partial b(V_x)$;
- le compact $\mathcal{K}_U(T)$ est contenu dans $U - V$ (c'est une conséquence directe de l'assertion précédente).

(1.7.16.5) Preuve de ii. Choisissons $V = \coprod V_x$ comme au 1.7.16.4 ci-dessus, en exigeant de surcroît que $b(V_x) \subset Z_b$ pour tout x et toute $b \in \text{br}(X, x)_{\subset U}$ (1.7.1.4). Le fermé $U - \bigcup Z_b$ de U est alors contenu dans $U - V$, lequel est fermé dans X ; par conséquent, $U - \bigcup Z_b$ est fermé dans X .

(1.7.16.6) Preuve de iii). Soit $Y \in \mathcal{F}$. Choisissons $V = \coprod V_x$ comme au 1.7.16.4 ci-dessus, en exigeant de surcroît que chacun des V_x évite Y . Le sous-ensemble $U - V$ de U est alors un fermé de X qui possède la propriété requise.

(1.7.16.7) Assertion iv) : preuve de l'injectivité. Soient ϖ et ϖ' deux éléments de Π dont les images dans ∂U coïncident; pour tout $Y \in \mathcal{F}$, on notera $\varpi(Y)$ et $\varpi'(Y)$ les images respectives de ϖ et ϖ' dans $\pi_0(U - Y)$.

Soit $Y \in \mathcal{F}$. Choisissons $V = \coprod V_x$ comme au 1.7.16.4 ci-dessus, en exigeant de surcroît que chacun des V_x évite Y ; posons $T = U \cap \partial V$ et $Z = U - V$. Le sous-ensemble Z de U est fermé dans X et contient Y ; on a $\partial_U Z = \partial_X Z = T$ et $\mathcal{K}_U(T) \subset Z$.

Les ouverts $\varpi(Z)$ et $\varpi'(Z)$ étant deux composantes connexes de $U - Z$, ce sont deux composantes connexes de $U \setminus T$ qui ne sont pas contenues dans $\mathcal{K}_U(T)$; autrement dit, ce sont deux composantes connexes de $U \setminus \mathcal{K}_U(T)$. Comme les images de ϖ et ϖ' dans ∂U coïncident par hypothèse, on a l'égalité $\varpi(Z) = \varpi'(Z)$, d'où $\varpi(Y) = \varpi'(Y)$. Ceci valant pour tout $Y \in \mathcal{F}$, l'application $\Pi \rightarrow \partial U$ est bien injective.

(1.7.16.8) Fin de la preuve de iv). Si U est relativement compacte alors \mathcal{F} est l'ensemble des compacts de U , et $\Pi \rightarrow \partial U$ est clairement bijective.

Supposons maintenant que U ne soit pas relativement compacte. Choisissons $V = \coprod V_x$ comme au 1.7.16.4 ci-dessus; posons $Z = U - V$

et $T = U \cap \partial V$. On a $\mathcal{K}_U(T) \subset Z$. Comme U n'est pas relativement compact, il ne peut être contenu dans $\mathcal{K}_U(T) \cup \bar{V}$; il existe donc une composante connexe W de $U \setminus T$ qui n'est pas relativement compacte dans U et n'est pas l'une des $b(V_x)$, ce qui veut dire que $W \subset Z$. Comme W n'est pas relativement compacte, il existe $y \in \hat{U}$ dont l'image dans $\pi_0(U \setminus T)$ est égale à W . Si y était l'image d'un certain élément ϖ de Π , la composante $\varpi(Z)$ de $U - Z$ devrait être contenue dans W , ce qui est absurde puisque $W \subset Z$. \square

(1.7.17) On conserve les notations de la proposition 1.7.16 ci-dessus. Soit $\omega \in \partial U$. Si ω est l'image d'une branche $b \in \text{br}(X, S) \subset U$ et si x désigne l'origine de b on dira alors que ω *converge* vers x .

(1.7.18) Illustrons la proposition 1.7.16 dans deux cas très simples, qui seront constamment utilisés par la suite.

(1.7.18.1) Soit X un graphe et soit U un ouvert de X qui est un graphe connexe relativement compact ayant exactement un bout (le cas le plus utilisé sera celui où U est un arbre à un bout relativement compact). Comme U a exactement un bout, il n'est pas compact; comme il est relativement compact, ∂U est non vide. La proposition 1.4.5 assure alors que ∂U est un singleton; si x désigne son unique élément, on déduit de la proposition 1.7.16 ci-dessus que $\text{br}(X, x)_{\subset U}$ est un singleton. L'unique bout de U converge vers x .

(1.7.18.2) Soit X un graphe et soit U un ouvert de X qui est un arbre à deux bouts. Son squelette $\mathbf{S}(U)$ est alors un sous-graphe faiblement admissible de X , son adhérence $\bar{\mathbf{S}}(U)$ est égale $\mathbf{S}(U) \cup \partial U$ et est un sous-graphe admissible de \bar{U} . Trois cas peuvent se présenter.

- L'ensemble $\text{br}(X, \partial U)_{\subset U}$ est vide. Cela se produit si et seulement si ∂U est vide, et aucun des deux bouts de U ne converge alors.
- L'ensemble $\text{br}(X, \partial U)_{\subset U}$ est un singleton. Dans ce cas U n'est pas relativement compact, et ∂U est nécessairement lui-même un singleton $\{x\}$. Comme $\mathbf{S}(U) \cup \{x\}$ est un sous-graphe admissible de \bar{U} , il est connexe et non compact; par conséquent, c'est une demi-droite éventuellement longue issue de x , et \bar{U} est un arbre à un bout. L'ensemble $\text{br}(X, x)_{\subset U}$ est un singleton. L'un des bouts de U converge vers x , l'autre ne converge pas.
- L'ensemble $\text{br}(X, \partial U)_{\subset U}$ a deux éléments. Dans ce cas \bar{U} est compact, et son sous-graphe admissible $\mathbf{S}(U) \cup \partial U$ est compact et connexe.
 - ◊ Si ∂U a deux éléments x et y alors \bar{U} s'identifie à la compactification arboricole de U , et $\mathbf{S}(U) \cup \{x, y\}$ est un segment. Chacun des ensembles $\text{br}(X, x)_{\subset U}$ et $\text{br}(X, y)_{\subset U}$ est un singleton. L'un des bouts de U converge vers x , l'autre vers y .
 - ◊ Si ∂U est un singleton $\{x\}$ alors le graphe compact $\mathbf{S}(U) \cup \{x\}$ est un cercle, et \bar{U} n'est donc pas un arbre. Comme $\mathbf{S}(U) \cup \{x\}$ est de valence 2 en chacun de ses points, c'est le squelette de \bar{U} . L'ensemble $\text{br}(X, x)_{\subset U}$ a deux éléments, et chacun des deux bouts de U converge vers x .

1.8 Cochaînes harmoniques sur un graphe localement fini

Définition et premières propriétés

(1.8.1) Soit X une variété topologique séparée purement de dimension 1, connexe et non vide. C'est un cercle ou une droite éventuellement longue, et elle possède donc exactement deux orientations.

Si U est un ouvert connexe et non vide de X et si o est une orientation sur U (resp. X) on se permettra de noter encore o l'orientation induite sur X (resp. U), si cela ne prête pas à confusion.

(1.8.2) Soit Γ un graphe localement fini et soit S un sous-ensemble fermé et discret de Γ , contenant tous ses sommets. L'ouvert $\Gamma \setminus S$ de Γ est alors une variété topologique purement de dimension 1. On note $\text{Or}(\Gamma, S)$ l'ensemble des couples (I, o) où I est un ouvert connexe non vide de $\Gamma \setminus S$ et où o est une orientation sur celui-ci ; on note $\text{Or}^{\max}(\Gamma, S)$ le sous-ensemble de $\text{Or}(\Gamma, S)$ formé des couples (I, o) tels que I soit une composante connexe de $\Gamma \setminus S$.

(1.8.3) Soit A un groupe abélien. Une A -cochaîne sur (Γ, S) est une application $\varphi : \text{Or}(\Gamma, S) \rightarrow A$ satisfaisant les deux axiomes suivants :

- pour tout $(I, o) \in \text{Or}(\Gamma, S)$ eut tout ouvert connexe J de $\Gamma \setminus S$ contenant I , on a $\varphi(I, o) = \varphi(J, o)$;
- pour tout ouvert connexe non vide I de $\Gamma \setminus S$ dont on note o et o' les deux orientations, on a $\varphi(I, o) + \varphi(I, o') = 0$.

(1.8.3.1) L'ensemble $\text{Coch}(\Gamma, S, A)$ des A -cochaînes sur (Γ, S) constituent de façon naturelle un groupe abélien, et un A -module si A est le (groupe abélien sous-jacent à) un anneau commutatif unitaire.

(1.8.3.2) On peut également définir une A -cochaîne sur (Γ, S) comme une application φ de $\text{Or}^{\max}(\Gamma, S)$ vers A telle que $\varphi(I, o) + \varphi(I, o') = 0$ pour toute composante connexe I de $\Gamma \setminus S$ dont on note o et o' les deux orientations. En effet, une telle φ étant donnée, on vérifie aussitôt qu'elle admet un unique prolongement ψ à $\text{Or}(\Gamma, S)$ satisfaisant les axiomes requis ; si $(I, o) \in \text{Or}(\Gamma, S)$ et si J désigne la composante connexe de $\Gamma \setminus S$ contenant I , alors $\psi(I, o) = \varphi(J, o)$.

(1.8.3.3) Soit $x \in S$ et soit φ une A -cochaîne sur (Γ, S) . Comme Γ est localement fini et comme S est discret, il existe un voisinage ouvert Δ de x dans Γ qui est une étoile de sommet x et est tel que $\Delta \cap S = \{x\}$. Soient I_1, \dots, I_n les composantes connexes de $\Delta \setminus \{x\}$; pour tout s , on note o_i l'orientation de I_i dans la direction de x . La somme $\sum_j \varphi(I_j, o_j)$ ne dépend pas de Δ , et est notée $\partial_x(\varphi)$.

(1.8.3.4) La cochaîne φ est dite *harmonique* si $\partial_x(\varphi) = 0$ pour tout point x de S . L'ensemble des A -cochaînes harmoniques sur (Γ, S) est un sous-groupe de $\text{Coch}(\Gamma, S, A)$, et un sous-module de ce dernier lorsque A est un anneau.

(1.8.4) Soit T un sous-ensemble fermé et discret de Γ contenant S . L'ensemble $\text{Or}(\Gamma, T)$ est un sous-ensemble de $\text{Or}(\Gamma, S)$, et la restriction induit un morphisme $\text{Coch}(\Gamma, S, A) \rightarrow \text{Coch}(\Gamma, T, A)$.

(1.8.4.1) *Ce morphisme est injectif.* En effet, soit $\varphi \in \text{Coch}(\Gamma, S, A)$ une cochaîne induisant la cochaîne nulle sur (Γ, T) , et soit $(I, o) \in \text{Or}(\Gamma, S)$.

Comme T est discret, il existe un intervalle ouvert non vide J contenu dans I et ne rencontrant pas T ; on a alors $\varphi(I, o) = \varphi(J, o) = 0$, et φ est bien nulle.

(1.8.4.2) Soit $\varphi \in \text{Coch}(\Gamma, S, A)$ et soit ψ la cochaîne induite sur (Γ, T) . Soit $x \in S$. Soit φ une A -cochaîne sur (Γ, S) et soit ψ la A -cochaîne induite sur (Γ, T) . Soit $x \in S$. Choisissons un voisinage ouvert Δ de x dans Γ qui est une étoile telle que $\Delta \cap T = \{x\}$. On a *a fortiori* $\Delta \cap S = \{x\}$, et il résulte alors immédiatement des définitions que $\partial_x(\psi) = \partial_x(\varphi)$.

(1.8.5) Nous allons montrer que $\text{Coch}(\Gamma, S, A) \hookrightarrow \text{Coch}(\Gamma, T, A)$ induit un *isomorphisme* entre les groupes de A -cochaînes harmoniques sur (Γ, S) et (Γ, T) .

(1.8.5.1) Soit φ une A -cochaîne harmonique sur (Γ, S) , et soit ψ son image dans $\text{Hom}(\text{Or}(\Gamma, T), A)$. Nous allons vérifier que ψ est une cochaîne harmonique sur (Γ, T) . Soit $x \in T$.

Supposons que $x \in S$. On a d'après 1.8.4.2 l'égalité $\partial_x(\psi) = \partial_x(\varphi) = 0$.

Supposons que $x \notin S$. Le graphe Γ est de valence 2 en x ; il existe donc un voisinage ouvert I de x dans Γ qui est un intervalle dont l'intersection avec T est égale à $\{x\}$. Soient I' et I'' les deux composantes connexes de $I \setminus \{x\}$; on note o' (resp. o'') l'orientation de I' (resp. I'') dans la direction de x . On a alors

$$\partial_x(\psi) = \psi(I', o') + \psi(I'', o'') = \varphi(I', o') + \varphi(I'', o'') = \varphi(I, o) + \varphi(I, o'') = 0$$

puisque les deux orientations o' et o'' de I sont opposées. Ainsi, ψ est harmonique.

(1.8.5.2) Soit ψ une A -cochaîne harmonique sur (Γ, T) , soit $(I, o) \in \text{Or}(\Gamma, S)$, et soit J un ouvert connexe et non vide de I ne rencontrant pas T . Nous allons montrer que $\psi(J, o)$ ne dépend que de (I, o) , et pas du choix de J .

Pour ce faire, on choisit un second ouvert connexe et non vide J' de I ne rencontrant pas T . On se donne un point a sur J , un point b sur J' , et un segment joignant a à b que l'on se permet de noter $]a; b[$ (même si I est un cercle). L'intervalle J contient un intervalle ouvert non vide inclus dans $]a; b[$, et de même pour J' ; on est donc ramené au cas où J et J' sont contenus dans $]a; b[$ puis, quitte à les agrandir, à celui où chacun d'eux est une composante connexe de $]a; b[\setminus T$.

L'intersection $]a; b[\cap T$ est un ensemble fini $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Il suffit dès lors de démontrer que pour tout i compris entre 1 et n , on a

$$\psi(]x_{i-1}; x_i[, o) = \psi(]x_i; x_{i+1}[, o),$$

avec les conventions $x_0 = a$ et $x_n = b$. Mais c'est une conséquence immédiate du fait que $\delta_{x_i}(\psi) = 0$.

Il est en conséquence licite de poser $\varphi(I, o) = \psi(J, o)$ où J est *n'importe quel* ouvert connexe et non vide de I ne rencontrant pas T . Par construction, φ est une A -cochaîne sur (Γ, S) , qui induit la A -cochaîne ψ sur (Γ, T) . Comme ψ est harmonique, on déduit de 1.8.4.2 que φ est harmonique, ce qui achève la démonstration.

(1.8.6) Le groupe des A -cochaînes harmoniques sur (Γ, S) est donc canoniquement indépendant de S ; on le note $\text{Harm}(\Gamma, A)$, et on dira simplement de ses éléments que ce sont des A -cochaînes harmoniques *sur* Γ .

Interprétation cohomologique

(1.8.7) Supposons que A est un anneau commutatif unitaire, et soit λ une application A -linéaire de $H_c^1(\Gamma, A)$ vers A .

Soit S_0 l'ensemble des sommets de Γ , et soit I un ouvert connexe et non vide de $\Gamma \setminus_0$. Soit $u : I \hookrightarrow \Gamma$ l'immersion ouverte, et soit o une orientation sur I . Le choix de o fournit une *classe fondamentale* h appartenant à $H_c^1(I, A)$; posons $\varphi(I, o) = \lambda(u_*h)$. L'application φ est alors une A -cochaîne harmonique sur (Γ, S_0) , et l'on définit ainsi un morphisme de A -modules

$$\mathrm{Hom}_A(H_c^1(\Gamma, A), A) \rightarrow \mathrm{Harm}(\Gamma, A).$$

(1.8.8) On munit A de la topologie discrète, et on fait de $\mathrm{Hom}_A(H_c^1(\Gamma, A), A)$ et $\mathrm{Harm}(\Gamma, A)$ des A -modules topologiques comme suit.

- On considère $\mathrm{Hom}_A(H_c^1(\Gamma, A), A)$ comme la limite projective des A -modules discrets $\mathrm{Hom}_A(M, A)$, où M parcourt l'ensemble des sous-modules de type fini de $H_c^1(\Gamma, A)$.

- On munit $\mathrm{Harm}(\Gamma, A)$ de la topologie induite par la topologie produit de $A^{\mathrm{Or}^{\max}(\Gamma, S_0)}$.

La flèche $\mathrm{Hom}_A(H_c^1(\Gamma, A), A) \rightarrow \mathrm{Harm}(\Gamma, A)$ construite au 1.8.7 ci-dessus est alors un *isomorphisme de A -modules topologiques*.

1.9 Quotients d'un graphe

Dans tout ce paragraphe, on désigne par G un groupe *profini*.

(1.9.1) Si Γ est un arbre localement fini et si S est l'ensemble de ses sommets, on appellera *arête* de Γ toute composante connexe de $\Gamma \setminus S$. Toute arête de Γ est une droite éventuellement longue.

Si φ est une application dont la source Γ est un graphe localement fini, on dira que φ est *injective par morceaux* s'il existe un sous-ensemble fermé et discret S de Γ tel que la restriction de φ à toute composante connexe de $\Gamma \setminus S$ soit injective.

Action de G sur un graphe : premières propriétés

(1.9.2) Commençons par quelques remarques générales. Soient X et Y deux graphes et soit φ un homéomorphisme $Y \simeq X$. Soit Δ un sous-graphe de Y et soit $y \in Y$; les propriétés qui suivent sont conséquences immédiates des définitions.

- $\varphi(S(Y)) = S(X)$;
- $\varphi(\Delta)$ est admissible si et seulement si Δ est admissible et si c'est le cas, φ commute aux rétractions canoniques respectives de Y sur Δ et X sur $\varphi(\Delta)$;
- $\varphi(\Delta)$ est faiblement admissible si et seulement si Δ est faiblement admissible et si c'est le cas, $\varphi(\Delta^b) = \varphi(\Delta)^b$.

De plus, si $y \in Y$ et si $x = \varphi(y)$ alors φ induit une bijection $\mathrm{br}(Y, y) \simeq \mathrm{br}(X, x)$; cela résulte de la définition même des branches, et peut également

être vu également comme un cas particulier des constructions de 1.7.2 *et sq.*. Si y est situé sur Δ , on vérifie aussitôt que les bijections $\text{br}(Y, y) \simeq \text{br}(X, x)$ et $\text{br}(\Delta, y) \simeq \text{br}(\varphi(\Delta), x)$ sont compatibles aux inclusions $\text{br}(\Delta, y) \subset \text{br}(Y, y)$ et $\text{br}(\varphi(\Delta), x) \subset \text{br}(X, x)$.

Nous aurons surtout l'occasion d'appliquer les remarques qui précèdent en travaillant avec un graphe X muni d'une action de \mathbf{G} , sur lequel on considèrera des automorphismes de la forme $x \mapsto g(x)$ avec $g \in \mathbf{G}$; elles ont notamment, dans ce contexte, les conséquences suivantes :

- si Δ est un sous-graphe faiblement admissible de X stable sous \mathbf{G} alors Δ^b est stable sous \mathbf{G} ;
- si $x \in X$, le stabilisateur \mathbf{H} de x agit sur $\text{br}(X, x)$.

(1.9.3) Proposition. *Soit X un graphe connexe sur lequel \mathbf{G} agit. L'action de \mathbf{G} sur X s'étend d'une unique manière en une action de \mathbf{G} sur \widehat{X} .*

Démonstration. Il résulte de la définition de \widehat{X} et de la densité de X dans \widehat{X} que tout automorphisme de X s'étend de manière unique en un automorphisme de \widehat{X} . Par conséquent, l'action de \mathbf{G} sur X s'étend d'une unique manière en une opération *ensembliste* de \mathbf{G} sur \widehat{X} qui est continue par rapport à la seconde variable; il reste à s'assurer que $\mathbf{G} \times \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$ est continue.

Soit S un sous-ensemble fini de X et soit U une composante connexe de $X \setminus S$. Soit (g, x) un élément de $\mathbf{G} \times \widehat{X}$ tel que $g(x) \in \widehat{U}^X$; nous allons établir l'existence d'un voisinage de (g, x) dans $\mathbf{G} \times \widehat{X}$ dont l'image est contenue dans \widehat{U}^X , ce qui permettra de conclure.

(1.9.3.1) Si $x \in X$ alors $g(x) \in \widehat{U}^X \cap X = U$, et il résulte de la continuité de $\mathbf{G} \times X \rightarrow X$ qu'il existe un voisinage ouvert de (g, x) dans l'ouvert $\mathbf{G} \times X$ de $\mathbf{G} \times \widehat{X}$ dont l'image est contenue dans U , et *a fortiori* dans \widehat{U}^X .

(1.9.3.2) Supposons maintenant que $x \in \partial X$; choisissons un voisinage compact \mathbf{G}_0 de g dans \mathbf{G} . Le sous-ensemble $\mathbf{G}_0^{-1}.S$ de X en est une partie compacte; il existe donc un sous-ensemble fini T de X tel que $\mathbf{G}_0^{-1}.S \subset \mathcal{K}_X(T)$. Si $h \in \mathbf{G}_0$ on a $S \subset h(\mathcal{K}_X(T)) = \mathcal{K}_X(h(T))$.

Comme $x \in \partial X$ il appartient à \widehat{V}^X pour une certaine composante connexe V de $X \setminus \mathcal{K}_X(T)$. Si h appartient à \mathbf{G}_0 alors $h(V)$ est une composante connexe de $X \setminus \mathcal{K}_X(h(T))$, et est donc contenue dans une composante connexe de $X \setminus S$.

En particulier, $g(V)$ est contenu dans une composante connexe W de $X \setminus S$; il s'ensuit que $g(\widehat{V}^X) \subset \widehat{W}^X$; comme $g(x) \in \widehat{U}^X$, on a $W = U$ et donc $g(V) \subset U$.

Choisissons $y \in V$. Par continuité de $\mathbf{G} \times X \rightarrow X$, il existe un voisinage ouvert \mathbf{H} de g dans \mathbf{G}_0 tel que $\mathbf{H}.y \subset U$. Si $h \in \mathbf{H}$ alors $h(V)$ rencontre U par construction; par conséquent, la composante connexe de $X \setminus \mathcal{K}_X(S)$ contenant $h(V)$ n'est autre que U ; il s'ensuit que $h(\widehat{V}^X) \subset \widehat{U}^X$.

Ainsi, l'image réciproque de \widehat{U}^X par la flèche $\mathbf{G} \times \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$ contient le voisinage $\mathbf{H} \times \widehat{V}^X$ de (g, x) , ce qui achève la démonstration. \square

(1.9.4) Lemme. *Soit X un arbre sur lequel \mathbf{G} agit. Soit $g \in \mathbf{G}$ et soit x un point de \widehat{X} tel que $g(x) = x$; munissons \widehat{X} de l'ordre partiel défini par x (rem. 1.4.16). Si $y \in \widehat{X}$ est tel que y et $g(y)$ soient comparables alors g fixe $[y; x]$ point par point.*

Démonstration. Comme $g(x) = x$ l'automorphisme g est croissant.

(1.9.4.1) *Montrons tout d'abord que $g(y) = y$.* Quitte à remplacer g par g^{-1} et y par $g(y)$, on peut supposer que $y \leq g(y)$. Par une récurrence immédiate $g^n(y) \geq y$ pour tout n . Comme \mathbf{G} est profini, $g^{n!}$ tend vers l'élément neutre e de \mathbf{G} quand n tend vers l'infini ; par conséquent, $g^{n!-1}(y) \rightarrow g^{-1}(y)$ quand n tend vers l'infini.

Par ce qui précède, $g^{n!-1}(y) \geq y$ pour tout $n \geq 2$; on en déduit par passage à la limite (licite du fait que $\widehat{X}_{\leq z}$ est fermé pour tout $z \in \widehat{X}$, cf. rem. 1.4.16) que $g^{-1}(y) \geq y$; en appliquant g , il vient $y \geq g(y)$; comme par ailleurs $y \leq g(y)$, on a bien $g(y) = y$.

(1.9.4.2) *Conclusion.* Comme $g(y) = y$ on a $g([y; x]) = [y; x]$. Soit $z \in [y; x]$. Par ce qui précède, $g(z)$ appartient à $[y; x]$ et est de ce fait comparable à z ; on déduit alors du 1.9.4.1, appliqué à z au lieu de y , que $g(z) = z$. \square

(1.9.5) Corollaire. *Soit I une droite éventuellement longue sur laquelle \mathbf{G} agit. Si g est un élément de \mathbf{G} qui ne permute pas les orientations de I alors g agit trivialement sur I .*

Démonstration. Soient x et y les deux bouts de I . Dire que g n'échange pas les orientations de I signifie que $g(x) = x$ (ou encore que $g(y) = y$). Il n'y a plus alors qu'à appliquer le lemme précédent en remarquant que l'ordre induit par x sur \widehat{I} est total. \square

(1.9.6) Corollaire. *Soit I une droite éventuellement longue. Si \mathbf{G} agit sur I de façon non triviale, il existe $x \in I$ et une symétrie σ de centre x telle que l'action de \mathbf{G} se factorise par une surjection continue $\mathbf{G} \rightarrow \{\text{Id}, \sigma\}$.*

Démonstration. Donnons-nous une action non triviale de \mathbf{G} sur I ; par hypothèse, il existe $g \in \mathbf{G}$ et $y \in I$ tels que $g(y) \neq y$. L'action de g^2 respecte nécessairement les orientations de I (c'est le cas pour le carré de n'importe quel homéomorphisme de I) ; il s'ensuit, en vertu du corollaire 1.9.5 ci-dessus, que l'action de g^2 est triviale ; on a en particulier $g^2(y) = y$, et g stabilise donc le segment $[y; g(y)]$. Il induit de ce fait un automorphisme de $[y; g(y)]$ qui en permute les extrémités, et possède donc un point fixe x sur $]y; g(y)[$. Si I_1 (resp. I_2) désigne la composante connexes de $I \setminus \{x\}$ contenant y (resp. $g(y)$) alors g induit un homéomorphisme $\tau : I_1 \simeq I_2$, dont la réciproque est également induite par g , l'action de g^2 étant triviale. L'application σ de I dans I qui fixe x et envoie z sur $\tau(z)$ (resp. $\tau^{-1}(z)$) si $z \in I_1$ (resp. I_2) est une symétrie de centre x , et $g(z) = \sigma(z)$ pour tout $z \in I$.

Si h est maintenant un élément quelconque de \mathbf{G} alors ou bien h agit en préservant les orientations de I , c'est-à-dire trivialement en vertu du lemme 1.9.4 ci-dessus, ou bien il les inverse ; mais dans ce dernier cas hg les préserve et agit trivialement, ce qui signifie que $h(z) = g^{-1}(z) = \sigma(z)$ pour tout $z \in I$. \square

(1.9.7) Si Γ est un arbre localement fini sur lequel \mathbf{G} agit, le groupe \mathbf{G} agit sur l'ensemble des arêtes de Γ . On dira que \mathbf{G} *préserve les orientations des arêtes* de Γ si pour toute arête I de Γ et tout élément g du stabilisateur de I , l'action de g sur I préserve les orientations de I – ce qui revient à demander qu'elle soit triviale (cor. 1.9.5).

(1.9.8) Lemme. *Soit Γ un arbre compact, fini et non vide sur lequel \mathbf{G} agit. Il existe un point de Γ qui est fixe sous \mathbf{G} ; si \mathbf{G} agit sans permuter les orientations des arêtes de Γ ce point peut être choisi parmi les sommets de Γ .*

Démonstration. On procède en deux temps.

(1.9.8.1) Montrons que G possède un point fixe sur Γ . On procède par récurrence sur le nombre N de sommets de Γ .

Si $N = 1$ alors Γ est réduit à un point, et l'assertion est trivialement vraie.

Si $N = 2$ alors Γ est un segment (non trivial), et l'assertion se déduit alors immédiatement du corollaire 1.9.6.

On suppose maintenant que $N \geq 3$ et que l'assertion est vraie en rang inférieur ou égal à $N - 1$. Soit S l'ensemble des sommets unibranches de Γ . Si $x \in S$ il existe une unique arête de Γ issue de x ; l'autre extrémité de cette arête sera notée $\rho(x)$. C'est un sommet de Γ ; comme $N \geq 3$ le graphe Γ n'est pas un segment, et la valence de $\rho(x)$ est donc au moins 3; en particulier, $\rho(x) \notin S$.

Soit Γ' le sous-ensemble de Γ égal à $\Gamma - \bigcup_{x \in S} [x; \rho(x)[$; c'est un sous-arbre compact et non vide de Γ qui est stable par G et possède strictement moins de N sommets. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un point de Γ' qui est fixe sous G , ce qui achève de prouver notre assertion.

(1.9.8.2) Montrons que si G ne permute pas les orientations des arêtes de Γ il existe un sommet de Γ qui est fixe sous G . D'après le 1.9.8.1 ci-dessus, G possède un point fixe x sur Γ . Si x est un sommet, la démonstration est terminée. Sinon, l'arête I de Γ qui contient x est stable sous G ; comme G ne permute pas les orientations des arêtes de Γ , l'action de G sur I est triviale et si y désigne l'un des deux points de ∂I alors y est un sommet de Γ qui est fixe sous G . \square

(1.9.9) Lemme. Soit Γ un graphe localement fini sur lequel G agit. Les orbites de G sur Γ sont finies.

Démonstration. Soit S l'ensemble des sommets de Γ .

(1.9.9.1) Si Γ est une droite éventuellement longue, la finitude des orbites de G est une conséquence immédiate du corollaire 1.9.6.

(1.9.9.2) Si $x \in S$, son orbite est un compact contenu dans l'ensemble des sommets de Γ , lequel est discret; par conséquent, $G.x$ est fini.

(1.9.9.3) Il reste à s'assurer que les orbites de G sur $\Gamma \setminus S$ sont finies. Une telle orbite est un compact contenu dans $\coprod_{I \in \pi_0(\Gamma \setminus S)} I$ et ne rencontre donc qu'un

nombre fini de composantes connexes. Il suffit dès lors de démontrer que si I est une composante connexe de $\Gamma \setminus S$ et si H est son stabilisateur, les orbites de H sur I sont finies; autrement dit on s'est ramené, quitte à remplacer G par H et Γ par I , au cas où Γ est connexe, non vide, et sans sommets. On distingue deux cas.

Premier cas : Γ n'est pas compact. C'est alors une droite éventuellement longue, et la conclusion découle de 1.9.9.1.

Second cas : Γ est compact. C'est alors un cercle. Soit $x \in \Gamma$. L'orbite $G.x$ étant totalement discontinue, elle n'est pas égale à Γ tout entier; choisissons un point y sur Γ qui ne rencontre pas $G.x$; le point x n'appartient alors pas à $G.y$. L'orbite de x est un compact contenu dans $\coprod_{I \in \pi_0(\Gamma - G.y)} I$; elle ne rencontre

donc qu'un nombre fini de composantes connexes de $\Gamma - G.y$; chacune de ces composantes est un ouvert connexe et non vide de $\Gamma \setminus \{y\}$, et est de ce fait un intervalle ouvert. La finitude de $G.x$ découle alors de 1.9.9.1. \square

Quotient d'un arbre sous l'action de G

(1.9.10) Proposition. *Soit X un arbre sur lequel G agit et soient x et y deux points de X ; on désigne par p la flèche quotient $X \rightarrow X/G$.*

i) L'image $p([x; y])$ est un arbre compact et fini ayant au plus trois arêtes, et $p|_{[x; y]}$ est injective par morceaux.

ii) Il existe un unique fermé de X/G homéomorphe à un segment d'extrémités $p(x)$ et $p(y)$.

Démonstration. Notons tout d'abord les faits suivants, que nous utiliserons implicitement tout au long de la preuve : l'espace quotient X/G est séparé et l'application p est compacte (1.1.9 et sq.).

Si $x = y$ la proposition est évidente ; on suppose à partir de maintenant que $x \neq y$. Soit Z l'enveloppe convexe du compact $G.x \cup G.y$ de X ; c'est un sous-arbre compact de X ; l'ouvert $Z' := Z - (G.x \cup G.y)$ de Z est un graphe localement fini.

Comme $x \neq y$ le segment $[x; y]$ n'est pas réduit à un singleton ; il ne peut donc être entièrement contenu dans le compact totalement discontinu $G.x \cup G.y$, et il s'ensuit que Z' est non vide. Choisissons un point z sur Z' . Son orbite est finie (lemme 1.9.9) ; la réunion des segments $[w; w']$, où (w, w') parcourt $(G.z)^2$, est un sous-arbre non vide, compact et fini de Z qui est stable sous l'action de G . Il possède donc en vertu du lemme 1.9.8 un point t invariant sous G .

(1.9.10.1) Nous allons montrer que $p|_{[y; t] \cup [x; t]}$ est injective par morceaux et que $p([y; t] \cup [x; t])$ est un arbre compact et fini ayant au plus trois arêtes ; cela entraînera immédiatement l'assertion i).

Les applications $p|_{[x; t]}$ et $p|_{[y; t]}$ sont injectives. En effet il suffit pour le voir, les points x et y et jouant des rôles analogues, de montrer que $p|_{[x; t]}$ est injective. Soient x_1 et x_2 deux points de $[x; t]$ ayant même image par p . Cela signifie qu'il existe $g \in G$ tel que $g(x_1) = x_2$. Étant tous deux situés sur $[x; t]$, les points x_1 et x_2 sont comparables pour l'ordre défini par t , lequel est fixe sous G ; le lemme 1.9.4 assure alors que $x_1 = g(x_1) = x_2$, et $p|_{[x; t]}$ est bien injective.

L'image $p([x; t] \cup [y; t])$ est un arbre compact fini ayant au plus trois arêtes. Par ce qui précède, $p([x; t])$ (resp. $p([y; t])$) est un segment d'extrémités $p(x)$ et $p(t)$ (resp. $p(y)$ et $p(t)$) ; posons $I = p([x; t]) \cap p([y; t])$. Nous allons démontrer que I est un segment dont $p(t)$ est l'une des extrémités, ce qui entraînera aussitôt que $p([x; t] \cup [y; t]) = p([x; t]) \cup p([y; t])$ est un arbre fini et compact ayant au plus trois arêtes.

On sait déjà que I est compact ; pour établir qu'il s'agit d'un segment dont $p(t)$ est l'une des extrémités, il suffit dès lors de vérifier que si $\omega \in I$ alors le segment $[\omega; p(t)]$ de $p([x; t])$ est contenu dans I .

Soit donc $\omega \in I$; il existe un (unique) point $\xi \in [x; t]$ tel que $\omega = p(\xi)$ et un (unique) point $\eta \in [y; t]$ tel que $\omega = p(\eta)$. Les points ξ et η ayant même image par p , il existe $g \in G$ tel que $\xi = g(\eta)$. Le point t étant invariant sous G on a alors $g([\eta; t]) = [\xi; t]$; par conséquent, $p([\xi; t])$ est contenu dans I . Or par injectivité de $p|_{[x; t]}$ l'image $p([\xi; t])$ est exactement le segment $[\omega; p(t)]$ de $p([x; t])$, ce qui achève la preuve de l'assertion requise.

(1.9.10.2) Nous allons maintenant montrer ii). Commençons par une remarque : le point t étant fixe sous G , le compact Z peut s'écrire comme la réunion des $[g(x); t] \cup [g(y); t]$ où g parcourt G ; par conséquent, $p(Z)$ est égal à $p([x; t] \cup [y; t])$, et est en particulier un arbre. Pour établir ii), il suffit dès lors de vérifier que tout segment d'extrémités $p(x)$ et $p(y)$ tracé sur X/G est contenu dans $p(Z)$.

Soit U une composante connexe de $X/G - p(Z)$ et soit V une composante connexe de $p^{-1}(U)$; l'ouvert V de X est une composante connexe de $X - Z$; comme Z est un arbre, ∂V est un singleton $\{v\}$ pour un certain $v \in Z$. La projection p étant fermée, $p(\bar{V}) = p(V) \cup \{p(v)\} = U \cup \{p(v)\}$ est un fermé de X/G ; par conséquent, ∂U est le singleton $\{p(v)\}$.

Il s'ensuit, en vertu de 1.3.15.2, que tout segment tracé sur X/G et joignant deux points de $p(Z)$ est contenu dans $p(Z)$, ce qui achève la démonstration. \square

(1.9.11) Théorème. *Soit X un graphe sur lequel G agit et soit $p : X \rightarrow X/G$ la flèche quotient.*

- i) L'espace quotient X/G est un graphe; si X est un arbre, X/G est un arbre.*
- ii) Tout point de X/G possède une base de voisinages V satisfaisant la condition suivante : V est un arbre compact et $p^{-1}(V)$ est une réunion disjointe finie d'arbres compacts.*
- iii) Si Γ est un sous-graphe fermé de X alors $p(\Gamma)$ est un sous-graphe fermé de X/G ; si de plus Γ est localement fini alors $p(\Gamma)$ est localement fini, et $p|_{\Gamma}$ est injective par morceaux.*

Démonstration. Remarquons pour commencer que l'espace quotient X/G est séparé et localement compact, et que l'application p est compacte et ouverte (1.1.9 et sq.).

(1.9.11.1) Preuve de i) et ii). Soit $x \in X/G$, soit ξ un antécédent de x sur X , et soit U un voisinage ouvert de x dans X/G . Il existe un voisinage ouvert connexe Ω de ξ dans $p^{-1}(U)$ tel que $\bar{\Omega}$ soit compact et contenu dans $p^{-1}(U)$. Comme $G.\xi$ est compact et rencontre toutes les composantes connexes de $G.\Omega$ (l'ouvert $g(\Omega)$ étant connexe pour tout $g \in G$), le nombre de composantes connexes de $G.\Omega$ est fini.

Le sous-ensemble $G.\bar{\Omega}$ de X est compact (c'est l'image de $G \times \bar{\Omega}$), contient $G.\Omega$ et est contenu dans $\overline{G.\Omega}$; en conséquence, $\overline{G.\Omega}$ coïncide avec $G.\bar{\Omega}$ et est en particulier compact; par ailleurs, il découle de la finitude de $\pi_0(G.\Omega)$ que $\overline{G.\Omega} = G.\bar{\Omega}$ est un sous-graphe de X .

Le graphe compact $G.\bar{\Omega}$ comprend un nombre fini de boucles, puisqu'elles sont toutes situées sur son squelette, lequel est un arbre compact et fini. Soit (ξ_1, \dots, ξ_r) une famille finie de points de $G.\bar{\Omega}$ telle que chaque boucle de $G.\bar{\Omega}$ contienne l'un des ξ_i et telle que $G.\xi$ ne rencontre pas $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ (c'est possible car le compact totalement discontinu $G.\xi$ ne contient aucune boucle). Il existe un voisinage ouvert connexe Ω_0 de ξ dans Ω qui possède les propriétés suivantes :

- le compact $\bar{\Omega}_0$ est contenu dans $\Omega - G.\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$;
- $\partial\Omega_0$ est fini.

En appliquant à Ω_0 le raisonnement tenu ci-dessus à propos de Ω , on voit que le sous-graphe ouvert $G.\Omega_0$ de X a un nombre fini de composantes connexes, que son adhérence est compacte et qu'elle coïncide avec $G.\bar{\Omega}_0$. Par construction,

cette adhérence ne contient aucun des ξ_i , et donc aucune des boucles tracées sur $\mathbf{G}.\bar{\Omega}$. Ainsi, $\mathbf{G}.\bar{\Omega}_0$ apparaît comme un graphe compact sans boucle, c'est-à-dire comme une réunion disjointe finie d'arbres compacts.

On note Ω'_0 (resp. Ω''_0) la composante connexe de ξ dans $\mathbf{G}.\Omega_0$ (resp. $\mathbf{G}.\bar{\Omega}_0$), et \mathbf{G}' (resp. \mathbf{G}'') le stabilisateur de Ω'_0 (resp. Ω''_0). Par construction, Ω'_0 (resp. Ω''_0) est un sous-arbre ouvert (resp. un sous-arbre compact) de X .

Posons $U_0 = p(\Omega_0)$. Comme p est ouverte, U_0 est un voisinage ouvert de x dans U . Comme p est fermée, $p(\bar{\Omega}_0)$ est fermé dans X , ce qui implique que $\partial U_0 \subset p(\partial\Omega_0)$; comme $\partial\Omega_0$ est fini, ∂U_0 est fini.

On a $U_0 = p(\Omega_0) = p(\mathbf{G}.\Omega_0) = p(\Omega'_0)$. L'ouvert U_0 s'identifie au quotient Ω'_0/\mathbf{G}' ; la proposition 1.9.10 assure alors que pour tout couple (z, t) de points de U_0 , il existe un unique segment d'extrémités z et t tracé sur U_0 ; ceci achève de prouver que X/\mathbf{G} est un graphe.

Cela étant établi, on déduit immédiatement de la proposition 1.9.10 que X/\mathbf{G} est un arbre si X est un arbre; ainsi, i) est établie.

Posons $V = p(\bar{\Omega}_0) = p(\mathbf{G}.\bar{\Omega}_0) = p(\Omega''_0)$; c'est un voisinage compact de x contenu dans U . Par compacité, V s'identifie au quotient Ω''_0/\mathbf{G}'' ; comme Ω''_0 est un arbre, V est un arbre d'après l'assertion i) déjà établie. Par construction, $p^{-1}(V) = \mathbf{G}.\bar{\Omega}_0$ est une réunion finie disjointe d'arbres compacts, d'où ii).

(1.9.11.2) Preuve de iii). Soit Γ un sous-graphe fermé de X . Les assertions à établir pouvant se vérifier localement sur X/\mathbf{G} l'on peut, grâce à l'assertion ii) prouvée ci-dessus, supposer que X est une réunion finie disjointe d'arbres compacts, et que X/\mathbf{G} est un arbre.

Une réunion finie de sous-graphes fermés (resp. de sous-graphes fermés et localement finis) de X/\mathbf{G} est encore un sous-graphe fermé (resp. un sous-graphe fermé et localement fini) de X/\mathbf{G} ; cela permet de se ramener, en raisonnant composante par composante, au cas où le graphe compact Γ est connexe et non vide puis, quitte à remplacer X par la composante connexe de X contenant Γ , et \mathbf{G} par le stabilisateur correspondant, à celui où X est lui-même également connexe. Autrement dit, il suffit de traiter le cas où X est un arbre compact et où Γ est un sous-arbre fermé de X .

L'image de Γ sur X/\mathbf{G} est une partie compacte de X/\mathbf{G} . Soient x et y deux éléments de $p(\Gamma)$, et soit ξ (resp. η) un antécédent de x (resp. y) sur Γ . L'assertion i) de la proposition 1.9.10 assure que $p([\xi; \eta])$ est un arbre; il contient donc $[x; y]$; par conséquent, le compact $p(\Gamma)$ de X/\mathbf{G} est convexe, et en est dès lors un sous-arbre fermé.

Si le sous-arbre compact Γ de X est localement fini, il est fini. Il découle alors de l'assertion i) de la proposition 1.9.10 : que le sous-arbre $p(\Gamma)$ de X/\mathbf{G} est réunion finie de sous-arbres compacts et finis, ce qui entraîne qu'il est lui-même compact et fini; et que $p|_{\Gamma}$ est injective par morceaux. \square

(1.9.12) Lemme. Soit X un graphe sur lequel \mathbf{G} agit, soit $p : X \rightarrow X/\mathbf{G}$ la flèche quotient et soit Γ un sous-graphe admissible de X stable sous \mathbf{G} ; l'image $p(\Gamma)$ est alors un sous-graphe admissible de X/\mathbf{G} .

Démonstration. Comme Γ est un sous-graphe fermé de X , son image $p(\Gamma)$ est un sous-graphe fermé de X/\mathbf{G} (th. 1.9.11, iii)).

(1.9.12.1) Soit U une composante connexe de $X/G - p(\Gamma)$ et soit V une composante connexe de $p^{-1}(U)$. L'ouvert V est une composante connexe de $X - \Gamma$ et est donc un arbre à un bout relativement compact dans X ; on note H le stabilisateur de V dans $\pi_0(p^{-1}(U))$, et x l'unique point de ∂V ; le point x appartient à Γ et est fixe sous H , et son image sur X n'appartient pas à U .

On a par compacité de p l'égalité $\bar{U} = p(\bar{V}) = U \cup \{p(x)\}$. Comme $V \simeq U/H$, comme $p(x) \notin U$ et comme x est fixe sous H , la flèche $\bar{V} \rightarrow p(\bar{V})$ se factorise par une bijection continue de (\bar{V}/H) sur $p(\bar{V})$; le graphe \bar{V} étant compact, il vient $p(\bar{V}) \simeq \bar{V}/H$; en vertu du théorème 1.9.11, le compact \bar{V}/H est un arbre.

Ainsi, $\bar{U} = p(\bar{V}) \simeq \bar{V}/H$ est un arbre compact et $\bar{U} - U$ est le singleton $\{p(x)\}$; l'ouvert U est de ce fait un arbre à un bout relativement compact dans X/G . Par conséquent, le sous-graphe fermé $p(\Gamma)$ de X/G est admissible. \square

(1.9.13) Lemme. Soit X un graphe sur lequel G agit, soit $x \in X$ et soit H le stabilisateur de x .

A) Si x est pluribranche, H est un sous-groupe ouvert de G .

B) Soit $\Gamma \in \text{St}(X, x)$. Il existe $\Delta \in \text{St}_{a,c}(X, x)$, stable sous H , et possédant les propriétés suivantes :

- i) $\text{br}(\Delta, x) \supset \text{br}(\Gamma, x)$;
- ii) la réunion $\{x\} \cup \bigcup_{b \in \text{br}(\Gamma, x)} b(\Delta)$ est une sous-étoile de Γ .

C) Soit Δ comme en B) et soit $b \in \text{br}(\Delta, x)$. Le stabilisateur de b dans H coïncide avec le stabilisateur de la composante connexe $b(\Delta)$ de $\Delta \setminus \{x\}$ et fixe $b(\Delta)$ point par point.

Démonstration. D'après l'assertion ii) du théorème 1.9.11, il existe un voisinage compact V de x tel que $G.V$ soit une réunion disjointe finie d'arbres compacts. Quitte à remplacer x par sa composante connexe dans l'intérieur de $G.V$, et G par le stabilisateur de la composante en question (qui est un ouvert de G), on peut supposer que X est un arbre.

(1.9.13.1) Preuve de A). Supposons que x est pluribranche; il existe alors deux points y et z de X tels que $x \in]y; z[$. L'orbite $G.x$ étant un compact totalement discontinu, elle ne contient ni $]y; x[$ ni $]z; x[$; par conséquent on peut supposer, quitte à rapprocher y et z de x , que ni y ni z n'appartiennent à $G.x$. Soit E l'enveloppe convexe du compact $G.y \cup G.z$; c'est un sous-arbre compact de X qui contient x . Ni y ni z n'appartenant à $G.x$, le point x n'est pas situé sur $G.y \cup G.z$; or le graphe $E - (G.y \cup G.z)$ est localement fini, et stable sous G . Il découle alors du lemme 1.9.9 que $G.x$ est finie, ce qui achève de prouver A).

(1.9.13.2) Preuve de B). En vertu de 1.7.10, $\text{St}_{a,c}(X, x)_{\subset \Gamma}$ est non vide; soit Γ_0 un élément de cet ensemble. Choisissons pour tout $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ un point x_b sur l'arête $b(\Gamma_0)$; étant situé sur un intervalle ouvert, le point x_b est pluribranche; en vertu de l'assertion A) déjà prouvée, l'orbite $H.x_b$ est finie.

Il s'ensuit que le compact $\Gamma_1 := G.(\bigcup [x_b; x]) = \bigcup_{g \in H} [g(x_b); x]$ est un arbre compact et fini, évidemment invariant par H . Soit S l'ensemble de ses sommets

et soit Δ la composante connexe de x dans $\Gamma_1 \setminus S$; c'est étoile de sommet x tracée sur X , relativement compacte et stable sous \mathbf{H} ; nous allons montrer que Δ satisfait i) et ii), puis que ses arêtes sont faiblement admissibles.

La condition i). Elle résulte du fait que Δ contient pour tout $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ l'intervalle ouvert $]x_b; x[$ qui aboutit proprement à x et définit b .

La condition iii). Soit $b \in \text{br}(\Gamma, x)$. Comme $]x_b; x[$ et $b(\Delta)$ sont toutes deux tracées sur $b(X)$, leur intersection est un intervalle ouvert I tracé sur $b(\Delta)$ et aboutissant à x . Nous allons montrer par l'absurde que $I = b(\Delta)$; il en découlera que $b(\Delta) \subset]x_b; x[\subset b(\Gamma)$, ce qui permettra de conclure.

Supposons donc que $I \neq b(\Delta)$; l'intervalle I aboutit dans ce cas à un point y de $b(\Delta)$. Mais il y a alors au moins trois branches de Γ_1 issues de y , à savoir celles respectivement définies par les intervalles $]y; x[$, $]x_b; y[$ et $b(\Delta) -]y; x[$; dès lors y est un sommet de Γ_1 , ce qui contredit son appartenance à $b(\Delta)$.

Les arêtes de Δ sont faiblement admissibles. Soit I une arête de Δ ; elle aboutit à un sommet y de Γ_1 qui diffère de x ; ce sommet est un point de $]g(x_b); x[$ pour un certain $g \in \mathbf{H}$ et un certain $b \in \text{br}(\Gamma, x)$; par conséquent, I est un ouvert de $]g(x_b); x[= g(]x_b; x[)$. Or $]x_b; x[$ est lui-même un ouvert de $b(\Gamma_0)$, qui est faiblement admissible par choix de Γ_0 ; par conséquent, I est faiblement admissible.

Preuve de C). Soit $g \in \mathbf{H}$. Comme b est la branche issue de x définie par $b(\Delta)$, il résulte des définitions que g envoie la branche b sur la branche issue de x définie par l'arête $g(b(\Delta))$ de Δ ; par conséquent, le stabilisateur de b dans \mathbf{H} coïncide avec le stabilisateur de la composante connexe $b(\Delta)$ de $\Delta \setminus \{x\}$.

Si h appartient au stabilisateur en question et si $y \in b(\Delta)$ alors $h(y)$ appartient aussi à $b(\Delta)$, et est donc comparable à y pour l'ordre induit par x sur l'arbre X ; compte-tenu du fait que $h(x) = x$, cela entraîne en vertu du lemme 1.9.4 que $h(y) = y$, ce qui achève la démonstration. \square

(1.9.14) Soit X un graphe sur lequel \mathbf{G} agit et soit $x \in X$; soit p la flèche quotient $X \rightarrow X/\mathbf{G}$, et soit ξ l'image de x sur X/\mathbf{G} .

(1.9.14.1) Supposons que x est pluribranche. D'après l'assertion A) du lemme 1.9.13 ci-dessus, la fibre de p en ξ est finie; comme p est par ailleurs compacte et ouverte, les résultats généraux de 1.7.2, 1.7.3 et 1.7.3.1-1.7.3.4 s'appliquent ici; on dispose notamment d'une application naturelle $\text{br}(X, x) \rightarrow \text{br}(X/\mathbf{G}, \xi)$.

(1.9.14.2) Supposons que x est unibranche; nous allons montrer que ξ l'est aussi. L'assertion ii) du théorème 1.9.11 fournit un voisinage ouvert V de ξ dans X/\mathbf{G} qui est un arbre, et qui est tel que $p^{-1}(V)$ soit une réunion finie d'arbres. Quitte à remplacer X par la composante connexe de x dans $p^{-1}(V)$, et \mathbf{G} par le stabilisateur de la composante en question, on peut supposer que X et X/\mathbf{G} sont des arbres.

Comme x est unibranche il n'est pas isolé et X n'est pas réduit à $\{x\}$; par conséquent, le compact totalement discontinu $\mathbf{G}.x$ n'est pas égal à X tout entier, et $X - \mathbf{G}.x$ est un ouvert non vide de X . Il est convexe: en effet, si y et z sont deux points de $X - \mathbf{G}.x$, alors tout point de $]y; z[$ est pluribranche (puisque situé sur un intervalle ouvert) et ne peut donc appartenir à $\mathbf{G}.x$.

Il s'ensuit que l'image de $X - \mathbf{G}.x$ sur X/\mathbf{G} , qui n'est autre que $X/\mathbf{G} \setminus \{\xi\}$, est connexe et non vide. Par conséquent, ξ est un point unibranche de l'arbre X/\mathbf{G} .

(1.9.14.3) Supposons que x est isolé. Dans ce cas c'est une composante connexe de X ; son stabilisateur est alors nécessairement ouvert, et X est donc un ensemble fini discret. Il en va dès lors de même de X/\mathbf{G} , et ξ est en particulier isolé.

Compactification et quotient

(1.9.15) Proposition. *Soit X un graphe connexe sur lequel \mathbf{G} agit. Il existe un homéomorphisme naturel $\widehat{X}/\mathbf{G} \simeq \widehat{(X/\mathbf{G})}$ qui identifie $(\partial X)/\mathbf{G}$ et $\partial(X/\mathbf{G})$.*

Démonstration. On désigne par p la projection $X \rightarrow X/\mathbf{G}$. Soit E l'ensemble des points pluribranches de X ; c'est une partie stable sous l'action de \mathbf{G} ; si $x \in E$ l'orbite $\mathbf{G}.x$ est finie par la proposition 1.9.13. Soit \mathcal{S} l'ensemble des parties finies de E stable sous \mathbf{G} .

L'ensemble des compacts de la forme $\mathcal{K}_X(S)$, où S est une partie finie de E , est cofinal dans l'ensemble des compacts de X (1.4.1.1). Si S est une partie finie de E , l'ensemble $\mathbf{G}.S$ appartient à \mathcal{S} ; comme $S \subset \mathbf{G}.S$, le compact $\mathcal{K}_X(\mathbf{G}.S)$ contient $\mathcal{K}_X(S)$; par conséquent, l'ensemble des compacts de la forme $\mathcal{K}_X(S)$, où $S \in \mathcal{S}$, est cofinal dans l'ensemble des compacts de X .

Soit $S \in \mathcal{S}$; le compact $\mathcal{K}_X(S)$ est invariant sous \mathbf{G} ; son image $p(\mathcal{K}_X(S))$ est une partie compacte de X/\mathbf{G} . L'invariance de S sous \mathbf{G} implique que

$$p(\mathcal{K}_X(S)) - p(S) = p(\mathcal{K}_X \setminus S);$$

de ce fait, $\mathcal{K}_X(S) - p(S)$ est un ouvert de X/\mathbf{G} ; comme c'est aussi un fermé de $X/\mathbf{G} - p(S)$, c'est une réunion de composantes connexes de $X/\mathbf{G} - p(S)$, qui sont toutes relativement compactes.

Soit U une composante connexe de $X/\mathbf{G} - p(\mathcal{K}_X(S))$; son image réciproque est une réunion disjointe et non vide de composantes connexes de $X \setminus \mathcal{K}_X(S)$; si U était relativement compacte dans X/\mathbf{G} , chacune de ces composantes le serait dans X par compacité de p , contredisant la définition de $\mathcal{K}_X(S)$; par conséquent, U n'est pas relativement compacte.

Il résulte de tout ceci que $p(\mathcal{K}_X(S))$ est égal à $\mathcal{K}_{X/\mathbf{G}}(p(S))$.

Par ailleurs, si \mathcal{K} est un compact de X/\mathbf{G} , son image réciproque $p^{-1}(\mathcal{K})$ est compacte, et donc contenue dans $\mathcal{K}_X(S)$ pour un certain $S \in \mathcal{S}$; par conséquent, $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{X/\mathbf{G}}(p(S))$; ainsi, l'ensemble des compacts de X/\mathbf{G} de la forme $\mathcal{K}_{X/\mathbf{G}}(p(S))$ est cofinal dans l'ensemble des compacts de X/\mathbf{G} .

On dispose donc de deux identifications canoniques

$$\partial X \simeq \lim_{S \in \mathcal{S}} \pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S)) \text{ et } \partial(X/\mathbf{G}) \simeq \lim_{S \in \mathcal{S}} \pi_0(X/\mathbf{G} \setminus \mathcal{K}_X(p(S))).$$

Pour tout S appartenant à \mathcal{S} , le groupe \mathbf{G} agit sur $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))$ et le quotient $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))/\mathbf{G}$ s'identifie *via* p à $\pi_0(X/\mathbf{G} \setminus \mathcal{K}_X(p(S)))$. On en déduit, compte-tenu de ce qui précède, l'existence d'une application naturelle $(\partial X)/\mathbf{G} \rightarrow \partial(X/\mathbf{G})$.

Cette application est injective. Soient x et y deux points de $\mathfrak{d}X$ ayant même image dans $\mathfrak{d}(X/\mathbf{G})$. Pour tout $S \in \mathcal{S}$, notons x_S et y_S les images de x et y dans $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))$, et \mathbf{G}_S l'ensemble des $g \in \mathbf{G}$ qui envoient x_S sur y_S ; c'est une partie compacte (et ouverte) de \mathbf{G} .

Si $S \in \mathcal{S}$ il résulte de notre hypothèse que x_S et y_S ont même image dans $\pi_0(X/\mathbf{G} \setminus \mathcal{K}_X(p(S))) = \pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))/\mathbf{G}$; par conséquent, \mathbf{G}_S est non vide. Par compacité, l'intersection des \mathbf{G}_S pour S parcourant \mathcal{S} est non vide; si g est un élément quelconque de celle-ci alors $y = g(x)$; il s'ensuit que y et x ont même image dans $(\mathfrak{d}X)/\mathbf{G}$ et l'application étudiée est bien injective.

Cette application est surjective. Soit x un point de $\mathfrak{d}(X/\mathbf{G})$. Pour tout $S \in \mathcal{S}$, soit x_S l'image de x dans $\pi_0(X/\mathbf{G} \setminus \mathcal{K}_X(p(S)))$ et soit ξ_S l'image réciproque de x_S dans $\pi_0(X \setminus \mathcal{K}_X(S))$. La famille des (ξ_S) est un système projectif filtrant d'ensembles finis et non vide, sa limite projective est donc non vide et si ξ désigne un point de cette dernière, on a par construction $p(\xi) = x$; l'application étudiée est donc bien surjective.

Ainsi, $(\mathfrak{d}X)/\mathbf{G}$ s'identifie à $\mathfrak{d}(X/\mathbf{G})$; on définit par ce biais une bijection ensembliste $\widehat{X}/\mathbf{G} \rightarrow \widehat{X}/\mathbf{G}$; il reste à s'assurer que c'est un homéomorphisme. Ses source et but étant compacts, on peut se contenter d'en vérifier la continuité, c'est-à-dire de prouver que la flèche composée $\widehat{X} \rightarrow \widehat{X}/\mathbf{G} \rightarrow \widehat{X}/\mathbf{G}$ est continue.

Il s'agit de démontrer que si U est un ouvert de \widehat{X}/\mathbf{G} , son image réciproque sur X est ouverte; il suffit de le faire lorsque U parcourt une base donnée d'ouverts de \widehat{X}/\mathbf{G} . Par cofinalité de l'ensemble des $\mathcal{K}_{X/\mathbf{G}}(p(S))$, où S parcourt \mathcal{S} , dans celui de tous les compacts de \mathbf{G} , on se ramène ainsi à traiter les deux cas suivants :

- le cas où U est un ouvert de X/\mathbf{G} , qui est trivial;
- le cas où U est de la forme $\widehat{V}^{X/\mathbf{G}}$ où V est une composante connexe de $X/\mathbf{G} \setminus \mathcal{K}_X(p(S))$ pour un certain $S \in \mathcal{S}$. L'ouvert $p^{-1}(V)$ de X est réunion finie de composantes connexes de $X \setminus \mathcal{K}_X(S)$, et il résulte de la construction de notre bijection que l'image réciproque de $\widehat{V}^{X/\mathbf{G}}$ est égale à \widehat{V}^X , qui est un ouvert de \widehat{X} ; ceci achève la démonstration. \square

(1.9.16) Exemple : l'action de \mathbf{G} sur un arbre à un bout. Soit X un arbre un bout sur lequel \mathbf{G} agit; on note ω l'unique élément de $\mathfrak{d}X$, qui est fixe sous \mathbf{G} . Il résulte du théorème 1.9.11 et de la proposition 1.9.15 que X/\mathbf{G} est un arbre à un bout.

(1.9.16.1) Soit y un point pluribranche de X ; son orbite sous \mathbf{G} est finie d'après la proposition 1.9.13). Posons $I = \bigcap_{z \in \mathbf{G}.y} [y; \omega]$. Il découle de la finitude de $\mathbf{G}.y$ et le lemme 1.4.17 que I est de la forme $[x; \omega]$ pour un certain $x \in X$.

Le point ω est invariant sous \mathbf{G} ; si $t \in [x; \omega]$ et $g \in \mathbf{G}$ on a $g(t) \in [x; \omega]$, et $g(t)$ est donc comparable à t pour l'ordre défini par ω . En vertu du lemme 1.9.4, le groupe \mathbf{G} fixe $[x; \omega]$ point par point.

(1.9.16.2) Si $\xi \in X$ l'application $[\xi; \omega] \rightarrow \widehat{X}/\mathbf{G}$ est injective. En effet, soient η et ζ deux points de $[\xi; \omega]$ ayant même image sur $\widehat{X}/\mathbf{G} \simeq \widehat{X}/\mathbf{G}$; il existe alors $g \in \mathbf{G}$ tel que $g(\eta) = \zeta$; comme ils sont situés sur $[\xi; \omega]$, les points η et ζ sont

comparables pour l'ordre induit par ω . Ce dernier étant fixe par g , on conclut à l'aide du lemme 1.9.4 que $\eta = g(\eta) = \zeta$, d'où notre assertion.

Soit x l'image de ξ sur $\widehat{X/G}$, et soit w celle de ω . On en déduit de ce qui précède, en vertu de la compacité de $[\xi; \omega]$, que $\widehat{X} \rightarrow \widehat{X/G}$ induit un homéomorphisme entre $[\xi; \omega]$ et son image; cette dernière est donc un segment éventuellement long d'extrémités x et w ; elle coïncide dès lors avec $[x; w]$.

Si ξ est pluribranche il existe une composante connexe de $X \setminus \{x\}$ qui n'est pas celle contenant $]x; \omega[$; par conséquent, il existe $x' \in X$ tel que $x \in]x'; \omega[$. En vertu de ce qui précède, l'image de $]x'; \omega[$ sur X/G est un intervalle ouvert, qui contient évidemment ξ . On en déduit que ξ est pluribranche.

(1.9.16.3) Soit x un point de X/G ayant un nombre fini N d'antécédents sur X . Pour tout $t \in [x; w[$, le point t a au plus N antécédents sur X . En effet, soient ξ_1, \dots, ξ_N les antécédents de x sur X . Pour tout $g \in G$ et tout indice i , l'image de $]x_i; \omega[$ par g est égale à $]g(\xi_i); \omega[$ et donc à $[\xi_j; \omega[$ pour un certain j . Il s'ensuit que la réunion des $[\xi_i; \omega[$ est stable sous G . Comme son image est égale à $[x; w[$ en vertu du 1.9.16.2 ci-dessus, $\bigcup [\xi_i; \omega[$ est égale à l'image réciproque de $[x; w[$. Toujours d'après 1.9.16.2, la flèche $[\xi_i; \omega[\rightarrow [x; w[$ est un homéomorphisme pour tout i . Par conséquent, tout point de $[x; w[$ a au plus N antécédents sur X , comme annoncé.

(1.9.17) Exemple : l'action de G sur un arbre à deux bouts. Soit X un arbre à deux bouts sur lequel G agit. Le squelette de X est la droite éventuellement longue $] \xi; \eta [$ où ξ et η sont les deux bouts de X .

(1.9.17.1) *Le cas où G échange ξ et η .* Il découle alors de la proposition 1.9.15 ci-dessus que X/G est un arbre à un bout; si ω désigne l'unique élément de $\mathfrak{d}(X/G)$, le corollaire 1.9.6 entraîne que l'image de $S(X)$ sur X/G est de la forme $[t; \omega[$ pour un certain $t \in X/G$, égal à l'image de l'unique point fixe de G sur $S(X)$. La demi-droite $[t; \omega[$ est un sous-arbre admissible de X/G (1.5.2.2 ou lemme 1.9.12) mais n'en est pas le squelette – ce dernier est vide.

(1.9.17.2) *Le cas où G n'échange pas ξ et η .* Il découle alors de la proposition 1.9.15 ci-dessus que X/G est un arbre à deux bouts, qui correspondent aux images de ξ et η sur $\widehat{X/G}$, que l'on notera respectivement x et y . En vertu du corollaire 1.9.5, l'action de G sur $[\xi; \eta]$ est triviale; l'image de $S(X)$ sur X/G s'identifie donc à $]x; y[$, c'est-à-dire à $S(X/G)$.

Par conséquent, l'image réciproque de $S(X/G)$ sur X est égale à $S(X)$, et $S(X) \rightarrow S(X/G)$ est un homéomorphisme. Le lemme 1.5.18 assure que $X \rightarrow X/G$ commute aux rétractions canoniques de ses source et but sur leurs squelettes respectifs.

Si H est un sous-groupe fermé de G , on déduit de ce qui précède, appliqué d'une part directement et d'autre part à la flèche quotient $X \rightarrow X/H$, que X/H est un arbre à deux bouts, que l'image réciproque de $S(X/G)$ sur X/H est égale à $S(X/H)$, que $S(X/H) \rightarrow S(X/G)$ est un homéomorphisme et que $X/H \rightarrow X/G$ commute aux rétractions canoniques de ses source et but sur leurs squelettes respectifs.

Étude locale autour d'un point fixe : sections et voisinages stables

(1.9.18) Proposition. *Soit X un graphe sur lequel G agit, soit $p : X \rightarrow X/G$ la flèche quotient et soit x un point de X invariant par G ; soit b une branche issue de x .*

- 1) *Le stabilisateur H de b dans G est un sous-groupe ouvert de G .*
- 2) *Soit \mathcal{I} le sous-ensemble de $\text{Interv}_{a,c}(X, b)$ constitué des intervalles I possédant les propriétés suivantes :*
 - α) *I est fixé point par point par H ;*
 - β) *si $g \in G - H$ l'on a $g(I^b) \cap I^b = \emptyset$;*
 - γ) *l'application p induit un homéomorphisme $\bar{I} \simeq p(\bar{I})$.*

Les ouverts de X de la forme I^b avec $I \in \mathcal{I}$ forment une base de sections de b .

- 3) *Si $I \in \mathcal{I}$ l'intervalle ouvert $p(I)$ aboutit proprement à $p(x)$, est faiblement admissible dans X/G et l'on a $p(I)^b = p(I^b)$; ce dernier s'identifie à I^b/H et est une section de $p(b)$.*
- 4) *Le groupe G agit transitivement sur $p^{-1}(p(b))$.*

Démonstration. Choisissons une demi-droite Γ issue de x telle que $\Gamma \setminus \{x\}$ définisse b .

(1.9.18.1) Preuve de 1). On peut voir Γ comme une étoile tracée sur X , de sommet x et de valence 1, et l'on a $\text{br}(\Gamma, x) = \{b\}$. L'assertion B) du lemme 1.9.13 affirme alors l'existence d'une étoile $\Delta \in \text{St}_a(X, x)$ qui est stable sous G et satisfait les conditions i) et ii) de son énoncé. La branche b appartient à $\text{br}(\Delta, x)$ (condition i)), et H s'identifie au stabilisateur de la composante connexe $b(\Delta)$ de $\Delta \setminus \{x\}$ (*loc. cit.*, assertion C) ; c'est donc automatiquement un sous-groupe ouvert de G .

(1.9.18.2) Preuve de 2). Les ouverts de la forme I^b , où $I \in \text{Interv}_a(X, b)$, forment une base de sections de b (1.7.14). Par ailleurs, si $I \in \mathcal{I}$, il en va de même de tout intervalle ouvert de I aboutissant à x ; il suffit donc pour établir 2) d'exhiber un intervalle I appartenant à \mathcal{I} .

L'intervalle $b(\Delta)$ aboutit à x et est relativement compact dans X ; il est faiblement admissible. Le stabilisateur de $b(\Delta)$ dans $\Delta \setminus \{x\}$ est exactement H , et ce dernier fixe $b(\Delta)$ point par point (lemme 1.9.13, assertion C). Si $g \in G - H$ alors g ne stabilise pas l'arête $b(\Delta)$ de Δ , ce qui signifie que l'arête $g(b(\Delta))$ est distincte de $b(\Delta)$; ceci entraîne que les ouverts $b(\Delta)^b$ et $g(b(\Delta))^b$ sont disjoints (1.7.11.1).

La restriction de p à $\overline{b(\Delta)}$ étant injective par morceaux en vertu de l'assertion iii) du théorème 1.9.11, il existe $I \in \text{Interv}(X, x)_{\subset b(\Delta)}$ tel que p induise un homéomorphisme $\bar{I} \rightarrow p(\bar{I})$; par construction, $I \in \mathcal{I}$, ce qui achève de prouver 3).

(1.9.18.3) Preuve de 3). Soit $I \in \mathcal{I}$; il découle directement de γ) que $p(I)$ est un intervalle ouvert aboutissant proprement à x . En vertu de β) l'image $p(I^b)$ s'identifie à I^b/H . Comme I^b est un arbre à deux bouts, et comme H agit trivialement sur I en vertu de α), l'ouvert $p(I^b) \simeq I^b/H$ est un arbre à deux bouts

de squelette $p(I)$ (1.9.17.2). En particulier, $p(I)$ est un sous-arbre admissible de $p(I^b)$; il s'ensuit que $p(I)$ est un intervalle faiblement admissible de X/G et que $p(I)^b = p(I^b)$.

L'intervalle I aboutit proprement à x . Par conséquent, l'ouvert $p(I)^b$ appartient à $\text{Secbr}(X/G, p(x))$; comme I^b est une section de b , la branche définie par $p(I)^b = p(I^b)$ est nécessairement $p(b)$ (1.7.3.4).

(1.9.18.4) Preuve de 4). Choisissons $I \in \mathcal{I}$. Pour tout $g \in G$ l'ouvert $g(I^b)$ est une section de $g(b)$; il résulte par ailleurs de α) et β) que $p^{-1}(p(I^b))$ est la réunion disjointe des $g(I^b)$ où g parcourt un système de représentants de G/H ; on peut donc écrire comme une réunion disjointe $\coprod_{c \in G.b} U_c$ où U_c est pour tout c

une section de c .

D'après 3), l'ouvert $p(I^b)$ est une section de $p(b)$. Le point x étant le seul antécédent de $p(x)$ sur X (il est fixe sous G) il découle de ce qui précède et de 1.7.3.3 que $p^{-1}(p(b)) = G.b$, ce qui prouve 4) et achève la démonstration. \square

(1.9.19) Corollaire. Soit X un graphe sur lequel G agit, soit $p : X \rightarrow X/G$ la flèche quotient et soit ξ un point de X/G tel que $p^{-1}(\xi)$ soit finie. Soit a appartenant à $\text{br}(X/G, \xi)$; il existe $J_0 \in \text{Interv}_a(X/G, a)$ tel que pour tout intervalle ouvert J de J_0 aboutissant à ξ les propriétés suivantes soient vérifiées :

a) $p^{-1}(J) \rightarrow J$ est un revêtement topologique (évidemment trivial) dont les feuilletts sont en nombre finis et sont tous des intervalles ouverts admissibles de X .

$$b) p^{-1}(J^b) = \coprod_{I \in \pi_0(p^{-1}(I))} I^b.$$

Démonstration. Il existe un voisinage ouvert U de ξ tel que $p^{-1}(U)$ sépare les antécédents de ξ . Pour tout $x \in p^{-1}(\xi)$, le stabilisateur de la composante connexe $p^{-1}(U)_x$ de $p^{-1}(U)$ coïncide avec le stabilisateur G_x de x , et U s'identifie à $p^{-1}(U)_x/G_x$; par conséquent on peut, en raisonnant composante connexe par composante connexe, se ramener au cas où $p^{-1}(\xi)$ est de la forme $\{x\}$ pour un certain x fixe sous G . Choisissons une branche b de X issue de x et située au-dessus de a .

Soit \mathcal{I} comme dans le corollaire 1.9.18 ci-dessus et soit $I_0 \in \mathcal{I}$ (son existence étant assurée par l'assertion 2) de *loc. cit.*); posons $J_0 = p(I_0)$. Par définition de \mathcal{I} et en vertu de l'assertion 3) de *loc. cit.*, l'intervalle J_0 satisfait les conditions souhaitées. \square

(1.9.20) Corollaire. Soit X un graphe sur lequel G agit et soit H un sous-groupe fermé de G . Soit Γ un sous-graphe fermé de X/G et soit Γ' son image réciproque sur X/H ; on suppose que les fibres sur X des points de Γ sont toutes finies.

- 1) Le sous-ensemble fermé Γ' de X/H en est un sous-graphe.
- 2) Si de plus Γ est localement fini alors Γ' est localement fini, et $\Gamma' \rightarrow \Gamma$ est injective par morceaux.

Démonstration. Soit Γ'' l'image réciproque de Γ sur X/G . On procède en deux temps, en commençant par établir 2).

(1.9.20.1) Preuve de 2). On suppose que Γ est localement fini. En vertu du corollaire 1.9.20 ci-dessus (et sans avoir recours à la propriété b) de son

énoncé), le fermé Γ'' de X en est un sous-graphe localement fini, et $\Gamma'' \rightarrow \Gamma$ est injective par morceaux. Comme Γ' s'identifie à Γ''/H , on déduit de l'énoncé iii) du théorème 1.9.11 que Γ' est un sous-graphe fermé localement fini de X/H , et que $\Gamma'' \rightarrow \Gamma'$ est injective par morceaux. L'assertion requise s'ensuit aussitôt.

(1.9.20.2) Preuve de 1). On ne fait plus d'hypothèse sur Γ . Comme $\Gamma' \simeq \Gamma''/H$ il suffit, grâce à l'énoncé i) du théorème 1.9.11, de démontrer que Γ'' est un sous-graphe de X . La propriété requise étant locale, l'énoncé ii) de *loc. cit.* permet de supposer que X/G est un arbre et que X est une réunion finie disjointe d'arbres; en raisonnant composante par composante sur X (et en remplaçant à chaque fois G par le stabilisateur de la composante considérée), on se ramène ensuite au cas où X et X/G sont des arbres; on peut enfin, en raisonnant encore composante par composante, mais cette fois-ci sur Γ , supposer que celui-ci est un sous-arbre de X/G . Soit $x \in \Gamma''$ et soit ξ son image sur X/G .

Soit Δ un sous-arbre fermé et localement fini de Γ qui contient ξ . L'image réciproque de Δ sur X est, en vertu de l'assertion 2) déjà établie, un sous-graphe fermé et localement fini de X ; notons $\mathcal{C}_x(\Delta)$ la composante connexe de x dans ce dernier; c'est un sous-arbre fermé de X . Soit $\Theta(x)$ la réunion des $\mathcal{C}_x(\Delta)$, où Δ parcourt l'ensemble des sous-arbres fermés et localement finis de Γ contenant ξ . Par sa construction même, $\Theta(x)$ est une partie convexe de X qui est contenue dans Γ'' .

Nous allons montrer que $\Theta(x)$ est un fermé de Γ'' . Pour ce faire, considérons un point x' de Γ qui n'appartient pas à $\Theta(x)$. *Le segment $[x'; x]$ n'est alors pas contenu dans Γ'' .* En effet, s'il l'était, son image sur X/G serait, par l'énoncé iii) de *loc. cit.*, un sous-arbre compact et fini Δ de Γ , contenant ξ ; mais on aurait alors $[x'; x] \subset \mathcal{C}_x(\Delta) \subset \Theta(x)$, ce qui est absurde.

Il existe donc un point $z \in]x'; x[$ qui n'appartient pas à Γ'' . Soit U la composante connexe de x' dans $X \setminus \{z\}$ et soit $t \in U \cap \Gamma''$. Le segment $[t; x]$ contient z , et n'est donc pas inclus dans Γ'' ; par convexité de $\Theta(x)$, il s'ensuit que $t \notin \Theta(x)$.

Ainsi, $U \cap \Gamma''$ est un voisinage de x' dans Γ'' qui ne rencontre pas $\Theta(x)$; ce dernier est donc bien fermé dans Γ'' , et partant dans X ; étant par ailleurs convexe, $\Theta(x)$ est un sous-arbre fermé de X .

Soit y un antécédent de ξ , et supposons que $\Theta(x) \cap \Theta(y) \neq \emptyset$. Si t désigne un point de cette intersection alors il existe deux sous-arbres fermés et localement finis Δ et Δ' de Γ qui contiennent x et qui sont tels que $t \in \mathcal{C}_x(\Delta) \cap \mathcal{C}_y(\Delta')$; il s'ensuit que $t \in \mathcal{C}_x(\Delta \cup \Delta')$ et que $t \in \mathcal{C}_y(\Delta \cup \Delta')$; par conséquent, $\mathcal{C}_x(\Delta \cup \Delta')$ et $\mathcal{C}_y(\Delta \cup \Delta')$, coïncident, ce qui entraîne que $\Theta(x) = \Theta(y)$. Ainsi l'ensemble des fermés $\Theta(y)$, où y parcourt la fibre de ξ , est-il un ensemble de parties fermées deux à deux disjointes de Γ'' .

Par ailleurs, ces fermés recouvrent Γ'' . En effet, soit $x' \in \Gamma''$ et soit ξ' son image sur Γ . La composante connexe de x' dans l'image réciproque de $[\xi'; \xi]$ sur X se surjecte sur $[\xi'; \xi]$ et contient donc un antécédent y de ξ ; on a alors $x' \in \mathcal{C}_y([\xi'; \xi]) \subset \Theta(y)$.

Il s'ensuit que chacun des $\Theta(y)$ est également un ouvert de Γ'' ; c'est en particulier le cas de $\Theta(x)$, qui est par ailleurs un arbre. Ainsi, x possède un voisinage ouvert dans Γ'' qui est un arbre; ceci valant pour tout $x \in \Gamma''$, le fermé Γ'' de X en est bien un sous-arbre. \square

(1.9.21) Proposition. *Soit X un graphe sur lequel G agit et soit x un point de X fixe sous G . Supposons que $\text{br}(X, x)$ est fini, et soit Γ une étoile de sommet x tracée sur X dont la valence est égale au cardinal de $\text{br}(X, x)$. Les ouverts G -invariants de la forme Δ^b , où Δ est une étoile appartenant à $\text{St}_{a,c}(X, x)_{\subset \Gamma}$ et stable sous G , forment une base de voisinages de x .*

Démonstration. Soit V un voisinage ouvert de X ; il s'agit de montrer qu'il contient un voisinage de x de la forme Δ^b , où Δ appartient à $\text{St}_{a,c}(X, x)_{\subset \Gamma}$ et est stable sous G .

L'ouvert V contient une sous-étoile Γ_0 de Γ ; et il existe une sous-étoile Γ_1 de Γ_0 qui appartient à $\text{St}_a(V, x)$ (1.7.10); on peut donc, quitte à remplacer Γ par Γ_1 , supposer que Γ appartient à $\text{St}_a(V, x)$. L'assertion B) du lemme 1.9.13 affirme l'existence d'une étoile Δ appartenant à $\text{St}_{a,c}(X, x)$, stable sous G et satisfaisant les conditions i) et ii) de son énoncé.

Comme $\text{br}(\Delta, x) \supset \text{br}(\Gamma, x)$ (condition i)) et comme $\text{br}(X, x)$ a pour cardinal N , on a $\text{br}(\Delta, x) = \text{br}(\Gamma, x)$; il découle alors de la condition ii) que Δ est une sous-étoile de Γ . Comme les arêtes de Γ sont faiblement admissibles dans V et comme leur nombre est égal au cardinal de $\text{br}(V, x)$, l'étoile Γ est elle-même faiblement admissible dans V (1.7.11.2), et il en va de même de son ouvert Δ ; cela entraîne que $\Delta^b \subset V$ et achève la démonstration. \square

Quotient d'un graphe par une relation d'équivalence d'un type particulier

(1.9.22) Proposition. *Soit X un graphe, soit S un sous-ensemble fermé et discret de X et soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X dont toute classe non singleton est une partie finie de S . L'espace quotient X/\mathcal{R} est alors un graphe, la flèche quotient $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est compacte, et si X est localement fini alors X/\mathcal{R} est localement fini. De plus si Γ est un sous-graphe de X/\mathcal{R} alors $p^{-1}(\Gamma)$ est un sous-graphe de X .*

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

(1.9.22.1) *L'espace X/\mathcal{R} est séparé.* Soient x et y deux points distincts de X/\mathcal{R} ; les fibres $p^{-1}(x)$ et $p^{-1}(y)$ sont deux ensembles finis disjoints. Le sous-ensemble S étant fermé et discret, il existe deux ouverts U et V de X possédant les propriétés suivantes :

- $U \cap V = \emptyset$;
- U contient $p^{-1}(x)$ et V contient $p^{-1}(y)$;
- $(U \cap S) \subset p^{-1}(x)$ et $(V \cap S) \subset p^{-1}(y)$.

Par construction, U et V sont saturés pour \mathcal{R} , et $p(U) \cap p(V) = \emptyset$; dès lors $p(U)$ et $p(V)$ sont deux ouverts disjoints de X/\mathcal{R} dont le premier contient x et le second y ; ainsi, X/\mathcal{R} est séparé.

(1.9.22.2) *L'espace X/\mathcal{R} est localement compact et p est compacte.* Nous allons établir que tout point de X/\mathcal{R} possède un voisinage compact dont l'image réciproque est compacte, ce qui permettra de conclure. Soit $x \in X/\mathcal{R}$. La fibre $p^{-1}(x)$ étant finie et S étant discret, il existe un voisinage ouvert U de $p^{-1}(x)$ qui est relativement compact et tel que $\overline{U} \cap S \subset p^{-1}(x)$. L'ouvert U est saturé pour \mathcal{R} , et $p(U)$ est dès lors un voisinage ouvert de x . Il est contenu

dans $p(\bar{U})$ qui est compact ; remarquons que \bar{U} est lui aussi saturé, ce qui entraîne que $p^{-1}(p(\bar{U}))$ coïncide avec le compact \bar{U} .

(1.9.22.3) *L'espace X/\mathcal{R} est un arbre. Soit $x \in X/\mathcal{R}$ et soit U un voisinage ouvert de X dans X/\mathcal{R} . Soient ξ_1, \dots, ξ_r les antécédents de x sur ξ . Il existe r sous-arbres ouverts V_1, \dots, V_r de X possédant les propriétés suivantes :*

- i) pour tout i l'ouvert V_i est un voisinage de ξ_i dont le bord est fini, et qui est réunion finie d'intervalles ouverts si X est localement fini ;
- ii) les V_i sont deux à deux disjoints ;
- iii) $S \cap (\bigcup V_i) \subset \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$.

Posons $V = p(\bigcup V_i)$; par construction, $\bigcup V_i$ est un ouvert de $p^{-1}(U)$ saturé pour \mathcal{R} ; il s'ensuit que V est un voisinage ouvert de x dans U , dont nous allons montrer qu'il satisfait les conditions α) et β) du 1.3.1.

Comme p est fermée, la finitude de ∂V_i pour tout i entraîne celle de ∂V .

Soient maintenant z et t deux points de V ; soit ζ (resp. τ) un antécédent de z (resp. t) et soit i_0 (resp. i_1) l'entier tel que $\zeta \in V_{i_0}$ (resp. $\tau \in V_{i_1}$). Nous allons établir l'existence et l'unicité d'un segment d'extrémités z et t tracé sur V .

Existence. Nous allons construire un segment I joignant z à t . On distingue deux cas. Supposons d'abord que $i_0 = i_1$. La restriction de p à V_{i_0} est injective ; par conséquent, l'image I par p du segment $[\zeta; \tau]$ de l'arbre V_{i_0} est alors un segment d'extrémités z et t .

Supposons maintenant que $i_0 \neq i_1$. La restriction de p à V_{i_0} (resp. V_{i_1}) étant injective, l'image par p du segment $[\zeta; \xi_{i_0}]$ de l'arbre V_{i_0} (resp. du segment $[\tau; \xi_{i_1}]$ de l'arbre V_{i_1}) est un segment I_0 (resp. I_1) d'extrémités z et x (resp. t et x) ; de plus, on a par construction $I_0 \cap I_1 = \{x\}$; par conséquent, la réunion $I := I_0 \cup I_1$ est un segment d'extrémités z et t .

Unicité. Nous allons montrer que I est le seul segment tracé sur V et qui joigne z à t . Il suffit, en vertu de 1.3.15.2, de prouver que le bord dans V de toute composante connexe de $V - I$ est un singleton. Remarquons pour commencer que si Ω est un ouvert saturé de X alors $(X/\mathcal{R}) - p(\Omega) = p(X - \Omega)$; l'application p étant fermée, $p(X - \Omega)$ est fermé et $p(\Omega)$ est en conséquence ouvert.

On définit le sous-ensemble Π de $\mathcal{P}(\bigcup V_i)$ de la façon suivante, en distinguant trois cas.

- **Le cas où $i_0 = i_1$ et où $\xi_{i_0} \notin [\zeta; \tau]$.** On appelle W la composante connexe de $V_{i_0} - [\zeta; \tau]$ contenant ξ_{i_0} , et W' la réunion $W \cup \bigcup_{i \neq i_0} V_i$; on pose alors $\Pi = \pi_0(V_{i_0} - [\zeta; \tau]) \setminus \{W\} \cup \{W'\}$.

- **Le cas où $i_0 = i_1$ et où $\xi_{i_0} \in [\zeta; \tau]$.** On pose alors

$$\Pi = \pi_0(V_{i_0} - [\zeta; \tau]) \cup \bigcup_{i \neq i_0} \pi_0(V_i \setminus \{\xi_i\}).$$

- **Le cas où $i_0 \neq i_1$.** On pose alors

$$\Pi = \pi_0(V_{i_0} - [\zeta; \xi_{i_0}]) \cup \pi_0(V_{i_1} - [\xi_{i_1}; \tau]) \cup \bigcup_{i \notin \{i_0, i_1\}} \pi_0(V_i \setminus \{\xi_i\}).$$

L'ouvert $V - I$ est par construction la réunion disjointes des $p(\Omega)$, où Ω parcourt Π ; ce sont tous des sous-ensembles connexes et non vides de V (en ce

qui concerne $p(W')$ dans le premier cas, cela résulte du fait qu'il est réunion de parties connexes contenant toutes x). Soit $\Omega \in \Pi$; c'est par sa définition même un ouvert saturé de V ; les $p(\Omega)$ pour Ω parcourant Π sont dès lors des ouverts de V , et ce sont ainsi nécessairement les composantes connexes de $V - I$.

On déduit du fait qu'un sous-arbre fermé d'un arbre est admissible que $\partial_{\bigcup V_i} \Omega$ est pour tout $\Omega \in \Pi$ un singleton; l'application $\bigcup V_i \rightarrow V$ induite par p est encore compacte, et partant fermée; il s'ensuit que $\partial_V p(\Omega)$ est un singleton pour tout $\Omega \in \Pi$, ce qui achève la preuve de l'unicité; ainsi, X/\mathcal{R} est un arbre.

(1.9.22.4) Si X est localement fini, il existe dans chacun des V_i ci-dessus un voisinage compact W_i de ξ_i qui est une réunion finie de segments; soit W'_i l'intérieur de W_i dans X . La flèche $p|_{W_i}$ étant injective pour tout i , l'image par p de $\bigcup W_i$ est une réunion finie de segments; l'ouvert $\bigcup W'_i$ étant saturé, $p(\bigcup W'_i)$ est un ouvert. Par conséquent, $p(\bigcup W_i)$ est un voisinage compact de x dans le graphe X/\mathcal{R} ; ce voisinage étant réunion finie de segments, X/\mathcal{R} est localement fini.

(1.9.22.5) Soit Γ un sous-graphe de X/\mathcal{R} . Son image réciproque $p^{-1}(\Gamma)$ est localement fermée; pour montrer que c'est un sous-graphe de X , il suffit de s'assurer que chacun de ses points possède un voisinage qui est un arbre.

Soit $\xi \in p^{-1}(\Gamma)$; posons $x = p(\xi)$, et notons $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$ les antécédents de ξ sur X . Il existe une famille finie (V_1, \dots, V_n) de sous-arbres ouverts deux à deux disjoints de X tels que $V_i \cap S \subset \{\xi\}$ pour tout i . La réunion $V = \bigcup V_i$ est un ouvert saturé de X ; par conséquent, $U := p(V)$ est un voisinage ouvert de x dans X/\mathcal{R} . Soit U' un voisinage compact de x dans U qui est un arbre et qui est tel que $U' \cap \Gamma$ soit un sous-arbre compact de U' ; posons $V'_i = p^{-1}(U) \cap V_i$ pour tout i . Comme p est compacte, chacun des V'_i est un voisinage compact de ξ_i dans V_i . Comme $\Gamma \cap U'$ est compact, $p^{-1}(\Gamma) \cap V'_i$ est compact pour tout i .

Soient η et τ deux points de $p^{-1}(\Gamma) \cap V'_1$ et soient y et t leurs images respectives sur X . Par définition des V_i , la restriction de p à V_1 est injective; elle induit donc un homéomorphisme entre le segment $[\eta; \tau]$ de l'arbre V_1 et son image sur U' , qui coïncide dès lors avec $[z; t]$. Puisque $\Gamma \cap U'$ est un sous-arbre de U' , le segment $[z; t]$ est contenu dans $\Gamma \cap U'$; par conséquent, $[\eta; \tau] \subset p^{-1}(\Gamma) \cap V'_1$. Ainsi, le voisinage $p^{-1}(\Gamma) \cap V'_1$ de $\xi = \xi_1$ dans $p^{-1}(\Gamma)$ apparaît-il comme une partie convexe et compacte de l'arbre V_1 ; c'est donc un arbre, ce qui achève la démonstration. \square

Quotients et toises

(1.9.23) Lemme. Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ une application continue et compacte entre graphes, telle que la restriction de φ à tout sous-graphe localement fini de Y soit injective par morceaux. Supposons que tout sous-graphe compact de X admette une toise; il en va alors de même de tout sous-graphe compact de Y .

Démonstration. Soit V un sous-graphe compact de Y . Son image étant compacte, elle est contenue dans un sous-graphe compact U de X . Par hypothèse, il existe une toise λ sur U .

Soit I un segment tracé sur V et soient x et y ses deux extrémités. Orientons I de x vers y . La restriction de φ à I étant injective par morceaux, il existe une

suite finie $x_0 = x < x_1 < \dots < x_n = y$ de points de I tels que φ soit injective sur $[x_i; x_{i+1}]$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$; si $0 \leq i \leq n-1$ alors $\varphi([x_i; x_{i+1}])$ est un segment tracé sur U .

Le réel $\sum_i \lambda(\varphi([x_i; x_{i+1}]))$ ne dépend pas du choix de la subdivision (x_i) : il suffit en effet de vérifier qu'il est invariant par raffinement de cette dernière, ce qui est immédiat ; il est donc licite de le noter $l(I)$.

Par sa construction même, l est une toise sur V . \square

(1.9.24) Proposition. *Soit X un graphe sur lequel G agit. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) tout sous-graphe compact de X admet une toise ;*
- ii) tout sous-graphe compact de X/G admet une toise.*

Démonstration. On note p la flèche quotient $X \rightarrow X/G$. Comme la restriction de p à tout sous-graphe localement fini de X est, en vertu du théorème 1.9.11, injective par morceaux, l'implication ii) \Rightarrow i) est une conséquence directe du lemme 1.9.23. Il reste à montrer que i) \Rightarrow ii) ; on suppose donc que tout sous-graphe compact de X admet une toise. Soit U un sous-graphe compact de X .

(1.9.24.1) Modification du problème à traiter. Comme U est compact, il existe une famille finie $(X'_i, X_i)_i$ où X_i est pour tout i un sous-arbre ouvert de X/G , où X'_i est pour tout i un sous-arbre compact de X'_i , et où les X'_i recouvrent U . Il suffit de montrer que chacun des X_i admet une toise : en effet si c'est le cas alors par restriction chacun des $X'_i \cap U$ admettra une toise, et il n'y aura plus qu'à appliquer 1.6.5 au recouvrement fini de U par les $U \cap X'_i$.

L'application p étant compacte, $p^{-1}(X_i)$ est pour tout i un sous-graphe ouvert relativement compact de X ; il admet donc une toise d'après l'hypothèse faite sur X .

On s'est ainsi ramené à établir l'assertion suivante : *soit X un graphe sur lequel G agit ; supposons que X admet une toise et que X/G est un arbre ; le quotient X/G admet alors une toise.*

C'est elle que nous entendons désormais démontrer ; on fixe une toise l sur X ; on note X_{pluri} (resp. $(X/G)_{\text{pluri}}$) l'ensemble des points pluribranches de X (resp. de X/G).

(1.9.24.2) Construction d'une toise l' sur $(X/G)_{\text{pluri}}$. Soit I un segment tracé sur $(X/G)_{\text{pluri}}$ et soient x et y les extrémités de I . En vertu de 1.9.14.2 et 1.9.14.3, $p^{-1}(I) \subset X_{\text{pluri}}$. On déduit dès lors de la compacité de I et du corollaire 1.9.19 l'existence d'une suite finie $x = x_0 < x_1 < \dots < x_r = y$ d'éléments de I (orienté de x vers y) telle que pour tout i compris entre 0 et $r-1$, le compact $p^{-1}([x_i; x_{i+1}])$ s'écrit comme une réunion finie $\bigcup_j I_{i,j}$, où $I_{i,j}$ est pour tout (i, j) un segment s'envoyant homéomorphiquement sur $[x_i; x_{i+1}]$, et où les intérieurs des $I_{i,j}$ sont deux à deux disjoints.

Pour tout $i \in \{0, \dots, r-1\}$ notons l_i la moyenne des $l(Y_{i,j})$ pour j variable. La somme des l_i ne dépend que de I , et pas de la subdivision (x_i) : il suffit en effet de s'assurer qu'elle est insensible à un raffinement de cette dernière, ce qui est immédiat ; il est dès lors licite de poser $l'(I) = \sum l_i$. Par sa construction même, l' définit une toise sur $(X/G)_{\text{pluri}}$.

(1.9.24.3) Conclusion. Comme tout point de X/G situé sur un intervalle ouvert appartient à $(X/G)_{\text{pluri}}$, ce dernier ensemble est une partie convexe de l'arbre X/G . On déduit alors du 1.9.24.2 ci-dessus et de 1.6.7 qu'il existe une toise l'' sur $(X/G)_{\text{pluri}}$ qui est bornée par 1.

Soit I un segment tracé sur X/G . Notons $\lambda(I)$ la borne supérieure des $l''(J)$, où J parcourt l'ensemble des segments contenus dans l'intérieur de I (qui est constitué de points pluribranches); l'application $I \mapsto \lambda(I)$ est alors une toise sur X/G . \square

(1.9.25) Corollaire. *Soit X un graphe sur lequel G agit. Le quotient X/G admet une toise si et seulement si X admet une toise.*

Démonstration. Comme $X \rightarrow X/G$ est compacte, X est paracompact si et seulement si X/G est paracompact. Le corollaire est dès lors une conséquence immédiate de la proposition 1.9.24 ci-dessus et du lemme 1.6.9. \square

(1.9.26) Proposition. *Soit X un graphe, soit S un sous-ensemble fermé et discret de X et soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X dont toute classe non singleton est une partie finie de S . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) tout sous-graphe compact de X admet une toise ; ii) tout sous-graphe compact du graphe X/\mathcal{R} (cf. prop.1.9.22) admet une toise.

Démonstration. Soit p la projection $X \rightarrow X/\mathcal{R}$. Il résulte de la forme même de \mathcal{R} que la restriction de p à tout sous-graphe localement fini de X est injective par morceaux. Par conséquent, ii) \Rightarrow i) résulte du lemme 1.9.23. Supposons maintenant que i) est vraie, et montrons ii).

Soit U un sous-graphe compact de X . Par compacité de U et de p , il existe une famille finie (X_i) de sous-arbres compacts de X/\mathcal{R} possédant les propriétés suivantes :

- les X_i recouvrent U ;
- pour tout i , l'image réciproque de X_i s'écrit comme une union finie disjointe $\coprod X'_{ij}$, où X'_{ij} est pour tout j un compact comprenant au plus un élément de S .

Fixons i et j . Comme $p^{-1}(X_i)$ est un sous-graphe compact de X (prop. 1.9.22), son ouvert fermé X'_{ij} est un sous-graphe compact de X . Comme X'_{ij} contient au plus un élément de S , l'application p induit un homéomorphisme de X'_{ij} sur son image X_{ij} , qui est donc un sous-graphe compact de X/\mathcal{R} .

En vertu de notre hypothèse, le sous-graphe compact X'_{ij} de X admet une toise; par conséquent, X_{ij} qui lui est homéomorphe en admet une aussi. Le sous-graphe U de X est recouvert par ses sous-graphes fermés $U \cap X_{ij}$, qui admettent chacun une toise par restriction. On déduit alors de 1.6.5 que U admet une toise. \square

(1.9.27) Corollaire. *Soient X et \mathcal{R} comme dans la proposition 1.9.26 ci-dessus. Le quotient X/\mathcal{R} admet une toise si et seulement si X admet une toise.*

Démonstration. Comme $X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est compacte d'après la proposition 1.9.22, le graphe X est paracompact si et seulement si X/\mathcal{R} est paracompact. Le corollaire est dès lors une conséquence immédiate de la proposition 1.9.26 ci-dessus et du lemme 1.6.9. \square

1.10 Espaces dont un quotient d'un certain type est un graphe

(1.10.1) Théorème. *Soit G un groupe fini et soit Y un espace topologique séparé, localement connexe par arcs et localement compact sur lequel G agit. Supposons que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

- i) il existe un entier $\ell \geq 2$ tel que $H^1(Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ soit fini ;*
- ii) Y/G est un graphe.*

L'espace Y est alors lui-même un graphe.

Démonstration. On peut supposer, en raisonnant composante par composante, que Y est connexe. Désignons par X l'espace quotient Y/G (qui est alors lui aussi connexe), par φ la flèche quotient $Y \rightarrow X$ (qui est ouverte, propre et à fibres finies) et par d le cardinal maximal d'une famille libre du $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -module $H^1(Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ (qui est fini d'après i)).

(1.10.1.1) Soit C un cercle tracé sur Y et soit J un ouvert de C possédant la propriété suivante :

() il existe un intervalle ouvert I non vide tracé sur X tel que J soit un ouvert fermé de $\varphi^{-1}(I)$ s'envoyant homéomorphiquement sur I .*

Nous allons démontrer qu'il existe alors un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -revêtement topologique Z de Y déployé sur $Y - J$ et tel que la classe de $Z \times_Y C$ dans $H^1(C, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ engendre ce dernier.

Simplification du contexte. Pour cela, choisissons un point y sur J ; son image x sur I est un point pluribranche de X . Il existe un voisinage ouvert U de x dans X qui possède les propriétés suivantes :

- U est un arbre et $U \cap I$ est un intervalle ouvert ;
- si V désigne la composante connexe de y dans $\varphi^{-1}(U)$, alors $V \cap C \subset J$ et $V \cap \varphi^{-1}(I) \subset J$.

Choisissons un intervalle ouvert J' de J contenant y et inclus dans V , et notons I' l'image de J' sur I . Il existe un intervalle ouvert I'' de I' aboutissant à x qui est faiblement admissible dans X et tel que l'arbre à deux bouts $\Omega := (I'')^b$ soit contenu dans U (1.7.14). Notons que $\Omega \cap I = \Omega \cap U \cap I$ est par convexité un intervalle ouvert, dont I'' est une partie fermée puisque $\partial I''$ ne rencontre pas Ω ; par conséquent, $\Omega \cap I = I''$.

Soit J'' l'image réciproque de I'' sur J et soit W la composante connexe de $\varphi^{-1}(\Omega)$ qui contient J'' . Comme $J'' \subset J' \subset V$, l'on a $W \subset V$, et donc $W \cap C \subset J$ et $W \cap \varphi^{-1}(I) \subset J$; comme $\Omega \cap I = I''$, il s'ensuit que $W \cap C = J''$ et $W \cap \varphi^{-1}(I'') = J''$.

Quitte à remplacer I par I'' et J par J'' , l'on peut donc supposer *qu'il existe un ouvert Ω de X qui est un arbre à deux bouts dont I est le squelette et une composante connexe W de $\varphi^{-1}(\Omega)$ telle que $W \cap C = J$ et $W \cap \varphi^{-1}(I) = J$.* On fixe deux intervalles ouverts I_0 et I_1 de I , disjoints et aboutissant chacun à l'une de ses extrémités ; l'on note J_0 et J_1 les images réciproques respectives de I_0 et I_1 sur J , et Ω_0 et Ω_1 les images réciproques respectives de I_0 et I_1 par la rétraction canonique $\Omega \rightarrow I$; enfin, l'on désigne par W_0 et W_1 les images réciproques respectives de Ω_0 et Ω_1 sur W .

Construction d'un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur $Z \rightarrow Y$. Soit \mathcal{K} l'image réciproque sur W du compact $\Omega - (\Omega_0 \cup \Omega_1)$; c'est un compact de Y . L'on construit alors un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -revêtement topologique Z de Y en recollant $(Y - \mathcal{K}) \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ et $W \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ comme suit : au-dessus de W_0 , l'on identifie pour tout i le feuillet $W_0 \times \{i\}$ du premier revêtement au feuillet $W_0 \times \{i\}$ du second ; au-dessus de W_1 , l'on identifie pour tout i le feuillet $W_1 \times \{i\}$ du premier revêtement au feuillet $W_1 \times \{i + 1\}$ du second.

Étude du toseur $Z \times_y C$. Il découle de notre construction, du fait que $W \cap C$ est égal à J , et de la description explicite des revêtements du cercle que la classe de $Z \times_Y C$ dans $H^1(C, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ engendre ce dernier.

Trivialisation de Z au-dessus de $Y - J$. Soit W' une composante connexe de $W - J$. Comme J est l'image réciproque de I sur W , l'ouvert W' est une composante connexe de $\varphi^{-1}(\Omega')$ pour une certaine composante connexe Ω' de $\Omega - I$. L'espace Ω étant un arbre de squelette I , le bord de Ω' dans Ω consiste en un et un seul point de I ; la flèche $J \rightarrow I$ étant un homéomorphisme, le bord de W' dans W consiste en un et un seul point de J . Soit $i \in \{0, 1\}$. Puisque Ω' est contenue dans Ω_i si et seulement si l'unique point de son bord appartient à I_i , la composante W' est contenue dans W_i si et seulement si l'unique point de son bord appartient à J_i .

Soit σ l'application de $Y - J$ dans Z définie comme suit : si y appartient à $Y - J \setminus \mathcal{K}$ l'on pose $\sigma(y) = (y, 0) \in (Y - \mathcal{K}) \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \subset Z$; si $y \in W - J$ alors y appartient à une composante connexe W' de $W - J$; si l'unique point du bord de W' dans W appartient (resp. n'appartient pas) à J_0 , l'on définit $\sigma(y)$ comme l'élément $(y, 0)$ (resp. $(y, 1)$) de $W \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \subset Z$. Par construction, σ est une section continue de $Z \times_Y (Y - J) \rightarrow Y - J$; dès lors, Z se trivialise au-dessus de $Y - J$.

(1.10.1.2) *Remarque à propos de la propriété (*) ci-dessus.* Soit C un cercle tracé sur Y ; supposons qu'il existe un graphe compact et fini Γ sur X tel que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ soit un graphe compact et fini contenant C ; tout ouvert non vide de C contient alors un ouvert J satisfaisant (*) : cela résulte du fait que la flèche $\varphi^{-1}(\Gamma) \rightarrow \Gamma \simeq \varphi^{-1}(\Gamma)/G$ est alors injective par morceaux d'après le théorème 1.9.11.

(1.10.1.3) Soit Γ un graphe compact et fini tracé sur X , soit Γ_0 le complémentaire d'un nombre fini de points dans Γ et soit N un entier non nul. Supposons que les fibres de φ en les points de Γ_0 sont toutes de cardinal N ; nous allons montrer que $\varphi^{-1}(\Gamma_0) \rightarrow \Gamma_0$ est un revêtement à N feuillets, puis que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un graphe fini. On peut supposer pour ce faire que Γ est sans point isolé, auquel cas il coïncide avec l'adhérence de Γ_0 .

Soit $x \in \Gamma_0$ et soient x_1, \dots, x_N ses antécédents. Soient V_1, \dots, V_N des voisinages ouverts respectifs de x_1, \dots, x_N dans $\varphi^{-1}(\Gamma)$, que l'on choisit deux à deux disjoints, et soit W un voisinage compact de x dans Γ_0 qui est contenu dans $\bigcap \varphi(V_i)$. Désignons pour tout i par W_i l'image réciproque de W dans V_i ; c'est un fermé de $\varphi^{-1}(W)$ et donc un compact ; par choix de W , les flèches $W_i \rightarrow W$ sont toutes surjectives ; comme tout point de Γ_0 a exactement N antécédents, elles sont toutes bijectives ; par compacité de leurs sources et buts, ce sont des homéomorphismes, et $\varphi^{-1}(\Gamma_0) \rightarrow \Gamma_0$ est bien un revêtement à N feuillets.

Pour montrer que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un arbre on peut, quitte à amputer Γ_0 d'un ensemble fini de points, supposer que l'adhérence dans Γ de toute composante connexe de Γ_0 est un arbre. Soit Δ une composante connexe de $\varphi^{-1}(\Gamma_0)$; l'application $\Delta \rightarrow \varphi(\Delta)$ est un homéomorphisme, et $\varphi(\Delta)$ est une composante connexe de Γ_0 ; dès lors, $\varphi(\Delta)$ et $\overline{\varphi(\Delta)}$ sont deux arbres. Comme $\overline{\varphi(\Delta)}$ est un fermé de X contenu dans le compact $\overline{\varphi(\Delta)}$, c'est exactement $\overline{\varphi(\Delta)}$. Soit $a \in \overline{\varphi(\Delta)} - \varphi(\Delta)$. Il existe un voisinage ouvert U connexe de a dans X tel que les composantes connexes de $\varphi^{-1}(U)$ séparent les antécédents de a ; comme $\varphi(\Delta)$ est un arbre, $\overline{\varphi(\Delta)} \setminus \{a\}$ est connexe, et $\overline{\varphi(\Delta)}$ est donc de valence 1 en a . Il est par conséquent loisible de supposer, quitte à restreindre U , que $U \cap \overline{\varphi(\Delta)}$ est de la forme $]a; x[$ pour un certain x tel que $]a; x[\subset \varphi(\Delta)$. L'intersection de Δ et $\varphi^{-1}(U)$ est dès lors égale à $\varphi_{\Delta}^{-1}(]a; x[)$, qui est homéomorphe à $]a; x[$ et est de ce fait contenu dans une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$; par conséquent, $\overline{\Delta}$ contient au plus un antécédent de a . Ceci étant vrai quel que soit le point a de $\overline{\varphi(\Delta)} - \varphi(\Delta)$, la surjection $\overline{\Delta} \rightarrow \overline{\varphi(\Delta)} = \varphi(\overline{\Delta})$ est une bijection continue entre compacts, et donc un homéomorphisme; on en déduit que $\overline{\Delta}$ est un arbre compact; ceci vaut pour tout $\Delta \in \pi_0(\varphi^{-1}(\Gamma_0))$.

Comme $\varphi^{-1}(\Gamma) \rightarrow \Gamma$ est ouverte et comme Γ_0 est dense dans Γ , l'ouvert $\varphi^{-1}(\Gamma_0)$ de $\varphi^{-1}(\Gamma)$ en est une partie dense. Autrement dit, l'on a

$$\varphi^{-1}(\Gamma) = \overline{\varphi^{-1}(\Gamma_0)} = \bigcup_{\Delta \in \pi_0(\varphi^{-1}(\Gamma_0))} \overline{\Delta}.$$

Étant compact, $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est donc homéomorphe au quotient de $\coprod_{\Delta \in \pi_0(\varphi^{-1}(\Gamma_0))} \overline{\Delta}$ par une relation d'équivalence convenable, qu'engendre un ensemble fini de couples de points; il s'ensuit que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un graphe fini (prop. 1.9.22).

(1.10.1.4) Supposons donnés un entier N et, pour tout i compris entre 1 et N , un intervalle $[a_i; b_i]$ tracé sur X (avec $a_i \neq b_i$); nous faisons les hypothèses suivantes :

- les intervalles $[a_i; b_i]$ sont deux à deux disjoints;
- pour tout i , les fibres de φ en les points de $]a_i; b_i[$ ont toutes même cardinal, et ce dernier majore strictement les cardinaux de $\varphi^{-1}(a_i)$ et $\varphi^{-1}(b_i)$.

Nous allons montrer que sous ces conditions $\varphi^{-1}([a_i; b_i])$ est pour tout i un graphe fini ayant au moins une boucle, puis que N est nécessairement inférieur ou égal à d .

Fixons i . Il résulte du 1.10.1.3 ci-dessus que $\varphi^{-1}(]a_i; b_i[) \rightarrow]a_i; b_i[$ est un revêtement, et que $\varphi^{-1}([a_i; b_i])$ est un graphe compact, que l'on note Γ .

Nous allons montrer que Γ possède au moins une boucle. Le cardinal de $\varphi^{-1}(a_i)$ étant par hypothèse strictement inférieur au nombre de feuillets du revêtement $\varphi^{-1}(]a_i; b_i[) \rightarrow]a_i; b_i[$, il existe un antécédent de a_i auquel aboutissent au moins deux branches de Γ . Par homogénéité (l'on a $[a_i; b_i] \simeq \Gamma/G$), c'est le cas de tous les antécédents de a_i ; il en va de même de ceux de b_i . Soit Γ_0 une composante connexe de Γ et soit n le nombre de feuillets de $\varphi^{-1}(]a_i; b_i[)$ qu'elle contient. À chaque point de Γ_0 situé au-dessus de a_i aboutissent au moins deux de ces feuillets. Il y a donc au plus $n/2$ tels points; de même, il y a au plus $n/2$ antécédents de b_i sur Γ_0 . Il en résulte

que la caractéristique d'Euler de Γ_0 est majorée par $-n + 2n/2 = 0$; par conséquent, $h^1(\Gamma_0)$ est non nul, et Γ possède ainsi au moins une boucle.

Pour tout i , choisissons une boucle C_i sur le graphe $\varphi^{-1}([a_i; b_i])$. On déduit de la remarque 1.10.1.2 et de la construction faite au 1.10.1.1 qu'il existe pour chaque i un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -revêtement topologique Z_i de Y trivial en dehors de C_i tel que la classe de $Z_i \times_Y C_i$ engendre $H^1(C_i, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$, lequel est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$; il en découle aisément que les classes des Z_i dans $H^1(Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ forment une famille libre, et donc que $N \leq d$.

(1.10.1.5) Soit Γ un graphe fini et compact tracé sur X ; nous allons établir que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un graphe fini et que $h^1(\varphi^{-1}(\Gamma)) \leq d$.

Soit N le cardinal maximal d'une fibre de φ au-dessus d'un point de Γ ; montrons par récurrence sur N que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un graphe fini.

Si $N = 1$ alors $\varphi^{-1}(\Gamma) \rightarrow \Gamma$ est une bijection continue entre compacts, et donc un homéomorphisme; par conséquent, $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un graphe fini.

Supposons que $N > 1$ et que la propriété est vraie pour tous les entiers compris entre 1 et $N - 1$. Soit U l'ensemble des points de Γ dont les fibres ont exactement N points; il résulte du caractère ouvert et propre de φ que U est un ouvert. Sa trace sur chaque arête ouverte de Γ est une réunion (au plus) dénombrable d'intervalles ouverts; en vertu de 1.10.1.4, cette réunion est en réalité finie. Par conséquent :

- le complémentaire de U dans Γ est un graphe fini;
- l'adhérence de U dans Γ est un graphe fini Δ , et $\Delta - U$ est fini.

Il découle de la définition de U et de 1.10.1.3 que $\varphi^{-1}(\Delta)$ est un graphe fini. Par ailleurs les fibres de φ en les points de $\Gamma - U$ sont toutes de cardinal strictement inférieur à N ; par l'hypothèse de récurrence, $\varphi^{-1}(\Gamma - U)$ est un graphe fini. Comme $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est compact, il s'identifie au quotient de $\varphi^{-1}(\Gamma - U) \amalg \varphi^{-1}(\Delta)$ par une relation d'équivalence convenable, qu'engendre un ensemble fini de couples de points; en conséquence, $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un graphe fini (prop. 1.9.22).

Posons $r = h^1(\varphi^{-1}(\Gamma))$. Il existe r boucles C_1, \dots, C_r sur $\varphi^{-1}(\Gamma)$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. On déduit de la remarque 1.10.1.2 et du 1.10.1.1 qu'il existe pour tout i un intervalle ouvert I_i non vide tracé sur $C - \bigcup_{j \neq i} C_j$ et un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -revêtement Z_i de Y qui est trivial au-dessus de $Y - I_i$, et tel que $Z_i \times_Y C_i$ engendre $H^1(C_i, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Il s'ensuit que les classes des Z_i dans $H^1(Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ forment une famille libre; en conséquence, $r \leq d$.

(1.10.1.6) Soient Γ et Γ' deux graphes finis compacts et connexe tracés sur X tels que Γ soit contenu dans Γ' . L'on a $d \geq h^1(\varphi^{-1}(\Gamma')) \geq h^1(\varphi^{-1}(\Gamma))$; comme toute composante connexe de $\varphi^{-1}(\Gamma')$ se surjecte sur Γ' , l'application naturelle de $\pi_0(\varphi^{-1}(\Gamma))$ vers $\pi_0(\varphi^{-1}(\Gamma'))$ est surjective; notons que sa source et sont buts sont finis et de cardinal majoré par celui de G .

Il en résulte qu'il existe un graphe fini compact et connexe Γ_0 tracé sur X tel que pour tout couple (Γ, Γ') de graphes finis, compacts et connexes tracés sur X , contenant Γ_0 et tels que $\Gamma \subset \Gamma'$, les flèches

$$\pi_0(\varphi^{-1}(\Gamma)) \rightarrow \pi_0(\varphi^{-1}(\Gamma')) \text{ et } H_1(\varphi^{-1}(\Gamma'), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\varphi^{-1}(\Gamma), \mathbb{Z})$$

soient bijectives; cela signifie que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un sous-graphe admissible de $\varphi^{-1}(\Gamma')$.

Notons \mathfrak{G} l'ensemble des graphes finis compacts et connexes tracés sur X et contenant Γ_0 ; il est naturellement ordonné et filtrant; l'on a $X = \bigcup_{\Gamma \in \mathfrak{G}} \Gamma$.

(1.10.1.7) Soient y et y' deux points distincts d'un ouvert connexe Ω de Y . Nous allons démontrer qu'il existe $\Gamma \in \mathfrak{G}$ tel que y et y' soient situés sur la même composante connexe de $\varphi^{-1}(\Gamma) \cap \Omega$.

Comme Y est localement connexe par arcs, il existe un chemin continu $[0; 1] \rightarrow \Omega$ joignant y à y' ; comme Y est séparé, l'on peut supposer que ce chemin est *injectif*, autrement dit que c'est un homéomorphisme sur son image; soit I cette dernière. Nous allons montrer que pour tout point t de I il existe $\Gamma_t \in \mathfrak{G}$ et un voisinage ouvert I_t de t dans I tel que $I_t \subset \varphi^{-1}(\Gamma_t)$. La compacité de I permettra alors de le recouvrir par un nombre fini de I_t , et si Γ désigne un élément de \mathfrak{G} contenant les Γ_t correspondant, l'on aura $I \subset \varphi^{-1}(\Gamma) \cap \Omega$ et la conclusion requise.

Soit $t \in I$ et soit x son image sur X . Il existe un voisinage ouvert U de x qui est un arbre, et qui est tel que la composante connexe V de t dans $\varphi^{-1}(U)$ ne contienne aucun autre antécédent de x . Fixons une branche de I issue de t (il y en a au plus deux) et soit τ un point de cette branche, tel que $]t; \tau[\subset V$; posons $\xi = \varphi(\tau)$. Comme $\varphi(]t; \tau[)$ est un sous-ensemble connexe de l'arbre U , il contient l'intervalle $]x; \xi[$. La composante connexe Δ de t dans le graphe $\varphi^{-1}(]x; \xi[)$ est contenue dans V , et coïncide avec $\varphi_{|V}^{-1}(]x; \xi[)$. Soit U' une composante connexe de $U -]x; \xi[$ aboutissant à un point ζ de $]x; \xi[$ et soit J une composante connexe de $\varphi_{|]t; \tau[}^{-1}(U')$; c'est un intervalle ouvert tracé sur $]t; \tau[$; notons α et β ses deux bornes; l'on a $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = \zeta$. La concaténation de J et de l'un des intervalles reliant α à β sur Δ est un cercle C . L'on déduit du 1.10.1.1 qu'il existe un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur $Z \rightarrow Y$ qui est trivial sur $Y - J$ et tel que la classe de $Z \times_Y C$ engendre $H^1(C, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.

Soit $r \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ une composante connexe U_i de $U -]x; \xi[$ aboutissant à un point de $]x; \xi[$ et une composante connexe J_i de $\varphi_{|]t; \tau[}^{-1}(U_i)$, les J_i étant en outre supposées deux à deux disjointes. Le procédé ci-dessus fournit pour tout i un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur $Z_i \rightarrow Y$ trivial au-dessus de $Y - J_i$ et un cercle C_i ne rencontrant aucun des J_j pour $j \neq i$ et tel que $Z_i \times_Y C_i$ engendre $H^1(C_i, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Les classes des Z_i dans $H^1(Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ sont alors linéairement indépendantes; par conséquent, $r \leq d$.

Ceci implique l'existence de $\xi_0 \in]x; \xi[$ tel que $\varphi(]t; \tau[)$ ne rencontre aucune composante connexe de $U -]x; \xi[$ aboutissant à un point de $]x; \xi_0[$. Soit τ_0 un antécédent de ξ_0 sur $]t; \tau[$. Comme x et ξ_0 adhèrent tous deux à $\varphi(]t; \tau_0[)$, la composante connexe U_0 de $U \setminus \{x; \xi_0\}$ qui contient $\varphi(]t; \tau_0[)$ est celle qui contient $]x; \xi_0[$; par ce qui précède, $\varphi(]t; \tau_0[)$ ne rencontre aucune composante connexe de $U_0 -]x; \xi_0[$; dès lors, $\varphi(]t; \tau_0[) \subset]x; \xi_0[$ et l'on a donc $\varphi(]t; \tau_0[) \subset]x; \xi_0[$.

En raisonnant de même le cas échéant sur la seconde branche de I issue de t , on obtient l'existence d'un voisinage ouvert I_t de t dans I et d'un graphe fini compact et connexe Γ_t de X , que l'on peut toujours supposer appartenir à \mathfrak{G} quitte à l'agrandir, tel que $I_t \subset \varphi^{-1}(\Gamma_t)$; c'est ce que l'on souhaitait démontrer.

(1.10.1.8) Fixons $\Gamma \in \mathfrak{G}$. Soit $y \in Y$. Si Γ' est un graphe appartenant à \mathfrak{G} et contenant Γ tel que $y \in \varphi^{-1}(\Gamma')$, alors $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un sous-graphe admissible de $\varphi^{-1}(\Gamma')$; l'image de y par la rétraction canonique de $\varphi^{-1}(\Gamma')$ vers $\varphi^{-1}(\Gamma)$ ne dépend pas du choix de Γ' (il suffit de vérifier qu'elle ne change pas lorsqu'on agrandit Γ' , ce qui est immédiat); il est donc licite de la noter $r_\Gamma(y)$. Notons que si $y \in \varphi^{-1}(\Gamma)$ alors $r_\Gamma(y) = y$.

Supposons que $y \notin \varphi^{-1}(\Gamma)$ et soit U sa composante connexe dans $Y - \varphi^{-1}(\Gamma)$. Montrons que $\partial U = \{r_\Gamma(y)\}$. Par définition de $r_\Gamma(y)$, il existe un intervalle fermé I tracé sur Y d'extrémités y et $r_\Gamma(y)$, et tel que $I \cap \varphi^{-1}(\Gamma) = \{r_\Gamma(y)\}$. Cette dernière condition garantit que $I \setminus \{r_\Gamma(y)\}$ est tracé sur U , et donc que $r_\Gamma(y)$ est adhérent à U .

Supposons qu'il existe $z \in \varphi^{-1}(\Gamma)$ qui soit adhérent à U et soit distinct de $r_\Gamma(y)$. Il existe un voisinage ouvert et connexe V de z qui ne contient pas $r_\Gamma(y)$. Puisque z adhère à U , son voisinage V rencontre U , et $V \cup U$ est par conséquent connexe. Il existe donc, en vertu du 1.10.1.7, un graphe Γ' appartenant à \mathfrak{G} , que l'on peut toujours supposer contenir Γ , et tel que y et z soient situés sur la même composante connexe de $\varphi^{-1}(\Gamma') \cap (U \cup V)$. Ceci entraîne l'existence d'un intervalle tracé sur $\varphi^{-1}(\Gamma')$ qui relie y à z sans passer par $r_\Gamma(y)$, ce qui contredit le fait que ce dernier est l'image de y par la rétraction canonique $\varphi^{-1}(\Gamma') \rightarrow \varphi^{-1}(\Gamma)$; par conséquent, $\partial U = \{r_\Gamma(y)\}$; remarquons que ceci entraîne que $r_\Gamma(z) = r_\Gamma(y)$ pour tout $z \in U$.

(1.10.1.9) Nous nous proposons maintenant d'établir la continuité de l'application r_Γ . Soit Δ un ouvert de Γ . Pour montrer que $r_\Gamma^{-1}(\Delta)$ est ouvert, on peut supposer que Δ est connexe et non vide. Soit Θ le compact $\Gamma - \Delta$ et soit U la composante connexe de $Y - \Theta$ qui contient Δ ; nous allons démontrer que $r_\Gamma^{-1}(\Delta)$ est égal à U .

Soit $y \in r_\Gamma^{-1}(\Delta)$. Si $y \in \varphi^{-1}(\Gamma)$ alors $y \in \Delta \subset U$; supposons que $y \notin \varphi^{-1}(\Gamma)$ et soit V la composante connexe de y dans $Y - \varphi^{-1}(\Gamma)$. La composante connexe W de y dans $Y - \Theta$ est fermée dans ce dernier, et contient V . Comme ∂V est égal à $\{r_\Gamma(y)\}$ et comme $r_\Gamma(y) \notin \Theta$, on a $r_\Gamma(y) \in W$. Par conséquent, W rencontre Δ et coïncide de ce fait avec U ; ainsi, $y \in U$.

Soit $y \in U$. Si $y \in \varphi^{-1}(\Gamma)$ alors $y \in U \cap \varphi^{-1}(\Gamma) = \Delta$, et l'on a donc $r_\Gamma(y) = y \in \Delta$. Supposons que $y \notin \varphi^{-1}(\Gamma)$, et soit V sa composante connexe dans $Y - \varphi^{-1}(\Gamma)$. Le sous-ensemble V de U en est une partie ouverte, connexe et non vide; comme elle diffère de U (elle ne rencontre pas $\varphi^{-1}(\Gamma)$), elle n'est pas fermée dans U . L'unique point du bord de V , qui n'est autre que $r_\Gamma(y)$, appartient donc à U ; comme $U \cap \varphi^{-1}(\Gamma) = \Delta$, on a $r_\Gamma(y) \in \Delta$; ainsi, y appartient à $r_\Gamma^{-1}(\Delta)$, ce qu'il fallait démontrer.

(1.10.1.10) Soit Δ un sous-arbre ouvert de Γ , et soit U l'ouvert $r_\Gamma^{-1}(\Delta)$. Soient x et y deux points de U ; nous allons démontrer qu'il existe un et un seul fermé de U homéomorphe à un intervalle fermé d'extrémités x et y . Tout tel fermé est, en vertu du 1.10.1.7 contenu dans $\varphi^{-1}(\Gamma') \cap U$ pour un certain graphe Γ' appartenant à \mathfrak{G} , que l'on peut toujours supposer contenir Γ . Il suffit donc de démontrer que pour tout Γ' appartenant à \mathfrak{G} , contenant Γ , $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$, il existe un et un seul fermé de $\varphi^{-1}(\Gamma') \cap U$ homéomorphe à un intervalle fermé d'extrémités x et y . Mais si l'on se donne Γ' satisfaisant ces conditions,

$\varphi^{-1}(\Gamma') \cap U$ est l'image réciproque de Δ par la rétraction canonique de $\varphi^{-1}(\Gamma')$ sur $\varphi^{-1}(\Gamma)$, et est donc un arbre, d'où l'assertion.

Montrons maintenant que ∂U est fini. Comme r_Γ est continue, $r_\Gamma^{-1}(\overline{\Delta})$ est un fermé de Y , qui contient donc le bord de U . Soit x un élément de $r_\Gamma^{-1}(\overline{\Delta}) - U$. Supposons que x n'appartienne pas à $\varphi^{-1}(\Gamma)$ et soit V la composante connexe de x dans $Y - \varphi^{-1}(\Gamma)$. On a pour tout $z \in V$ l'égalité $r_\Gamma(z) = r_\Gamma(x)$; or $r_\Gamma(x) \notin \Delta$ (puisque $x \notin U$); par conséquent, V ne rencontre pas U et x n'appartient pas au bord de U . Il s'ensuit que $\partial U \subset \varphi^{-1}(\Gamma)$. Compte-tenu du fait que $\partial U \subset r_\Gamma^{-1}(\overline{\Delta})$, il vient $\partial U \subset \partial \Delta$, et ∂U est dès lors fini (l'inclusion réciproque étant triviale, on a en fait $\partial U = \partial \Delta$).

(1.10.1.11) Conclusion : *Y est un graphe.* L'espace Y est séparé et localement compact. Soit $y \in Y$ et soit V un voisinage ouvert de y dans Y ; on va montrer que V contient un voisinage ouvert de y satisfaisant les conditions i) et ii) du 1.3.1, ce qui prouvera que Y est un graphe. Quitte à restreindre V , on peut le supposer relativement compact; son bord est alors une partie compacte de Y , qui ne rencontre de ce fait qu'un nombre fini de composantes connexes de $Y \setminus \{y\}$. Choisissons $\Gamma \in \mathfrak{G}$ tel que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ contienne y et rencontre toutes les composantes connexes de $Y \setminus \{y\}$ qui intersectent ∂V , c'est-à-dire qui ne sont pas contenues dans V . Soit Δ un arbre ouvert de $\varphi^{-1}(\Gamma)$ contenant y et tel que $\overline{\Delta} \subset V$. Le bord de V étant compact, il ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes de $Y - \overline{\Delta}$; par conséquent, V contient toutes les autres. En particulier, V contient presque toutes les composantes connexes de $Y - \varphi^{-1}(\Gamma)$ dont l'unique point du bord appartient à Δ ; notons par ailleurs qu'une composante connexe de $Y - \varphi^{-1}(\Gamma)$ dont l'unique point du bord est y est une composante connexe de $Y \setminus \{y\}$ qui ne rencontre pas $\varphi^{-1}(\Gamma)$, et est donc contenue dans V .

Il découle de ce qui précède que l'on peut supposer, quitte à restreindre Δ , que V contient *toutes* les composantes connexes de $Y - \varphi^{-1}(\Gamma)$ dont l'unique point du bord appartient à Δ ; comme $\Delta \subset V$, on a $r_\Gamma^{-1}(\Delta) \subset V$; et d'après 1.10.1.10 ci-dessus, $r_\Gamma^{-1}(\Delta)$ satisfait les conditions i) et ii) du 1.3.1, ce qui achève la démonstration. \square

(1.10.2) Remarque. Dans l'énoncé du théorème 1.10.1 ci-dessus, l'hypothèse que $H^1(Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est fini pour au moins un entier ℓ supérieur ou égal à 2 est indispensable.

Pour le voir, désignons par Y le quotient de $[0; 1] \times \{0, 1\}$ par la relation d'équivalence obtenue en identifiant $(1/n, 0)$ à $(1/n, 1)$ pour tout $n > 0$ ainsi que $(0, 0)$ à $(0, 1)$. On vérifie aisément que l'involution de $[0; 1] \times \{0, 1\}$ induite par la transposition de $\{0, 1\}$ passe au quotient et définit ainsi une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur Y , qui est telle que $Y/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ soit homéomorphe à $[0; 1]$.

Et pourtant l'espace compact Y n'est pas un graphe, puisqu'il contient une infinité de boucles qui s'accroissent au voisinage de $(0, 0) = (0, 1)$; mais la présence de cette infinité de boucles implique justement (par exemple *via* le 1.10.1.1) que $H^1(Y, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est infini pour tout $\ell \geq 2$.

Chapitre 2

Algèbre commutative

2.1 Morphismes étales et anneaux locaux henséliens

Schémas étales sur une base normale

(2.1.1) Soit \mathcal{X} un schéma intègre, soit \mathcal{Y} un \mathcal{X} -schéma et soit \mathcal{U} un ouvert non vide de \mathcal{X} .

(2.1.1.1) Supposons \mathcal{Y} plat et localement de présentation finie sur \mathcal{X} . Il est alors localement connexe. En effet, la propriété étant locale sur \mathcal{Y} , on peut le supposer de présentation finie. La flèche $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ étant ouverte, tout point de \mathcal{Y} est adhérent à la fibre générique de $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$. Comme celle-ci a un nombre fini de composantes irréductibles, le schéma \mathcal{Y} est réunion *finie* de fermés irréductibles, d'où l'assertion.

(2.1.1.2) On suppose à partir de maintenant que \mathcal{X} est normal et que le morphisme $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est étale. Le schéma \mathcal{Y} est alors normal, et ses composantes connexes sont dès lors irréductibles. En conséquence, si \mathcal{Z} est une composante connexe de \mathcal{Y} , son ouvert $\mathcal{Z} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}$, qui est non vide puisque $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est ouvert, est irréductible. Il en résulte que l'application $\pi_0(\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{Y})$ est bijective.

(2.1.1.3) On fait l'hypothèse supplémentaire que le morphisme étale $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est fini. L'ensemble des sections de \mathcal{Y} au-dessus de \mathcal{X} (resp. \mathcal{U}) est alors en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de \mathcal{Y} (resp. $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}$) dont le degré sur \mathcal{X} (resp. \mathcal{U}) est égal à 1. Il s'ensuit, compte-tenu de 2.1.1.2, que la restriction induit une bijection $\mathcal{Y}(\mathcal{X}) \simeq \mathcal{Y}(\mathcal{U})$.

(2.1.1.4) On suppose toujours que $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est fini étale; pour tout \mathcal{X} -schéma \mathcal{Z} , on note $\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}$ le produit fibré $\mathcal{Z} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}$. Soit \mathcal{Z} un \mathcal{X} -schéma étale. Il est normal, et en appliquant 2.1.1.3 à chacune des composantes connexes de \mathcal{Z} , on voit que la flèche $\mathcal{Y}(\mathcal{Z}) \rightarrow \mathcal{Y}(\mathcal{Z}_{\mathcal{U}})$ est bijective.

Autrement dit,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}, \mathcal{Y}_{\mathcal{U}})$$

est bijective.

(2.1.1.5) Soit \mathcal{G} un schéma en groupes fini étale sur \mathcal{X} . Supposons donnée une action de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ sur $\mathcal{Y}_{\mathcal{U}}$. Il résulte de 2.1.1.4 qu'elle s'étend d'une unique manière en une action de \mathcal{G} sur \mathcal{Y} .

Supposons de plus que $\mathcal{Y}_{\mathcal{U}}$ soit un $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ -torseur. La flèche induite

$$\mathcal{G}_{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{Y}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{Y}_{\mathcal{U}}$$

est alors un isomorphisme. En utilisant à nouveau 2.1.1.4, on en déduit que $\mathcal{G} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}$ est un isomorphisme; en conséquence, \mathcal{Y} est un \mathcal{G} -torseur.

Donnons-nous maintenant un (autre) \mathcal{G} -torseur \mathcal{T} sur \mathcal{X} , et supposons qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ -torseurs $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{Y}_{\mathcal{U}}$. En utilisant une fois encore 2.1.1.4, on voit que cet isomorphisme se prolonge (d'une unique manière) en un isomorphisme de \mathcal{G} -torseurs $\mathcal{T} \simeq \mathcal{Y}$.

Généralités sur les μ_{ℓ} -torseurs

(2.1.2) Soit ℓ un entier. Soit $(\mathbf{C}, \mathcal{O})$ un site annelé, et soit μ_{ℓ} le faisceau des racines ℓ -ièmes de l'unité sur \mathbf{C} . On suppose que sur le site annelé \mathbf{C} , l'endomorphisme $z \mapsto z^{\ell}$ du faisceau \mathbb{G}_m est surjectif; le cas à avoir en tête est celui où \mathbf{C} est le (petit) site étale d'un schéma ou d'un espace analytique sur lequel ℓ est inversible. On dispose alors sur le site \mathbf{C} d'une suite exacte dite *de Kummer*

$$1 \longrightarrow \mu_{\ell} \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{\ell}} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1,$$

qui induit pour tout objet X de \mathbf{C} une injection $\mathcal{O}(X)^{\times} / (\mathcal{O}(X)^{\times})^{\ell} \hookrightarrow H^1(X, \mu_{\ell})$. Si $f \in \mathcal{O}(X)^{\times}$, et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur X ni sur ℓ , on notera (f) l'image de f dans $H^1(X, \mu_{\ell})$. La classe de cohomologie (f) correspond à une classe d'isomorphie de μ_{ℓ} -torseurs sur X , que l'on peut décrire explicitement : c'est la classe du μ_{ℓ} -torseur $U \mapsto \{z \in \mathcal{O}(U)^{\times}, z^{\ell} = f|_U\}$.

(2.1.2.1) Soit \mathcal{X} un schéma sur lequel ℓ est inversible et soit f une fonction inversible sur \mathcal{X} . Tout faisceau étale localement constant sur $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ est représentable, et c'est en particulier le cas de tout μ_{ℓ} -torseur. En conséquence, $H^1(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mu_{\ell})$ classe les μ_{ℓ} -torseurs étales *schématiques* sur X à isomorphisme près; la classe d'isomorphie correspondant par ce biais à (f) est celle de $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]/(T^{\ell} - f)$.

Bien qu'il ne soit défini qu'à isomorphisme près, nous nous permettrons souvent de parler *du* toseur, et parfois simplement *du* revêtement étale (si l'on oublie l'action de μ_{ℓ}) défini par (f) ; dans le cas d'une base affine, nous évoquerons tout aussi bien l'algèbre finie étale définie par (f) .

(2.1.2.2) Soit A un anneau local dans lequel ℓ est inversible. Le théorème 90 de Hilbert assure que $H^1(A, \mathbb{G}_m) = 0$ (nous commettons l'abus usuel consistant à écrire $H^{\bullet}(A, \cdot)$ au lieu de $H^{\bullet}(\text{Spec } A)_{\text{ét}}, \cdot)$. Il s'ensuit que la flèche $f \mapsto (f)$ induit un isomorphisme $A^{\times} / (A^{\times})^{\ell} \simeq H^1(A, \mu_{\ell})$.

(2.1.2.3) Soit K un corps dans lequel ℓ est inversible; on suppose que $T^{\ell} - 1$ est scindé dans K .

Soit $y \in K^\times$, soit d l'ordre de (y) et soit z une racine ℓ -ième de y dans une clôture algébrique K^a de K . Le polynôme $T^n - y$ s'écrit $\prod_{\omega \in \mu_\ell(K)} T - \omega z$.

Soit P un diviseur unitaire irréductible de $T^n - \ell$ dans $K[T]$, soit r son degré, et soit s le PGCD de n et r . Le polynôme P s'écrit $\prod_{\omega \in \Omega} T - \omega z$ pour un certain

sous-ensemble Ω de $\mu_\ell(K)$ de cardinal r . Son terme constant est égal à $z^r \prod_{\omega \in \Omega} \omega$;

comme il appartient à K , on a $z^r \in k^\times$; puisque $z^\ell \in k^\times$, on a $z^s \in k^\times$. Par conséquent, $y^s = (z^s)^\ell \in (k^\times)^\ell$, et d divise donc s , et *a fortiori* r .

Soit $u \in k^\times$ tel que $y^d = u^\ell$; il existe alors $\omega \in \mu_\ell(K)$ tel que $y = (\omega u)^{\ell/d}$ (en effet $\mu_d(K) = (\mu_\ell(K))^{\ell/d}$ puisque $T^\ell - 1$ est scindé dans K). Posons $v = \omega u$. On a les égalités

$$T^\ell - y = T^\ell - v^{\ell/d} = (T^d)^{\ell/d} - v^{\ell/d} = \prod_{\zeta \in \mu_{\ell/d}(K)} T^d - \zeta v.$$

Chacun des facteurs de la décomposition ci-dessus appartient à $K[T]$ et est de degré d ; par ce qui précède, ces facteurs sont nécessairement irréductibles. Il y en a exactement ℓ/d ; en particulier, $T^\ell - y$ est irréductible si et seulement si $d = \ell$.

En termes géométriques, le μ_ℓ -torseur défini par (y) a ℓ/d composantes connexes; il est connexe si et seulement si $d = \ell$.

La notion de résidu

(2.1.3) Soit F un corps, soit \mathcal{C} une F -courbe projective, irréductible et normale, et soit ℓ un entier inversible dans F .

(2.1.3.1) Soit $h \in H^1(F(\mathcal{C}), \mu_\ell)$; cette classe définit une $F(\mathcal{C})$ -algèbre étale A . On note \mathcal{D} la F -courbe projective et normale, finie sur \mathcal{C} , dont la fibre générique s'identifie à $\text{Spec } A$. Soit \mathcal{C}' l'ouvert dense de \mathcal{C} au-dessus duquel \mathcal{D} est étale. En vertu de 2.1.1.5, la structure de μ_ℓ -torseur sur $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } F(\mathcal{C})$ définie par la classe h se prolonge d'une unique manière à $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}'$.

Par ailleurs, soit \mathcal{V} un ouvert non vide de \mathcal{C} au-dessus duquel le morphisme $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } F(\mathcal{C})$ admet un prolongement fini étale $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$. Comme \mathcal{W} est normal, il s'identifie à $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{V}$; en conséquence, $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}'$.

Ainsi, un point P de \mathcal{C} appartient à \mathcal{C}' si et seulement si le μ_ℓ -torseur $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } F(\mathcal{C})$ s'étend en un μ_ℓ -torseur au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathcal{C}, P}$.

(2.1.3.2) Fixons une fonction $f \in F(\mathcal{C})^\times$ telle que $h = (f)$. Soit P un point fermé de \mathcal{C} . La classe modulo ℓ de la valuation P -adique de f ne dépend que de h ; on la note $\delta_P(h)$. On dit que $\delta_P(h)$ est le *résidu de h en P* .

Il résulte de 2.1.3.1 et 2.1.2.2 que le point P appartient à \mathcal{C}' si et seulement si f appartient à $\mathcal{O}_{\mathcal{C}, P}^\times$ modulo $(F(\mathcal{C})^\times)^\ell$, soit encore si et seulement si $\delta_P(h) = 0$.

La suite exacte des résidus

À partir de maintenant, on suppose F algébriquement clos.

(2.1.4) Soit \mathcal{J} la jacobienne de la courbe \mathcal{C} , et soit ${}_{\ell}\mathcal{J}$ le sous-groupe de ℓ -torsion de \mathcal{J} . Nous allons démontrer qu'il existe un morphisme naturel $\iota : {}_{\ell}\mathcal{J}(F) \rightarrow H^1(F(\mathcal{C}), \mu_{\ell})$ tel que la suite

$$0 \longrightarrow {}_{\ell}\mathcal{J}(F) \xrightarrow{\iota} H^1(F(\mathcal{C}), \mu_{\ell}) \xrightarrow{\prod \partial_P} \bigoplus_{P \in \mathcal{C}(F)} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}\ell\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

soit exacte.

- Soit $x \in {}_{\ell}\mathcal{J}(F)$ et soit D un diviseur de degré 0 sur \mathcal{C} dont la classe dans le groupe de Picard est égale à x . Comme le point x est de ℓ -torsion, le diviseur ℓD est égale à $\text{div}(f)$ pour une certaine fonction $f \in F(\mathcal{C})^{\times}$, bien déterminée à un élément de F^{\times} près; comme F est algébriquement clos, la classe (f) est bien définie. Elle ne dépend pas du choix de D . En effet, soit D' un (autre) représentant de x ; choisissons $g \in F(\mathcal{C})^{\times}$ telle que $\text{div}(g) = \ell D'$. On a alors $\text{div}(f/g) = \ell(D - D')$; puisque D et D' représentent x , il existe $h \in F(\mathcal{C})^{\times}$ telle que $D - D' = \text{div}(h)$. En conséquence, $\text{div}(f/g) = \text{div}(h^{\ell})$, ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in F^{\times}$ tel que $f = \lambda h^{\ell} g$; comme F est algébriquement clos, il vient $(f) = (g)$, comme annoncé.

On définit ainsi un morphisme $\iota : {}_{\ell}\mathcal{J}(F) \rightarrow H^1(F(\mathcal{C}), \mu_{\ell})$. Montrons qu'il est injectif. Soit x tel que $\iota(x) = 0$, et soient D et f comme ci-dessus. Puisque $\iota(x) = 0$, il existe $g \in F(\mathcal{C})^{\times}$ telle que $f = g^{\ell}$; comme le diviseur de f est égal à ℓD , on a $\text{div}(g) = D$ et $x = 0$.

- La surjectivité de Σ est évidente.
- La composée $\Sigma \circ \prod \partial_P$ est nulle parce que le diviseur d'une fonction rationnelle inversible a un degré nul.

Soit (P_i) une famille finie de points fermés deux à deux distincts de \mathcal{C} et soit (e_i) une famille d'entiers de somme nulle modulo ℓ . Soit D le diviseur $\sum e_i P_i$. Choisissons un point fermé Q de \mathcal{C} , et soit N tel que $\text{deg } D = \sum e_i = N\ell$. Le diviseur $D - N\ell Q$ est de degré 0, et définit donc un point $x \in {}_{\ell}\mathcal{J}(F)$.

Par divisibilité du groupe $\mathcal{J}(F)$, il existe $y \in {}_{\ell}\mathcal{J}(F)$ tel que $\ell y = x$. En d'autres termes, il existe un diviseur E de degré 0 sur \mathcal{C} et une fonction rationnelle inversible f sur \mathcal{C} tels que

$$\text{div}(f) = D - N\ell Q - \ell E = D - \ell(NQ + E).$$

Par construction, l'image de (f) dans $\bigoplus_{P \in \mathcal{C}(F)} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est égale à $\sum \bar{e}_i P_i$.

Ainsi, la suite étudiée est exacte en $\bigoplus_{P \in \mathcal{C}(F)} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

- Il reste à montrer l'exactitude de la suite en $H^1(F(\mathcal{C}), \mu_{\ell})$. Si $x \in {}_{\ell}\mathcal{J}(F)$, son image h dans $H^1(F(\mathcal{C}), \mu_{\ell})$ est par construction la classe d'une fonction dont le diviseur est multiple de ℓ ; il s'ensuit que $\partial_P(h) = 0$ pour tout $P \in \mathcal{C}(F)$.

Réciproquement, soit $f \in F(\mathcal{C})^\times$ telle que (f) ait un résidu nul en tout point P de $\mathcal{C}(F)$. Cette dernière condition signifie que $\text{div}(f) = \ell D$ pour un certain diviseur D , dont le degré est nécessairement nul ; si l'on appelle x la classe de D dans $\mathcal{J}(F)$, l'égalité $\text{div}(f) = \ell D$ entraîne que $x \in {}_\ell \mathcal{J}(F)$; on a alors $\iota(x) = (f)$ par définition de ι , ce qui achève la démonstration.

(2.1.5) Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathcal{C} . On peut reformuler les résultats de 2.1.3 et sq. comme suit : la restriction au point générique induit un isomorphisme entre $H^1(\mathcal{U}_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ et le sous-groupe de $H^1(F(\mathcal{C}), \mu_\ell)$ formé des classes de résidu nul en tout point fermé de \mathcal{U} .

(2.1.5.1) *Remarque.* Soit $h \in H^1(\mathcal{U}_{\text{ét}}, \mu_\ell)$, soit d son ordre et soit $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ le μ_ℓ -torseur qu'elle définit. Comme F est algébriquement clos, le polynôme $T^\ell - 1$ est scindé dans F , et *a fortiori* dans $F(\mathcal{C})$.

D'après 2.1.2.3, le schéma $\mathcal{V} \times_{\mathcal{C}} \text{Spec } F(\mathcal{C})$ a ℓ/d composantes connexes. Comme \mathcal{U} est normal, \mathcal{V} est normal et ses composantes connexes sont dès lors irréductibles. En conséquence, \mathcal{V} a lui aussi ℓ/d composantes connexes.

(2.1.5.2) En vertu de 2.1.5, le groupe $H^1(\mathcal{C}_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ s'identifie au sous-groupe de $H^1(F(\mathcal{C}), \mu_\ell)$ formé des classes de résidu nul en tout point fermé de \mathcal{C} ; on déduit alors de la suite exacte des résidus (2.1.4) que $H^1(\mathcal{C}_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ est canoniquement isomorphe à ${}_\ell \mathcal{J}(F)$.

Soit g le genre de \mathcal{C} . La variété abélienne \mathcal{J} est de dimension g , et ${}_\ell \mathcal{J}(F)$ est donc isomorphe (non canoniquement si $g > 0$ et $\ell > 1$) à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$. Ainsi $H^1(\mathcal{C}, \mu_\ell) \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$.

(2.1.6) *Remarque.* Comme F est algébriquement clos, les faisceaux étales μ_ℓ et $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ sont isomorphes (non canoniquement si $\ell > 2$) sur F .

Une fois fixé un tel isomorphisme, on peut récrire 2.1.4, 2.1.5, 2.1.5.1 et 2.1.5.2 en remplaçant partout $H^1(\cdot, \mu_\ell)$ par $H^1(\cdot, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.

Anneaux locaux henséliens

(2.1.7) Soit A un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{m} , et soit k son corps résiduel.

(2.1.7.1) Soit B_0 une k -algèbre finie étale. Il existe alors une A -algèbre finie étale B telle que $B_0 \simeq B/\mathfrak{m}$; en effet, pour le voir, on se ramène immédiatement au cas où B_0 est une extension finie séparable de k . Le théorème de l'élément primitif assure l'existence d'un polynôme unitaire, irréductible et séparable $P_0 \in k[T]$ tel que $B \simeq k[T]/(P_0)$. Si P désigne un relevé unitaire de P_0 dans $A[T]$ on peut alors prendre $B = A[T]/P$.

(2.1.7.2) Soient Q un polynôme unitaire de $k[T]$ et soit P un polynôme unitaire de $A[T]$ relevant Q .

Supposons donnés deux polynômes unitaires Q_1 et Q_2 de $k[T]$ tels que Q_1 et Q_2 soient premiers entre et tels que $Q = Q_1 Q_2$. Il existe alors *au plus* un couple (P_1, P_2) de polynômes unitaires de $A[T]$ relevant respectivement Q_1 et Q_2 et tels que $P = P_1 P_2$.

En effet, supposons qu'un tel couple (P_1, P_2) existe. L'anneau quotient $A[T]/(P_1, P_2)$ est un A -module fini, dont la réduction modulo \mathfrak{m} s'identifie à $k[T]/(Q_1, Q_2)$ qui est nul par hypothèse ; par le lemme de Nakayama, il

vient $A[T]/(P_1, P_2) = 0$. Ainsi, $(P_1) + (P_2) = A[T]$, et le lemme chinois fournit alors un isomorphisme $i : A[T]/P \simeq A[T]/P_1 \times A[T]/P_2$, qui relève l'isomorphisme $j : k[T]/Q \simeq k[T]/Q_1 \times k[T]/Q_2$. Soit e l'idempotent de $A[T]/P$ correspondant à $(1, 0)$ via i . Il relève l'idempotent f de $k[T]/Q$ qui correspond à $(1, 0)$ via j . Or f admet *au plus* un relevé idempotent dans $A[T]/P$. Pour le voir, considérons un élément x de $\mathfrak{m}A[T]/P$ tel que $e' := e + x$ soit idempotent. On a alors

$$x^3 = (e - e')^3 = e - 3ee' + 3ee' - e' = e - e' = x,$$

et donc $x(1 - x^2) = 0$. Mais x appartient à $\mathfrak{m}A[T]/P$, qui est le radical de Jacobson de $A[T]/P$; en conséquence, $1 - x^2$ est inversible et $x = 0$, d'où l'assertion requise. Il s'ensuit que e ne dépend pas du couple (P_1, P_2) .

Or P_1 peut se caractériser comme l'annulateur de e , et P_2 comme celui de $1 - e$. En conséquence, le couple (P_1, P_2) est uniquement déterminé, comme annoncé.

Si $\alpha \in k$ alors α est racine simple de Q si et seulement si Q s'écrit $(X - \alpha)R$ avec R premier à $X - \alpha$; et si $a \in A$, on a $P(a) = 0$ si et seulement si $X - a$ divise P .

On déduit alors de ce qui précède qu'une racine simple de Q admet *au plus* un relèvement en une racine de P .

(2.1.8) Soit A un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel k . On note $a \mapsto \bar{a}$ la réduction modulo \mathfrak{m} . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Toute B -algèbre finie est un produit fini d'anneaux locaux.
- ii) Pour tout polynôme unitaire $P \in A[T]$ et toute factorisation $\bar{P} = Q_1 Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes unitaires et premiers entre eux de $k[T]$, il existe un (unique) couple (P_1, P_2) de polynômes unitaires de $A[T]$ tels que $P = P_1 P_2$ et $\bar{P}_i = Q_i$ pour tout i .
- iii) Pour tout polynôme unitaire $P \in A[T]$ et toute racine simple α de \bar{P} dans k , il existe un (unique) élément $a \in A$ tel que $\bar{a} = \alpha$ et $P(a) = 0$.

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que A est *hensélien*.

(2.1.9) Soit A un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{m} . Si A est complet pour la topologie \mathfrak{m} -adique, il est hensélien (on prouve iii) par la méthode de Newton, c'est le «lemme de Hensel» originel).

(2.1.10) Soit A un anneau local hensélien.

(2.1.10.1) Toute A -algèbre finie locale est hensélienne, comme on le voit à l'aide de la propriété i).

(2.1.10.2) Soit B une A -algèbre finie étale. C'est un produit de A -algèbres finies étales locales; il résulte aisément de la forme explicite de ces dernières et de iii) que $\text{Hom}_A(B, A) \rightarrow \text{Hom}_k(B \otimes_A k, k)$ est bijective.

(2.1.10.3) Soit C une A -algèbre finie étale. Elle s'écrit comme un produit $\prod C_i$ de A -algèbres finies, étales, locales et henséliennes; pour tout i , l'idéal $\mathfrak{m}C_i$ de C_i est son idéal maximal, puisque $C_i/\mathfrak{m}C_i$ est une k -algèbre locale finie étale, et partant un corps.

En appliquant 2.1.10.2 à la C_i -algèbre finie étale $B \otimes_A C_i$ pour tout i , on voit que $\text{Hom}_A(B, C) \rightarrow \text{Hom}_k(B \otimes_A k, C \otimes_A k)$ est bijective.

Le foncteur $B \mapsto B \otimes_A k$, de la catégorie des A -algèbres finies étales vers celle des k -algèbres finies étales, est ainsi pleinement fidèle. En vertu de 2.1.7.1, c'est une équivalence de catégories.

Hensélisé d'un anneau local

(2.1.11) Soit A un anneau local, soit \mathfrak{m} son idéal maximal et soit k son corps résiduel. On note \mathcal{X} et \mathbf{x} les spectres respectifs de A et k , et j l'immersion fermée $\mathbf{x} \hookrightarrow \mathcal{X}$. On considère $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ comme un faisceau sur le *petit* site étale $\mathcal{X}_{\text{ét}}$; on pose $A^h = H^0(\mathbf{x}_{\text{ét}}, j^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

(2.1.11.1) Soit F l'ensemble des (classes d'isomorphie de) couples (\mathcal{Y}, π) où \mathcal{Y} est un \mathcal{X} -schéma étale et de présentation finie, et où $\pi : \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme tel que j soit la flèche composée

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X} .$$

L'anneau A^h est alors la limite inductive des anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \pi(\mathbf{x})}$, pour (\mathcal{Y}, π) parcourant F ; c'est donc une A -algèbre locale.

Remarquons que les morphismes de transition du système inductif considéré sont des morphismes locaux et plats entre anneaux locaux; ils sont dès lors fidèlement plats, et en particulier injectifs.

Soit $(\mathcal{Y}, \pi) \in F$. Le schéma $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathbf{x}$ est un k -schéma étale de type fini, c'est donc le spectre d'un produit fini d'extension finies séparables de k . En particulier, $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \pi(\mathbf{x})}/\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \pi(\mathbf{x})}$ est une extension finie séparable de k . Cette extension se plonge par construction dans $\kappa(\mathbf{x}) = k$; il vient $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \pi(\mathbf{x})}/\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \pi(\mathbf{x})} = k$. Il s'ensuit que l'idéal maximal de A^h est $\mathfrak{m}A^h$ et que son corps résiduel est k .

L'anneau A^h est hensélien. En effet, soit P un polynôme unitaire de $A^h[T]$, et soit α une racine simple de l'image \overline{P} de P dans $k[T]$. Le polynôme P provient d'un polynôme (que nous notons encore P) à coefficient dans $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \pi(\mathbf{x})}$ pour un certain $(\mathcal{Y}, \pi) \in F$; quitte à restreindre \mathcal{Y} , on peut supposer qu'il est affine et que $P \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y})[T]$. Le schéma $\mathcal{Z} := \text{Spec } \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y})[T]$ est fini et plat sur \mathcal{Y} ; la racine simple α de \overline{P} définit un point \mathbf{z} de \mathcal{Z} situé au-dessus de $\pi(\mathbf{x})$, et de corps résiduel k . Le schéma \mathcal{Z} est étale en \mathbf{z} au-dessus de \mathcal{Y} , et *a fortiori* au-dessus de \mathcal{X} ; comme \mathbf{z} a pour corps résiduel k , l'immersion π se factorise par une flèche $\mathbf{x} \rightarrow \mathcal{Z}$ d'image \mathbf{z} .

Il existe donc un morphisme naturel de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \mathbf{y}}$ -algèbres de $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}, \mathbf{z}}$ vers A^h . Par construction, ce morphisme envoie \overline{T} sur une racine de P qui relève α , ce qui permet de conclure.

On dit que A^h est le *hensélisé* de A .

(2.1.11.2) Nous allons maintenant donner une description un peu plus explicite de A^h . Soit E l'ensemble des couples (P, α) où P est un polynôme unitaire à coefficients dans $A[T]$ et α une racine simple de \overline{P} dans k .

Soit $(P, \alpha) \in E$. Soit \mathcal{Y} l'ouvert de $\text{Spec } A[T]/P$ formé des points en lesquels celui-ci est étale sur \mathcal{X} . L'évaluation en α définit un morphisme surjectif $A[T]/P \rightarrow k$, dont on notera $\mathfrak{n}(\alpha)$ le noyau; c'est un idéal maximal de $A[T]/P$. Le point correspondant de $\text{Spec } A[T]/P$ est situé sur \mathcal{Y} , et son

corps résiduel est k ; c'est donc l'image d'un \mathcal{X} -morphisme $\pi : \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{Y}$. Le couple (\mathcal{Y}, π) appartient à \mathbf{F} , et la A -algèbre locale $(A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)}$ est égale à $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \pi(\mathbf{x})}$.

Réciproquement, il résulte de la description locale des morphismes étales que pour tout $(\mathcal{Y}, \pi) \in \mathbf{F}$, il existe $(P, \alpha) \in \mathbf{E}$ tel que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \pi(\mathbf{x})} \simeq (A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)}$. On en déduit aussitôt les assertions suivantes.

- La famille des anneaux $(A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)}$ constitue, lorsque (P, α) parcourt \mathbf{E} , un système inductif filtrant de A -algèbres locales, de corps résiduel k et d'idéal maximal engendré par \mathfrak{m} ; les morphismes de transition de ce système sont fidèlement plats, et en particuliers injectifs.

- L'anneau A^h est la limite inductive du système précédent.

(2.1.11.3) Soit B un anneau local hensélien et soit $A \rightarrow B$ un morphisme local. Soit $(P, \alpha) \in \mathbf{E}$; comme B est hensélien, le polynôme P possède dans B une unique racine relevant α . On en déduit immédiatement, à l'aide de la description de A^h donnée au 2.1.11.2 ci-dessus, qu'il existe un unique morphisme local de A -algèbres de A^h dans B .

(2.1.12) Supposons que A est normal, et soit $(P, \alpha) \in \mathbf{E}$. En tant que localisé d'une A -algèbre étale, l'anneau local $(A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)}$ est normal, et en particulier intègre. La fibre générique de $\mathrm{Spec} (A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)} \rightarrow \mathrm{Spec} A$ est intègre et de dimension nulle; elle est donc réduite au point générique de $\mathrm{Spec} (A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)}$.

Soit B une A -algèbre locale hensélienne et intègre telle que $A \rightarrow B$ soit injective. Le noyau de $(A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)} \rightarrow B$ est alors un idéal premier de $(A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)}$ situé au-dessus de l'idéal (0) de A . Par ce qui précède, ce noyau est nécessairement trivial; autrement dit, la flèche canonique $(A[T]/P)_{\mathfrak{n}(\alpha)} \rightarrow B$ est injective.

Ceci valant pour tout $(P, \alpha) \in \mathbf{E}$, l'anneau A^h est normal, et s'injecte dans B .

2.2 Algèbre commutative graduée

Dans son article publié dans *Israel Journal of Maths.*, Temkin a développé une théorie de la *réduction des germes d'espaces analytiques*, extrêmement efficace pour l'étude locale des espaces de Berkovich, et dont nous ferons un usage abondant dans la suite. Elle repose sur le formalisme de l'*algèbre commutative graduée*, et sur la *réduction graduée* des algèbres normées.

Par ailleurs, l'algèbre commutative graduée et la réduction graduée se sont révélées particulièrement adaptées à l'étude des extensions de corps valués. D'une part, elles permettent souvent une présentation unifiée de raisonnements qui jusqu'alors nécessitaient de considérer séparément le corps résiduel et le groupe des valeurs; d'autre part, elles fournissent une description particulièrement agréable des extensions modérément ramifiées, lesquelles jouent un rôle absolument crucial dans notre mise au jour de la structure locale des courbes analytiques: en quelque sorte, ces extensions sont à la réduction graduée ce que les extensions non ramifiées sont à la réduction classique.

En conséquence, nous allons, dans cette section, présenter succinctement le formalisme de l'algèbre commutative graduée, et les avatars gradués d'un certain nombre de théorèmes d'algèbre commutative usuelle, la plupart du temps

sans démonstrations – celles-ci étant en général des retranscriptions *mutatis mutandis* des preuves classiques. Puis nous referons en détail, en utilisant systématiquement la réduction graduée, toute la théorie des extensions algébriques de corps valués : groupes de décomposition, d'inertie et de ramification, hensélisation, extensions non ramifiées et modérément ramifiées.

Mentionnons que nous avons choisi une approche un peu inhabituelle de l'algèbre graduée, qui diffère notamment de celle de Temkin. Celui-ci considère un anneau gradué comme un anneau A muni d'une décomposition en somme directe $A = \bigoplus A_r$, où r parcourt un groupe abélien. Mais comme en pratique il n'arrive *jamais*, pour le type de problème que nous aurons à considérer ici, que l'on ait à additionner deux éléments (non nuls) appartenant à des sommandes distincts, il nous a semblé plus simple de remplacer les sommes directes par des *réunions disjointes* : cela ne change sur le fond strictement rien aux énoncés ni à leurs preuves, et permet d'éviter les répétitions fastidieuses de l'adjectif «homogène», indispensables lorsqu'on s'en tient à la définition traditionnelle.

De ce fait, les objets qui nous tiendront lieu d'anneaux gradués ne sont pas des anneaux (l'addition n'y est pas partout définie). Nous avons donc modifié la terminologie.

Généralités

On fixe un groupe abélien divisible D , noté multiplicativement (son élément neutre est en particulier noté 1) ; en pratique, D sera souvent égal à \mathbb{R}_+^\times .

(2.2.1) Un D -*annéloïde* (sous-entendu, commutatif et unitaire) est un ensemble A muni d'une décomposition $A = \coprod_{r \in D} A_r$, que l'on appelle *graduation*, et des données supplémentaires suivantes :

- pour tout $r \in D$, une loi interne $+$ sur A_r faisant de ce dernier un groupe abélien, d'élément neutre noté 0_r ;
- une loi interne commutative et associative \times sur A induisant pour tout $(r, s) \in D^2$ une application bilinéaire $A_r \times A_s \rightarrow A_{rs}$;
- un élément $1 \in A_1$ tel que $1 \cdot a = a$ pour tout $a \in A$.

(2.2.2) Soit A un D -annéloïde.

(2.2.2.1) Si $a \in A$, on appelle *degré* de a l'unique élément r de D tel que a appartienne à A_r .

(2.2.2.2) *Une convention.* Il arrivera fréquemment, lorsque la valeur de r est définie sans ambiguïté par le contexte, que l'on utilise le symbole 0 au lieu de 0_r . Par exemple, on se permettra le plus souvent d'écrire $a = 0$ au lieu de $a = 0_{\deg a}$.

On notera $A^{\neq 0}$ l'ensemble des éléments non nuls de A , c'est-à-dire la réunion disjointe des $A_r \setminus \{0_r\}$. Le sous-ensemble $\deg(A^{\neq 0})$ de D est non vide si et seulement si A est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $A \neq \coprod \{0\}_r$; cela revient à demander que $1 \neq 0$.

(2.2.2.3) Un élément a de A est dit *inversible* s'il possède un inverse pour la multiplication ; cet inverse est alors nécessairement unique, et sera en général noté a^{-1} . On désignera par A^\times l'ensemble des éléments inversibles de A ; il est stable sous la loi \times qui en fait un groupe abélien.

(2.2.2.4) Si B est un D -annéloïde, un morphisme de D -annéloïdes de A vers B est une application f de A vers B qui préserve le degré, qui est telle que l'application induite $A_r \rightarrow B_r$ soit un morphisme de groupes pour tout r , qui commute au produit et qui envoie 1 sur 1. On note $D\text{-Annel}$ la catégorie des D -annéloïdes.

(2.2.2.5) *Changement de groupes.* Soit D' un groupe divisible contenant D . Si B est un D -annéloïde, on note $B \odot_D D'$ le D' -annéloïde $B \coprod_{r \in D' \setminus D} \{0_r\}$; si C est un D' -annéloïde, on note C_D le D -annéloïde $\coprod_{r \in D} C_r$. Le couple

$$(B \mapsto B \odot_D D', C \mapsto C_D)$$

est un couple de foncteurs adjoints. Il induit une équivalence entre $D\text{-Annel}$ et la sous-catégorie pleine de $D'\text{-Annel}$ constituée des objets C tels que $\deg(C^{\neq 0})$ soit contenu dans D .

(2.2.2.6) En pratique, les propriétés que nous allons considérer dans ce texte seront invariantes par cette équivalence de catégories; il pourra donc arriver que l'on identifie subrepticement un D' -annéloïde dont toutes les composantes de degré appartenant à $D' \setminus D$ sont nulles au D -annéloïde correspondant.

(2.2.2.7) Si A est un D -annéloïde, le sommande A_1 est un anneau ordinaire. On définit par ce biais une équivalence entre la catégorie des anneaux et celle des $\{1\}$ -annéloïdes. La théorie des annéloïdes contient donc l'algèbre commutative ordinaire comme cas particulier.

À partir de maintenant, nous dirons «annéloïde» au lieu de « D -annéloïde».

(2.2.3) Soit A un annéloïde. Une A -algèbre est un annéloïde B muni d'un morphisme $A \rightarrow B$. Un idéal de A est une partie I de A stable par multiplication par tous les éléments de A , et telle que $I \cap A_r$ soit pour tout r un sous-groupe de A_r .

On définit de façon évidente le quotient de A par un idéal.

(2.2.4) Soit A un annéloïde. Si S est une partie multiplicative de A (i.e. S contient 1 et est stable par multiplication), la catégorie des A -algèbres dans lesquelles les éléments de S sont inversibles admet un objet initial, noté $S^{-1}A$. Pour tout $r \in D$, le sommande $(S^{-1}A)_r$ est constitué de fractions a/s avec $a \in A$, $s \in S$, et $\deg a / \deg s = r$. Si a/s et b/t sont deux telles fractions alors $(a/s) = (b/t)$ si et seulement si il existe $\sigma \in S$ vérifiant l'égalité $\sigma(at - bs) = 0$. Si $S = \{f^n\}_n$ pour un certain $f \in A$ on écrira A_f au lieu de $S^{-1}A$.

(2.2.5) Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'annéloïdes. L'image de f est un sous-annéloïde de B , en un sens évident. Son noyau I est l'ensemble des éléments a de A tels que $f(a) = 0$. C'est un idéal de A , et f induit un isomorphisme entre A/I et $f(A)$.

(2.2.6) Un annéloïde A est dit *intègre* s'il est non nul et si $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$. Si A est un annéloïde intègre, $\deg(A^{\neq 0})$ est un sous-monoïde unitaire de D .

(2.2.7) Un *corpoïde* est un annéloïde non nul dans lequel tout élément non nul est inversible. Si K est un corpoïde, $\deg(K^\times) = \deg(K^{\neq 0})$ est un sous-groupe de D .

Un corps est intègre; si A est un anneau intègre et si S désigne l'ensemble des éléments non nuls de A , le localisé $K := S^{-1}A$ est un corps, appelé *corps des fractions* de A , dont les éléments sont de la forme a/b , où a et b sont deux éléments de A , et où b est non nul. Tout plongement de A dans un corps se factorise d'une unique manière par K .

Tout morphisme d'un corps dans un anneau non nul est injectif.

(2.2.8) Soit A un anneau. Un idéal I de A est dit *premier* (resp. *maximal*) si A/I est intègre (resp. est un corps). Si I est un idéal strict de A , il est contenu dans un idéal maximal; en particulier, tout anneau non nul possède un idéal maximal (appliquer ce qui précède à l'idéal nul $\coprod\{0_r\}$).

(2.2.9) Un anneau est dit *local* s'il possède un et un seul idéal maximal. Soit A un anneau et soit \mathfrak{p} un idéal premier de A ; posons $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Le localisé $S^{-1}A$ est un anneau local, qui sera le plus souvent noté $A_{\mathfrak{p}}$.

(2.2.10) Spectre d'un anneau. Soit A un anneau. On note $\text{Spec } A$ l'ensemble des idéaux premiers de A , muni de la topologie dite de Zariski, dont les fermés sont exactement les $V(I) =: \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p} \subset I\}$ où I est un idéal de A . On vérifie aussitôt qu'une base d'ouverts de $\text{Spec } A$ est constituée des parties de la forme $D(f) := \{\mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{p}\}$ où $f \in A$. On a $\text{Spec } A = \emptyset$ si et seulement si $A = \{0\}$.

(2.2.10.1) Comme en théorie de schémas classiques, on préfère penser à $\text{Spec } A$ comme à un espace topologique dont chaque point *correspond* à un idéal premier de A . Soit $x \in \text{Spec } A$ et soit \mathfrak{p} l'idéal premier correspondant. On note $\kappa(x)$ le corps $\text{Frac } A_{\mathfrak{p}}$, qui est appelé le *corps résiduel* de x ; et $f \mapsto f(x)$ le morphisme naturel de A dans $\kappa(x)$.

On peut dès lors écrire $V(I) = \{x \in \text{Spec } A, f(x) = 0 \forall x \in I\}$ pour tout idéal I de A , et $D(f) = \{x \in \text{Spec } A, f(x) \neq 0\}$ pour toute $f \in A$.

(2.2.10.2) Si B est un anneau et si $\varphi: A \rightarrow B$ est un morphisme, la formule $\mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ définit une application continue de $\text{Spec } B$ vers $\text{Spec } A$; si $y \in \text{Spec } B$ et si x désigne son image sur $\text{Spec } A$, on dispose d'un plongement naturel $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(y)$.

Pour tout idéal I de A la flèche naturelle $\text{Spec } A/I \rightarrow \text{Spec } A$ identifie $\text{Spec } A/I$ au fermé $V(I)$ de $\text{Spec } A$, en préservant les corps résiduels: pour tout $f \in A$ la flèche naturelle $\text{Spec } A_f \rightarrow \text{Spec } A$ identifie $\text{Spec } A_f$ à l'ouvert $D(f)$ de $\text{Spec } A$, en préservant les corps résiduels.

(2.2.10.3) Soit $f \in A$.

Dire que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \text{Spec } A$ signifie que f n'appartient à aucun idéal premier de A ; cela revient à demander qu'elle n'appartienne à aucun idéal strict de A , c'est-à-dire encore que $(f) = A$. Autrement dit, $D(f) = \text{Spec } A$ si et seulement si $f \in A^\times$.

Dire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \text{Spec } A$, c'est-à-dire que f appartient à tous les idéaux premiers de A , revient à demander que $\text{Spec } A_f \simeq D(f) = \emptyset$ et donc que $A_f = \{0\}$; mais la description explicite de A_f au moyen de fractions assure que c'est le cas si et seulement si f est nilpotent.

(2.2.10.4) Si A est intègre l'idéal nul de A est premier, et le point correspondant de $\text{Spec } A$ est dense; en particulier, $\text{Spec } A$ est un espace topologique irréductible.

(2.2.11) Soit A un annéloïde et soit $\mathbf{r} = (r_i)$ une famille d'éléments de D . Posons $\mathbf{T} = (T_i)$. On note $A[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]$ l'annéloïde défini comme suit : pour tout s appartenant à D , le sommande $A[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]_s$ est constitué des sommes finies (formelles) $\sum a_I \mathbf{T}^I$ avec $a_I \in A_{s\mathbf{r}^{-I}}$ pour tout I ; les opérations sont définies de façon évidentes. Lorsqu'on voudra évoquer le degré usuel d'un élément de $A[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]$, on parlera de son degré *monomial*.

(2.2.11.1) Soit (b_i) une famille d'éléments d'une A -algèbre B , chaque b_i étant de degré r_i . Il existe un unique morphisme de A -algèbres de $A[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]$ vers B qui envoie T_i sur b_i pour tout i . Ce morphisme est noté $P \mapsto P(b_i)_i$, et est évidemment donné par la formule que cette notation suggère. Son image est la plus petite sous- A -algèbre de B contenant les b_i et sera notée $A[b_i]_i$; on dit que c'est la sous-algèbre de B engendrée par les b_i .

(2.2.11.2) On dit qu'une A -algèbre B est de *type fini* s'il existe une famille finie (b_i) d'éléments de B telle que $B = A[b_i]_i$.

(2.2.12) Soit K un corpoïde. Une *extension de K* est une K -algèbre qui est un corpoïde, c'est-à-dire encore un corpoïde L muni d'un plongement $K \hookrightarrow L$.

Si L est une extension de K et si $(x_i)_i$ est une famille d'éléments de L , la plus-petite sous-extension de L contenant les x_i s'identifie au corps des fractions de la K -algèbre $K[x_i]_i$, et sera noté $K(x_i)_i$.

(2.2.13) Soit K un corpoïde et soit \mathbf{r} un polyrayon. La K -algèbre $K[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]$ est intègre, et son corpoïde des fractions sera noté $K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$. On dira que \mathbf{r} est K -libre s'il constitue une famille libre de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (D/\deg(K^\times))$. Si \mathbf{r} est K -libre le corpoïde $K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$ est égal à $K[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}, \mathbf{r}\mathbf{T}^{-1}]$, c'est-à-dire au quotient de $K[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}, \mathbf{r}\mathbf{S}]$ par l'idéal $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{1})$.

(2.2.14) Soit K un corpoïde et soit $r \in D$. L'annéloïde intègre $K[T/r]$ est euclidien : si $P \in K[T/r]$ et si S est un élément non nul de $K[T/r]$, il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $K[T/r]$ tel que $P = SQ + R$ et tel que le degré monomial de R soit strictement inférieur à celui de P . On en déduit que l'annéloïde intègre $K[T/r]$ est principal, c'est-à-dire que ses idéaux sont monogènes. À ce titre, il satisfait la déclinaison dans notre cadre des propriétés arithmétiques usuelles des anneaux principaux : existence d'un PGCD, lemme de Gauß, existence et unicité de la décomposition d'un élément non nul en produit d'irréductibles (qui s'étend au corpoïde $K(T/r)$, à condition d'accepter les exposants négatifs).

Si $P \in K[T/r]$, une *racine* de P dans K est un élément x de K_r tel que $P(x) = 0$. On vérifie à l'aide de la division euclidienne qu'un élément x de K_r est une racine de P si et seulement si $T - x$ divise P ; on en déduit que si P est non nul et de degré monomial n , il a au plus n racines dans K , comptées avec multiplicités – la multiplicité d'une racine x de P est le plus grand entier e tel que $(T - x)^e$ divise P .

(2.2.15) Soit K un corpoïde.

(2.2.15.1) Soit $r \in D$. Le corpoïde $K(T/r)$ est de type fini comme K -algèbre si et seulement si r est K -libre.

En effet, si r est K -libre le corpoïde $K(T/r)$ est égal à $K[T/r, rT^{-1}]$ et il est donc engendré par T et T^{-1} comme K -algèbre.

Supposons maintenant que r est d'ordre fini n dans $D/\text{deg}(K^\times)$, et soit $\lambda \in K^\times$ tel que $r^n = \text{deg } \lambda$. Nous allons montrer par l'absurde que $K(T/r)$ n'est pas de type fini. On suppose donc qu'il est de type fini. Il est alors engendré par un nombre fini de fractions, et il existe donc une famille finie (P_1, \dots, P_n) d'éléments non nuls de $K[T/r]$ tels que tout élément de $K[T/r]$ puisse s'écrire comme une fraction ayant un dénominateur de la forme $\prod P_i^{n_i}$. Il s'ensuit, en vertu de la théorie de la décomposition des éléments de $K(T/r)^\times$ en produit d'éléments irréductibles (avec exposants éventuellement négatifs), que $K[T/r]$ n'a qu'un nombre fini d'éléments irréductibles.

Soit \mathcal{P} l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires appartenant à $K_1[r]$. On vérifie aussitôt que

$$\{P(T^n/\lambda)\}_{P \in \mathcal{P}}$$

est une ensemble d'éléments irréductibles deux à deux non associés de $K[T/r]$; il est infini puisque \mathcal{P} l'est, et l'on aboutit ainsi à une contradiction.

(2.2.15.2) Soit maintenant $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ une famille finie d'éléments de D . Nous allons montrer que le corpoïde $K(\mathbf{T}/\mathbf{r})$ est de type fini comme K -algèbre si et seulement si \mathbf{r} est K -libre.

Si \mathbf{r} est K -libre, la K -algèbre $K(\mathbf{T}/\mathbf{r})$ est de type fini : on le voit en combinant 2.2.15.1 et une récurrence triviale sur n .

Supposons que \mathbf{r} ne soit pas K -libre. Quitte à renuméroter les r_i , on peut supposer que r_n n'est pas $K(T_1/r_1, \dots, T_{n-1}/r_{n-1})$ -libre; il résulte alors de 2.2.15.1 que le corpoïde $K(\mathbf{T}/\mathbf{r})$ n'est pas de type fini comme $K(T_1/r_1, \dots, T_{n-1}/r_{n-1})$ -algèbre; il n'est *a fortiori* pas de type fini comme K -algèbre.

(2.2.16) Modules et espaces vectoriels. Soit A un annéloïde. On appelle A -module un ensemble M muni d'une décomposition $M = \coprod_{r \in D} M_r$, d'une structure de groupe abélien sur chacun des M_r , et d'une famille d'applications bilinéaires $A_r \times M_s \rightarrow M_{rs}$ telles que $a(bm) = (ab)m$ et $1m = m$ pour tout (a, b, m) . On dispose d'une notion évidente d'application linéaire graduée de degré donné r entre deux A -modules (une telle application multiplie le degré par r), de sous-module, de somme directe de modules, de produit tensoriel de modules, etc.

Si $r \in D$ on note $A(r)$ le A -module déduit de A par décalage de la graduation de sorte que $A(r)_s = A_{rs}$ pour tout s . Si M est un A -module et si (m_i) est une famille d'éléments de M de degrés respectifs r_i , il existe une unique application linéaire de degré 1 de $\bigoplus A(r_i^{-1})$ dans M qui envoie 1_i sur m_i pour tout i ; on dit que la famille (m_i) est libre (resp. génératrice, resp. une base) si cette application est injective (resp. surjective, resp. bijective). Un A -module est dit de type fini s'il admet une famille génératrice finie.

Si D' est un groupe abélien divisible contenant D et si M est un A -module, le $A \odot_D D'$ -module $M \odot_D D'$ est défini de façon évidente.

Si K est un corps, on parlera de K -espace vectoriel plutôt que de K -module gradué. Si M est un K -espace vectoriel, il possède une base, et toutes ses bases ont même cardinal; ce dernier est appelé la *dimension* de M .

(2.2.17) Soit A un anneau, soit B une A -algèbre et soit M un B -module. Une A -dérivation de B dans M est une application A -linéaire $d : B \rightarrow M$ de degré 1 telle que $da = 0$ pour tout $a \in A$ et

$$d(bb') = b db' + b' db$$

pour tout couple (b, b') d'éléments de B . La catégorie des B -modules munis d'une A -dérivation de source B admet un objet initial que l'on note $\Omega_{B/A}$; c'est le *module des différentielles de B sur A* .

(2.2.18) On dispose d'un avatar du lemme de Nakayama : si A est un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{m} et si le A -module \mathfrak{m} est de type fini, une famille finie (m_i) d'éléments de \mathfrak{m} engendre \mathfrak{m} si et seulement si les classes des m_i engendrent le k -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, où $k = A/\mathfrak{m}$. Le cardinal minimal d'une famille génératrice de \mathfrak{m} est donc égal à la dimension de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(2.2.19) Soit A un anneau et soit B une A -algèbre. Soit $b \in B$ et soit r son degré. La plus petite sous- A -algèbre de B contenant b est l'ensemble $A[b]$ des éléments de la forme $P(b)$ où $P \in A[T/r]$. On dit que b est *entier sur A* s'il existe un entier n et un élément $P \in A[T/r]_{r^n}$ unitaire et de degré monomial égal à n tel que $P(b) = 0$; si b n'est pas nilpotent, un tel P n'est pas un monôme, ce qui force r à appartenir à $\deg(A^{\neq 0})^{\mathbb{Q}}$ (écrire l'égalité des degrés de deux monômes distincts de P). Si b est entier, la A -algèbre $A[b]$ est *finie*, c'est-à-dire finie comme A -module. Réciproquement, on voit aisément, *via* par exemple grâce à un avatar gradué du théorème de Cayley-Hamilton, que si b vit dans une sous- A -algèbre de B qui est finie, b est entier sur A . Lorsque A est un corps, on emploiera l'adjectif «algébrique» de préférence à «entier». L'ensemble des éléments de B entiers sur A est une sous- A -algèbre de B que l'on appelle la *fermeture intégrale* de A dans B .

(2.2.20) Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

(2.2.20.1) Comme dans le cas classique, on démontre que si f est injective, si A et B sont intègres et si la A -algèbre B est entière (*i.e.* constituée d'éléments entiers), alors A est un corps si et seulement si B est un corps.

(2.2.20.2) Par des méthodes standard, on déduit de 2.2.20.1 le lemme de *going-up*, dont voici l'énoncé. Supposons que la A -algèbre B est entière. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de A , et soit \mathcal{P} l'ensemble des idéaux premiers \mathfrak{q} de l'anneau B tels que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

1) Si $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}$ alors \mathfrak{q} est un idéal maximal de B si et seulement si \mathfrak{p} est un idéal maximal de A .

2) Les éléments de \mathcal{P} sont deux à deux non comparables pour l'inclusion.

3) Si \mathfrak{p}' est un idéal premier de A contenant \mathfrak{p} et si $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}$, il existe un idéal premier \mathfrak{q}' de B contenant \mathfrak{q} tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$.

Extensions de corps, degré de transcendance et théorie de Galois

(2.2.21) Soit K un corps et soit A une K -algèbre. Soit (x_i) une famille d'éléments de A . Pour tout i , on note r_i le degré de x_i . On dit que les x_i sont *algébriquement indépendants sur K* si $P(x_i) \neq 0$ pour tout élément non nul P de $K[\mathbf{T}/\mathbf{r}]$; notons que la famille vide est algébriquement indépendante sur K si et seulement si A est non nulle. Si x est un élément de F on dira qu'il est *transcendant sur K* si la famille singleton $\{x\}$ est algébriquement indépendante; l'élément x est transcendant si et seulement si il n'est pas algébrique. Il est algébrique si et seulement si $K[x]$ est de dimension finie sur K .

(2.2.22) Soit $K \hookrightarrow F$ une extension de corps.

(2.2.22.1) Un élément x de F est algébrique sur K si et seulement si $K[x]$ est un corps. L'ensemble des éléments de F algébriques sur K est un sous-corps de F . On dit que F est une extension *algébrique* de K si tous les éléments de F sont algébriques sur K ; notons que si c'est le cas, $\deg(F^\times)/\deg(K^\times)$ est de torsion.

Si F est une extension algébrique de K , on notera $\text{Gal}(F/K)$ le groupe des K -automorphismes de F .

(2.2.22.2) Soit x un élément de F algébrique sur K , et soit r son degré. On appelle *polynôme minimal* de x sur K l'unique générateur unitaire de l'anneau de x dans $k[T/r]$. Il est irréductible; son degré monomial est simplement appelé le *degré de x sur K* , et il coïncide avec la dimension du K -espace vectoriel $K[x]$.

(2.2.22.3) Une *base de transcendance* de F sur K est une famille maximale d'éléments de F algébriquement indépendants sur K .

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de F telle que F soit algébrique sur $K(x_i)_i$ et si J est un sous-ensemble de I tel que les x_i pour i parcourant J soient algébriquement indépendants sur K , il existe par le lemme de Zorn un sous-ensemble J' de I contenant J , tel que les x_i pour i parcourant J' soient algébriquement indépendants sur K , et qui est maximal pour cette propriété. On vérifie que $(x_i)_{i \in J'}$ est une base de transcendance de L sur K .

Il existe donc des bases de transcendance de L sur K : il suffit d'appliquer ce qui précède à n'importe quelle famille $(x_i)_{i \in I}$ énumérant tous les éléments de F et au sous-ensemble $J = \emptyset$ de I .

On démontre que toutes les bases de transcendance de F sur K ont le même cardinal, appelé le *degré de transcendance de F sur K* .

(2.2.23) Soit K un corps. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- Le corps K n'admet aucune extension algébrique stricte.
- Pour tout $r \in D$, tout polynôme non nul appartenant à $K[T/r]$ est scindé dans K .
- Pour tout $r \in D$, tout polynôme appartenant à $K[T/r]$ et de degré monomial strictement positif a une racine dans K .

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que K est *algébriquement clos*.

(2.2.24) Le Nullstellensatz gradué. Soit K un corps et soit F une extension de K . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe une famille finie et K -libre \mathbf{r} d'éléments de D telle que F soit isomorphe (comme extension de K) à une extension finie de $K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$;
- ii) la K -algèbre F est de type fini.

En effet, si i) est vraie alors comme $K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$ est une K -algèbre de type fini (2.2.15.2), la K -algèbre F est de type fini et ii) est vraie.

Supposons ii) vraie et choisissons une famille génératrice finie (t_1, \dots, t_n) de la K -algèbre F . Quitte à renuméroter les t_i , on peut supposer qu'il existe m tel que les t_i pour $i \leq m$ soient algébriquement indépendants sur K , et tel que pour tout $j \leq m$, l'élément t_j soit algébrique sur $K(t_i)_{1 \leq i \leq m}$. Pour tout $i \leq m$, posons $r_i = \deg t_i$. Le corps F est alors fini sur $K(t_i)_{i \leq m} \simeq K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$; il suffit pour conclure de démontrer que \mathbf{r} est K -libre, c'est-à-dire encore en vertu de 2.2.15.2 que la K -algèbre $K(t_i)_{i \leq m} \simeq K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$ est de type fini.

Pour tout $j > m$, l'élément t_j de F est algébrique sur $K(t_i)_{i \leq m}$, et est donc entier sur un localisé $(K[t_i]_{i \leq m})_{f_j}$ de $K[t_i]_{i \leq m}$ pour un certain f_j non nul de $K[t_i]_{i \leq m}$. Si l'on note f le produit des f_j chacun des t_j est entier sur $(K[t_i]_{i \leq m})_f$, et F est donc entière sur $(K[t_i]_{i \leq m})_f$. Comme F est un corps, $(K[t_i]_{i \leq m})_f$ est un corps (2.2.20.1). Puisque

$$K[t_i]_{i \leq m} \subset (K[t_i]_{i \leq m})_f \subset K(t_i)_{i \leq m},$$

il vient

$$(K[t_i]_{i \leq m})_f = K(t_i)_{i \leq m}$$

et ce dernier est donc une K -algèbre de type fini, ce qui achève la démonstration.

(2.2.25) Soit A une K -algèbre de type fini. Notons $(\text{Spec } A)_\circ$ le sous-ensemble de $\text{Spec } A$ constitué des points x tels que $\kappa(x)$ soit une extension finie de $K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{t})$ pour une certaine famille finie K -libre \mathbf{r} d'éléments de D . Soit E un sous-ensemble de $\text{Spec } A$ qui est une combinaison booléenne finie d'ouverts et fermés de $\text{Spec } A$; il est alors non vide si et seulement si son intersection avec $(\text{Spec } A)_\circ$ est non vide.

En effet, supposons que E soit non vide ; nous allons montrer que E rencontre $(\text{Spec } A)_\circ$. L'ensemble E est réunion finie de parties de la forme $U \cap F$, où U et F sont respectivement ouverts et fermés dans $\text{Spec } A$; l'une de ces parties est donc non vide, ce qui permet de supposer que E lui-même est de la forme $U \cap F$ avec U et F comme ci-dessus.

On peut écrire $F = V(I)$ pour un certain idéal I de A , et F s'identifie dès lors au spectre de la K -algèbre de type fini A/I , avec préservation des corps résiduels. En remplaçant A par A/I , on se ramène au cas où $F = \text{Spec } A$ et où E est ouvert. Il est dès lors réunion de parties de la forme $D(f)$ avec $f \in A$; l'une de ces parties est donc non vide, ce qui permet de supposer que E lui-même est de la forme $D(f)$ avec $f \in A$. Il s'identifie dès lors au spectre de la K -algèbre de type fini A_f , avec préservation des corps résiduels. On peut maintenant, quitte à remplacer A par A_f , se ramener au cas où $E = \text{Spec } A$.

Puisque E est non vide, A est non nul et possède donc un idéal maximal. Si x désigne le point correspondant de $\text{Spec } A$ alors le corps $\kappa(x)$ est un quotient de A , et donc une K -algèbre de type fini. Le Nullstellensatz établi au 2.2.23 ci-dessus assure alors que $x \in (\text{Spec } A)_\circ$.

(2.2.26) On fixe un sous-groupe divisible Δ de D . Dans la pratique, ce qui suit sera le plus souvent appliqué lorsque $\Delta = \{1\}$.

(2.2.27) Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corps. On note $E_\Delta(L/K)$ le groupe $\deg(L^\times)/\deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$. Remarquons que $E_{\{1\}}(L/K)$ est simplement le groupe $\deg(L^\times)/\deg(K^\times)$.

(2.2.27.1) Soit \mathbf{a} un sous-ensemble de L^\times tel que $\deg(\mathbf{a})$ constitue un système de représentants de la flèche quotient $(\deg L^\times) \rightarrow E_\Delta(L/K)$, et soit \mathbf{b} une base de L_Δ sur K_Δ . Nous allons montrer que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est une base de L sur K , ce qui impliquera que

$$[L : K] = \text{card} E_\Delta(L/K) \cdot [L_\Delta : K_\Delta],$$

et en particulier que

$$[L : K] = (\deg(L^\times) : \deg(K^\times)) \cdot [L_1 : K_1].$$

La famille $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est libre. Soit $r \in D$, et soient $(\lambda_{a,b})_{a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}}$ une famille d'éléments de K presque tous nuls tels que $\deg(\lambda_{a,b}) = r(\deg a)^{-1}(\deg b)^{-1}$ pour tout (a, b) . Supposons que $\sum \lambda_{a,b} ab = 0$. Comme les degrés des éléments de \mathbf{a} sont deux à deux distincts modulo $\deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$, on déduit de la famille d'égalités $\deg(\lambda_{a,b}) = r(\deg a)^{-1}(\deg b)^{-1}$ qu'il existe $a_0 \in \mathbf{a}$ tel que $\lambda_{a,b}$ soit nul dès que $a \neq a_0$. Pour tout b , posons $\mu_b = \lambda_{a_0,b} a_0$. C'est un élément de K de degré $(\deg b)^{-1}$, et l'on a $\sum \mu_b b = 0$; comme \mathbf{b} est libre sur le corps K_D , il vient $\mu_b = 0$ pour tout b , et donc $\lambda_{a_0,b} = 0$ pour tout b . Finalement, on a bien $\lambda_{a,b} = 0$ pour tout (a, b) , ce qu'il fallait démontrer.

La famille $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est génératrice. Soit $x \in L^\times$. Il existe $a \in \mathbf{a}$ tel que $\deg x$ soit égal à $\deg a$ modulo $\deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$. On peut en conséquence écrire $x = \lambda ay$ avec $y \in L_\Delta$ et $\lambda \in K^\times$. Comme \mathbf{b} est une base de L_Δ sur K_Δ , on peut écrire $y = \sum \mu_b b$ où les μ_b appartiennent à K_Δ . Il vient $x = \sum_b \lambda \mu_b ab$, ce qui termine la preuve.

(2.2.27.2) Soit \mathcal{S} un système de représentants de D/Δ . Supposons que $\deg(L^\times) = \deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$ et soit F une sous-extension de L . On a alors $\deg(F^\times) = \deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(F^\times))$. Il s'ensuit, en vertu de 2.2.27.1 (ou par un calcul explicite direct) que $F = \prod_{r \in \mathcal{S}} F_\Delta \cdot K_r$. Les flèches

$$F \mapsto F_\Delta, \Lambda \mapsto \prod_{r \in \mathcal{S}} \Lambda \cdot K_r$$

établissent ainsi une bijection entre l'ensemble des sous-extensions de L et celui des sous-extensions de L_Δ .

(2.2.27.3) On ne suppose plus que $\deg(L^\times) = \deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$. Soit \mathbf{u} une base de transcendance de L_Δ sur K_Δ , et soit \mathbf{v} une partie de L^\times tels que $\deg(\mathbf{v})$ soit une base de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E_\Delta(L/K)$. Nous allons montrer que $\mathbf{u} \cup \mathbf{v}$ est une base de transcendance de L sur K , ce qui impliquera que

$$\deg \text{tr.}(L/K) = \deg \text{tr.}(L_\Delta/K_\Delta) + \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E_\Delta(L/K),$$

et en particulier que

$$\deg \text{tr.}(L/K) = \deg \text{tr.}(L_1/K_1) + \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\deg(L^\times)/\deg(K^\times)).$$

La famille $\mathbf{u} \cup \mathbf{v}$ est algébriquement indépendante. Soit $P \in K[|\mathbf{u}|^{-1}\mathbf{T}, |\mathbf{v}|^{-1}\mathbf{S}]$ tel que $P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Nous allons montrer que P est nul.

Les monômes qui constituent P ont tous même degré r ; comme $\deg(\mathbf{v})$ est une base de $\deg(L^\times)$ modulo $\deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$, il existe un monôme unitaire $Q \in K[\deg(\mathbf{v})^{-1}\mathbf{S}]$ et un élément R de $K[|\mathbf{u}|^{-1}\mathbf{T}]$ tels que $P = QR$. Comme Q est un monôme unitaire, on a $Q(\mathbf{v}) \neq 0$; par conséquent, $R(\mathbf{u}) = 0$. On peut écrire $R = \alpha R^\sharp$, où α est un élément non nul de K et où R^\sharp est somme de monômes dont tous les coefficients appartiennent à K_Δ . On a $R^\sharp(\mathbf{u}) = 0$; comme \mathbf{u} est une base de transcendance de L_Δ sur K_Δ , il vient $R^\sharp = 0$ et finalement $P = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Le corpoïde L est algébrique sur $K(\mathbf{u} \cup \mathbf{v})$. Soit $\lambda \in L^\times$. Comme $\deg(\mathbf{v})$ est une base de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E_\Delta(L/K)$, il existe un entier $n > 0$, un multi-indice J à coordonnées dans \mathbb{Z} , un élément $\alpha \in K^\times$ et un élément $\beta \in L_\Delta^\times$ tels que l'on ait $\lambda^n = \alpha\beta \cdot \mathbf{v}^J$. Comme $\beta \in L_\Delta$, il est algébrique sur $K_\Delta(\mathbf{u})$; par conséquent, λ est algébrique sur $K(\mathbf{u} \cup \mathbf{v})$, ce qui achève la démonstration

(2.2.27.4) Soit \mathbf{w} une partie de L_Δ l'engendrant (comme corpoïde) sur K_Δ , et soit \mathbf{g} une partie de L^\times telle que $\deg(\mathbf{g})$ engendre $E_\Delta(L/K)$. Le sous-ensemble $\mathbf{w} \cup \mathbf{g}$ de L engendre alors ce dernier sur K .

En effet, soit $\lambda \in L^\times$. Comme $\deg(\mathbf{g})$ engendre $E_\Delta(L/K)$, il existe un multi-indice J à coordonnées dans \mathbb{Z} , un élément α de K^\times et un élément β de L_Δ^\times tels que $\lambda = \alpha\beta \cdot \mathbf{g}^J$. Comme $\beta \in L_\Delta$, il appartient à $K_\Delta(\mathbf{w})$; par conséquent, λ appartient à $K(\mathbf{w} \cup \mathbf{g})$, ce qui achève la démonstration.

Notons le cas particulier où $\Delta = \{1\}$: si \mathbf{w} est une partie de L_1 l'engendrant (comme corps) sur K_1 , et si \mathbf{g} une partie de L^\times telle que $\deg(\mathbf{g})$ engendre $\deg(L^\times)$ modulo $\deg(K^\times)$, alors $\mathbf{w} \cup \mathbf{g}$ engendre L sur K .

(2.2.27.5) Supposons que L soit une extension algébrique de K , et soit p l'exposant caractéristique de K . On a alors équivalence entre les assertions suivantes :

- i) L est séparable sur K ;
- ii) L_Δ est séparable sur K_Δ , et $E_\Delta(L/K)$ est sans p -torsion.

En effet, supposons que i) soit vraie; le polynôme minimal sur K de tout élément de L est alors séparable. C'est en particulier vrai pour les éléments dont le degré appartient à Δ , et L_Δ est dès lors séparable sur K_Δ . Par ailleurs, soit $x \in L^*$ tel que $\deg(x^p)$ appartienne à $\deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$. Il existe alors $\ell \in L_\Delta$ et $\omega \in K$ tel que $x^p = \ell\omega$.

On en déduit que x est purement inséparable sur le sous-corpoïde $L_\Delta \cdot K$ de L . Le corpoïde L est par hypothèse séparable sur K , il l'est *a fortiori* sur $L_\Delta \cdot K$. En conséquence, $x \in L_\Delta \cdot K$; ceci implique que le degré de x appartient à $\deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$, et achève de prouver ii).

Supposons réciproquement que ii) soit vraie. Le sous-corpoïde $L_\Delta \cdot K$ de L est alors séparable sur K . Soit $x \in L^\times$. Il existe un entier m premier à p tel que $\delta(x)^m \in \deg(K^\times) \cdot (\Delta \cap \deg(L^\times))$. Il existe donc $\ell \in L_\Delta$ et $\omega \in K$ tel que $x^m = \ell\omega$; en conséquence, x est séparable sur $L_\Delta \cdot K$. Le corpoïde L est donc séparable sur $L_\Delta \cdot K$, lequel est lui-même séparable sur K ; dès lors, L est séparable sur K , ce qui termine la preuve de i).

(2.2.28) Soit K un corps. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) le corps K_1 est algébriquement clos et $\deg(K^\times)$ est divisible :
- ii) le corps K est algébriquement clos.

En effet, supposons i) vraie, et soit L une extension finie de K . D'après 2.2.27.1, le corps L_1 est une extension finie de K_1 , et est donc égal à K_1 puisque celui-ci est algébriquement clos ; et le groupe $\deg(L^\times)/\deg(K^\times)$ est fini, et donc trivial puisque $\deg K^\times$ est divisible. En utilisant à nouveau *loc. cit.*, il vient $[L : K] = 1$; ainsi, $L = K$, d'où ii).

Supposons que ii) soit vraie. Soit $P \in K_1[T]$ un polynôme unitaire non constant. On peut le voir comme un élément de $K[T]$; l'hypothèse ii) assure qu'il a une racine dans K , laquelle appartient à K_1 par définition (le degré de T a été choisi égal à 1) ; en conséquence, K_1 est algébriquement clos.

Soit $x \in K^\times$, soit r son degré et soit $n > 0$. Comme K est algébriquement clos, le polynôme $T^n - x \in K[T/r^{1/n}]$ a une racine y dans K . Par construction, $y \in K^\times$ et $\deg y = \deg x/n$. En conséquence, $\deg(K^\times)$ est divisible.

(2.2.29) Soit K un corps, soit (T_i) une famille d'indéterminées et soit (r_i) une famille d'éléments de D .

(2.2.29.1) Le corps K est algébriquement clos dans $K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$. Par un argument fondé sur le lemme de Zorn (ou une récurrence transfinitie), il suffit de traiter le cas où (T_i) est une famille singleton $\{T\}$, et (r_i) une famille singleton $\{r\}$. Soit $f \in K(r^{-1}T)$ un élément algébrique sur K ; il s'agit de montrer que $f \in K$. Si $f = 0$ c'est évident, on peut donc supposer f non nul ; soit s son degré. Il existe un polynôme unitaire $P \in K[X/s]$ tel que $P(f) = 0$; écrivons $P = \sum a_i T^i$. Comme $f \neq 0$ et comme P est irréductible, $a_0 \neq 0$. On note δ le degré *monomial* de P en la variable T ; il est nécessairement au moins égal à 1.

L'élément f est de la forme Q_0/Q_1 où les Q_i appartiennent à $K[T/s]$ et où $Q_1 \neq 0$; on peut supposer que les Q_i sont premiers entre eux. On a $P(f) = 0$; il vient

$$Q_0^n + a_{n-1}Q_0^{n-1}Q_1 + \dots + a_0Q_1^n = 0.$$

On en déduit que Q_0 divise $a_0Q_1^n$, et donc que Q_0 divise a_0 par le lemme de Gauß ; autrement dit, Q_0 est constant. De même Q_1 divise Q_0^n , donc divise 1 et est lui aussi constant, ce qui prouve que $f \in K$.

(2.2.29.2) Supposons que la famille (T_i) est finie. Le groupe quotient $\deg(K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})^\times)/\deg(K^\times)$ est alors de type fini, et l'extension de corps $K_\Delta \hookrightarrow K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})_\Delta$ est de type fini, et est transcendante pure.

Pour le voir, on se ramène, en raisonnant par récurrence, au cas où (T_i) est une famille singleton $\{T\}$, et (r_i) une famille singleton $\{r\}$. Il découle immédiatement de la définition de $K(r^{-1}T)$ que $\deg(K(r^{-1}T)^\times)$ est égal à $\deg(K^\times) \cdot r^{\mathbb{Z}}$, d'où la première assertion.

En ce qui concerne la seconde assertion, on distingue deux cas.

Le cas où r n'appartient pas au groupe divisible $\deg(K^\times)^\mathbb{Q} \cdot \Delta$. Le degré d'un monôme de $K[T/r]$ de la forme aT^i avec a et i non nuls ne peut alors appartenir à Δ ; il s'ensuit que $K(T/r)_\Delta = K_\Delta$.

Le cas où $r \in \deg(K^\times)^\mathbb{Q} \cdot \Delta$. Soit m l'ordre de r modulo $\deg(K^\times) \cdot \Delta$, et soit λ un élément de K de degré r^m modulo Δ . Posons $S = T^m/\lambda$; c'est un élément de $K(T/r)_\Delta$. Soit f un élément non nul de $K(T/r)_\Delta$. Il s'écrit P/Q , où P et Q sont deux éléments de $K[T/r]$, avec $Q \neq 0$. Soit p le degré de P et soit s celui de Q . Écrivons $p = p'r^i$ et $s = s'r^j$, où p' et s' appartiennent à $\deg(K^\times)$ et i et j à \mathbb{Z} . Soient a et b deux éléments de K^\times de degrés respectifs p' et s' . On peut alors écrire $P = aT^i P_0$ et $Q = bT^j Q_0$ avec P_0 et Q_0 de degré 1. Ainsi, $f = (a/b)T^{i-j}P_0/Q_0$.

Le degré de f est égal à $r^{i-j} \deg(a/b)$, et il appartient à Δ par définition de f . Par ailleurs, m est l'ordre de r modulo $\deg(K^\times) \cdot \Delta$. Il s'ensuit :

- que P_0 s'écrit $\sum a_i T^{mi}$, avec a_i de degré r^{-im} pour tout i , ou encore $\sum \alpha_i (T^m/\lambda)^i$ avec α_i de degré 1 pour tout i ;
- de même, que Q_0 s'écrit $\sum \beta_i (T^m/\lambda)^i$ avec β_i de degré 1 pour tout i ;
- que $i-j$ s'écrit $m\ell$ pour un certain ℓ , et que $(a/b)T^{i-j} = \lambda^\ell (a/b)(T^m/\lambda)^\ell$.

Comme le degré de f et celui de T^m/λ appartiennent à Δ , il en va de même du degré de $\lambda^\ell (a/b)$; en conséquence, $f \in K_\Delta(T^m/\lambda)$ et l'on a finalement $K(T/r)_\Delta = K_\Delta(T^m/\lambda)$.

(2.2.29.3) Soit L une extension de type fini de K , et soit (t_1, \dots, t_n) une base de transcendance de L sur K . Posons $F = K(t_1, \dots, t_n)$; le corps L est alors fini sur F .

En vertu du 2.2.29.2 ci-dessus, F_Δ est de type fini sur K_Δ , et $\deg(F^\times)$ est de type fini modulo $\deg(K^\times)$. Il résulte par ailleurs de 2.2.27.1 que L_Δ est fini sur F_Δ , et que $\deg(L^\times)$ est fini modulo $\deg(F^\times)$. Par conséquent, L_Δ est de type fini sur K_Δ , et $\deg(L^\times)/\deg(K^\times)$ est de type fini.

Réciproquement, supposons que L_Δ est de type fini sur K_Δ , et que $\deg(L^\times)/\deg(K^\times)$ est de type fini, ou même seulement que $E_\Delta(L/K)$ est de type fini. Il résulte alors de 2.2.27.4 que L est de type fini sur K .

(2.2.29.4) On suppose maintenant que K est algébriquement clos, c'est-à-dire que K_1 est algébriquement clos et que $\deg(K^\times)$ est divisible (2.2.28), et l'on désigne toujours par L une extension de type fini de K . Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- i) il existe une famille finie et k -libre \mathbf{r} d'éléments de D telle que L soit une extension finie de $K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$;
- ii) $L_1 = K_1$;
- iii) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \deg(L)/\deg(K^\times) = \deg.\text{tr}(L/k)$;
- iv) il existe une famille finie et k -libre \mathbf{s} d'éléments de D telle que L soit isomorphe à $K(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{T})$.

Il en effet clair que i) \Rightarrow ii), et ii) \iff iii) en vertu de 2.2.27.3 et du fait que K_1 est algébriquement clos.

Supposons maintenant que les propriétés équivalentes iii) et ii) soient satisfaites. Le quotient $\deg(L^\times)/\deg(K^\times)$ est un groupe abélien de type fini d'après 2.2.29.3, et est *sans torsion* puisque $\deg(K^\times)$ est divisible. Il est donc libre de rang fini. Choisissons un n -uplet (s_1, \dots, s_n) de $\deg(L^\times)^n$ qui soit une base de $\deg(L^\times)$ modulo $\deg(K^\times)$; pour tout i , soit $t_i \in L^\times$ tel que $\deg t_i = s_i$. Par construction, \mathbf{s} est K -libre, et le sous-corps $F := K(t_i)$ de L s'identifie à $K(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{T})$.

Il vient $F_1 = K_1 = L_1$, et $\deg(F^\times) = \deg(K^\times) \cdot s_1^{\mathbb{Z}} \cdot \dots \cdot s_n^{\mathbb{Z}} = \deg(L^\times)$. On déduit alors de 2.2.27.1 que $[L : F] = 1$, et donc que

$$L = F \simeq K(\mathfrak{s}^{-1}\mathbf{T}),$$

d'où iv). L'implication iv) \Rightarrow i) est triviale.

(2.2.30) Soit K un corps algébriquement clos et soient A et B deux K -algèbres réduites (resp. intègres). Nous allons montrer que $A \otimes_K B$ est réduit (resp. intègre).

(2.2.30.1) *Preuve dans un cas particulier.* On suppose que B est de la forme $K(\mathfrak{r}^{-1}\mathbf{T})$ pour une certaine famille finie et K -libre $\mathfrak{r} = (r_1, \dots, r_n)$ d'éléments de D . Le produit tensoriel $(A \otimes_K B)_r$ s'identifie pour tout $r \in D$ à l'ensemble des polynômes de la forme $\sum_{I \in \mathbb{Z}^n} a_I \mathbf{T}^I$ tels que $\deg(a_I) \mathbf{r}^I = r$ pour tout I . Un calcul immédiat montre alors que $A \otimes_K B$ est intègre (resp. réduit).

(2.2.30.2) *Preuve dans le cas général.* Un raisonnement standard fondé sur le passage à la limite inductive permet de se ramener au cas où les K -algèbres A et B sont de type fini.

Rappelons que $(\text{Spec } B)_\circ$ désigne l'ensemble des points $x \in \text{Spec } B$ tels que $\kappa(x)$ soit une extension finie de $K(\mathfrak{r}^{-1}\mathbf{T})$ pour une certaine famille finie et K -libre \mathfrak{r} d'éléments de D ; mais comme K est algébriquement clos, il revient au même, en vertu de 2.2.29.4, de demander que $\kappa(x)$ soit isomorphe à $K(\mathfrak{r}^{-1}\mathbf{T})$ pour une certaine famille finie et K -libre \mathfrak{r} d'éléments de D . Fixons une base (a_i) de A comme K -espace vectoriel.

Supposons A et B réduits. Soit f un élément nilpotent de $A \otimes_K B$; écrivons $f = \sum a_i \otimes b_i$ avec les $b_i \in B$. Pour tout $x \in (\text{Spec } B)_\circ$, l'élément $\sum a_i \otimes b_i(x)$ de $A \otimes_K \kappa(x)$ est nilpotent; comme $A \otimes_K \kappa(x)$ est réduit d'après le cas particulier traité au 2.2.30.1, on a $\sum a_i \otimes b_i(x) = 0$, et donc $b_i(x) = 0$ pour tout i puisque les $a_i \otimes 1$ forment une base du $\kappa(x)$ -espace vectoriel $A \otimes_K \kappa(x)$.

On a ainsi montré que $b_i(x) = 0$ pour tout i et tout $x \in (\text{Spec } B)_\circ$. Il s'ensuit d'après 2.2.25 que $V(b_i) = \text{Spec } B$ pour tout i , c'est-à-dire que chacun des b_i est nilpotent. Comme B est réduit les b_i sont tous nuls, $f = 0$ et $A \otimes_K B$ est réduit.

Supposons A et B intègres. Ils sont alors en particulier non nuls, et $A \otimes_K B$ est donc non nul. Soient maintenant f et g deux éléments de $A \otimes_K B$ tels que $fg = 0$. Écrivons $f = \sum a_i \otimes b_i$ et $g = \sum a_i \otimes c_i$ où les b_i les c_i appartiennent à B . Posons $F = V(b_i)_i \subset \text{Spec } B$, et $G = V(c_i)_i$.

Soit $x \in (\text{Spec } B)_\circ$. On a $(\sum a_i \otimes b_i(x))(\sum a_i \otimes c_i(x)) = 0$ dans $A \otimes_K \kappa(x)$; comme $A \otimes_K \kappa(x)$ est intègre d'après le cas particulier traité au 2.2.30.1, on a $\sum a_i \otimes b_i(x) = 0$ ou $\sum a_i \otimes c_i(x) = 0$; puisque les $a_i \otimes 1$ forment une base du $\kappa(x)$ -espace vectoriel $A \otimes_K \kappa(x)$, il s'ensuit que l'une au moins des deux familles $(b_i(x))_i$ et $(c_i(x))_i$ est nulle. Autrement dit, $x \in F \cup G$.

Il en résulte que le fermé $F \cup G$ de $\text{Spec } B$ contient $(\text{Spec } B)_\circ$; il est de ce fait égal à $\text{Spec } B$ en vertu de 2.2.25. Puisque B est intègre, $\text{Spec } B$ est irréductible, et il est donc égal à F ou G . S'il est égal à F on a $V(b_i) = \text{Spec } B$ pour tout i , et chacun des b_i est dès lors nilpotent et partant nul (puisque B est intègre); il vient $f = 0$. De même, on a $g = 0$ si $\text{Spec } B = G$, ce qui achève la démonstration.

(2.2.31) Soit K un corpoïde, soit $r \in D$ et soit P un élément irréductible de $K[T/r]$. Un *corpoïde de rupture* de P est une extension F de K (i.e. une K -algèbre qui est un corpoïde) engendrée par une racine de P . Si P est un élément non nul de $K[T/r]$, un *corpoïde de décomposition* de P est une extension de K dans laquelle P est scindé, et qui est engendrée par les racines de P .

Si P est un élément irréductible de $K[T/r]$, il admet un corpoïde de rupture, à savoir $K[T/r]/(P)$; on en déduit que si P est un élément non nul de $K[T/r]$, il admet un corps de décomposition. Combiné avec un raisonnement fondé sur le lemme de Zorn, ceci entraîne l'existence d'une *clôture algébrique* de K , c'est-à-dire d'une extension algébrique L de K telle que pour tout $r \in D$, tout élément non nul P de $L[T/r]$ soit scindé dans L .

(2.2.32) Soit K un corpoïde, soit A une K -algèbre et soit L une extension de K . L'ensemble E des applications K -linéaires de A dans L est un K -espace vectoriel, gradué par le degré des applications. Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des morphismes deux à deux distincts de A dans L , ils forment une famille libre dans E : c'est l'avatar gradué du lemme d'indépendance des caractères. On en déduit, en appliquant ce lemme sur le corpoïde L à la famille des application $\psi_i : L \otimes_K A \rightarrow L$ induites par les φ_i , que si A est de dimension finie d sur k , il existe au plus d morphismes de A dans L .

(2.2.32.1) En particulier, si F est une extension finie de K , l'ensemble des K -plongements de F dans L est fini, de cardinal majoré par $[F : K]$.

(2.2.32.2) Supposons de plus que F soit un corpoïde de décomposition d'un élément P non nul de $K[T/r]$ pour un certain r . Dans ce cas, si P est scindé (resp. scindé à racines simples) dans L il y a au moins un (resp. exactement $[F : K]$) plongement(s) de F dans L . Cela peut se démontrer par récurrence sur $[F : K]$, le point clef étant que si Q est un élément irréductible de $K[T/r]$ alors $T \mapsto \varphi(\bar{T})$ établit une bijection entre $\text{Hom}_K(K[T/r]/Q, L)$ et l'ensemble des racines de Q dans L .

(2.2.32.3) Il s'ensuit que deux corpoïdes de décomposition d'un même élément non nul P de $K[T/r]$ sont isomorphes; on en déduit, à l'aide du lemme de Zorn, que deux clôtures algébriques de K sont isomorphes.

(2.2.33) *Algèbres étales.* Soit K un corpoïde et soit \bar{K} une clôture algébrique de K .

(2.2.33.1) Si $r \in D$, un élément non nul P de $K[T/r]$ est dit *séparable* s'il est premier à son polynôme dérivé P' (qui est de degré s/r si P est de degré s); il revient au même de demander que les racines de P dans \bar{K} soient toutes simples, ou encore que $\bar{K}[T/r]/P$ soit réduit. Si P est irréductible, il est séparable si et seulement si $P' \neq 0$; en général, P est séparable si et seulement si il n'a que des facteurs irréductibles simples et eux-mêmes séparable.

Soit L une extension algébrique de K et soit $x \in L$. On dit que x est *séparable* sur K si son polynôme minimal est séparable.

On dit que L est séparable sur K si tous ses éléments sont séparables sur K .

(2.2.33.2) Si A est une K -algèbre finie, elle est isomorphe à un produit fini de K -algèbres locales artiniennes (i.e. dont l'idéal maximal est constitué d'éléments nilpotents). Si A est locale, si \mathfrak{m} désigne son idéal maximal et si $A/\mathfrak{m} = K$ alors $\Omega_{A/K}$ s'identifie au dual de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(2.2.33.3) On en déduit à l'aide du lemme de Nakayama gradué que pour une \overline{K} -algèbre finie locale (resp. finie quelconque) A les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) A est réduite ;
- 2) A est égale à \overline{K} (resp. est le produit d'un nombre fini de copies de \overline{K}) ;
- 3) $\Omega_{A/\overline{K}} = 0$.

(2.2.33.4) Si A est une K -algèbre finie, on dit que A est *étale* si $\Omega_{A/K} = 0$.

Par ce qui précède, il revient au même de demander que $\overline{K} \otimes_K A$ soit réduite, ou encore que $\overline{K} \otimes_K A$ soit un produit fini de copies de \overline{K} .

Indiquons quelques propriétés qui résultent immédiatement de la définition.

Si A est une K -algèbre étale, elle est réduite (puisqu'elle se plonge dans $\overline{K} \otimes_K A$) et est donc un produit de corps.

Si A et B sont deux K -algèbres finies, $A \times B$ est étale si et seulement si A et B sont étales.

Si A est une K -algèbre étale et si B est une sous-algèbre de A alors B est étale : cela résulte du fait que $\overline{K} \otimes_K A$ est alors une sous-algèbre de $\overline{K} \otimes_K B$, et est en particulier réduite.

(2.2.33.5) Il résulte de ce qui précède qu'une K -algèbre finie est étale si et seulement si elle s'écrit comme un produit d'extensions finies de K qui sont étales. Pour comprendre ce que sont les K -algèbres étales, il suffit donc de comprendre à quelle condition une extension finie L de K est étale. Soit donc L une extension finie de K .

Supposons que L soit étale, soit x un élément de L dont on note r le degré et soit P son polynôme minimal. En tant que sous-algèbre de L , la K -algèbre graduée $K[x] \simeq K[T/r]/P$ est étale, c'est-à-dire qu'elle reste réduite après extension des scalaires à \overline{K} ; par conséquent, P est séparable. On en conclut que L est séparable.

Réciproquement, soit L une extension finie de K engendrée comme K -algèbre par une famille finie (x_1, \dots, x_n) d'éléments séparables sur K . Pour tout i , notons P_i le polynôme minimal de x_i . Comme x_i est séparable, P'_i est premier à P_i et $P'_i(x_i)$ est donc non nul ; l'égalité $P_i(x_i) = 0$ entraîne que $P'_i(x_i)dx_i = 0$ et donc que $dx_i = 0$; ceci valant pour tout i , on a $\Omega_{L/K} = 0$, et L est étale.

Ainsi, une K -algèbre finie est étale si et seulement si elle s'écrit comme un produit fini d'extensions séparables de K . Et pour qu'une extension finie L de K soit séparable, il suffit qu'elle soit engendrée par une famille finie d'éléments séparables.

(2.2.33.6) Énonçons maintenant quelques conséquences de ce qui précède.

Si L est une extension finie séparable de K et si F est une extension finie séparable de L alors F est une extension finie séparable de K .

Si L est une extension quelconque de K , l'ensemble des éléments de L séparables sur K est une extension algébrique de K appelée *fermeture séparable* de K dans L ; celle-ci ne possède aucune extension séparable stricte dans L .

Si L est une extension algébrique de K , la fermeture séparable de K dans L est réduite à K si et seulement si L est une extension *radicielle* de K , c'est-à-dire

si et seulement si le polynôme minimal de tout élément de L est de la forme $T^p - a$ où $a \in K$ et où p est l'exposant caractéristique de K .

La fermeture séparable K^s de K dans \bar{K} est une extension séparable de K n'admettant aucune extension finie séparable stricte. Une telle extension est appelée une *clôture séparable de K* ; deux clôtures séparables de K sont isomorphes.

(2.2.34) Soit L une extension de K et soit G un groupe fini d'automorphismes de L ; supposons que $L^G = K$. Soit $x \in L$ et soit r son degré. Soit P l'élément $\prod_{y \in G.x} (T - y)$ de $L[T/r]$; il est de degré $r^{\text{card}(G.x)}$. Le polynôme P est invariant sous G et appartient donc à $K[T/r]$; il est scindé à racines simples dans L et annule x ; par conséquent, x est séparable sur K , et $G.x$ engendre une sous-extension de L finie et séparable sur K qui est stable sous G .

Ainsi, L est réunion de ses sous-extensions finies et séparables sur K stables sous G . Soit F l'une d'elle et soit n sa dimension sur K . Le groupe G agit sur $\bar{K} \otimes_K F \simeq \bar{K}^n$; il découle de l'égalité $L^G = K$ que l'ensemble des éléments de $\bar{K} \otimes_K F \simeq \bar{K}^n$ invariants sous G est la diagonale $\bar{K} \cdot (1, \dots, 1)$.

Par ailleurs, le groupe des automorphismes de la \bar{K} -algèbre \bar{K}^n s'identifie à \mathfrak{S}_n , agissant par permutation des facteurs : cela résulte (par exemple) du fait que les éléments de la forme $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ de \bar{K}^n sont ses idempotents non nuls minimaux, et sont donc permutés par tout automorphisme. Comme la sous-algèbre de \bar{K}^n formée des éléments invariants sous G est égale à la diagonale, G agit transitivement sur $\{1, \dots, n\}$, ce qui oblige n à être inférieur ou égal au cardinal de G ; ainsi, $[F : K] \leq \text{card}(G)$.

Par conséquent, L est une extension finie séparable de K , et l'on a la majoration $[L : K] \leq \text{card}(G)$. Comme par ailleurs G se plonge dans le groupe des K -automorphismes de L , lequel a un cardinal borné par $[L : K]$, on en déduit que $[L : K] = \text{card}(G)$ et que G est égal au groupe des K -automorphismes de L .

(2.2.35) Les ingrédients sont désormais réunis pour disposer d'une théorie de Galois graduée, qui se déduit formellement de tout ce qui précède. Nous allons en donner une formulation classique, et une plus catégorique, fidèle au point de vue de Grothendieck.

(2.2.35.1) *La formulation classique pour les extensions finies.* Soit K un corps et soit L une extension de K . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un groupe fini G d'automorphismes de L tel que $K = L^G$;
- ii) l'extension graduée L/K est finie, séparable, et normale (ce qui signifie que si x est un élément de L , son polynôme minimal P est scindé dans L);
- iii) il existe $r \in D$ et un élément non nul et séparable P de $K[T/r]$ tel que L soit un corps de décomposition de P sur K .

De plus si i) est vraie alors $G = \text{Gal}(L/K)$ et $[L : K] = \text{card}(G)$, et si ii) ou iii) est vraie alors $K = L^{\text{Gal}(L/K)}$.

Lorsqu'une extension L de K satisfait ces conditions équivalentes, on dit qu'elle est *finie galoisienne*. Si L est une extension finie galoisienne de K , on dispose sur L de la *correspondance de Galois* : les applications $H \mapsto L^H$ et $F \mapsto \text{Gal}(L/F)$ établissent une bijection décroissante entre l'ensemble des sous-groupes de $\text{Gal}(L/K)$ et celui des sous-extensions de L/K .

Si H est un sous-groupe de $\text{Gal}(L/k)$ et si F est la sous-extension qui lui correspond, F est une extension galoisienne de K si et seulement si H est un sous-groupe distingué de $\text{Gal}(L/K)$, ce qui revient à demander que F soit stable sous $\text{Gal}(L/K)$; si c'est le cas, la restriction des automorphismes induit un isomorphisme $\text{Gal}(L/K)/H \simeq \text{Gal}(F/K)$.

(2.2.35.2) *La formulation classique, pour les extensions quelconques.* Soit L une extension algébrique de K et soit G le groupe $\text{Gal}(L/K)$. Soit $x \in L$. Son orbite sous G est constituée d'éléments annulés par le polynôme minimal de x , et elle est donc finie; il s'ensuit que L est réunion de ses sous-extensions finies stables sous G , puis que G est isomorphe à la limite projective des $\text{Gal}(F/K)$ où F parcourt l'ensemble des sous-extensions finies de K . C'est donc un groupe profini.

On dit que L est galoisienne si elle est séparable et normale. On suppose à partir de maintenant que c'est le cas. Soient x_1, \dots, x_r des éléments de L , soit \mathcal{P} l'ensemble (et non la famille) des polynômes minimaux des x_i et soit P le produit des éléments de \mathcal{P} . Il résulte de notre hypothèse sur L que P est scindé à racines simples dans L ; la sous-extension de L engendrée par les racines de P est par construction finie galoisienne, et stable sous l'action de G .

Les faits suivants se démontrent par passage à la limite à partir du cas des extensions finies galoisiennes. Les applications $H \mapsto L^H$ et $F \mapsto \text{Gal}(L/F)$ établissent une bijection décroissante entre l'ensemble des sous-groupes fermés de $\text{Gal}(L/K)$ et celui des sous-extensions de L/K .

Si H est un sous-groupe fermé de $\text{Gal}(L/k)$ et si F est la sous-extension qui lui correspond, F est une extension galoisienne de K si et seulement si H est un sous-groupe distingué de $\text{Gal}(L/K)$, ce qui revient à demander que F soit stable sous $\text{Gal}(L/K)$; si c'est le cas, la restriction des automorphismes induit un isomorphisme $\text{Gal}(L/K)/H \simeq \text{Gal}(F/K)$.

(2.2.35.3) *La formulation catégorique de la théorie de Galois.* Soit G le groupe $\text{Gal}(K^s/K)$; notons qu'il coïncide avec $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ (cela provient du fait qu'une extension radicielle n'a pas d'automorphismes non triviaux).

Le foncteur $A \mapsto \text{Hom}_K(A, K^s)$ établit une équivalence entre la catégorie des K -algèbres étales et celle des G -ensembles discrets finis (un G -ensemble discret est un ensemble muni d'une action continue de G pour laquelle les stabilisateurs sont ouverts).

(2.2.36) *Remarque.* Ainsi, la théorie de Galois classique survit à peu près mot pour mot dans le contexte gradué. Mentionnons toutefois un théorème qui n'est plus vrai : celui de l'élément primitif; nous allons en effet construire un contre-exemple à celui-ci.

Soit F un corps, et soit K le corpoïde tel que $K_1 = F$ et $K_r = \{0_r\}$ pour tout $r \neq 1$. Soit (r, s) une famille libre du \mathbb{Q} -espace vectoriel D , et soit L le corpoïde $K[T/r, rT^{-1}, S/s, sS^{-1}]$. Soit n un entier strictement supérieur à 1 et inversible dans F , et soit L' la L -algèbre $L[U/r^{1/n}, V/s^{1/n}]/(U^n - T, V^n - S)$.

On vérifie aisément que L' est une extension graduée finie et séparable de degré n^2 de L . Soit $x \in L'$; il est de la forme $aU^mV^{m'}$ où $a \in L$; par conséquent, $x^n \in L$ et x ne peut engendrer L' qui est de degré n^2 sur L .

(2.2.37) Lemme. *Soit K un corpoïde et soit L une extension normale de K .*

i) Le corps L_1 est alors une extension normale de K_1 , qui est galoisienne si L est galoisienne.

ii) La restriction $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(L_1/K_1)$ est surjective.

iii) Si $g \in \text{Gal}(L/K)$ agit trivialement sur L_1 alors pour tout $x \in L^\times$, l'élément $g(x)/x$ de L_1^\times ne dépend que de $\deg x$, et l'on construit par ce biais un isomorphisme

$$\text{Ker}(\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(L_1/K_1)) \simeq \text{Hom}(\deg(L^\times)/\deg(K^\times), L_1^\times).$$

Démonstration. Supposons L est normale (resp. normale et séparable sur K), et soit $x \in L_1$. Le polynôme minimal de x appartient par définition à $K_1[T]$. En vertu de notre hypothèse sur L , il est scindé (resp. scindé à racines simples) dans L . Comme ses racines appartiennent nécessairement à L_1 , il est scindé (resp. scindé à racines simples) dans L_1 , et L_1 est une extension normale (resp. normale et séparable) de K_1 , ce qui achève de prouver i).

Le sous-corpoïde L_1K de L est égal à $\coprod_{r \in D} L_1K_r$. Il en résulte que tout K -automorphisme de L stabilise L_1K , et que tout K_1 -automorphisme de L_1 s'étend d'une unique manière en un K -automorphisme de L_1K .

Autrement dit, L_1K est une sous-extension galoisienne de L , et $\text{Gal}(L_1K/K)$ s'identifie *via* la restriction à $\text{Gal}(L_1/K_1)$. L'assertion ii) découle dès lors de la surjectivité de $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(L_1K/K)$.

Nous allons maintenant prouver iii). Pour tout $d \in \deg(L^\times)/\deg(K^\times)$, posons

$$\Lambda_d = \coprod_{r \in \deg(L^\times), r \equiv d \pmod{\deg(K^\times)}} L_r.$$

Pour tout $d \in \deg(L^\times)/\deg(K^\times)$, le groupe $(L_1K)^\times$ agit sur Λ_d , et l'ensemble des éléments non nuls de Λ_d est un tore sous $(L_1K)^\times$. Remarquons par ailleurs que $L^\times \subset \coprod \Lambda_d$.

Soit ψ un morphisme de groupes de $\deg(L^\times)/\deg(K^\times)$ dans L_1^\times . Il existe un unique automorphisme g_ψ de L qui agit pour tout d sur Λ_d par multiplication par $\psi(d)$; l'action de g_ψ sur Λ_1 étant triviale, l'automorphisme g_ψ appartient à $\text{Gal}(L/L_1K)$.

La flèche $\psi \mapsto g_\psi$ est visiblement un morphisme de groupes injectif de $\text{Hom}(\deg(L^\times)/\deg(K^\times), L_1^\times)$ vers $\text{Gal}(L/L_1K)$. Il suffit pour conclure de montrer que ce morphisme est surjectif.

Soit $\varphi \in \text{Gal}(L/L_1K)$ et soit $d \in \deg(L^\times)/\deg(K^\times)$. Si x et y sont deux éléments non nuls de Λ_d , leur quotient appartient à L_1K et l'on a donc $\varphi(x)/\varphi(y) = x/y$; ceci implique l'existence d'un élément $\psi(d)$ de $(L_1K)^\times$ tel que $\varphi(x) = \psi(d)x$ pour tout $x \in \Lambda_d$; cette égalité appliquée à n'importe quel élément non nul x de Λ_d force le degré de $\psi(d)$ à être égal à 1, et l'on a donc $\psi(d) \in L_1^\times$. Comme φ commute à la multiplication, on a nécessairement $\psi \in \text{Hom}(\deg(L^\times)/\deg(K^\times), L_1^\times)$; par construction, $\varphi = g_\psi$. \square

(2.2.38) On conserve les hypothèses et notations du lemme 2.2.37 ci-dessus.

(2.2.38.1) Le noyau de la surjection $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(L_1/K_1)$ étant abélien, l'action extérieure de $\text{Gal}(L_1/K_1)$ sur celui-ci est une vraie action; il résulte alors de sa construction que l'isomorphisme de iii) est $\text{Gal}(L_1/K_1)$ -équivariant.

(2.2.38.2) Comme L est une extension algébrique de K , le groupe $\deg(L^\times)/\deg(K^\times)$ est de torsion. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Hom}(\deg(L^\times)/\deg(K^\times), L_1^\times) = \mathrm{Hom}(\deg(L^\times)/\deg(K^\times), \mu(L_1)),$$

où μ désigne le foncteur des racines de l'unité.

(2.2.38.3) Soit p l'exposant caractéristique de K . Désignons par E le groupe quotient $\deg(L^\times)/\deg(K^\times)$. Pour tout entier $n > 0$, on note $n_{p'}$ le plus grand diviseur premier à p de n ; si A est un groupe abélien de torsion, on note $A_{p'}$ sa partie de torsion première à p .

Supposons que L est une extension finie de K . On pose $c = \mathrm{card}(\mathrm{Gal}(L/K))$ et $c_1 = \mathrm{card}(\mathrm{Gal}(L_1/K_1))$, et l'on note d le cardinal du groupe $\mathrm{Hom}(E, \mu(L_1))$. Le groupe multiplicatif de L_1 étant sans p -torsion, l'entier d est premier à p , et $\mathrm{Hom}(E, \mu(L_1)) = \mathrm{Hom}(E_{p'}, \mu(L_1))$. Comme l'extension L est une extension normale de K , on a $[L : K]_{p'} = c_{p'}$; et puisque L_1 est une extension normale de K_1 en vertu du lemme 2.2.37, il vient aussi $c_{1,p'} = [L_1 : K_1]_{p'}$. On déduit par ailleurs du même lemme et de 2.2.38.2 que $c = c_1 d$, puis que $c_{p'} = c_{1,p'} d$. On a également $[L : K] = [L_1 : K_1] \cdot \mathrm{card} E$ (2.2.27.1). En conséquence,

$$[L : K]_{p'} = [L_1 : K_1]_{p'} \cdot \mathrm{card} E_{p'} = c_{1,p'} \cdot \mathrm{card} E_{p'}.$$

Comme on a d'autre part $[L : K]_{p'} = c_{p'} = c_{1,p'} d$, il vient $d = \mathrm{card} E_{p'}$.

Autrement dit, on obtient *tous* les caractères de $E_{p'}$ par plongement dans L_1^\times . Cela signifie que si a désigne l'exposant de $E_{p'}$, le polynôme $T^a - 1$ est scindé dans L_1 . Tout plongement de $\mu(L_1)$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} induit un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}(E, \mu(L_1)) = \mathrm{Hom}(E_{p'}, \mu(L_1))$ et le dual $E_{p'}^\vee$ de $E_{p'}$ (qui est lui-même isomorphe, non canoniquement sauf cas triviaux, à $E_{p'}$).

(2.2.38.4) On ne suppose plus que L est finie sur K . Par passage à la limite, on déduit les faits suivant du 2.2.38.3 ci-dessus :

- si a divise l'exposant généralisé de $E_{p'}$, le polynôme $T^a - 1$ est scindé dans L_1 ;
- tout plongement de $\mu(L_1)$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} induit un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}(E, \mu(L_1))$ et le dual de Pontrjagin $E_{p'}^\vee$ de $E_{p'}$.

Valuations

(2.2.39) Soit K un corps, et soient A et B deux sous-annéloïdes locaux de K . On dit que B domine A si $A \subset B$ et si l'idéal maximal de A est contenu dans celui de B .

Soit A un sous-annéloïde de K . Nous allons montrer qu'il est maximal pour la relation de domination si et seulement si il possède la propriété suivante : *pour tout élément non nul x de K , on a $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$* (notons qu'elle entraîne que K est le corps des fractions de A).

(2.2.39.1) Supposons que pour tout élément non nul x de K , on a $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$, et soit B un sous-annéloïde local de K dominant A . Soit $x \in B$. Supposons que $x \notin A$. On a alors par hypothèse $x^{-1} \in A$.

Comme $x \notin A$, l'élément x^{-1} de A est non inversible. Il appartient donc à l'idéal maximal de A , et partant à celui de B ; mais cela contredit l'appartenance

de $x = (x^{-1})^{-1}$ à B . Ainsi, $x \in A$. Il s'ensuit que $B \subset A$, et donc que $B = A$. En conséquence, A est maximal pour la relation de domination.

(2.2.39.2) Supposons que A est maximal pour la relation de domination. Soit $x \in K$, soit r son degré, et soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de A . Nous allons montrer que $x \in A$, ou que $x \neq 0$ et $x^{-1} \in A$.

Supposons que $A[x]/\mathfrak{m}A[x]$ est non nul. Il possède alors un idéal maximal, dont l'image réciproque dans $A[x]$ est un idéal premier \mathfrak{n} de ce dernier, contenant \mathfrak{m} . Le localisé $A[x]_{\mathfrak{n}}$ est un sous-annéloïde local de K dominant A ; par maximalité, il est égal à A et l'on a donc $x \in A$.

Supposons que $A[x]/\mathfrak{m}A[x] = 0$. On a en particulier $1 \in \mathfrak{m}A[x]$, ce qui veut dire que l'on peut écrire $1 = a_0 + \sum_{i \geq 1} a_i x^i$ où les a_i appartiennent à \mathfrak{m} , et où

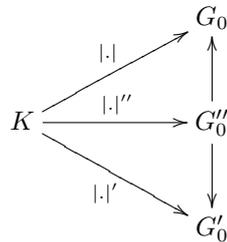
chaque a_i est de degré r^{-i} . Comme $a_0 \in \mathfrak{m}$, l'élément $1 - a_0$ de A est inversible; en faisant passer a_0 à gauche puis en multipliant par $(1 - a_0)^{-1}$ les deux membres de l'égalité, on se ramène au cas où $a_0 = 0$.

Comme $1 = \sum_{i \geq 1} a_i x^i$ on a $x \neq 0$. Si N est le plus grand exposant de x apparaissant dans le membre de droite, on voit en divisant l'égalité par x^N que $1/x$ est entier sur A . Le *going-up* assure alors que $A[1/x]$ possède un idéal maximal \mathfrak{n} dont l'intersection avec A est égale à \mathfrak{m} . Le localisé $A[1/x]_{\mathfrak{n}}$ est un sous-annéloïde local de K dominant A , c'est donc A lui-même et il s'ensuit que $(1/x) \in A$.

(2.2.40) Soit K un corpoïde. Soit G un groupe abélien totalement ordonné, noté multiplicativement. On désigne par G_0 le monoïde ordonné obtenu en adjoignant formellement à G un plus petit élément absorbant 0. Une *valuation* sur K à valeurs dans G_0 est une application $|\cdot|$ de K vers G_0 , où 0 est un

- $|1| = 1$, $|0_r| = 0$ pour tout r , et $|ab| = |a| \cdot |b|$ pour tout (a, b) (ce qui implique que $|a| \neq 0$ dès que $a \neq 0$);
- pour tout $r \in D$ et tout couple (a, b) d'éléments de K_r on a l'inégalité ultramétrique $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$.

Deux valuations $|\cdot| : K \rightarrow G_0$ et $|\cdot|' : K \rightarrow G'_0$ sont dites *équivalentes* s'il existe une valuation $|\cdot|'' : K \rightarrow G''_0$ et deux morphismes strictement croissants $G'' \hookrightarrow G$ et $G'' \hookrightarrow G'$ tels que le diagramme



commute.

(2.2.40.1) Soit $|\cdot|$ une valuation sur K . L'ensemble des éléments x de K tels que $|x| \leq 1$ est un sous-annéloïde $\mathcal{O}_{|\cdot|}$ de K , qui est appelé *l'annéloïde de $|\cdot|$* . L'annéloïde $\mathcal{O}_{|\cdot|}$ est un annéloïde local; son idéal maximal est l'ensemble des éléments x de K tels que $|x| < 1$.

Il résulte immédiatement de la définition d'une valuation que si x est un élément non nul de K alors $x \in \mathcal{O}_{|\cdot|}$ ou $x^{-1} \in \mathcal{O}_{|\cdot|}$.

Réciproquement, soit A un sous-annéloïde local de K tel que l'on ait $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$ pour tout $x \in K^\times$. Le groupe quotient $G := K^\times/A^\times$ possède alors un ordre dont les éléments ≤ 1 sont exactement les classes d'éléments non nuls de A , et la flèche $K \rightarrow G_0$ obtenue en prolongeant la flèche quotient $K^\times \rightarrow G$ est une valuation d'annéloïde A .

Il est immédiat que ces constructions établissent une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de valuations sur K et celui des sous-annéloïdes locaux A de K tels que $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$ pour tout $x \in K^\times$, c'est-à-dire encore celui des sous-annéloïdes locaux de K maximaux pour la relation de domination (cf. 2.2.39 et sq.).

(2.2.40.2) La valuation *triviale* sur K est celle dont l'annéloïde est K tout entier ; elle envoie tout élément non nul sur 1.

(2.2.40.3) Soit $K \hookrightarrow F$ une extension de corpoïdes et soit $|\cdot|$ une valuation sur K . Il résulte du lemme de Zorn que tout sous-annéloïde local de F est dominé par un sous-annéloïde local maximal pour la relation de domination, donc par l'annéloïde d'une valuation. C'est en particulier le cas de l'annéloïde de $|\cdot|$; en conséquence, la valuation $|\cdot|$ admet un prolongement à F .

(2.2.40.4) Soit K un corpoïde valué et soit G un groupe ordonné contenant $|K^\times|$. Soit $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de D , et soit $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de G (indexée par le même ensemble que \mathbf{d}). La formule

$$\sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I| \cdot \mathbf{r}^I$$

définit une valuation (dite *de Gauß*) sur $K(\mathbf{d}^{-1}\mathbf{T})$; on la notera $\eta_{K,\mathbf{d},\mathbf{r}}$, ou parfois simplement $\eta_{K,\mathbf{r}}$ ou même $\eta_{\mathbf{r}}$ si le contexte est suffisamment clair.

(2.2.40.5) Soit $K \hookrightarrow F$ une extension de corpoïdes et soit $|\cdot|$ une valuation sur F . Soit t un élément de F^\times algébrique sur K , et soit $P = \sum a_i T^i$ son polynôme minimal. L'égalité $\sum a_i t^i = 0$ entraîne l'existence de deux entiers i et j distincts tels que $|a_i t^i| = |a_j t^j|$; il s'ensuit qu'il existe un entier $n > 0$, majoré par le degré de t sur K , tel que $|t|^n \in |K^\times|$. Il s'ensuit aussi que si la restriction de $|\cdot|$ à K est triviale, alors $|\cdot|$ est elle-même triviale.

(2.2.40.6) Soit $K \hookrightarrow F$ une extension de corpoïdes et soit $|\cdot|$ une valuation sur K . Soit G un groupe ordonné contenant $|K^\times|$, soit (t_i) une famille d'éléments de F algébriquement indépendants sur K et soit (r_i) une famille d'éléments de G . Il existe alors une valuation sur F à valeurs dans $G_0^{\mathbb{Q}}$, prolongeant $|\cdot|$ et envoyant t_i sur r_i pour tout i .

En effet, quitte à agrandir les familles (t_i) et (r_i) , on peut supposer que (t_i) est une famille algébriquement indépendante maximale de F sur K , et donc que F est algébrique sur son sous-corpoïde $K(t_i)_i$. On choisit alors un prolongement quelconque à F de la valuation de Gauß $\eta_{\mathbf{r}}$ sur $K(t_i)_{i \in I}$; il résulte du 2.2.40.5 ci-dessus que ledit prolongement est à valeurs dans $G_0^{\mathbb{Q}}$.

En particulier, $|\cdot|$ admet un prolongement à F à valeurs dans $|K|^{\mathbb{Q}}$: il suffit d'appliquer ce qui précède en prenant pour (t_i) et (r_i) les familles *vides*.

(2.2.41) Soit F un corpoïde. On note \mathbb{P}_F l'espace de Riemann-Zariski de F , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de valuations de K . Pour toute partie X de \mathbb{P}_F et tout sous-ensemble A de F , on note $X\{A\}$ (resp. $X\{\{A\}\}$) le sous-ensemble de X formé des valuations $|\cdot|$ dont l'annéloïde (resp. l'idéal maximal) contient A ou, si l'on préfère, telles que $|a| \leq 1$ (resp. $|a| < 1$) pour tout $a \in A$. On munit \mathbb{P}_K de la topologie engendrée par les parties de la forme $\mathbb{P}_K\{A\}$ où A est fini.

Soient A et B deux sous-ensembles de F ; posons $X = \mathbb{P}_F\{A\}\{\{B\}\}$, et munissons-le de la topologie induite. Il est quasi-compact : cela résulte du fait qu'il est fermé dans $\mathbb{P}_F\{A\}$, et que ce dernier est quasi-compact. On qualifiera d'*affine* tout ouvert de X de la forme $X\{C\}$ où C est un sous-ensemble fini de K ; remarquons que X est lui-même affine (prendre $C = \emptyset$).

Soit K un sous-corpoïde de F et soit $|\cdot|$ une valuation de K . Soit A (resp. \mathfrak{m}) l'annéloïde de $|\cdot|$ (resp. l'idéal maximal de $|\cdot|$). Le sous-ensemble $\mathbb{P}_F\{A\}\{\{\mathfrak{m}\}\}$ de \mathbb{P}_K est alors l'ensemble des valuations qui prolongent $|\cdot|$. On le notera le plus souvent $\mathbb{P}_{F/(K,|\cdot|)}$, ou simplement $\mathbb{P}_{F/K}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valuation de K ; lorsque celle-ci n'est pas précisée, K sera implicitement considéré comme muni de la valuation triviale.

(2.2.42) **Valuations classiques.** Soit K un corps. On peut le voir comme un $\{1\}$ -corpoïde, et dès lors définir une valuation sur K au sens de la section précédente. Il n'y a pas de conflit de terminologie : une telle valuation est précisément une valuation (de Krull) usuelle sur K . Les espaces \mathbb{P}_K et $\mathbb{P}_{K/(K_0,|\cdot|)}$ (où K_0 est un sous-corps de K muni d'une valuation de Krull $|\cdot|$) sont eux-mêmes les espaces de Riemann-Zariski usuels; si K est une extension de type fini de K_0 , l'espace topologique $\mathbb{P}_{K/(K_0,|\cdot|)}$ s'identifie à la limite projective des fibres spéciales de tous les modèles intègres, propres et plats du corps K sur $\text{Spec } \mathcal{O}_{|\cdot|}$.

Réduction à la Temkin

On désigne toujours par D un groupe abélien divisible; on fixe par ailleurs un groupe abélien divisible *ordonné* G . Dans ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, les annéloïdes seront des D -annéloïdes, et les valuations des valuations à valeurs dans G_0 .

(2.2.43) Soit A un annéloïde. Une *semi-norme* $\|\cdot\|$ sur A est une application de A dans G_0 qui satisfait les axiomes suivants :

- $\|0\| = 0$ et $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ pour tout $(a, b) \in A^2$;
- $\|a + b\| \leq \max(\|a\|, \|b\|)$ pour tout $r \in D$ et tout $(a, b) \in A_r^2$.

(2.2.43.1) *Exemples.* Si K est un corpoïde, toute valuation sur K est une semi-norme, et même une norme (*i.e* son noyau est trivial). Plus généralement, donnons-nous une famille finie (K_i) de corpoïdes, chacun des K_i étant muni d'une valuation. L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \max |x_i|$ est alors une semi-norme sur $\prod K_i$.

(2.2.44) Soit A un annéloïde muni d'une semi-norme $\|\cdot\|$. Pour tout (r, g) appartenant à $D \times G$, on note $A_{r, \leq g}$ (resp. $A_{r, < g}$) le sous-groupe additif de A_r formé des éléments a tels que $\|a\| \leq g$ (resp. $\|a\| < g$). Nous désignerons par \tilde{A} la réduction de A au sens de Temkin, c'est-à-dire le $(D \times G)$ -annéloïde $\prod_{(r, g) \in D \times G} A_{r, \leq g} / A_{r, < g}$. Si $a \in A$ et si g est un élément de G tel

que $\|a\| \leq g$, on notera \tilde{a}_g l'image de a dans $\tilde{A}_{\deg a, g}$; si $g = \|a\|$, on écrira simplement \tilde{a} .

La formation de \tilde{A} est fonctorielle en A pour les morphismes contractants d'annéloïdes semi-normés; notons qu'un morphisme isométrique d'annéloïdes semi-normés induit une injection entre les annéloïdes résiduels correspondants.

(2.2.45) Soit K un corpoïde muni d'une valuation $|\cdot|$, soit $\mathcal{O}_{|\cdot|}$ l'annéloïde correspondant, et soit $\mathfrak{m}_{|\cdot|}$ son idéal maximal.

(2.2.45.1) Le $(D \times G)$ -annéloïde \tilde{K} est alors un corpoïde, appelé *corpoïde résiduel* de K ; le corpoïde quotient $\mathcal{O}_{|\cdot|}/\mathfrak{m}_{|\cdot|}$ s'identifie à $\tilde{K}_{D \times \{1\}}$. Le groupe $\deg(\tilde{K}^\times)$ est égal à $(\deg, |\cdot|)(K^\times)$.

(2.2.45.2) Soit A une K -algèbre munie d'une semi-norme $\|\cdot\|$ compatible avec la valuation de K . Soit (a_i) une famille d'éléments de A telle que $\|a_i\| \neq 0$ pour tout i . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) on a $\|\sum \lambda_i a_i\| = \max |\lambda_i| \cdot \|a_i\|$ pour toute famille (λ_i) d'éléments de K presque tous nuls et tels que les $\lambda_i a_i$ aient tous même degré (dans la suite, nous dirons simplement qu'une telle famille (λ_i) est *adaptée* à (a_i)).
- ii) (\tilde{a}_i) est une famille libre du \tilde{K} -espace vectoriel \tilde{A} .

Pour le voir, posons $g_i = \|a_i\|$ pour tout i . La propriété i) est *fausse* si et seulement si il existe $h \in G$, et une famille (λ_i) de scalaires adaptée à (a_i) telle que $|\lambda_i| \leq h g_i^{-1}$ pour tout i , telle que $|\lambda_i| = h g_i^{-1}$ pour au moins un i , et telle que $\|\sum \lambda_i a_i\| < h$. Mais cela revient à demander qu'il existe une famille (μ_i) d'éléments de \tilde{K} adaptée à (\tilde{a}_i) telle que l'un au moins des μ_i soit non nul, et telle que l'élément $\sum \mu_i \tilde{a}_i$ de \tilde{A} soit nul (prendre $\mu_i = \tilde{\lambda}_{i h g_i^{-1}}$). Autrement dit, cela revient à nier que (\tilde{a}_i) soit libre sur \tilde{K} . Ainsi, i) est fausse si et seulement si ii) est fausse, ce qu'il fallait démontrer.

(2.2.45.3) Soit (x_i) une base de \tilde{A} sur \tilde{K} . Chaque x_i est alors non nul, donc de la forme \tilde{a}_i pour un certain a_i de norme non nulle dans A . Comme (a_i) satisfait ii) par construction, elle satisfait i) et est dès lors libre. Il s'ensuit que $\dim_{\tilde{K}} \tilde{A} \leq \dim_K A$.

(2.2.45.4) Soit (t_i) une famille d'éléments de A . Pour tout i , on pose $r_i = \|t_i\|$ et l'on suppose que $r_i \neq 0$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- a) on a $\|\sum \lambda_I \mathbf{t}^I\| = \max |\lambda_I| \cdot \mathbf{r}^I$ pour toute famille (λ_I) adaptée à $(\mathbf{t})^I$;
- b) la famille $(\tilde{\mathbf{t}})$ est algébriquement indépendante sur \tilde{K} .

En effet, supposons que a) soit vérifiée. On en déduit pour commencer que $\|\mathbf{t}^I\| = \mathbf{r}^I$ pour tout I , et donc que $\|\sum \lambda_I \mathbf{t}^I\| = \max |\lambda_I| \cdot \|\mathbf{t}^I\|$ pour toute famille (λ_I) adaptée à \mathbf{t}^I . Il découle alors de 2.2.45.2 que $(\tilde{\mathbf{t}})$ est une famille libre sur \tilde{K} ; autrement dit, b) est vérifiée.

Réciproquement, supposons que b) soit vérifiée. On en déduit pour commencer que $\tilde{\mathbf{t}}^I$ est non nul pour tout I , c'est-à-dire que $\|\mathbf{t}^I\| = \mathbf{r}^I$ pour tout I .

Comme b) est vérifiée, $(\tilde{\mathbf{t}}^I)$ est libre sur \tilde{K} ; on déduit alors de 2.2.45.2 et de ce qui précède que $\|\sum \lambda_I \mathbf{t}^I\| = \max |\lambda_I| \cdot \|\mathbf{t}^I\| = \max |\lambda_I| \cdot \mathbf{r}^I$ pour toute famille (λ_I) adaptée à (\mathbf{t}^I) , d'où a).

(2.2.45.5) Remarquons que la propriété a) peut se reformuler en demandant que les t_i soient algébriquement indépendants sur K et que $\|\cdot\|_{K[\mathbf{t}]}$ soit égale à (la restriction de) la valuation de Gauß $\eta_{K, \deg(\mathbf{t}), \mathbf{r}}$.

Supposons que a), et partant b), soient satisfaites. Soit $f = \sum \lambda_I \mathbf{t}^I$ un élément non nul de $K[\mathbf{t}]$. Soit \mathcal{J} l'ensemble des indices I tels que $\|f\| = |\lambda_I| \mathbf{r}^I$. Posons $g = \sum_{I \in \mathcal{J}} \lambda_I \mathbf{t}^I$. On a alors en vertu de a) l'inégalité $\|f - g\| < \|f\|$; en conséquence, $\tilde{f} = \tilde{g} = \sum_{I \in \mathcal{J}} \tilde{\lambda}_I \tilde{\mathbf{t}}^I$. Ainsi, $\widetilde{K[\mathbf{t}]}$ est égal à $\widetilde{K[\tilde{\mathbf{t}}]}$. Comme $\tilde{\mathbf{t}}$ est une famille algébriquement indépendante sur \tilde{K} , la \tilde{K} -algèbre $\widetilde{K[\tilde{\mathbf{t}}]}$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $\tilde{K}[(\deg(\mathbf{t}), \mathbf{r})^{-1} \mathbf{T}]$.

(2.2.45.6) Supposons maintenant donnés deux éléments r et s de G avec $r \leq s$, et un élément t inversible de A tel que $\|\sum a_i t^i\| = \max\{|a_i| r^i, |a_i| s^i\}_i$ pour toute famille $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ adaptée à (t^i) . On a alors $\|t^i\| = s^i$ et $\|t^{-i}\| = r^{-i}$ pour tout $i \geq 0$, et $\|\sum a_i t^i\| = \max |a_i| \cdot \|t^i\|$ pour toute famille (a_i) adaptée à (t^i) .

Posons $\tau = \tilde{t}$ et $\sigma = \tilde{t}^{-1}$; on a par ce qui précède $\tilde{t}^i = \tau^i$ et $\tilde{t}^{-i} = \sigma^i$ pour tout $i \geq 0$.

On déduit alors de 2.2.45.2 que la famille \mathbf{b} formée des σ^i pour $i < 0$, de $\{1\}$ et des τ^i pour $i > 0$ est libre sur \tilde{K} . De plus, soit $f = \sum a_i t^i$ un élément non nul de $K[t, t^{-1}]$, et soit \mathcal{J} l'ensemble des indices i tels que $\|f\| = |a_i| \cdot \|t^i\|$. Posons $g = \sum_{i \in \mathcal{J}} a_i t^i$. On a alors en vertu de a) l'inégalité $\|f - g\| < \|f\|$; en conséquence,

$$\tilde{f} = \tilde{g} = \sum_{i \in \mathcal{J}, i < 0} \tilde{a}_i \sigma^{-i} + \sum_{i \in \mathcal{J}, i \geq 0} \tilde{a}_i \tau^i.$$

Ainsi, \mathbf{b} est une base de $\widetilde{K[t, t^{-1}]}$ sur \tilde{K} .

Le produit $\tau\sigma$ est égal par définition à $tt^{-1} \mathbf{1}_{s/r} = \tilde{\mathbf{1}}_{1, s/r}$; il est donc égal à 1 si $r = s$, et à $0_{1, s/r}$ sinon. Si l'on pose $g = (s^{-1}, \deg t^{-1})$ et $h = (r, \deg t)$ on dispose donc d'un morphisme naturel de $\widetilde{K[g^{-1}S, h^{-1}T]}/(TS - \varepsilon)$ vers $\widetilde{K[t, t^{-1}]}$ envoyant T sur τ et S sur σ , où ε est égal à 1 si $r = s$ et à $0_{1, r/s}$ sinon. Comme \mathbf{b} est une base de $\widetilde{K[t, t^{-1}]}$, ce morphisme est un isomorphisme.

(2.2.46) Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corps valués. Lorsqu'on parlera de *sous-extension* de \tilde{L} , c'est toujours à sa structure naturelle d'extension de \tilde{K} que l'expression fera référence.

(2.2.46.1) Si L est une extension finie de K alors \tilde{L} est une extension finie de \tilde{K} en vertu de 2.2.45.3. Il s'ensuit, par un argument de passage à la limite inductive, que si L est algébrique sur K , alors \tilde{L} est algébrique sur \tilde{K} .

(2.2.46.2) Posons $\delta = (\deg, |\cdot|) : L^\times \rightarrow D \times G$. Le groupe quotient

$$\deg(\tilde{L}^\times) / \left[(\deg(\tilde{K}^\times) \cdot ((D \times \{1\}) \cap \deg(\tilde{L}^\times))) \right]$$

est égal à

$$\delta(L^\times) / \left[\delta(K^\times) \cdot ((D \times \{1\}) \cap \delta(L^\times)) \right].$$

Le sous-groupe $\delta(K^\times) \cdot ((D \times \{1\}) \cap \delta(L^\times))$ de $D \times G$ est l'ensemble des éléments de la forme $(\deg z, |z|)$ avec $z \in L^\times$ et tels que $|z| \in |K^\times|$; en conséquence, le groupe quotient considéré ci-dessus s'identifie à $|L^\times| / |K^\times|$.

(2.2.46.3) Soit \mathbf{a} un sous-ensemble de L^\times tel que $|\mathbf{a}|$ constitue un système de représentants de $|L^\times|/|k^\times|$ et soit \mathbf{b} une base de $\widetilde{L}_{D \times \{1\}}$ sur $\widetilde{K}_{D \times \{1\}}$. Il résulte de 2.2.27.1 et de 2.2.46.2 que $\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \{\mathbf{b}\}$ est une base de \widetilde{L} sur \widetilde{K} ; on a donc $[\widetilde{L} : \widetilde{K}] = [\widetilde{L}_{D \times \{1\}} : \widetilde{K}_{D \times \{1\}}] \cdot (|L^\times| : |k^\times|)$.

Compte-tenu de 2.2.45.3, il vient

$$[L : K] \geq [\widetilde{L} : \widetilde{K}] = [\widetilde{L}_{D \times \{1\}} : \widetilde{K}_{D \times \{1\}}] \cdot (|L^\times| : |k^\times|).$$

(2.2.46.4) Soient d le degré de transcendance de $\widetilde{L}_{D \times \{1\}}$ sur $\widetilde{K}_{D \times \{1\}}$, et ρ la dimension du \mathbb{Q} -espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (|L^\times|/|k^\times|)$. Soit \mathbf{u} une base de transcendance de $\widetilde{L}_{D \times \{1\}}$ sur $\widetilde{K}_{D \times \{1\}}$, et soit \mathbf{v} une partie de L^\times tels que $|\mathbf{v}|$ soit une base de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (|L^\times|/|k^\times|)$. Il résulte de 2.2.27.3 et de 2.2.46.2 que $\mathbf{u} \cup \widetilde{\mathbf{v}}$ est une base de transcendance de \widetilde{L} sur \widetilde{K} . En conséquence, le degré de transcendance de \widetilde{L} sur \widetilde{K} est égal à $d + \rho$.

(2.2.46.5) Soit (t_i) une famille d'éléments de L^\times . Il résulte de 2.2.45.4 que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) les t_i sont algébriquement indépendants sur K , et $|\cdot|_{K(\mathbf{t})} = \eta_{K,|\mathbf{t}|}$;
- b) les éléments \widetilde{t}_i de \widetilde{L} sont algébriquement indépendants sur \widetilde{K} .

En conséquence, le degré de transcendance de \widetilde{L} sur \widetilde{K} est majoré par celui de L sur K .

(2.2.46.6) On suppose de maintenant que les conditions équivalentes a) et b) ci-dessus sont satisfaites. En vertu de 2.2.45.4, l'annéloïde $\widetilde{K}[\mathbf{t}]$ s'identifie à $\widetilde{K}[\widetilde{\mathbf{t}}]$; en conséquence, le corpoïde résiduel $\widetilde{K}(\mathbf{t})$ est égal au sous-corpoïde de \widetilde{L} engendré par \widetilde{K} et $\widetilde{\mathbf{t}}$. Notons que ledit sous-corpoïde est par ailleurs naturellement isomorphe à $\widetilde{K}((\deg(\mathbf{t}, |\mathbf{t}|)^{-1} \mathbf{T}))$ puisque b) est vraie par hypothèse.

(2.2.47) Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corpoïdes valués, de type fini comme extension de corpoïdes. On a vu au 2.2.46.5 ci-dessus que le degré de transcendance de \widetilde{L} sur \widetilde{K} est majoré par celui de L sur K . Supposons que l'on ait égalité, et soit (t_1, \dots, t_n) une base de transcendance de \widetilde{L} sur \widetilde{K} . Chaque t_i est alors non nul, et est donc de la forme \widetilde{a}_i pour un certain $a_i \in k^\times$. En vertu de 2.2.46.5, les a_i sont algébriquement indépendants sur K ; d'après notre hypothèse sur les degrés de transcendance, ils forment une base de transcendance de L sur K . Le corps L est donc fini sur $F := K(a_1, \dots, a_n)$.

Il résulte de 2.2.46.6 que $\widetilde{F} = \widetilde{K}(t_1, \dots, t_n)$, et de 2.2.45.3 que \widetilde{L} est fini sur \widetilde{F} . En conséquence, le corpoïde \widetilde{L} est de type fini sur \widetilde{K} . En d'autres termes, $\widetilde{L}_{D \times \{1\}}$ est de type fini sur $\widetilde{K}_{D \times \{1\}}$, et $|L^\times|/|k^\times|$ est de type fini (2.2.29.3).

(2.2.48) Soit $K \hookrightarrow L$ une extension *aglébrique* de corpoïdes valués. Donnons-nous une famille $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in I}$ d'éléments de D et une famille $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ d'éléments de G , les deux familles étant indexées par le même ensemble I . La valuation $\eta_{L, \mathbf{d}, \mathbf{r}}$ est alors l'unique prolongement à $L(\mathbf{d}^{-1} \mathbf{T})$ de la valuation $\eta_{K, \mathbf{d}, \mathbf{r}}$ du corps $K(\mathbf{d}^{-1} \mathbf{T})$.

En effet, fixons un prolongement $|\cdot|'$ de $\eta_{K, \mathbf{d}, \mathbf{r}}$ à $L(\mathbf{d}^{-1} \mathbf{T})$. La famille $\widetilde{\mathbf{T}}$ est algébriquement indépendante sur \widetilde{K} d'après 2.2.46.5, et comme L est algébrique

sur K , le corpoïde \tilde{L} est algébrique sur \tilde{K} (2.2.46.1); il s'ensuit que $\tilde{\mathbf{T}}$ est algébriquement indépendante sur \tilde{L} . Comme on a par ailleurs $|\mathbf{T}'| = \mathbf{r}$ il découle de 2.2.46.5 que $|\cdot|' = \eta_{L,\mathbf{d},\mathbf{r}}$.

Un théorème de Chevalley pour les espaces de Zariski-Riemann gradués

(2.2.49) Lemme. *Soit K un corpoïde, soit $r \in D$ et soit $P = \sum a_i T^i$ un élément de $K[T/r]$; soit $|\cdot|$ une valuation de K et soit L une extension de K dans laquelle P est scindé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *il existe une racine α de P telle que $|\alpha| \leq 1$;*
- ii) *il existe $i \geq 1$ tel que $|a_i| \geq |a_0|$.*

Démonstration. Supposons que i) soit vraie; on a $a_0 = -\sum_{i \geq 1} a_i \alpha^i$, d'où l'inégalité

$$|a_0| \leq \max_{i \geq 1} |a_i| |\alpha|^i \leq \max_{i \geq 1} |a_i|$$

(puisque $|\alpha| \leq 1$) et ii) est établie.

Si ii) est vraie, écrivons $P = a_n \prod (T - \alpha_i)$ avec $\alpha_i \in L^r$ pour tout i . Si chacun des $|\alpha_i|$ était strictement supérieur à 1, les relations coefficients-racines entraîneraient immédiatement que $|a_0| > |a_i|$ pour tout $i > 1$, ce qui contredirait l'hypothèse ii); par conséquent, i) est vraie. \square

(2.2.50) Proposition. *Soit F un corpoïde, et soit $K \hookrightarrow L$ une extension finie de corpoïdes au-dessus de F . Soit U un ouvert quasi-compact de $\mathbb{P}_{L/F}$; l'image de U sur $\mathbb{P}_{K/F}$ est alors un ouvert quasi-compact de ce dernier.*

Démonstration. On peut supposer que U est de la forme $\mathbb{P}_{L/F}\{f_1, \dots, f_n\}$ où chacun des f_i est un élément de L dont on note r_i le degré.

(2.2.50.1) *Le cas où $n = 1$; on pose alors $f = f_1$ et $r = r_1$. Soit $P \in K[T/r]$ le polynôme minimal de f sur K ; écrivons $P = \sum a_i T^i$; notons que comme $f \neq 0$ on a $a_0 \neq 0$; soit J l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$. Soit $|\cdot|$ une valuation de K et soit \mathbb{K} une clôture algébrique de K ; choisissons un prolongement $|\cdot|'$ de $|\cdot|$ à \mathbb{K} . Dire que la valuation $|\cdot|$ appartient à l'image de $\mathbb{P}_{L/F}$ signifie qu'elle admet une extension à L dont l'anneau contient f . Comme toute extension de $|\cdot|$ à L se déduit de $|\cdot|'$ via un K -plongement de L dans \mathbb{K} , la valuation $|\cdot|$ appartient à l'image de $\mathbb{P}_{L/F}$ si et seulement si P possède dans \mathbb{K} une racine α telle que $|\alpha|' \leq 1$; en vertu du lemme 2.2.49 ci-dessus, cela revient à demander qu'il existe i avec $|a_i| \geq |a_0|$. Le scalaire a_0 étant non nul, l'image de U est finalement égale à la réunion des $\mathbb{P}_{K/F}\{a_0/a_i\}$ pour i parcourant J ; c'est donc bien un ouvert quasi-compact de $\mathbb{P}_{K/F}$, ce qui achève la preuve dans le cas où $n = 1$.*

(2.2.50.2) *Le cas général.* Si $n = 0$ alors $\mathbb{P}_{L/F}\{f_1, \dots, f_n\} = \mathbb{P}_{L/F}$, et son image est égale à $\mathbb{P}_{K/F}$ tout entier, ce qui termine la démonstration.

Supposons maintenant que $n > 0$.

Soit f l'élément $\sum f_i T_i$ de $L(r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n)$; remarquons que f est de degré 1. Si $|\cdot|'$ est une valuation sur L , il est immédiat que $|\cdot|' \in \mathbb{P}_{L/F}\{f_1, \dots, f_n\}$ si et seulement si $\eta_{(L,|\cdot|'),\mathbf{r},\mathbf{1}} \in \mathbb{P}_{L(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})/F}\{f\}$.

Par ailleurs, il découle de 2.2.48 que si $|\cdot| \in \mathbb{P}_{K/F}$ et si $|\cdot|'$ est un prolongement de $|\cdot|$ à L , alors $\eta_{(L,|\cdot|'),r,1}$ est l'unique prolongement de $\eta_{(K,|\cdot|),r,1}$ à $L(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$.

Il s'ensuit que la valuation $|\cdot|$ appartient à l'image de l'ouvert quasi-compact $\mathbb{P}_{L/F}\{f_1, \dots, f_n\}$ si et seulement si $\eta_{(K,|\cdot|),r,1}$ appartient à l'image V de $\mathbb{P}_{L(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})/F}\{f\}$ sur $\mathbb{P}_{K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})/F}$.

Or en vertu du cas $n = 1$ traité au 2.2.50.1 ci-dessus, V est un ouvert quasi-compact de $\mathbb{P}_{K(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})/F}$; il en résulte, en vertu de la description explicite d'une valuation de Gauß, que l'image réciproque de V par l'application

$$|\cdot| \mapsto \eta_{(K,|\cdot|),r,1}$$

est un ouvert quasi-compact de $\mathbb{P}_{K/F}$, ce qui achève la démonstration. \square

Exemples d'homéomorphismes entre espaces de Zariski-Riemann gradués

(2.2.51) Lemme. *Soit F un corps, soit K une extension de F et soit L une extension de K . Supposons que L^\times/K^\times est de torsion. L'application continue $\mathbb{P}_{L/F} \rightarrow \mathbb{P}_{K/F}$ est alors un homéomorphisme qui préserve les ouverts affines.*

Démonstration. Soit $|\cdot|$ une valuation sur L et soit $f \in L$. Par hypothèse, il existe un entier n tel que $f^n \in K$. Comme f^n appartient à l'annéloïde de $|\cdot|$ si et seulement si c'est le cas de f , on en déduit :

- que $|\cdot|$ est entièrement déterminée par sa restriction à K , et donc que $\mathbb{P}_{L/F} \rightarrow \mathbb{P}_{K/F}$ est injective;
- que si (f_1, \dots, f_r) sont des éléments de L , et si les n_i sont des entiers tels que $f_i^{n_i} \in K$ pour tout i alors l'image de $\mathbb{P}_{L/F}\{f_1, \dots, f_r\}$ sur $\mathbb{P}_{K/F}$ est égale à $\mathbb{P}_{L/F}\{f_1^{n_1}, \dots, f_r^{n_r}\}$; la bijection continue $\mathbb{P}_{L/F} \rightarrow \mathbb{P}_{K/F}$ est donc bien un homéomorphisme qui préserve les ouverts affines. \square

(2.2.52) Exemples. Mentionnons deux cas particuliers dans lesquels ce lemme s'applique.

(2.2.52.1) Si L est une extension algébrique purement inséparable de K alors L^\times/K^\times est de torsion (p -primaire).

(2.2.52.2) S'il existe un sous-groupe Δ de D tel que D/Δ soit de torsion et tel que $K = L_\Delta$ alors L^\times/K^\times est de torsion.

(2.2.53) Lemme. *Soit K un corps et soit L une extension de K . Si $\deg(L^\times)\deg(K^\times)$ est de torsion alors $\mathbb{P}_{L/K} \rightarrow \mathbb{P}_{L_1/K_1}$ est un homéomorphisme préservant les ouverts affines.*

Démonstration. Posons $\Delta = \deg(K^\times)$. Le lemme 2.2.51 assure que l'application continue $\mathbb{P}_{L/K} \rightarrow \mathbb{P}_{L_\Delta/K}$ est un homéomorphisme préservant les ouverts affines. Comme $(L_\Delta)_1 = L_1$ on peut remplacer L par L_Δ et ainsi supposer que $\deg(L^\times) = \deg(K^\times)$.

Soit $|\cdot| \in \mathbb{P}_{L_1/K_1}$ et soit $f \in L$. Comme $\deg(L^\times) = \deg(K^\times)$ il existe $g \in L_1$ et $h \in K^\times$ tels que $f = gh$. La trivialité de $|\cdot|_{K_1}$ assure que $|g|$ ne dépend que de f , et pas du choix de g et h ; il est donc licite de le noter $|f|'$. On vérifie immédiatement que $|\cdot|'$ est une valuation, dont la restriction à K est triviale et

donc la restriction à L_1 coïncide avec $|\cdot|$. De plus, on voit aussitôt à l'aide de la formule qui définit $|\cdot|'$ que celle-ci est l'unique prolongement de $|\cdot|$ à L dont la restriction à K soit triviale. Ainsi, l'application continue $\mathbb{P}_{L/K} \rightarrow \mathbb{P}_{L_1/K_1}$ est bijective.

Soient f_1, \dots, f_n des éléments de L . Comme $\deg(L^\times) = \deg(K^\times)$, on peut écrire chacune des f_i s comme un produit $g_i h_i$ où $g_i \in L_1$ et $h_i \in K^\times$; on a alors $\mathbb{P}_{L/K}\{f_1, \dots, f_n\} = \mathbb{P}_{L/K}\{g_1, \dots, g_r\}$; ainsi, l'image de $\mathbb{P}_{L/K}\{f_1, \dots, f_n\}$ sur \mathbb{P}_{L_1/K_1} est l'ouvert affine $\mathbb{P}_{L/K}\{g_1, \dots, g_r\}$, ce qui termine la démonstration. \square

2.3 Les corps henséliens et leurs extensions modérément ramifiées

On désigne par D un groupe abélien divisible. Dans cette section, les valuations seront à valeurs dans D , et les annéloïdes seront des D -annéloïdes.

Rappels sur les prolongements d'une valuation à une extension algébrique

(2.3.1) Quelques conventions. Sauf mention expresse du contraire, la valuation d'un corps valué K sera notée $|\cdot|$, son anneau sera noté K° et l'idéal maximal de celui-ci sera noté $K^{\circ\circ}$.

La notation \tilde{K} désignera le corps résiduel de K ; le corps résiduel traditionnel sera vu comme un sommande de \tilde{K} , et noté en conséquence \tilde{K}_1 .

(2.3.2) Soit K un corps valué, et soit L une extension algébrique de K . Soit B la fermeture intégrale de K° dans L . On démontre les faits suivants.

i) L'application $\mathfrak{m} \mapsto B_{\mathfrak{m}}$ établit une bijection entre l'ensemble des idéaux maximaux de B et l'ensemble des anneaux de valuation de L qui dominent K° ; ces ensembles sont finis dès que L est finie sur K .

ii) Si L est une extension galoisienne de K , le groupe $\text{Gal}(L/K)$ agit transitivement sur l'ensemble des idéaux maximaux de B , et donc d'après i) sur l'ensemble des prolongements de $|\cdot|$ à L .

(2.3.3) Soient $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_r$ des prolongements deux à deux distincts de $|\cdot|$ à L , et soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ les idéaux maximaux de B correspondants.

Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, r\}$. Il existe alors $x \in B$ tel que $|x-1|_i < 1$ pour tout $i \in I$ et $|x|_j < 1$ pour tout $j \notin I$.

En effet, soit $j \notin I$. Par le lemme d'évitement des idéaux premiers, \mathfrak{m}_j n'est pas contenu dans $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{m}_i$; choisissons $y_j \in \mathfrak{m}_j$ tel que y_j n'appartienne à aucun des \mathfrak{m}_i .

Posons $y = \prod_{j \notin I} y_j$. On a alors $y \in \bigcap_{j \notin I} \mathfrak{m}_j$, et $y \notin \bigcup_{i \in I} \mathfrak{m}_i$.

Comme $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = B$ si $i \neq j$, le lemme chinois assure que

$$B / \prod_{i \in I} \mathfrak{m}_i \simeq \prod_{i \in I} B / \mathfrak{m}_i.$$

Par construction, l'image de y dans le terme de droite est inversible; en conséquence, il existe $z \in B$ tel que $zy - 1 \in \prod_{i \in I} \mathfrak{m}_i$.

L'élément $x := yz$ de B satisfait alors aux conditions requises.

La notion de corps valué hensélien

(2.3.4) Soit K un corps valué. Soit $P = T^n + \sum_{i \leq n-1} a_i T^i$ un polynôme unitaire à coefficients dans K , et soit L une extension valuée de K dans laquelle P est scindé. Posons $\rho(P) = \sup_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|^{1/(n-i)}$. Si x est un élément de L tel que $|x| > \rho(P)$, alors $|x|^n > |a_i| \cdot |x|^i$ pour tout entier $i \leq n-1$; en conséquence, x ne peut être racine de P . Par ailleurs, si $\rho(P)$ majorait strictement en valeur absolue toutes les racines de P dans L , l'expression des a_i en fonction de ces dernières fournirait l'inégalité absurde $\sup_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|^{1/(n-i)} < \rho(P)$; il en découle que $\rho(P)$ coïncide avec la borne supérieure (et même le maximum dès que $n > 0$) des valeurs absolues des racines de P dans L . Il s'ensuit que si Q divise P , alors $\rho(Q) \leq \rho(P)$.

(2.3.4.1) Pour tout $r \in D$ majorant $\rho(P)$, on notera \tilde{P}_r le polynôme $X^n + \sum \widetilde{a_{i,r^{n-i}}} T^i$; c'est un élément de $\tilde{K}[T/r]$ de degré r^n . Il est égal à T^n si et seulement si $r > \rho(P)$. Si P s'écrit RS avec R et S unitaires, on a $\tilde{P}_r = \tilde{R}_r \tilde{S}_r$; en particulier, si l'on écrit $P = \prod (T - x_i)$ dans L , alors $\tilde{P}_r = \prod (T - \widetilde{x_{i,r}})$. Notons une conséquence simple de ce fait : si \tilde{P}_r est séparable, P est séparable.

Si $\rho(P) > 0$ (autrement dit si P n'est pas une puissance de X), on écrira simplement \tilde{P} au lieu de $\tilde{P}_{\rho(P)}$.

Si $r \in D$ et si R est un élément unitaire de $\tilde{K}[T/r]$, on appellera *relèvement admissible* de R tout polynôme unitaire \mathcal{R} appartenant à $K[T]$, tel que $\rho(\mathcal{R}) \leq r$ et tel que $\tilde{\mathcal{R}}_r = R$; l'existence d'un tel relèvement est immédiate.

(2.3.4.2) Soit $r \in D$ et soit P un polynôme unitaire de $K[T]$ tel que $\rho(P) \leq r$. Supposons donnée une factorisation $\tilde{P}_r = QR$ dans $\tilde{K}[T/r]$, où Q et R sont unitaires et premiers entre eux. Il y a alors *au plus* un relèvement admissible $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ de (Q, R) tel que $P = \mathcal{Q}\mathcal{R}$.

En effet, supposons donné un tel relèvement, choisissons un corps de décomposition L de P , et un prolongement de $|\cdot|$ à L . Écrivons $P = \prod (T - \lambda_i)$ avec $\lambda_i \in L$ pour tout i .

Pour tout indice i , la réduction $\tilde{\lambda}_{i,r}$ est une racine de \tilde{P}_r . C'est donc ou bien une racine de Q , ou bien une racine de R , les deux situations étant exclusives l'une de l'autre puisque Q et R sont premiers entre eux. Si l'on note I (resp. J) l'ensemble des indices i tels que $\tilde{\lambda}_{i,r}$ est une racine de Q (resp. de R), on voit que l'on a nécessairement

$$\mathcal{Q} = \prod_{i \in I} (X - \lambda_i) \text{ et } \mathcal{R} = \prod_{i \in J} (X - \lambda_i),$$

d'où notre assertion.

Notons un cas particulier : si α est une racine simple de \tilde{P}_r , il existe au plus un élément a de K tel que $|a| \leq r, \tilde{a}_r = \alpha$ et $P(a) = 0$.

(2.3.5) Lemme. *Soit K un corps valué. Si K est algébriquement clos (resp. séparablement clos), il en va de même de \tilde{K} .*

Démonstration. Soit P un polynôme unitaire appartenant à $K[T/r]$ pour un certain $r \in D$, et soit \mathcal{P} un relèvement admissible de P . On a vu au 2.3.4.1 ci-dessus que si P est séparable, il en va de même de \mathcal{P} ; et que si \mathcal{P} est scindé, il en va de même de P . La conclusion du lemme s'ensuit aussitôt. \square

(2.3.6) Lemme. *Soit K un corps valué, soit P un polynôme unitaire irréductible de $K[T]$, et soit r un élément de D majorant $\rho(P)$. Si il existe deux polynômes unitaires R et S non constants et premiers entre eux dans $\tilde{K}[T/r]$ tels que $\tilde{P} = RS$ alors $r = \rho(P)$ et il existe au moins deux prolongements distincts de $|\cdot|$ à L .*

Démonstration. Comme R et S sont premiers entre eux, \tilde{P}_r n'est pas une puissance de T et l'on a donc $\rho(P) = r$. Fixons un prolongement de $|\cdot|$ à L , encore noté $|\cdot|$. Écrivons $P = \prod (T - x_i)$ dans L . Puisque $\tilde{P}_r = RS$, il existe deux indices i et j distincts tels que $\widetilde{x_{i,r}}$ (resp. $\widetilde{x_{j,r}}$) soit une racine de R (resp. de S); comme R et S sont premiers entre eux, $\widetilde{x_{j,r}}$ n'annule pas R .

Soit \mathcal{R} un relevé admissible de R . Si m désigne le degré monomial de R on a alors $|\mathcal{R}(x_i)| < r^m$ puisque $R(\widetilde{x_{i,r}}) = 0$, et $|\mathcal{R}(x_j)| = r^m$ puisque $R(\widetilde{x_{j,r}}) \neq 0$.

Comme P est irréductible, il existe un k -automorphisme g de L envoyant x_i sur x_j ; on a alors $g(\mathcal{R}(x_i)) = \mathcal{R}(x_j)$. Par ce qui précède,

$$|g(\mathcal{R}(x_i))| = r^m > |\mathcal{R}(x_i)|.$$

Ainsi, $|\cdot| \circ g$ est un prolongement de $|\cdot|$ à L qui est distinct de $|\cdot|$. \square

(2.3.7) Proposition. *Soit K un corps valué. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- i) *L'anneau local K° est hensélien.*
- ii) *Pour toute extension algébrique L de K , la valuation $|\cdot|$ admet un unique prolongement à L .*
- iii) *Pour tout $r \in D$, pour tout polynôme unitaire $P \in K[T]$ tel que $\rho(P) \leq r$, pour toute factorisation $\tilde{P}_r = QR$ où Q et R sont des polynômes unitaires et premiers entre eux de $K[T/r]$, il existe un (unique) relèvement admissible $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ de (Q, R) tel que $P = \mathcal{Q}\mathcal{R}$.*
- iv) *Pour tout $r \in D$, pour tout polynôme unitaire $P \in K[T]$ et pour toute racine simple α de \tilde{P}_r dans \tilde{K} , il existe un (unique) élément a de K tel que l'on ait $|a| \leq r$, $\tilde{a}_r = \alpha$ et $P(a) = 0$.*

Démonstration. On procède par implications successives.

(2.3.7.1) Supposons i) vraie, et soit L une extension algébrique de K . Soit B la fermeture intégrale de A dans L , et soit \mathcal{B} l'ensemble des sous-algèbres de type fini de B . Soit $C \in \mathcal{B}$. L'algèbre C est un produit fini d'anneaux locaux puisque A est hensélien; étant d'autre part intègre, elle est locale.

Par ailleurs, si C et C' sont deux éléments de \mathcal{B} avec $C \subset C'$ alors C' est entière sur C , et $C \hookrightarrow C'$ est dès lors un morphisme local. On en déduit que B est un anneau local. En vertu de 2.3.2, cela équivaut à dire que $|\cdot|$ admet un unique prolongement à L , d'où ii).

(2.3.7.2) Supposons ii) vraie, et montrons iii). On raisonne par récurrence sur $\deg P$. S'il est nul le résultat est trivial ; on suppose donc qu'il est strictement positif, et que le résultat a été prouvé en degré $< \deg P$.

Si R ou S est constant, le résultat est évident. On peut donc les supposer non constants. Comme on fait l'hypothèse que ii) est vraie, il résulte du lemme 2.3.6 que P n'est pas irréductible. Écrivons $P = P_1 P_2$, où P_1 et P_2 sont unitaires de degré strictement inférieur à celui de P .

Pour tout i notons Q_i (resp. R_i) le PGCD unitaire de Q (resp. R) et $\tilde{P}_{i,r}$. Comme $\tilde{P}_r = QR$ et comme Q et R sont premiers entre eux, il vient $\tilde{P}_{1,r} = Q_1 R_1$ et $\tilde{P}_{2,r} = Q_2 R_2$. Les polynômes Q_1 et R_1 étant premiers entre eux, l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'un relèvement admissible $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1)$ de (Q_1, R_1) tel que $P_1 = \mathcal{Q}_1 \mathcal{R}_1$. De même, il existe un relèvement admissible $(\mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_2)$ de (Q_2, R_2) tel que $P_2 = \mathcal{Q}_2 \mathcal{R}_2$. Le couple $(\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2)$ est alors un relèvement admissible de (Q, R) , et l'on a $P = P_1 P_2 = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2$, d'où iii).

(2.3.7.3) Si iii) est vraie, alors iv) est vraie : ce n'est qu'une reformulation de iii) dans le cas particulier où l'un des deux polynômes Q ou R est de degré monomial égal à 1.

(2.3.7.4) Supposons que iv) est vraie. Dans le cas particulier où $r = 1$, cette propriété signifie exactement que toute racine simple modulo K° d'un polynôme unitaire $P \in K[T]$ se relève en une racine de P . En conséquence, K° est hensélien. \square

(2.3.8) On dit qu'un corps valué K est *hensélien* s'il satisfait les quatre propriétés équivalentes ci-dessus.

(2.3.8.1) Si $L \hookrightarrow L'$ est une extension algébrique radicelle, alors pour tout $x \in L'$ il existe un entier $N > 0$ tel que $x^N \in L$. Il s'ensuit que toute valuation de L admet un unique prolongement à L' ; pour s'assurer qu'un corps K est hensélien, on peut donc se contenter de vérifier propriété ii) ci-dessus pour les extensions algébriques *séparables* L de K .

(2.3.8.2) Il résulte de la caractérisation d'un corps hensélien par la propriété ii) de la proposition 2.3.7 ci-dessus que toute extension algébrique d'un corps hensélien est encore hensélienne.

Groupe de décomposition, hensélisé d'un corps valué

(2.3.9) Soit $K \hookrightarrow L$ une extension galoisienne de corps valués. On appelle *groupe de décomposition* de L sur K le sous-groupe de $\text{Gal}(L/K)$ formé des automorphismes g tels que $|\cdot| \circ g = |\cdot|$, et on le note $D(L/K)$.

(2.3.10) Soit F une sous-extension galoisienne de L . La restriction induit un morphisme $D(L/K) \rightarrow D(F/K)$.

Ce morphisme est surjectif. En effet, soit $g \in D(F/K)$. Prolongeons l'automorphisme g en un automorphisme de L , noté encore g . Les valuations $|\cdot|$ et $|\cdot| \circ g$ de L induisent toutes deux la valuation $|\cdot|$ sur F , puisque $g|_F \in D(F/K)$. En conséquence, il existe un élément $h \in \text{Gal}(L/F)$ tel que $|\cdot| \circ g = |\cdot| \circ h$.

Il vient $|\cdot| \circ gh^{-1} = |\cdot|$. Ainsi, $gh^{-1} \in D(L/K)$. Comme $h \in \text{Gal}(L/F)$, on a $gh^{-1}|_F = g|_F$, ce qui achève la démonstration.

(2.3.11) Proposition. Soit $K \hookrightarrow L$ une extension galoisienne de corps valués, et soit F le corps $L^{\mathcal{D}(L/K)}$. On a $\widetilde{F} = \widetilde{K}$ (ou, ce qui revient au même, $\widetilde{F}_1 = \widetilde{K}_1$ et $|F^\times| = |k^\times|$).

Démonstration. En vertu de 2.3.10, il suffit de montrer l'assertion pour les sous-extensions finies galoisiennes de L , ce qui autorise à supposer que L est finie sur K . Soient $|\cdot| = |\cdot|_0, |\cdot|_1, \dots, |\cdot|_r$ les prolongements à L de la valuation $|\cdot|$ du corps K .

Comme deux prolongements de la valuation $|\cdot|$ de F au corps L sont conjugués sous l'action de $\text{Gal}(L/F) = \mathcal{D}(L/K)$, la restriction de $|\cdot|_i$ à F est différente de $|\cdot|$ dès que $i \neq 0$. Il résulte alors de 2.3.3, qu'il existe $z \in F^\times$ tel que $|z - 1| < 1$ et $|z|_j < 1$ pour tout $j > 0$.

Soit $x \in \widetilde{F}^\times$. Nous allons montrer que $\widetilde{x} \in \widetilde{K}$. Pour tout entier n , on a $\widetilde{z}^n = 1$ et partant $\widetilde{z}^n x = \widetilde{x}$. Par ailleurs, comme $|z|_j \neq 1$ pour tout $j > 0$, il existe un entier n tel que $|z|_j^n \cdot |x|_j$ soit différent de $|z^n x| = |x|$ pour tout $j > 0$. On peut donc, quitte à remplacer x par $z^n x$, supposer que $|x|_j \neq |x|$ dès que $j > 0$.

Soit E l'ensemble des conjugués de x . Soit $y \in E$. Il est de la forme $g(x)$ avec $g \in \text{Gal}(L/K)$. Si $y \neq x$ alors $g \notin \mathcal{D}(L/K)$, ce qui veut dire que $|\cdot| \circ g = |\cdot|_j$ pour un certain $j > 0$; par conséquent, $|y| = |x|_j \neq |x|$. On note F le sous-ensemble de E formé des conjugués y de x tels que $|y| > |x|$, et P le polynôme minimal de x . On écrit $P = T^m + a_1 T^{m-1} + \dots + a_m$, et l'on pose $a_0 = 1$. Soit N le cardinal de F . Pour toute partie P de E de cardinal $N + 1$ et différente de $F \cup \{x\}$, on a

$$\left| \prod_{y \in P} y \right| < \left| \prod_{y \in F \cup \{x\}} y \right|.$$

Comme

$$a_{N+1} = (-1)^{N+1} \sum_{P \subseteq E, \text{ card } P = N+1} \prod_{y \in P} y,$$

il vient $\widetilde{a_{N+1}} = (-1)^{N+1} \prod_{y \in F \cup \{x\}} \widetilde{y}$.

Pour toute partie P de E de cardinal N et différente de F , on a

$$\left| \prod_{y \in P} y \right| < \left| \prod_{y \in F} y \right|.$$

Comme

$$a_N = (-1)^N \sum_{P \subseteq E, \text{ card } P = N} \prod_{y \in P} y,$$

il vient $\widetilde{a_N} = (-1)^N \prod_{y \in F} \widetilde{y}$.

Il s'ensuit que $\widetilde{a_N} \neq 0$, et que $\widetilde{x} = -\widetilde{a_{N+1}}/\widetilde{a_N}$. En conséquence, $\widetilde{x} \in \widetilde{K}$. \square

(2.3.12) Proposition. Soit K un corps valué, et soit K^s une clôture séparable de K . On fixe un prolongement de $|\cdot|$ à K^s , que l'on note encore $|\cdot|$. Soit F le sous-corps $(K^s)^{\mathcal{D}(K^s/K)}$.

i) Le corps valué F (muni de la restriction de $|\cdot|$) est hensélien, et l'anneau F° s'identifie au hensélisé de K° .

ii) Pour toute extension valuée hensélienne L de K , il existe un unique K -plongement isométrique de K dans L .

Démonstration. Comme le groupe de Galois de K^s sur F est le stabilisateur de $|\cdot|$, la valuation $|\cdot|$ de F admet une unique extension à F^s , et donc à toute extension séparable de F . En conséquence, F est hensélien (2.3.8.1). L'anneau local F° est donc lui-même hensélien. Il en résulte l'existence d'un (K°) -morphisme canonique de $(K^\circ)^h$ dans F° .

L'anneau K° est par ailleurs normal, F° est intègre, et K° s'injecte dans F° . On déduit alors de 2.1.12 que $(K^\circ)^h$ est normal et s'injecte dans F° .

Soit E le corps des fractions de $(K^\circ)^h \subset F$. Comme $(K^\circ)^h$ est normal, il contient la fermeture intégrale B de K° dans E . D'autre part, l'anneau local $(K^\circ)^h$ domine K° ; en conséquence, il domine $B_{\mathfrak{m}}$ pour un certain idéal maximal \mathfrak{m} de B . L'anneau $B_{\mathfrak{m}}$ étant l'anneau d'une valuation qui prolonge $|\cdot|$, il coïncide par maximalité avec $(K^\circ)^h$.

L'inclusion $(K^\circ)^h \hookrightarrow F^\circ$ est locale. L'idéal maximal de $(K^\circ)^h$ est dès lors égal à E° . Comme un anneau de valuation d'un corps est connu dès qu'on connaît son idéal maximal, il vient $(K^\circ)^h = E^\circ$.

L'anneau $(K^\circ)^h$ est hensélien; le sous-corps E de K^s est donc hensélien. En conséquence, la valuation $|\cdot|$ de E admet un unique prolongement à K^s . Cela signifie que $\text{Gal}(K^s/E) \subset \text{D}(K^s/K)$. Autrement dit, $F \subset E$; compte-tenu du fait que $E \subset F$, il vient $E = F$ et $F^\circ = (K^\circ)^h$, ce qui achève de prouver i).

Donnons-nous maintenant une extension valuée hensélienne L de K . Il existe alors un unique K° -morphisme local de $F^\circ = (K^\circ)^h$ dans L° , qui est injectif d'après la remarque 2.1.12.

Or la donnée d'un K -plongement isométrique de F dans L équivaut à celle d'un K° -plongement local de F° dans L° ; compte-tenu de ce qui précède, on en déduit ii). \square

(2.3.13) Si K est un corps valué, son hensélisé K^h est canonique en vertu de l'assertion ii) de la proposition 2.3.12. Cette même assertion, ou la définition directe de K^h , assurent que $K^h = K$ dès que K est hensélien.

Si L est une extension algébrique de K^h , on la considèrera comme implicitement munie de l'unique prolongement de la valuation de K^h ; ce prolongement fait de L un corps valué hensélien.

(2.3.14) Lemme. *Soit K un corps valué et soit L une extension algébrique K .*

i) La K^h -algèbre $K^h \otimes_K L$ est réduite; c'est en particulier un produit fini d'extensions de K^h si L est finie sur K .

ii) Soit $(K^h \otimes_K L \rightarrow L_i)_i$ la famille des quotients de $K^h \otimes_K L$ par ses idéaux maximaux. Pour tout i , désignons par $|\cdot|_i$ la restriction à L de la valuation de L_i . Les $|\cdot|_i$ sont alors deux à deux distinctes, et sont exactement les prolongements de $|\cdot|$ à L . De plus, L_i s'identifie pour tout i à $(L, |\cdot|_i)^h$.

iii) Supposons que L soit galoisienne. Pour tout i , l'injection naturelle $\text{Gal}(L_i/K^h) \hookrightarrow \text{Gal}(L/K)$ a pour image le groupe de décomposition de la valuation $|\cdot|_i$.

Démonstration. Comme K^h est réunion d'extensions finies séparables de K , la K^h -algèbre $K^h \otimes_K L$ est réduite, d'où i).

Fixons i . Le corps valué L_i est hensélien; en conséquence $(L, |\cdot|_i)^h$ se plonge canoniquement de manière isométrique dans L_i ; par ailleurs, K^h se plonge également canoniquement de manière isométrique dans $(L, |\cdot|_i)^h$. Le sous-corps $(L, |\cdot|_i)^h$ de L_i contenant L et K^h , il coïncide avec L_i (puisque ce dernier est un quotient de $K^h \otimes_K L$); plus précisément, ce sont les $K^h \otimes_K L$ -algèbres L_i et $(L, |\cdot|_i)^h$, que l'on identifie par ce biais. Comme la $K^h \otimes_K L$ -algèbre $(L, |\cdot|_i)^h$ ne dépend que de $|\cdot|_i$, on peut retrouver le facteur L_i à partir de $|\cdot|_i$. De ce fait, les $|\cdot|_i$ sont deux à deux distinctes.

Enfin, soit $|\cdot|'$ une valuation de L prolongeant $|\cdot|$. Comme K^h se plonge canoniquement de manière isométrique dans $(L, |\cdot|')^h$, il existe un morphisme $K^h \otimes_K L \rightarrow (L, |\cdot|')^h$, qui se factorise nécessairement par l'un des L_i . On a alors par construction $|\cdot|' = |\cdot|_i$, ce qui achève de prouver ii). \square

Supposons maintenant que L est galoisienne, et fixons i . Comme K^h est hensélien, tout K^h -automorphisme de L_i en préserve la valuation, et l'image de $\text{Gal}(L_i/K^h)$ est donc bien contenue dans $\text{D}((L, |\cdot|_i)/K)$.

Pour établir l'inclusion réciproque, fixons un K -plongement de L dans une clôture séparable K^s de K , et munissons celle-ci d'un prolongement arbitraire de $|\cdot|_i$, encore noté $|\cdot|_i$. On identifie K^h (resp. L_i) au sous-corps de K^s formé des éléments invariants sous $\text{D}((K^s, |\cdot|_i)/K)$ (resp. $\text{D}((K^s, |\cdot|_i)/L)$).

Soit g un élément de $\text{D}((L, |\cdot|_i)/K)$. D'après 2.3.10, on peut relever g en un élément γ de $\text{D}((K^s, |\cdot|_i)/K)$. On a alors $(\gamma|_{L_i})|_L = g$, et la démonstration est terminée. \square

(2.3.15) Soit $K \hookrightarrow L$ une extension galoisienne de corps valués et soit g un élément de $\text{D}(L/K)$. Comme g préserve $|\cdot|$, il induit un \tilde{K} -automorphisme du corps résiduel \tilde{L} , et le morphisme $\text{D}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$ ainsi induit est continu (pour que l'image d'un élément g de $\text{D}(L/K)$ fixe un ensemble fini E d'éléments de \tilde{L}^\times , il suffit qu'il fixe un ensemble fini $F \subset L^\times$ tel que $\tilde{F} = E$).

En vertu du lemme 2.3.14 ci-dessus, l'extension $K^h \hookrightarrow L^h$ est galoisienne, et son groupe de Galois s'identifie naturellement à $\text{D}(L/K)$. De plus, la proposition 2.3.11 assure que $\tilde{K}^h = \tilde{K}$ et $\tilde{L}^h = \tilde{L}$.

En conséquence, pour étudier le groupe D et son action sur \tilde{K} , on peut remplacer K par K^h et L par L^h , supposer que K (et L) sont henséliens, et que $\text{D} = \text{Gal}(L/K)$.

(2.3.16) Soit K un corps valué et soit L une extension finie de K . Soient $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$ les prolongements de $|\cdot|$ à L . Pour tout i , notons \tilde{L}_i le corps résiduel de $(L, |\cdot|_i)$.

Le lemme 2.3.14 ci-dessus assure que $K^h \otimes_K L \simeq \prod (L, |\cdot|_i)^h$. On a $\tilde{K}^h = \tilde{K}$ et $(\tilde{L}, |\cdot|_i)^h = \tilde{L}_i$; en vertu de 2.2.45.3, il vient $[\tilde{L}_i : \tilde{K}] \leq [(L, |\cdot|_i)^h : K^h]$.

On en déduit que

$$\sum [\tilde{L}_i : \tilde{K}] \leq [L : K].$$

(2.3.16.1) On dit que l'extension L de K est *sans défaut* si $\sum [\tilde{L}_i : \tilde{K}] = [L : K]$. Le corps valué K est dit *stable* si toute extension finie de K est sans défaut.

(2.3.16.2) Si la valuation de K est triviale, le corps K est stable.

(2.3.16.3) Si la valuation de K est «discrète», c'est-à-dire si $|K^\times|$ est libre de rang 1, le corps K est stable si et seulement si l'anneau de valuation discrète K° est excellent. C'est automatiquement le cas dans chacune des situations suivantes :

- K est de caractéristique nulle ;
- K est complet ;
- K est le corps des fonctions d'une courbe projective normale et irréductible \mathcal{C} sur un corps k et K° est l'anneau local en un point fermé de \mathcal{C} .

(2.3.16.4) Nous verrons un peu plus bas que si \tilde{K} est de caractéristique nulle alors K est stable.

(2.3.17) Soit K un corps valué hensélien. Une extension finie L de K est sans défaut si $[\tilde{L} : \tilde{K}] = [L : K]$.

Si F est une extension finie de K et si L est une extension finie de F , alors L est sans défaut sur K si et seulement si F est sans défaut sur K et L est sans défaut sur F : c'est une conséquence triviale de la transitivité des degrés et des inégalités

$$[\tilde{L} : \tilde{K}] \leq [L : K], \quad [\tilde{L} : \tilde{F}] \leq [L : F] \quad \text{et} \quad [\tilde{F} : \tilde{K}] \leq [L : K].$$

Théorie de Galois d'un corps valué hensélien

(2.3.18) Proposition. Soit K un corps valué hensélien et soit L une extension galoisienne de K . L'extension \tilde{L} de \tilde{K} est alors normale, et la flèche $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$ est surjective.

Démonstration. Soit ξ un élément non nul de \tilde{L} , soit r son degré et soit $x \in L$ tel que $\tilde{x} = \xi$; soit P le polynôme minimal de x sur L . Écrivons $P = \prod(T - x_i)$, où x_1, \dots, x_d sont les éléments de l'orbite de x sous $\text{Gal}(L/K)$. Les x_i sont tous de valeur absolue égale à r . Le polynôme \tilde{P}_r est un élément unitaire de $\tilde{K}[T/r]$ qui annule ξ et est scindé dans \tilde{L} (il est égal à $\prod(T - \tilde{x}_i)$) ; le polynôme minimal R de ξ est donc scindé dans \tilde{L} , ce qui montre que \tilde{L} est une extension normale de \tilde{K} .

Soit η une racine de R distincte de ξ ; elle coïncide avec \tilde{x}_i pour un certain entier i . Il existe $g \in \text{Gal}(L/k)$ tel que $g(x) = x_i$, et l'image de g dans $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$ envoie par construction ξ sur η . On en déduit qu'un élément \tilde{L} est invariant sous l'image de $\text{Gal}(L/k)$ si et seulement s'il coïncide avec tous ses conjugués, donc si et seulement s'il est invariant sous $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$; par la correspondance de Galois, l'image de $\text{Gal}(L/K)$ (qui est un sous-groupe compact de $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$) est égale à $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$ tout entier. \square

(2.3.19) On conserve les hypothèses et notations de la proposition 2.3.18 ci-dessus.

(2.3.19.1) Il découle de 2.2.37 et sq. que \tilde{L}_1 est une extension normale de \tilde{K}_1 , que la restriction $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K}) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}_1/\tilde{K}_1)$ est surjective, et que la formule

$$g \mapsto (|x| \mapsto \widetilde{g(x)/x})$$

définit sans ambiguïté un isomorphisme

$$\text{Ker}(\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K}) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}_1/\tilde{K}_1)) \simeq \text{Hom}(|L^\times|/|K^\times|, \mu(\tilde{L}_1)).$$

Comme $\text{Ker}(\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K}) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}_1/\tilde{K}_1))$ est abélien, il hérite d'une structure naturelle de $\text{Gal}(\tilde{L}_1/\tilde{K}_1)$ -module, et l'isomorphisme ci-dessus est alors $\text{Gal}(\tilde{L}_1/\tilde{F}_1)$ -équivariant.

(2.3.19.2) On note $W(L/K)$ le noyau de $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$, et $I(L/K)$ celui de la surjection composée $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K}) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}_1/\tilde{K}_1)$. On dit que $I(L/K)$ (resp. $W(L/K)$) est le *groupe d'inertie* (resp. le *groupe de ramification*) de L sur K .

Soit $g \in \text{Gal}(L/K)$. Par définition, g appartient à $W(L/K)$ si et seulement si $|g(x) - x| < |x|$ pour tout $x \in L^\times$; et il appartient à $I(L/K)$ si l'inégalité précédente est vraie pour tout x de valeur absolue égale à 1.

(2.3.19.3) Par définition, $I(L/K)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Gal}(L/K)$, et $\text{Gal}(L/K)/I(L/K)$ s'identifie à $\text{Gal}(\tilde{L}_1/\tilde{K}_1)$.

De même, $W(L/K)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Gal}(L/K)$, et $\text{Gal}(L/K)/W(L/K)$ s'identifie à $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$.

Quant au quotient $I(L/K)/W(L/K)$, il s'identifie d'après 2.3.19.1 à $\text{Hom}(|L^\times|/|k^\times|, \mu(\tilde{L}_1))$, par la formule $g \mapsto (|x| \mapsto \widetilde{g(x)/x})$.

Comme $I(L/K)/W(L/K)$ est abélien, il hérite d'une vraie action du groupe $\text{Gal}(\tilde{L}_1/\tilde{K}_1)$, pour laquelle l'identification ci-dessus est équivariante.

(2.3.19.4) Soit p l'exposant caractéristique de \tilde{K} . Rappelons que si A est un groupe abélien de torsion, on désigne par $A_{p'}$ son sous-groupe de torsion première à p , et par A^\vee son dual de Pontrjagin.

D'après 2.2.38.4, le polynôme $T^a - 1$ est scindé dans \tilde{L}_1 pour tout entier a divisant l'exposant généralisé de $(|L^\times|/|K^\times|)_{p'}$, et tout plongement de $\mu(\tilde{L}_1)$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} induit un isomorphisme

$$\text{Hom}(|L^\times|/|k^\times|, \mu(\tilde{L}_1)) \simeq (|L^\times|/|K^\times|)_{p'}^\vee.$$

(2.3.20) Lemme. Soit K un corps valué hensélien, soit L une extension galoisienne de K , et soit F une sous-extension galoisienne de L . Les restrictions $W(L/K) \rightarrow W(F/K)$ et $I(L/K) \rightarrow I(F/K)$ sont surjectives.

Démonstration. Soit $g \in \text{Gal}(F/K)$ agissant trivialement sur \tilde{F} (resp. \tilde{F}_1). Relevons g en un élément h de $\text{Gal}(L/K)$. La restriction induisant une surjection de $\text{Gal}(L/F)$ vers le groupe de Galois de \tilde{L} sur \tilde{F} (resp. de \tilde{L}_1 sur \tilde{F}_1), il existe $h' \in \text{Gal}(L/F)$ tel que hh' agisse trivialement sur \tilde{F} (resp. \tilde{F}_1).

Par construction, hh' est un relevé de g à $W(L/K)$ (resp. $I(L/K)$). \square

(2.3.21) Lemme. Soit K un corps valué hensélien, soit L une extension galoisienne de K , et soit p l'exposant caractéristique de \tilde{K} . Le groupe $W(L/K)$ est trivial si $p = 1$, et est l'unique pro- p -sous-groupe de Sylow de $I(L/K)$ sinon.

Démonstration. Comme le groupe quotient $I(L/K)/W(L/K)$ est isomorphe à $(|L^\times|/|K^\times|)_{p'}^\vee$, il est d'ordre généralisé premier à p . Puisque $W(L/K)$ est

distingué dans $l(L/K)$, il suffit de démontrer que c est un pro- p -groupe si $p \neq 1$, et qu'il est trivial sinon.

Le lemme 2.3.20 ci-dessus permet de supposer que L est une extension finie de K (le cas général s'en déduira par passage la limite). Il suffit de démontrer que tout élément d'ordre premier à p de $W(L/K)$ est trivial. Soit g un élément de $W(L/K)$ dont l'ordre q est premier à p et soit E le sous-corps de L formé des éléments invariants sous g . Soit x appartenant à L ; l'élément $y = x - \text{Tr}_{L/E}(x)/q$ de L est de trace nulle sur E . Autrement dit, on a $\sum g^i(y) = 0$, soit encore $qy - \sum (g^i(y) - y) = 0$. Comme q est premier à p , on a $|qy| = |y|$; et puisque g appartient à $W(L/k)$, on a $|g^i(y) - y| < |y|$ pour tout i si $y \neq 0$; par conséquent $y = 0$ et $x \in E$. Ainsi, $E = L$, et $g = \text{Id}$. \square

(2.3.22) Soit K un corps valué hensélien et soit L une extension algébrique de K . On note $\mathcal{S}_f(L/K)$ l'ensemble des sous-extensions finies et séparables de L , et $\mathcal{D}_f(L/K)$ l'ensemble des sous-extensions finies et sans défaut de L dont le corps résiduel est séparable sur \tilde{K} .

Si E est une sous-extension finie de L et si F est une sous-extension de E alors $E \in \mathcal{D}_f(L/K)$ si et seulement si $F \in \mathcal{D}_f(L/K)$ et $E \in \mathcal{D}_f(L/F)$ (2.3.17).

(2.3.23) Lemme. La flèche $E \mapsto \tilde{E}$ établit une bijection d'ensembles ordonnées entre $\mathcal{D}_f(L/K)$ et $\mathcal{S}_f(L/K)$.

Démonstration. La flèche $E \mapsto \tilde{E}$ est clairement croissante. Montrons maintenant qu'elle induit une bijection de $\mathcal{D}_f(L/K)$ vers $\mathcal{S}_f(L/K)$. Soit Λ appartenant à $\mathcal{S}_f(L/K)$; nous allons prouver qu'elle possède un unique antécédent dans $\mathcal{D}_f(L/K)$. On pose $d = [\Lambda : \tilde{K}]$, et l'on raisonne par récurrence sur d . Si $d = 1$ on a $\Lambda = \tilde{K}$ et l'assertion à prouver est immédiate. Supposons d strictement supérieur à 1 et la propriété vraie pour les entiers $< d$.

Comme $d > 1$ il existe $x \in \Lambda \setminus \tilde{K}$. Soit P son polynôme minimal, soit δ le degré de P (il est > 1 par choix de x) et soit \mathcal{P} un relèvement admissible de P dans $K[T]$. Comme L est hensélien et comme P est séparable, il existe une unique racine ξ de \mathcal{P} dans L ; posons $F = K[\xi]$.

Le polynôme \mathcal{P} étant de degré δ , on a $[F : K] \leq \delta$. Par ailleurs,

$$[F : K] \geq [\tilde{F} : \tilde{K}] \geq [\tilde{K}[x] : \tilde{K}] = \delta.$$

Par conséquent, $[F : K] = \delta$ et $\tilde{F} = \tilde{K}[x]$; ainsi, $F \in \mathcal{D}_f(L/K)$.

Si E est une sous-extension de L telle que $x \in \tilde{E}$ le caractère hensélien de E assure qu'il existe une unique racine de \mathcal{P} dans E relevant x , qui coïncide nécessairement avec ξ ; ainsi, $F \subset E$. Puisque $F \in \mathcal{D}_f(L/K)$, le corps E appartient à $\mathcal{D}_f(L/K)$ si et seulement si il appartient à $\mathcal{D}_f(L/F)$.

Comme $\delta > 1$, on a $[\Lambda : \tilde{K}[x]] < d$. L'hypothèse de récurrence assure alors qu'il existe une unique $E \in \mathcal{D}_f(L/F)$ telle que $\tilde{E} = \Lambda$; par ce qui précède, E est l'unique extension appartenant à $\mathcal{D}_f(L/K)$ telle que $\tilde{E} = \Lambda$. Ainsi, Λ a bien un unique antécédent dans $\mathcal{D}_f(L/K)$, comme annoncé.

Soit maintenant Λ et Λ' deux extensions appartenant à $\mathcal{S}_f(L/K)$ telle que $\Lambda \subset \Lambda'$, et soient E et E' leurs antécédents respectifs dans $\mathcal{D}_f(L/K)$.

Comme $\Lambda \in \mathcal{S}_f(E'/K)$, elle possède un unique antécédent dans $\mathcal{D}_f(E'/K)$; par unicité, celui-ci coïncide nécessairement avec E et l'on a en particulier $E \subset E'$, ce qui achève la démonstration. \square

(2.3.24) Comme $\mathcal{S}_f(L/K)$ est un ensemble ordonné filtrant, il en va de même en vertu du lemme 2.3.23 ci-dessus de l'ensemble ordonné $\mathcal{D}_f(L/K)$.

Soit (F_i) une famille finie de sous-extensions de L appartenant à $\mathcal{D}_f(L/K)$. Par ce qui précède, il existe une extension $F \in \mathcal{D}_f(L/K)$ contenant les F_i ; il s'ensuit que la composée des F_i appartient à $\mathcal{D}(L/K)$.

(2.3.25) Soit E une sous-extension de L . Il résulte de 2.3.24 que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) toute sous-extension finie de E appartient à $\mathcal{D}_f(L/K)$;
- ii) E est réunion d'extensions finies appartenant à $\mathcal{D}_f(L/K)$.

On note $\mathcal{D}(L/K)$ l'ensemble des sous-extensions de L satisfaisant ces conditions. Si $E \in \mathcal{D}(L/K)$, il en va de même de toute sous-extension de E .

Soit $\mathcal{S}(L/K)$ l'ensemble de toutes les sous-extensions séparables de \tilde{L} . Soit $\Lambda \in \mathcal{S}(L/K)$. Le sous-ensemble de $\mathcal{D}_f(L/K)$ constitué des corps E tels que $\tilde{E} \subset \Lambda$ est filtrant; la réunion des extensions appartenant audit sous-ensemble est un élément Λ° de $\mathcal{D}(L/K)$.

(2.3.26) Lemme. *Les flèches $E \mapsto \tilde{E}$ et $\Lambda \mapsto \Lambda^\circ$ établissent une bijection entre $\mathcal{D}(L/K)$ et $\mathcal{S}(L/K)$.*

Démonstration. Si $\Lambda \in \mathcal{S}(L/K)$, il résulte immédiatement de la définition que $\tilde{\Lambda^\circ} = \Lambda$.

Soit $E \in \mathcal{D}(L/K)$. Si F est une sous-extension finie de E alors $F \in \mathcal{D}_f(L/K)$ et $\tilde{F} \subset \tilde{E}$; en conséquence $E \subset \tilde{E}^\circ$.

Inversement, soit $F \in \mathcal{D}_f(L/K)$ telle que $\tilde{F} \subset \tilde{E}$. Choisissons une partie génératrice finie S de \tilde{F} sur \tilde{K} . Pour tout $\xi \in S$, il existe une sous-extension E_ξ de E , appartenant à $\mathcal{D}(L/K)_f$ et telle que $\xi \in \tilde{E}_\xi$. La composée des E_ξ est contenue dans E , et appartient à $\mathcal{D}_f(L/K)$; par construction, son corps résiduel contient \tilde{F} . On déduit alors du lemme 2.3.23 qu'elle contient F , d'où l'inclusion $F \subset E$. Il vient $\tilde{E}^\circ \subset E$. \square

(2.3.27) L'ensemble $\mathcal{S}(L/K)$ admet un plus grand élément : la fermeture séparable \tilde{L}_{sep} de \tilde{K} dans \tilde{L} ; par conséquent, $\mathcal{D}(L/K)$ admet un plus grand élément E , à savoir $\tilde{L}_{\text{sep}}^\circ$.

(2.3.28) Théorème. *Supposons que L est galoisienne sur K . On a l'égalité $L^W(L/K) = \tilde{L}_{\text{sep}}^\circ$.*

Démonstration. Le lemme 2.3.20 permet de se ramener au cas où L est finie sur K .

Par définition de $W(L/K)$, le groupe $\text{Gal}(F/K)$ s'identifie naturellement à $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K})$; cela signifie que les surjections

$$\text{Gal}(F/K) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{F}/\tilde{K}) \quad \text{et} \quad \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{K}) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{F}/\tilde{K})$$

sont bijectives. La bijectivité de la seconde implique que \tilde{L} est purement inséparable sur \tilde{F} .

On a par ailleurs

$$\text{card}(\text{Gal}(F/K)) = [F : K] \geq [\tilde{F} : \tilde{K}] \geq \text{card}(\text{Gal}(\tilde{F}/\tilde{K})) = \text{card}(\text{Gal}(F/K)).$$

On en déduit que $[\tilde{F} : \tilde{K}] = [F : K]$ et que \tilde{F} est galoisienne sur \tilde{K} . Il s'ensuit que $F \in \mathcal{D}(L/K)$, et que $\tilde{F} = \tilde{L}_{\text{sep}}$. En conséquence, $F = \tilde{L}_{\text{sep}}^\circ$. \square

Extensions modérément ramifiées

(2.3.29) Soit K un corps valué hensélien, soit p son exposant caractéristique résiduel, et soit F une extension algébrique de K . On dit que F est *modérément ramifiée* si $F \in \mathcal{D}(F/K)$, c'est-à-dire si \tilde{F} est séparable sur \tilde{K} et si $F = \tilde{F}^\circ$; il revient au même de demander que \tilde{F} soit séparable sur \tilde{K} et que toute sous-extension finie de \tilde{F} soit sans défaut. Notons qu'en vertu de 2.2.27.5, la séparabilité de \tilde{F} sur \tilde{K} peut elle-même se reformuler comme suit, dans un langage plus classique : \tilde{F}_1 est séparable sur \tilde{K}_1 , et $F^\times/|K^\times|$ est sans p -torsion. Si F est modérément ramifiée, il en va de même de chacune de ses sous-extensions.

(2.3.29.1) Si F est finie sur K , elle est modérément ramifiée si et seulement si elle est sans défaut et si \tilde{F} séparable sur \tilde{K} .

(2.3.29.2) Supposons que F soit modérément ramifiée. Toute sous-extension de F appartient alors à $\mathcal{D}(F/K)$, et toute sous-extension de \tilde{F} appartient à $\mathcal{S}(F/K)$. On déduit dès lors du lemme 2.3.26 que l'application $E \mapsto \tilde{E}$ établit une bijection entre l'ensemble des sous-extensions de F et celui des sous-extensions de \tilde{F} .

(2.3.29.3) Soit L une extension algébrique de F qui est galoisienne sur K . On déduit du théorème 2.3.20 que F est modérément ramifiée si et seulement si $F \subset L^{\text{W}(L/K)}$.

(2.3.29.4) Supposons que F soit galoisienne. D'après le 2.3.29.3 ci-dessus, elle est modérément ramifiée si et seulement si $\text{W}(F/K)$ est trivial. Plaçons-nous sous cette hypothèse. On dispose alors par définition du groupe $\text{W}(F/K)$ d'un isomorphisme $\text{Gal}(F/K) \simeq \text{Gal}(\tilde{F}/\tilde{K})$.

Si $g \in \text{Gal}(F/K)$ et si E est une sous-extension de F , on a $\widetilde{g(E)} = \tilde{g}(\tilde{E})$, où \tilde{g} désigne l'image de g dans $\text{Gal}(\tilde{F}/\tilde{K})$. Il s'ensuit que la bijection $E \mapsto \tilde{E}$ de 2.3.29.2 coïncide avec celle déduite de l'isomorphisme $\text{Gal}(F/K) \simeq \text{Gal}(\tilde{F}/\tilde{K})$ et de la correspondance de Galois.

Le groupe $\text{W}(F/K)$ étant trivial, le groupe $\text{l}(F/K)$ est naturellement isomorphe à $\text{Hom}(|F^\times|/|K^\times|, \mu(\tilde{F}_1))$ (2.3.19.3). L'indice $(|E^\times| : |K^\times|)$ est de surcroît premier à p pour toute sous-extension finie E de F (cf. 2.3.29.1). En conséquence, il résulte de 2.3.19.4 que tout plongement de $\mu(\tilde{F}_1)$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} induit un isomorphisme $\text{l}(F/K) \simeq (|F^\times|/|K^\times|)^\vee$.

(2.3.30) Soit A une K -algèbre étale; écrivons $A = \prod K_i$, où (K_i) est une famille finie d'extensions séparables de K . On munit l'algèbre A de la semi-norme $(x_i) \mapsto \sup |x_i|$; notons que $\tilde{A} \simeq \prod \tilde{K}_i$. On dit que A est modérément ramifiée si c'est le cas de chacune des K_i .

Fixons une clôture séparable K^s de K . La catégorie des K -algèbres finies étales s'identifie à celle des $\text{Gal}(K^s/K)$ -ensembles finis et discrets. Si A est une K -algèbre étale, on déduit de 2.3.29.3 que A est modérément ramifiée si et seulement si $W(K^s/K)$ agit trivialement sur le $\text{Gal}(K^s/K)$ -ensemble correspondant; on dispose donc d'une équivalence entre la catégorie des K -algèbres finies étales modérément ramifiées et celle des $\text{Gal}(\widetilde{K}^s/\widetilde{K})$ -ensembles finis discrets. Comme \widetilde{K}^s est séparablement clos en vertu du lemme 2.3.5, cette dernière catégorie est elle-même équivalente à celle des \widetilde{K} -algèbres finies étales.

On a ainsi construit une équivalence entre la catégorie des K -algèbres étales modérément ramifiées et celle des \widetilde{K} -algèbres étales. On déduit du 2.3.29.4 que cette équivalence est donnée par la flèche $A \mapsto \widetilde{A}$.

(2.3.31) Lemme. *Soit K un corps valué hensélien et soit E une extension finie de K de degré premier à l'exposant caractéristique p de \widetilde{K} . L'extension E est alors modérément ramifiée.*

Démonstration. Soit L une extension finie de E galoisienne sur K . Si $p = 1$ le groupe $W(L/K)$ est trivial (lemme 2.3.21), et E est modérément ramifiée.

Supposons $p > 1$, et soit H un p -sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(L/E)$. Comme $[E : K]$ est premier à p , le groupe H est aussi un p -sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(L/K)$. Puisque le sous-groupe distingué $W(L/K)$ de $\text{Gal}(L/K)$ est un p -groupe d'après le lemme 2.3.21, il est contenu dans H , et *a fortiori* dans $\text{Gal}(L/E)$, ce qui termine la preuve. \square

Extensions non ramifiées

(2.3.32) Soit K un corps valué hensélien, soit p son exposant caractéristique résiduel, et soit F une extension algébrique de K . On dit que F est *non ramifiée* si F est modérément ramifiée et si $|F^\times| = |K^\times|$. Si F est non ramifiée, il en va de même de chacune de ses sous-extensions.

(2.3.32.1) Si F est finie sur K , elle est non ramifiée si et seulement si \widetilde{F}_1 est une extension séparable sur \widetilde{K}_1 , de degré $[F : K]$: cela provient de l'égalité

$$[\widetilde{F} : \widetilde{K}] = (|F^\times| : |K^\times|) \cdot [\widetilde{F}_1 : \widetilde{K}_1]$$

et de 2.2.27.5.

(2.3.32.2) Supposons que F soit non ramifiée. On déduit de 2.3.29.2 et de 2.2.27.2 que $E \mapsto \widetilde{E}_1$ établit une bijection entre l'ensemble des sous-extensions de F et celui des sous-extensions de \widetilde{F}_1 .

(2.3.32.3) Soit L une extension algébrique de F qui est galoisienne sur K . On déduit du théorème 2.3.20 que F est modérément ramifiée si et seulement si $F \subset L^{l(L/K)}$.

(2.3.32.4) Supposons que F soit galoisienne. D'après le 2.3.29.3 ci-dessus, elle est modérément ramifiée si et seulement si $l(F/K)$ est trivial. Plaçons-nous sous cette hypothèse. On dispose alors par définition du groupe $l(F/K)$ d'un isomorphisme $\text{Gal}(F/K) \simeq \text{Gal}(\widetilde{F}_1/\widetilde{K}_1)$.

Si $g \in \text{Gal}(F/K)$ et si E est une sous-extension de F , on a $\widetilde{g(E)}_1 = \widetilde{g}(\widetilde{E}_1)$, où \widetilde{g} désigne l'image de g dans $\text{Gal}(\widetilde{F}_1/\widetilde{K}_1)$. Il s'ensuit que la bijection $E \mapsto$

\tilde{E}_1 de 2.3.32.2 coïncide avec celle déduite de l'isomorphisme $\text{Gal}(F/K) \simeq \text{Gal}(\tilde{F}_1/\tilde{K}_1)$ et de la correspondance de Galois.

(2.3.33) Soit A une K -algèbre étale; écrivons $A = \prod K_i$, où (K_i) est une famille finie d'extensions séparables de K . On munit l'algèbre A de la semi-norme $(x_i) \mapsto \sup |x_i|$; notons que $\tilde{A}_1 \simeq \prod \tilde{K}_{i,1}$. On dit que A est non ramifiée si c'est le cas de chacune des K_i .

Fixons une clôture séparable K^s de K . La catégorie des K -algèbres finies étales s'identifie à celle des $\text{Gal}(K^s/K)$ -ensembles finis et discrets. Si A est une K -algèbre étale, on déduit de 2.3.32.3 que A est modérément ramifiée si et seulement si $l(K^s/K)$ agit trivialement sur le $\text{Gal}(K^s/K)$ -ensemble correspondant; on dispose donc d'une équivalence entre la catégorie des K -algèbres finies étales modérément ramifiées et celle des $\text{Gal}(\tilde{K}_1^s/\tilde{K}_1)$ -ensembles finis discrets. Comme \tilde{K}_1^s est séparablement clos en vertu du lemme 2.3.5, cette dernière catégorie est elle-même équivalente à celle des \tilde{K}_1 -algèbres finies étales.

On a ainsi construit une équivalence entre la catégorie des K -algèbres étales non ramifiées et celle des \tilde{K}_1 -algèbres étales. On déduit du 2.3.29.4 que cette équivalence est donnée par la flèche $A \mapsto \tilde{A}_1$.

(2.3.34) Proposition. Soit A une K -algèbre finie étale; notons A° la K° -algèbre $\{a \in A, \|a\| \leq 1\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) A est non ramifiée;
- ii) A° est finie étale sur K° ;
- iii) il existe une K° -algèbre finie étale B telle que $A \simeq B \otimes_{K^\circ} K$.

Si de plus si elles sont satisfaites alors la K° -algèbre B de iii) est nécessairement égale à A° , et $\tilde{A}_1 = A^\circ \otimes_{K^\circ} \tilde{K}_1$.

Démonstration. On peut raisonner facteur par facteur, et partant supposer que A est un corps.

Supposons que i) est vraie. Choisissons un élément ξ de \tilde{A}_1 qui l'engendre sur \tilde{K}_1 , et soit P un relevé unitaire dans $K^\circ[T]$ du polynôme minimal de ξ sur \tilde{K}_1 . Le corps A étant hensélien, le polynôme P possède une racine x dans A° située au-dessus de ξ . Comme $\tilde{K}[x]_1$ contient ξ , son degré sur \tilde{K}_1 est au moins égal à $[A : K]$, et il est par ailleurs majoré par $[K[x] : K]$; il vient $A = K[x]$. En particulier, x est de degré $[A : K] = \deg P$ sur K , et P est donc son polynôme minimal. Puisqu'il est unitaire, $K^\circ[x] \simeq K^\circ[T]/P$; le polynôme P se réduisant par construction en un polynôme séparable de $\tilde{K}_1[T]$, la K° -algèbre $K^\circ[x]$ est finie étale. Elle est dès lors normale, et coïncide de ce fait avec la fermeture intégrale de K° dans A , qui n'est autre que A° , d'où ii).

L'implication ii) \Rightarrow iii) est évidente.

Supposons que iii) est vraie. Comme B est plate, elle est sans K° -torsion et se plonge donc dans A ; c'est une sous- K° -algèbre de A qui est entière sur K° , et normale car étale sur K° . Elle coïncide de ce fait avec la fermeture intégrale de K° dans A , qui n'est autre que A° .

L'anneau K° étant hensélien, la K° -algèbre finie et intègre A° est locale. La \tilde{K}_1 -algèbre $A^\circ \otimes_{K^\circ} \tilde{K}_1$ étant à la fois locale et étale, c'est un corps; cela signifie que $K^{\circ\circ} A^\circ$ est l'idéal maximal de A° , et $A^\circ \otimes_{K^\circ} \tilde{K}_1$ s'identifie en conséquence

au corps résiduel \tilde{A}_1 . Celui-ci est donc séparable et de degré $[A : K]$ sur \tilde{K}_1 , d'où i). \square

Les μ_ℓ -torseurs sur un corps valué hensélien

(2.3.35) Soit K un corps valué hensélien, et soit ℓ un entier premier à l'exposant caractéristique de \tilde{K} .

(2.3.35.1) Le théorème 90 de Hilbert fournit trois isomorphismes naturels

$$\mathrm{H}^1(K, \mu_\ell) \simeq K^\times / (K^\times)^\ell, \quad \mathrm{H}^1(K^\circ, \mu_\ell) \simeq K^{\circ, \times} / (K^{\circ, \times})^\ell$$

$$\text{et } \mathrm{H}^1(\tilde{K}_1, \mu_\ell) \simeq \tilde{K}_1^\times / (\tilde{K}_1^\times)^\ell.$$

Il en résulte immédiatement, compte-tenu du caractère hensélien de K° , que la flèche naturelle $\mathrm{H}^1(K^\circ, \mu_\ell) \rightarrow \mathrm{H}^1(\tilde{K}_1, \mu_\ell)$ est un isomorphisme (ce que l'on pouvait également déduire de 2.1.10.3).

(2.3.35.2) Comme $|K^\times|$ est sans torsion, la suite exacte

$$1 \rightarrow K^{\circ, \times} \rightarrow K^\times \rightarrow |K^\times| \rightarrow 1$$

induit une suite exacte

$$1 \rightarrow K^{\circ, \times} / (K^{\circ, \times})^\ell \rightarrow K^\times / (K^\times)^\ell \rightarrow |K^\times| / |K^\times|^\ell \rightarrow 1$$

que l'on peut récrire

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(K^\circ, \mu_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(K, \mu_\ell) & \xrightarrow{\partial} & |K^\times| / |K^\times|^\ell \longrightarrow 1 \\ & & \simeq \downarrow & & & & \\ & & \mathrm{H}^1(\tilde{K}_1, \mu_\ell) & & & & \end{array} .$$

La flèche $\partial : \mathrm{H}^1(K, \mu_\ell) \rightarrow |K^\times| / |K^\times|^\ell$ est appelée *résidu*. Si $h \in \mathrm{H}^1(K, \mu_\ell)$ alors $\partial(h) = 0$ si et seulement si h provient de $\mathrm{H}^1(K^\circ, \mu_\ell)$; cela revient à demander, en vertu de 2.1.1.5 et de la proposition 2.3.33, que la K -algèbre étale définie par h soit non ramifiée.

(2.3.35.3) Supposons que \tilde{K}_1^\times soit ℓ -divisible, ce qui est notamment le cas lorsque \tilde{K}_1 est séparablement clos. On a alors $\mathrm{H}^1(\tilde{K}_1, \mu_\ell) = 0$; par ce qui précède, le résidu ∂ induit un isomorphisme $\mathrm{H}^1(K, \mu_\ell) \simeq |K^\times| / |K^\times|^\ell$.

(2.3.35.4) Supposons que $|K^\times|$ soit ℓ -divisible. On a alors par ce qui précède un diagramme d'isomorphismes

$$\mathrm{H}^1(\tilde{K}_1, \mu_\ell) \xleftarrow{\simeq} \mathrm{H}^1(K^\circ, \mu_\ell) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^1(K, \mu_\ell) .$$

Extensions modérément ramifiées : le cas d'un corps résiduel séparablement clos

(2.3.36) Soit K un corps valué hensélien dont le corps résiduel \tilde{K}_1 est séparablement clos, soit K^s une clôture séparable de K , et soit L le sous-corps $(K^s)^{W(K^s/K)}$ de K^s . On note p l'exposant caractéristique de \tilde{K} .

Comme \tilde{K}_1 est séparablement clos, le groupe $\mathbf{l}(K^s/K)$ est égal à $\widetilde{\text{Gal}}(K^s/K)$ tout entier, et $\mu(\tilde{K}_1^s) = \mu(\tilde{K}_1)$. Il s'ensuit que $|x| \mapsto g(x)/x$ induit un isomorphisme entre $\text{Gal}(L/K)$ et $\text{Hom}(|L^\times|/|K^\times|, \mu(\tilde{K}_1))$.

Soit F une sous-extension de L . Le groupe de Galois de L sur K étant abélien, l'extension F est galoisienne. Elle est également modérément ramifiée ; en conséquence, $|x| \mapsto g(x)/x$ induit un isomorphisme entre $\text{Gal}(F/K)$ et $\text{Hom}(|F^\times|/|K^\times|, \mu(\tilde{K}_1))$.

La surjection $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(F/K)$ correspond, modulo les isomorphismes évoqués ci-dessus, à la flèche de restriction de $\text{Hom}(|L^\times|/|K^\times|, \mu(\tilde{K}_1))$ vers $\text{Hom}(|F^\times|/|K^\times|, \mu(\tilde{K}_1))$. Le groupe $\text{Gal}(L/F)$ est donc égal, modulo l'identification entre $\text{Gal}(L/K)$ et $\text{Hom}(|L^\times|/|K^\times|, \mu(\tilde{K}_1))$, à l'orthogonal de $|F^\times|/|K^\times|$.

(2.3.37) Comme L est modérément ramifiée sur K , le groupe $|L^\times|/|K^\times|$ est sans p -torsion. En combinant correspondance de Galois et dualité de Pontrjagin (comme \tilde{F}_1 est séparablement clos, $\mu(\tilde{F}_1)$ est isomorphe à la partie de torsion première à p de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , et l'on n'a pas besoin ici d'invoquer 2.2.38.4), on voit que pour tout sous-groupe Δ de $|L^\times|/|K^\times|$, il existe une et une seule sous-extension F de L telle que $|L^\times|/|K^\times| = \Delta$.

(2.3.38) On en déduit que l'application $F \mapsto |F^\times|/|K^\times|$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphie d'extensions modérément ramifiées de K et celui des sous-groupes de $|L^\times|/|K^\times|$ (on considère $|F^\times|$ et $|L^\times|$ comme canoniquement plongés dans $|K^\times|^\mathbb{Q}$).

(2.3.39) On peut donner une description précise du sous-groupe $|L^\times|/|K^\times|$ de $|K^\times|^\mathbb{Q}/|K^\times|$: c'est précisément sa partie de torsion première à p . En effet, on sait déjà que $|L^\times|/|K^\times|$ est de torsion première à p . Il suffit donc de montrer que si Δ est un sous-groupe fini de $|K^\times|^\mathbb{Q}/|K^\times|$ qui est de torsion première à p , il existe une extension modérément ramifiée F de K telle que $|F^\times|/|K^\times| = \Delta$. C'est ce que nous allons faire, en décrivant *explicitement* une telle F .

Choisissons une famille (d_1, \dots, d_n) d'éléments de $|K^\times|^\mathbb{Q} \setminus |K^\times|$ tels que Δ soit somme directe des $\overline{d_i}^{\mathbb{Z}}$. Pour tout i , on note e_i l'ordre de $\overline{d_i}$, et l'on choisit un élément x_i de K tel que $d_i^{e_i} = |x_i|$.

Soit A la K -algèbre finie $K[T_1, \dots, T_n]/(T_i^{e_i} - x_i)$. Sa dimension est égale au produit des e_i , c'est-à-dire au cardinal de Δ . Fixons un quotient F de A par un idéal maximal. Par construction, x_i a pour tout i une racine e_i -ième dans F ; il s'ensuit que

$$|F^\times|/|K^\times| \supset \langle \overline{|x_1|}^{1/e_1}, \dots, \overline{|x_n|}^{1/e_n} \rangle = \langle \overline{d_1}, \dots, \overline{d_n} \rangle = \Delta.$$

On a ainsi

$$\text{card } \Delta = [A : K] \geq [F : K] \geq (|F^\times| : |K^\times|) \geq \text{card } \Delta.$$

Par conséquent, $F = A$, $[F : K] = \text{card } \Delta$ et $|F^\times|/|K^\times| = \Delta$. Notons que l'égalité $[F : K] = (|F^\times| : |K^\times|)$ implique que $\tilde{F}_1 = \tilde{K}_1$ (et que F est sans défaut).

Il suffit pour conclure de montrer que F est modérément ramifiée. Or comme le groupe Δ est de cardinal premier à p , le quotient $|F^\times|/|K^\times|$ est de cardinal premier à p ; on a vu par ailleurs que $\tilde{F}_1 = \tilde{K}_1$, et que F est sans défaut. Elle est donc modérément ramifiée.

Chapitre 3

Géométrie analytique

3.1 Espaces de Berkovich : rappels et notations

Quelques conventions et notations

On fixe pour toute la suite du texte un corps ultramétrique complet k (sa valeur absolue peut être triviale). On se donne une clôture séparable k^s de k , et l'on note $\widehat{k^a}$ le complété de la clôture algébrique k^a de k^s ; on note par ailleurs $\widehat{k^{\text{parf}}}$ le complété de la clôture parfaite k^{parf} de k . Si $|k^\times| \neq \{1\}$ alors k^s est dense dans $\widehat{k^a}$. Le corps résiduel de $\widehat{k^a}$ est une clôture algébrique \widetilde{k}_1^a de \widetilde{k}_1 ; on note par ailleurs p l'exposant caractéristique de \widetilde{k}_1 . On pose $\mathbf{G} = \text{Gal}(k^s/k)$. On appellera extension *presque algébrique* de k toute extension complète de k admettant un k -plongement isométrique dans $\widehat{k^a}$.

On appellera *polyrayon* une famille finie de réels strictement positifs; si cette famille est libre lorsqu'on la voit dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}_+^\times / |k^\times|)$, on dira que le polyrayon en question est *k -libre*. Si $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ est un polyrayon k -libre, la k -algèbre affinoïde $k\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n, r_1 T_1^{-1}, \dots, r_n T_n^{-1}\}$ est un corps que l'on notera $k_{\mathbf{r}}$.

(3.1.1) Nous travaillerons avec la notion d'espace analytique *au sens de Berkovich*, en ayant soin de n'utiliser que les résultats de la théorie qui sont prouvés *sans recourir à l'existence de modèles formels ou algébriques particuliers*. Un espace de Berkovich est localement compact et localement connexe par arcs. Si \mathcal{X} est une k -variété algébrique, c'est-à-dire un k -schéma séparé de type fini, l'on notera \mathcal{X}^{an} son analytification. Si $a \in k$ et si $r \in \mathbb{R}_+$, l'on notera $\eta_{a,r}$ le point de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par la semi-norme $\sum a_i (T-a)^i \mapsto \max |a_i| r^i$; lorsque $a = 0$, l'on écrira η_r . Si l'on travaille sur une extension complète L de k on utilisera les notations $\eta_{a,r,L}$ et $\eta_{r,L}$.

(3.1.1.1) Si X (resp. \mathcal{A}) est un espace k -analytique (resp. une k -algèbre de Banach) et si L est une extension complète de k , l'on notera X_L (resp. \mathcal{A}_L) l'espace L -analytique $X \widehat{\otimes}_k L$ (resp. la L -algèbre de Banach $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L$); si \mathbf{r} est un polyrayon k -libre, on écrira souvent $X_{\mathbf{r}}$ ou $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ au lieu de $X_{k_{\mathbf{r}}}$ ou $\mathcal{A}_{k_{\mathbf{r}}}$.

(3.1.1.2) Soit X un espace k -analytique. Si L une extension complète de k l'on dispose d'une application continue naturelle $X_L \rightarrow X$ qui est compacte et surjective. La flèche $X_{\widehat{k^a}} \rightarrow X$ identifie topologiquement X au quotient $X_{\widehat{k^a}}/\mathbf{G}$;

il s'ensuit que $X_L \rightarrow X$ est ouverte pour toute extension presque algébrique L de k (rem. 1.1.9.4).

Si \mathbf{r} est un polyrayon k -libre, la fibre de $X_{\mathbf{r}} \rightarrow X$ en un point x de X est un espace $\mathcal{H}(x)$ -affinoïde dont le bord de Shilov est un singleton $\{\sigma(x)\}$; l'application σ est une section continue de $X_{\mathbf{r}} \rightarrow X$, appelée sa *section de Shilov*. Si X est connexe alors $X_{\mathbf{r}}$ l'est aussi.

(3.1.1.3) On dira qu'un morphisme $\varphi : Y \rightarrow X$ entre espaces k -analytiques est *constant* si Y est vide ou si $\varphi(Y)$ est un point rigide de X ; si Y est connexe et si φ est G -localement constant alors φ est constant. On dira qu'une fonction analytique sur Y est constante si le morphisme induit $Y \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ est constant; si Y est connexe (resp. connexe et quasi-compact), il revient au même de demander que l'image de f dans $\mathcal{O}_{Y_{\text{red},G}}(Y_{\text{red}})$ (resp. que f) soit entière sur k .

(3.1.1.4) Soit X un espace k -analytique. On désigne par $\mathfrak{s}(X)$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X qui annulent G -localement un polynôme *séparable* non nul à coefficients dans k ; les fonctions appartenant à $\mathfrak{s}(X)$ sont G -localement constantes.

Supposons de plus X connexe et non vide; l'algèbre $\mathfrak{s}(X)$ est alors une extension finie séparable de k , qui est contenue dans l'algèbre des fonctions constantes sur X et coïncide avec celle-ci si X est géométriquement réduit; l'espace $X_{\widetilde{k}^a}$ est connexe si et seulement si $\mathfrak{s}(X) = k$, et l'on dit dans ce cas que X est *géométriquement* connexe.

(3.1.1.5) Si X est un espace analytique et si $x \in X$, on notera $\mathcal{H}(x)$ le corps résiduel complété de x ; si de plus X est bon, on notera $\kappa(x)$ le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. On notera $\mathfrak{s}(x)$ la clôture séparable de k dans $\mathcal{H}(x)$. Pour tout domaine analytique V de X contenant x , l'évaluation en x induit un plongement $\mathfrak{s}(V) \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$. Si $[\mathfrak{s}(x) = k]$ est finie, le caractère hensélien de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ assure qu'il existe un voisinage analytique U de x dans X tel que $\mathfrak{s}(U) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ soit un isomorphisme; il est immédiat que $\mathfrak{s}(V) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ est encore un isomorphisme pour tout domaine analytique V de U contenant x .

(3.1.2) On dispose d'une bonne théorie de la dimension en théorie de Berkovich. Si X est un espace k -analytique, on a

$$\dim_k X = \sup_{x \in X} \text{deg.tr. } \widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}.$$

(3.1.3) Nous utiliserons à plusieurs reprises implicitement le fait suivant : si X est un espace analytique et si $\varphi : X' \rightarrow X$ est son normalisé, alors X s'identifie topologiquement au quotient de X' par la relation dont les classes sont les fibres de φ ; cela résulte directement de 1.1.7.

Réduction à la Temkin : le cas affinoïde

(3.1.4) Soit \mathcal{A} une algèbre k -affinoïde et soit X l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. On désigne par $\widetilde{\mathcal{A}}$ l'annéloïde résiduel associé à \mathcal{A} munie de sa *semi-norme spectrale* (2.2.44); c'est une \widetilde{k} -algèbre de type fini, dont on note \widetilde{X} le spectre, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers; on dispose d'une application de réduction $\rho : X \rightarrow \widetilde{X}$ qui est anticontinue. Si \mathcal{A} est strictement k -affinoïde alors \widetilde{X} s'identifie à la réduction usuelle de X , à savoir $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{A}}_1$.

(3.1.4.1) Si ξ est un point générique de \tilde{X} (i.e. le point générique d'une de ses composantes irréductibles) alors $\rho^{-1}(\xi)$ est un singleton ; le bord de Shilov de X est exactement $\{\rho(\xi)\}$, où ξ parcourt l'ensemble des points génériques de \tilde{X} .

(3.1.4.2) Si ξ et η sont deux points de \tilde{X} et si $y \in \rho^{-1}(\eta)$ alors $y \in \overline{\rho^{-1}(\xi)}$ si et seulement si $\xi \in \overline{\{\eta\}}$.

En effet, supposons que $y \in \overline{\rho^{-1}(\xi)}$. Soit \mathcal{U} l'ouvert de Zariski de \tilde{X} complémentaire du fermé $\overline{\{\eta\}}$. Son image réciproque $\rho^{-1}(\mathcal{U})$ est un fermé de X qui ne contient pas y ; dès lors, il ne contient pas $\rho^{-1}(\xi)$. Par conséquent, $\xi \notin \mathcal{U}$ et l'on a donc $x \in \overline{\{\eta\}}$.

Réciproquement, supposons que $\xi \in \overline{\{\eta\}}$ et soit U un voisinage affinoïde de y dans X ; soit \mathcal{B} l'algèbre des fonctions analytiques sur U . On désigne par η' l'image de y sur \tilde{U} et par \mathfrak{p} (resp. \mathfrak{p}') l'idéal premier de \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) qui correspond à η (resp. η'). Comme $U \hookrightarrow X$ est par construction intérieur en y , la \mathcal{A}/\mathfrak{p} -algèbre $\mathcal{B}/\mathfrak{p}'$ est finie ; en vertu du *going-up* gradué, $\overline{\{\eta'\}} \rightarrow \overline{\{\eta\}}$ est surjective ; en particulier, ξ appartient à l'image de $\overline{\{\eta'\}} \rightarrow \overline{\{\eta\}}$, et donc à celle de $\tilde{U} \rightarrow \tilde{X}$; mais cela signifie qu'il existe $x \in U$ dont l'image sur \tilde{X} est égale à ξ ; autrement dit, U rencontre $\rho^{-1}(\xi)$.

(3.1.4.3) Si ξ est un point de \tilde{X} dont le corps résiduel est fini sur \tilde{k} , l'ouvert $\rho^{-1}(\xi)$ est connexe.

Réduction à la Temkin : le cas local

(3.1.5) Nous allons commencer par rappeler la définition de la catégorie des germes (ponctuels) d'espaces k -analytiques dont nous nous servirons abondamment.

(3.1.5.1) Un morphisme $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ d'espaces k -analytiques pointés est appelé un *isomorphisme local* s'il induit un isomorphisme d'un voisinage ouvert de y dans Y sur un voisinage ouvert de x dans X .

(3.1.5.2) On définit la catégorie des *germes d'espaces k -analytiques* comme la localisée de la catégorie des espaces analytiques pointés par la famille des isomorphismes locaux. On vérifie alors qu'un morphisme $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ entre espaces k -analytiques pointés induit un isomorphisme de germes si et *seulement si* c'est un isomorphisme local.

(3.1.6) Soit $\varphi : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ un morphisme de germes d'espaces k -analytiques. On appellera *représentant* de φ la donnée d'un morphisme $\psi : (Z, z) \rightarrow (T, t)$ d'espaces analytiques pointés et d'un diagramme commutatif de morphisme de germes

$$\begin{array}{ccc} (Y, y) & \xrightarrow{\sim} & (Z, z) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (X, x) & \xrightarrow{\sim} & (T, t) \end{array} .$$

Tout morphisme de germes admet un représentant.

On dira qu'un morphisme de germes est fini (resp. fini et plat, resp. à fibre finie, resp. sans bord) s'il admet un représentant fini (resp. fini et plat, resp. dont

la fibre distinguée est finie, resp. sans bord). Un morphisme de germes $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ à fibre finie admet toujours un représentant $(Z, z) \rightarrow (T, t)$ qui est compact (il suffit de prendre Z et T compacts) et dont la fibre en t est le singleton $\{z\}$.

(3.1.7) Nous dirons qu'un germe (X, x) d'espace k -analytique est bon (resp. séparé, resp. sans bord) s'il existe un espace k -analytique pointé (Y, y) , où Y est bon (resp. séparé, resp. sans bord) et un isomorphisme de k -germes $(Y, y) \simeq (X, x)$.

(3.1.8) Un *domaine analytique* d'un germe d'espace analytique (X, x) est une classe d'isomorphie de (X, x) -germes de la forme (V, x) où V est un domaine analytique de X contenant x .

(3.1.9) Soit (X, x) un germe d'espace k -analytique. Temkin a défini la *réduction graduée* $\widetilde{(X, x)}$ de (X, x) . C'est un espace topologique quasi-compact non vide muni d'une application continue vers l'espace de Zariski-Riemann $\mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}$ qui est un homéomorphisme local; le diagramme $\widetilde{(X, x)} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}$ est fonctoriel en le germe (X, x) .

(3.1.9.1) La flèche $(V, x) \mapsto \widetilde{(V, x)}$ établit une bijection entre l'ensemble des domaines analytiques de (X, x) et celui des ouverts quasi-compacts et non vides de $\widetilde{(X, x)}$.

(3.1.9.2) Le germe (X, x) est bon (resp. séparé, resp. sans bord) si et seulement si $\widetilde{(X, x)}$ est un ouvert affine de $\mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}$ (resp. est un ouvert de $\mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}$, resp. est égal à $\mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}$).

(3.1.9.3) Donnons une description de $\widetilde{(X, x)}$ dans le cas où (X, x) est bon. On peut alors supposer que X est affinoïde; soit \mathcal{A} l'algèbre correspondante. On dispose d'un morphisme naturel d'annéloïdes $f : \widetilde{\mathcal{A}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$, induit par l'évaluation en x . On a alors

$$\widetilde{(X, x)} = \mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}\{f(\widetilde{\mathcal{A}})\},$$

qui est bien un ouvert affine de $\mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}$ puisque $\widetilde{\mathcal{A}}$ est de type fini sur \tilde{k} .

(3.1.9.4) On ne suppose plus que (X, x) est bon. Soient (f_1, \dots, f_r) des fonctions analytiques inversibles au voisinage de x et soit (V, x) le domaine analytique de (X, x) défini par les inégalités $|f_i| \leq |f_i(x)|$ pour tout i . On a alors

$$\widetilde{(V, x)} = \widetilde{(X, x)} \times_{\mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}} \mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}\{f_1(x), \dots, f_r(x)\}.$$

(3.1.10) La caractérisation des germes sans bord en termes de leur réduction de Temkin donnée au 3.1.9.2 ci-dessus admet la généralisation suivante au cas relatif : si $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ est un morphisme de germes d'espaces k -analytiques, il est sans bord si et seulement si l'application continue naturelle

$$\widetilde{(Y, y)} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{H}(y)/\tilde{k}} \times_{\mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}} \widetilde{(X, x)}$$

est bijective (c'est alors un homéomorphisme).

Espaces quasi-lisses

(3.1.11) Soit X un espace k -analytique et soit $x \in X$. On a

$$\dim_{\mathcal{H}(x)} \Omega_X^1 \otimes \mathcal{H}(x) \geq \dim_x X ;$$

on dit que X est *quasi-lisse* en x si l'on a égalité. Le lieu de quasi-lissité de X est un ouvert de Zariski, sur lequel Ω^1 est localement libre ; il coïncide avec le lieu de régularité géométrique de X . On dit que X est *quasi-lisse* s'il est quasi-lisse en chacun de ses points.

(3.1.11.1) Si V est un domaine analytique de X contenant x alors

$$\dim_{\mathcal{H}(x)} \Omega_X^1 \otimes \mathcal{H}(x) = \dim_{\mathcal{H}(x)} \Omega_V^1 \otimes \mathcal{H}(x)$$

et $\dim_x X = \dim_x V$; par conséquent, V est quasi-lisse en x si et seulement si X est quasi-lisse en x .

(3.1.11.2) Si X est lisse en x , il est quasi-lisse en x .

(3.1.11.3) Il résulte de 3.1.11.1 et 3.1.11.2 que tout domaine analytique d'un espace analytique lisse est quasi-lisse ; nous allons établir, dans le cas d'un bon espace, une réciproque locale de cette assertion. Soit donc V un bon espace k -analytique et soit $x \in V$. Supposons que V est quasi-lisse en x . Nous allons démontrer qu'il existe un voisinage affinoïde de x dans V qui s'identifie à un domaine affinoïde d'un espace k -analytique lisse.

Posons $d = \dim_x V$; comme V est bon et comme Ω_V^1 est localement libre de rang d au voisinage de x , il existe un voisinage affinoïde quasi-lisse W de x dans X d fonctions analytiques f_1, \dots, f_d sur V' telles que $\Omega_{W'}^1$ soit libre de base df_1, \dots, df_d ; soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{A}_k^{d,\text{an}}$ le morphisme induit par les f_i . Par choix des f_i , le faisceau $\Omega_{W/\mathbb{A}_k^{d,\text{an}}}$ est nul ; par conséquent, φ est purement de dimension relative nulle ; en particulier $\dim_x \varphi = 0$.

Il est dès lors loisible de restreindre W de sorte qu'il soit connexe et que le morphisme φ admette une factorisation $W \rightarrow W' \rightarrow T \rightarrow \mathbb{A}_k^{d,\text{an}}$ où :

- $T \rightarrow \mathbb{A}_k^{d,\text{an}}$ est étale (cela entraîne que T est lisse et purement de dimension d) ;
- W' est un domaine affinoïde connexe de T ;
- $W \rightarrow W'$ est fini.

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} les algèbres k -affinoïdes respectivement associées à W' et W ; les espaces W et W' sont connexes, non vides et quasi-lisses (le premier par hypothèse, le second en tant que domaine affinoïde de l'espace lisse T) ; ils sont donc tous deux réguliers, et dès lors irréductibles ; par construction, on a $\dim_k W = \dim_k W' = d$; il s'ensuit que $W \rightarrow W'$ est surjectif. Le morphisme $\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$ est un morphisme fini et dominant entre deux schémas intègres et réguliers ; il est donc plat.

On a $\Omega_{W/\mathbb{A}_k^{d,\text{an}}} = 0$; faisceau $\Omega_{W/W'}^1$ est *a fortiori* nul ; par conséquent, le morphisme fini et plat $\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$ est non ramifié, et partant étale.

Soit t l'image de x sur T . Les catégories des germes finis étales sur (T, t) et (W', t) étant équivalentes, le bon germe (W, x) s'identifie à un germe de

domaine affinoïde fermé d'un germe (X, x) qui est fini et étale sur le germe lisse (T, t) , et est donc lui-même lisse ; ceci achève la démonstration.

(3.1.11.4) Il découle de 3.1.11.2 et 3.1.11.3 que si X est un espace k -analytique et si x appartient à l'intérieur analytique de X alors X est quasi-lisse en x si et seulement si il est lisse en x .

3.2 Quelques compléments sur les espaces analytiques généraux

Morphismes finis et plats

(3.2.1) Soit L une extension complète de k , et soit X un espace k -analytique tel que X_L soit topologiquement séparé ; l'espace X est alors topologiquement séparé. En effet, soient V et W deux domaines affinoïdes de X ; comme X_L est topologiquement séparé, l'intersection $V_L \cap W_L$ est compacte ; son image sur X est dès lors quasi-compacte. Mais l'image en question n'est autre que $V \cap W$, qui est contenu dans l'espace topologique séparé V ; il s'ensuit que $V \cap W$ est compact, ce qui achève ma démonstration.

(3.2.2) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) φ est fini ;
- ii) φ est propre et à fibres (ensemblément) finies.

En effet ; i) \Rightarrow ii) est clair. Supposons que ii) soit vraie, soit $x \in X$ et soient y_1, \dots, y_r les antécédents de x sur Y . Pour tout i , le point y_i est isolé dans $\varphi^{-1}(x)$ et appartient à l'intérieur analytique de φ ; par conséquent, φ est fini en y_i , et induit donc un morphisme fini d'un voisinage ouvert V_i de y_i vers un voisinage ouvert U_i de x ; on peut, quitte à les restreindre, supposer les V_i deux à deux disjoints. Par compacité de φ , il existe un voisinage ouvert U de x contenu dans $\bigcap U_i$ et tel que $\varphi^{-1}(U) \subset \coprod V_i$. On peut dès lors écrire

$$\varphi^{-1}(U) = \coprod \varphi|_{V_i}^{-1}(U)$$

par conséquent, $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ est fini ; la finitude étant une propriété locale sur le but, φ est fini.

(3.2.3) Soit X un espace k -analytique, soit V un domaine analytique fermé de X et soit Y une composante irréductible de V . Si $\partial^{\text{an}} Y = 0$ alors Y est une composante irréductible de X . En effet, dans ce cas, $Y \hookrightarrow X$ est compacte, sans bord et à fibres finies, donc propre. Il s'ensuit que son image, qui n'est autre que Y , est un fermé de Zariski de X . Mais comme Y est une composante irréductible de V , son adhérence pour la topologie de X est une composante irréductible de X ; or d'après ce qui précède, cette adhérence n'est autre que Y elle-même, d'où notre assertion.

(3.2.4) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques. Supposons qu'il existe une extension complète L de k telle que $\varphi_L : Y_L \rightarrow X_L$ soit fini (resp. fini et plat). Sous ces hypothèses nous allons prouver que φ est fini (resp. fini et plat).

(3.2.4.1) *Montrons que le morphisme φ est fini.* On peut supposer, en raisonnant G -localement sur le but, que X est compact. L'espace Y_L est alors compact par compacité de φ_L ; on en déduit, à l'aide de 3.2.1, que Y est compact. La flèche φ est donc compacte, et ses fibres sont finies puisque c'est le cas de celles de X_L .

Par ailleurs, le fait que φ_L soit sans bord entraîne, en vertu d'un théorème de descente dû à Conrad et Temkin, que φ est sans bord; par conséquent, φ est fini.

(3.2.4.2) *Le cas où φ_L est plat.* Soit V un domaine affinoïde de X et soit W son image réciproque sur Y ; c'est un domaine affinoïde de Y . On note \mathcal{A} et \mathcal{B} les algèbres respectivement associées à V et W ; l'algèbre \mathcal{B} est finie sur \mathcal{A} . Par hypothèse, \mathcal{B}_L est finie et plate sur \mathcal{A}_L ; combiné à la platitude de \mathcal{A}_L sur \mathcal{A} et à la fidèle platitude de \mathcal{B}_L sur \mathcal{B} , cela entraîne la platitude de \mathcal{B} sur \mathcal{A} , qui est ce qu'on souhaitait établir.

(3.2.4.3) *Remarques.* En pratique, si l'on sait *a priori* que φ est sans bord (e.g si Y est sans bord), on n'a pas besoin d'utiliser le résultat de descente de Conrad et Temkin; et si l'on sait *a priori* que l'espace Y est topologiquement séparé, il est inutile de se référer à 3.2.1.

Il peut également arriver que la platitude de φ soit automatique, une fois connue sa finitude; c'est notamment lorsque Y est une courbe normale et X une courbe réduite (cf. 3.5.10 *infra*.)

(3.2.5) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme fini et *plat* entre espaces k -analytiques.

(3.2.5.1) L'application continue sous-jacente à φ , dont on a rappelé qu'elle est compacte et à fibres finies, est également ouverte, et partant justiciable des résultats généraux rappelés au début de l'article (1.1.4 et 1.1.4.2- 1.1.4.1).

(3.2.5.2) Si U est un domaine affinoïde de X contenant x , son image réciproque $\varphi^{-1}(U)$ est un domaine affinoïde de Y , dont l'algèbre des fonctions est un $\mathcal{O}_U(U)$ -module fini et localement libre; si U est connexe, le rang de ce module est bien défini, et ne dépend pas du choix de U ; on l'appelle le *degré de φ au-dessus de x* et on le note $\deg_x \varphi$; lorsque X est bon, Y l'est aussi et $\deg_x \varphi$ est simplement le rang du $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre $\prod_{y \in \varphi^{-1}(x)} \mathcal{O}_{Y,y}$.

(3.2.5.3) Soit $y \in \varphi^{-1}(x)$ et soit U un domaine analytique de X contenant x et tel que $\varphi^{-1}(U)$ isole y ; le degré de $\varphi^{-1}(U)_y \rightarrow U$ au-dessus de x ne dépend que de x , et pas de U ; on l'appelle le *degré de φ en y* et on le note $\deg^y \varphi$; dans le cas où X et Y sont bons $\deg^y \varphi$ est simplement le rang du $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre $\mathcal{O}_{Y,y}$.

(3.2.6) Si $\varphi : Y \rightarrow X$ est un morphisme fini et plat entre espaces analytiques $x \mapsto \deg_x \varphi$ est une fonction localement constante sur X ; sa valeur est donc bien définie dès que X est connexe et non vide, et est alors simplement appelée le *degré de φ* . Soit $x \in X$ et soit U un voisinage analytique connexe de x tel que $\varphi^{-1}(U)$ sépare les antécédents de x ; l'égalité

$$\deg(\varphi^{-1}(U) \rightarrow U) = \sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} \deg(\varphi^{-1}(U)_y \rightarrow U)$$

peut se récrire

$$\deg_x \varphi = \sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} \deg^y \varphi.$$

Il en résulte notamment que le cardinal de $\varphi^{-1}(x)$ est inférieur ou égal au degré de φ au-dessus de x . Si X est connexe et non vide, le cardinal de toute fibre de φ est donc majoré par $\deg \varphi$.

(3.2.7) Soit $\varphi : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ un morphisme fini et plat entre germes d'espaces k -analytiques. Il possède un représentant $\psi : (Z, z) \rightarrow (T, t)$ qui est fini et plat ; le degré de ψ en z ne dépend alors que de φ , et pas du choix de ψ ; on l'appelle le degré de φ et on le note $\deg \varphi$.

Points d'Abhyankar

(3.2.8) Soit \mathcal{A} une k -algèbre de Banach. On suppose que la semi-norme spectrale de \mathcal{A} est multiplicative (c'est par exemple le cas si la norme de \mathcal{A} est multiplicative, auquel cas elle coïncide avec sa semi-norme spectrale) ; par définition, cela revient à demander qu'il existe $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ (nécessairement unique) tel que $|f(x)| = \sup_{y \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} |f(y)|$ pour toute $f \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire encore tel que $|f(y)| \leq |f(x)|$ pour toute $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Nous allons montrer que sous cette hypothèse, le singleton $\{x\}$ est le bord de Shilov de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. On sait déjà par hypothèse que toute fonction $f \in \mathcal{A}$ atteint son maximum en x .

Soit maintenant \mathcal{H} un compact de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ne contenant pas x . Pour tout point y de \mathcal{H} , il existe f_y appartenant à \mathcal{A} telle que $|f_y(y)| \neq |f_y(x)|$, et donc telle que $|f_y(y)| < |f_y(x)|$ (ceci implique que $|f_y(x)| \neq 0$). L'inégalité stricte $|f_y| < |f_y(x)|$ reste vraie sur un voisinage ouvert V_y de y , et l'inégalité large correspondante est vraie sur tout \mathcal{H} .

Par compacité, il existe $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{H}$ tels que les V_{y_i} recouvrent \mathcal{H} . Par construction, le maximum $|\prod f_{y_i}(x)|$ de $|\prod f_{y_i}|$ n'est pas atteint sur \mathcal{H} . Il s'ensuit que x est bien le bord de Shilov de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, comme annoncé.

(3.2.9) Soit \mathcal{A} une k -algèbre de Banach. On dit que la norme de \mathcal{A} est *universellement multiplicative* si la norme tensorielle de $L \widehat{\otimes}_k \mathcal{A}$ est multiplicative pour tout extension complète L de k . Supposons que ce soit le cas, et soit L une extension complète de k . Comme sa norme est multiplicative, l'algèbre $L \widehat{\otimes}_k \mathcal{A}$ est intègre, et il en va de même de $L \otimes_k \mathcal{A}$, qui s'injecte dans $L \widehat{\otimes}_k \mathcal{A}$. On en déduit que \mathcal{A} est intègre et que k est algébriquement clos dans $\text{Frac } \mathcal{A}$.

(3.2.10) Soit \mathcal{A} une algèbre k -affinoïde dont la norme est universellement multiplicative, et soit x le point correspondant de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. La valeur absolue de la k -algèbre de Banach $\mathcal{H}(x)$ est alors universellement multiplicative, ce qui implique notamment que k est algébriquement clos dans $\mathcal{H}(x)$ (cf. 3.2.9 *supra*).

Soit L une extension complète de k . La norme tensorielle de $L \widehat{\otimes}_k \mathcal{A}$ étant multiplicative, elle définit un point y sur $\mathcal{M}(L \widehat{\otimes}_k \mathcal{A})$. La flèche canonique $\mathcal{M}(L \widehat{\otimes}_k \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est surjective ; en conséquence, $\mathcal{A} \rightarrow L \widehat{\otimes}_k \mathcal{A}$ préserve les (semi)-normes spectrales, ce qui signifie que y est situé sur la fibre $\mathcal{M}(L \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x))$ de $\mathcal{M}(L \widehat{\otimes}_k \mathcal{A})$ en x .

Soient a et b deux éléments de \mathcal{A} avec $b(x) \neq 0$ (ce qui revient à demander que $b \neq 0$), et soit $c \in L\widehat{\otimes}_k \mathcal{A}$. Soit $z \in \mathcal{M}(L\widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x))$. On a

$$|(a(z)b(z)^{-1}c(z))| = |a(x)b(x)^{-1}| \cdot |c(z)| \leq |a(x)b(x^{-1})| \cdot |c(y)| = |a(y)b(y)^{-1}c(y)|.$$

Par densité, il vient $|f(z)| \leq |f(y)|$ pour toute $f \in L\widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$. Ainsi, y est le point de $\mathcal{M}(L\widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x))$ correspondant à la (semi)-norme spectrale de $L\widehat{\otimes}_k \mathcal{A}$, et $\{y\}$ est donc le bord de Shilov de $\mathcal{M}(L\widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x))$ d'après 3.2.8.

(3.2.11) Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ un polyrayon. Pour toute extension complète L de k , le produit tensoriel complété $L\widehat{\otimes}_k k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$ s'identifie à $L\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$, dont la norme est multiplicative et correspond au point $\eta_{\mathbf{r},L}$ de $\mathcal{M}(L\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\})$.

Il résulte alors de 3.2.10 que la valeur absolue de $\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})$ est universellement multiplicative, que k est algébriquement clos dans $\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})$, et que $\{\eta_{\mathbf{r},L}\}$ est pour toute extension complète L de k le bord de Shilov de $L\widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})$.

(3.2.12) Soit X un espace k -analytique et soit x un point de X .

(3.2.12.1) Soit $Y \hookrightarrow X$ une immersion dont l'image contient x . La dimension de Y est alors minorée par $d_k(x)$. On dit que le point x est *d'Abhyankar* si l'on peut trouver une telle immersion $Y \hookrightarrow X$ avec $\dim Y = d_k(x)$ (on dit alors souvent que $d_k(x)$ est le *rang* de x); si c'est le cas, on peut toujours supposer que Y s'identifie à un sous-espace analytique fermé d'un domaine affinoïde X' de X .

Notons qu'un point d'Abhyankar de rang 0 est simplement un point rigide.

(3.2.12.2) On suppose à partir de maintenant que x est un point d'Abhyankar de X dont on note n le rang. Une *présentation d'Abhyankar* de x consiste en les données suivantes :

- un sous-espace analytique fermé Y d'un domaine affinoïde X' de X tel que $x \in Y$ et tel que $\dim Y = n$;
- un morphisme $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{A}_k^{d_k(x), \text{an}}$ donné par une famille finie (f_1, \dots, f_n) de fonctions inversibles en x et telles que les $\widetilde{f_i(x)}$ forment une base de transcendance de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ sur k ; il revient au même de demander que $\varphi(x)$ soit de la forme $\eta_{\mathbf{r}}$ pour un certain polyrayon \mathbf{r} .

Il existe toujours une présentation d'Abhyankar de x .

(3.2.12.3) Soit (Y, φ) une présentation d'Abhyankar de x , et soit \mathbf{r} le polyrayon tel que $\varphi(x) = \eta_{\mathbf{r}}$.

Si $t \in \varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r}})$ on a $n \geq d_k(t) = d_{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})}(t) + n$, et donc $d_{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})}(t) = 0$; ainsi, $\varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r}})$ est de dimension nulle. Ceci entraîne que le corps $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie de $\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})$. Il en résulte les faits suivants.

- Le corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est fini sur $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})}$ d'après 2.2.45.3; comme $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})}$ est transcendant pur sur \widetilde{k} (là encore, en vertu de 2.2.46.6), le corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est de type fini sur \widetilde{k} .

Cela signifie (2.2.29.3) que $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$ est de type fini sur \widetilde{k}_1 , et que le groupe $|\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\times|/|\widetilde{k}^\times|$ est de type fini.

- La clôture algébrique de k dans $\mathcal{H}(x)$ est finie sur k en vertu de 3.2.11; le corps $\mathfrak{s}(x)$ est *a fortiori* une extension finie de k .

(3.2.12.4) Soit L une extension complète de k et soit $\pi : Y_L \rightarrow Y$ l'application canonique. Comme la fibre $\varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r}})$ est de dimension nulle, l'ensemble compact $\pi^{-1}(x) \cap \varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L})$ est discret, et partant fini, et chacun de ses éléments y vérifie l'égalité $d_L(y) = d_L(\eta_{\mathbf{r},L}) = n = \dim Y_L$; en conséquence, tous les points de $\pi^{-1}(x) \cap \varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L})$ sont des points d'Abhyankar de X_L de même rang que x .

(3.2.13) Proposition. *L'ensemble fini $E := \pi^{-1}(x) \cap \varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L})$ est le bord de Shilov de $\pi^{-1}(x) = \mathcal{M}(\mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_k L)$; en particulier, il est non vide et ne dépend pas du choix de la présentation (Y, φ) de x .*

Démonstration. Posons

$$A = \mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}}) \widehat{\otimes}_k L \text{ et } B = \mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_k L \simeq A \otimes_{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})} \mathcal{H}(x).$$

Par construction, B est libre de rang fini sur A . On note p la flèche naturelle de $\mathcal{M}(B)$ vers $\mathcal{M}(A)$; on a $E = p^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L})$. Rappelons par ailleurs que le bord de Shilov de $\mathcal{M}(A)$ est le singleton $\{\eta_{\mathbf{r},L}\}$ (3.2.11).

(3.2.13.1) Soit $b \in B$ et soit $\chi = T^N + \sum_{i < N} a_i T^i \in A[T]$ son polynôme caractéristique. Soit $y \in \mathcal{M}(A)$. Le maximum de $|g|$ sur $p^{-1}(y)$ est égal à la norme spectrale de l'image de b dans $B \otimes_A \mathcal{H}(y)$, c'est-à-dire à $\max |a_i(y)|^{1/N-i}$. Puisque $\eta_{\mathbf{r},L}$ est l'unique point du bord de Shilov de $\mathcal{M}(A)$, on a

$$\max |a_i(y)|^{1/N-i} \leq \max |a_i(\eta_{\mathbf{r},L})|^{1/N-i}.$$

Par conséquent, le maximum de $|b|$ sur $p^{-1}(y)$ est majoré par son maximum sur $E = p^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L})$. Ainsi, $|b|$ atteint son maximum sur E .

(3.2.13.2) Soit maintenant \mathcal{K} un compact de $\mathcal{M}(B)$ ne contenant pas E ; nous allons construire une fonction $b \in B$ dont le maximum n'est pas atteint sur \mathcal{K} .

Soit e un point de E n'appartenant pas à \mathcal{K} ; il existe une fonction g appartenant à $B \otimes_A \mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})$ qui vaut 1 sur e et 0 en tous les autres points de E . Par densité du corps des fractions de A dans $\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})$, on peut trouver deux éléments a et α de A avec $\alpha \neq 0$ et un élément β de b tels que la fonction $|\beta a / \alpha|$ vaille 1 sur e et soit majorée strictement par $1/2$ en tout point de $E \setminus \{e\}$. Si l'on pose $R = |(\alpha/a)(\eta_{\mathbf{r},L})|$, la fonction $|\beta|$ vaut R en e et est majorée strictement par $R/2$ sur $E \setminus \{e\}$. Posons

$$U = \{z \in \mathcal{M}(B), |\beta(z)| < R/2\} \text{ et } V = \{z \in \mathcal{M}(B) \setminus \mathcal{K}, |\beta(z)| > 3R/4\}.$$

Par construction, $U \cup V$ contient E ; par compacité, il existe un voisinage ouvert W de $\eta_{\mathbf{r},L}$ dans $\mathcal{M}(A)$ tel que $p^{-1}(W) \subset U \cup V$; désignons par \mathcal{H} le compact $\mathcal{M}(A) \setminus W$.

Comme $\eta_{\mathbf{r},L}$ est l'unique point du bord de Shilov de $\mathcal{M}(A)$, il existe une fonction $\lambda \in A$ telle que le maximum $|\lambda(\eta_{\mathbf{r},L})|$ de $|\lambda|$ ne soit pas atteint sur \mathcal{H} . Il existe alors $m > 0$ tel que

$$\left(\sup_{z \in \mathcal{H}} |\lambda(z)| \right)^m \cdot \sup_{z \in p^{-1}(\mathcal{H})} |\beta(z)| < |\lambda(\eta_{\mathbf{r},L})|^m \cdot R.$$

Puisque $|\beta(e)| = R$, le maximum de $|\lambda^m \beta|$ sur $\mathcal{M}(B)$ est au moins égal à $|\lambda(\eta_{\mathbf{r},L})|^m \cdot R$; par ce qui précède, il n'est pas atteint sur $p^{-1}(\mathcal{H})$. Il n'est

par ailleurs pas atteint sur U non plus : on a en effet pour tout $z \in U$ les inégalités $|\lambda(z)| \leq |\lambda(\eta_{\mathbf{r},L})|$ et $|\beta(z)| < R/2$.

On a par construction $\mathcal{H} \cap V = \emptyset$ et $\mathcal{M}(B) \setminus p^{-1}(\mathcal{H}) = p^{-1}(W) \subset U \cup V$; il vient $\mathcal{H} \subset p^{-1}(\mathcal{H}) \cup U$. On en déduit que le maximum de $|\lambda^m \beta|$ n'est pas atteint sur \mathcal{H} , ce qui achève la démonstration. \square

(3.2.14) Soit X un espace k -analytique et soit x un point d'Abhyankar de X . Soit L une extension complète de k . Il résulte de 3.2.12.4 et de la proposition 3.2.13 que $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_k L) \subset X_L$ possède un bord de Shilov fini dont tout point y est d'Abhyankar de même rang que x . Ce bord de Shilov sera noté $x_{[L]}$.

(3.2.15) Exemples.

(3.2.15.1) Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ un polyrayon. On a alors $\eta_{\mathbf{r},[L]} = \{\eta_{\mathbf{r},L}\}$. On peut voir ce fait comme une conséquence triviale de la proposition 3.2.13, appliquée en prenant la présentation $(\mathbb{A}_k^{n,\text{an}}, \text{Id})$. Mais on en a donné une preuve directe au préalable en 3.2.12.4, et on a d'ailleurs utilisé plusieurs fois ce résultat au cours de la preuve de la proposition 3.2.13.

(3.2.15.2) Soit X un espace k -analytique, soit x un point d'Abhyankar de X , soit L une extension complète de k et soit L' une extension complète de L . On a alors

$$x_{[L']} = \bigcup_{y \in x_{[L]}} y_{[L']}.$$

En effet, posons $n = d_k(x)$ et choisissons une présentation d'Abhyankar (Y, φ) de x . On désigne par \mathbf{r} le polyrayon tel que $\varphi(x) = \eta_{\mathbf{r}}$ et par

$$\pi: Y_L \rightarrow X, \pi': Y_{L'} \rightarrow X \text{ et } \varpi: Y_{L'} \rightarrow L$$

les flèches canoniques. On a

$$\begin{aligned} x_{[L']} &= (\pi')^{-1}(x) \cap \varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L'}) \quad (\text{prop. 3.2.13}) \\ &= \bigcup_{y \in \pi^{-1}(x)} \varpi^{-1}(y) \cap \varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L'}) \\ &= \bigcup_{y \in \pi^{-1}(x) \cap \varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L})} \varpi^{-1}(y) \cap \varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L'}) \quad (\text{si } \varphi(z) = \eta_{\mathbf{r},L'} \text{ alors } \varphi(\varpi(z)) = \eta_{\mathbf{r},L}) \\ &= \bigcup_{y \in x_{[L]}} y_{[L']} \quad (\text{prop. 3.2.13}). \end{aligned}$$

(3.2.15.3) Soit X un espace k -analytique de dimension finie, soit x un point d'Abhyankar de x , et soit L une extension presque algébrique de k ; soit $\pi: X_L \rightarrow X$ la flèche canonique. Le sous-ensemble $x_{[L]}$ de X_L est alors égal à la fibre $\pi^{-1}(x)$ toute entière.

En effet, en considérant un k -plongement isométrique $L \hookrightarrow \widehat{k^a}$ et en appliquant 3.2.15.2 on se ramène au cas où $L = \widehat{k^a}$. Il résulte immédiatement de la définition que le sous-ensemble $x_{[\widehat{k^a}]}$ de $\pi^{-1}(x)$ est invariant sous l'action de Galois. Comme $x_{[\widehat{k^a}]}$ est non vide et comme l'action de Galois est transitive sur $\pi^{-1}(x)$, il vient $x_{[\widehat{k^a}]} = \pi^{-1}(x)$.

(3.2.15.4) Conservons les hypothèses et notations de 3.2.15.3. On y a établi l'égalité $x_{[L]} = \pi^{-1}(x)$; elle entraîne en particulier la finitude de $\pi^{-1}(x)$, que l'on peut établir directement facilement.

En effet, on se ramène immédiatement au cas où $L = \widehat{k^a}$; notons n le rang de x , et donnons-nous une présentation d'Abhyankar (Y, φ) de x ; soit \mathbf{r} le polyrayon tel que $\varphi(x) = \eta_{\mathbf{r}}$. Tout élément de $\pi^{-1}(x)$ s'envoie *via* φ au-dessus d'un antécédent de $\eta_{\mathbf{r}}$ sur $\widehat{\mathbb{A}_{k^a}^{n, \text{an}}}$; mais la description explicite de $\eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}}$ assure que ce dernier est invariant sous l'action de Galois, ce qui entraîne qu'il est le seul antécédent de $\eta_{\mathbf{r}}$. Par conséquent, la fibre $\pi^{-1}(x)$ est contenue dans $\varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}})$, qui est compact et de dimension nulle, et donc fini.

(3.2.15.5) Soit X un espace k -analytique, soit x un point d'Abhyankar de X et soit L une extension complète de K . Soient L_1, \dots, L_r les extensions composées de $\mathfrak{s}(X)$ et L au-dessus de k . On a

$$X_L = \prod_i X \times_{\mathfrak{s}(x)} L_i.$$

Lorsqu'on voit X comme un espace $\mathfrak{s}(x)$ -analytique, le point x reste d'Abhyankar, ce qui permet de définir un sous-ensemble $x_{[L_i]}$ de $X \times_{\mathfrak{s}(x)} L_i$. On a alors $x_{[L]} = \prod x_{[L_i]}$.

En effet, on peut écrire

$$\mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_k L = \mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(x)} (\mathfrak{s}(x) \otimes_k L) = \prod \mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(x)} L_i.$$

Il est alors immédiat que le bord de Shilov de

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_k L) = \mathcal{M}(\prod \mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(x)} L_i) = \prod \mathcal{M}(\mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(x)} L_i)$$

est la réunion des bords de Shilov des $\mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(x)} L_i$, ce qui est précisément l'égalité annoncée.

Descente des immersions compactes

(3.2.16) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques.

(3.2.16.1) On dira que φ est une *immersion compacte* si pour tout domaine analytique compact U de X il existe un domaine analytique compact V de Y tel que $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ se factorise par une immersion fermée $\varphi^{-1}(U) \rightarrow V$; si c'est le cas, φ est topologiquement une injection compacte.

(3.2.16.2) S'il existe un domaine analytique fermé X' de X tel que $Y \rightarrow X$ se factorise par une immersion fermée $Y \rightarrow X'$ alors $Y \rightarrow X$ est une immersion compacte. La réciproque est vraie si X est séparé et paracompact : en effet, plaçons-nous sous cette hypothèse et supposons que $Y \rightarrow X$ soit une immersion compacte; choisissons un G -recouvrement localement fini (U_i) de X par des domaines analytiques compacts; pour tout i , désignons par V_i un domaine analytique compact de Y tel que $\varphi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ se factorise par une immersion fermée $\varphi^{-1}(U_i) \rightarrow V_i$; la réunion V des V_i est alors un domaine analytique fermé de Y , et $Y \rightarrow X$ se factorise par V ; étant G -localement sur son but une immersion fermée, $Y \rightarrow V$ est une immersion fermée.

(3.2.16.3) Supposons qu'il existe un G -recouvrement (U_i) de X par des domaines analytiques compacts et, pour tout indice i , un domaine analytique compact V_i de U_i tel que $\varphi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ se factorise par une immersion fermée $\varphi^{-1}(U_i) \rightarrow V_i$; dans ce cas φ est une immersion compacte.

En effet, soit U un domaine analytique compact de X . Il existe un recouvrement affinoïde fini (W_j) de U raffinant le G -recouvrement $(U \cap U_i)$ de U . Fixons j , et soit i_j un indice tel que $W_j \subset U_{i_j}$. La flèche $\varphi^{-1}(W_j) \rightarrow W_j$ se factorise alors par une immersion fermée $\varphi^{-1}(W_j) \rightarrow W_j \cap V_{i_j}$. Appelons V la réunion des $W_j \cap V_{i_j}$; c'est un domaine analytique compact de U ; la flèche $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ se factorise par un morphisme $\varphi^{-1}(U) \rightarrow V$, qui est G -localement sur son but une immersion fermée; par conséquent, $\varphi^{-1}(U) \rightarrow V$ est une immersion fermée, et φ est bien une immersion compacte.

(3.2.17) Proposition. Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques et soit L une extension complète de k . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) φ est une immersion compacte;
- 2) φ_L est une immersion compacte;
- 3) φ_L est un monomorphisme compact d'espaces L -analytiques;
- 4) φ est un monomorphisme compact d'espaces k -analytiques.

Démonstration. L'implication 1) \Rightarrow 2) découle du 3.2.16.3 ci-dessus; l'implication 2) \Rightarrow 3) est triviale.

Montrons que 3) \Rightarrow 4); on suppose donc que φ_L est un monomorphisme compact d'espaces L -analytiques. Si T est une partie compacte de X et si T_L désigne son image réciproque sur X_L alors $\varphi_L^{-1}(T_L) \rightarrow \varphi^{-1}(T)$ est surjective; par compacité de φ et de $X_L \rightarrow X$, le sous-ensemble $\varphi_L^{-1}(Z_L)$ de Y_L est compact; par conséquent, $\varphi^{-1}(Z)$ est compacte et φ est elle-même compacte.

Soit Z un espace k -analytique; montrons que $\text{Hom}(Z, Y) \rightarrow \text{Hom}(Z, X)$ est injective, ce qui achèvera d'établir 4). Soient ψ et ψ' deux morphismes de Z vers Y dont les composées avec $Y \rightarrow X$ coïncident. Comme φ_L est un monomorphisme, on a $\psi_L = \psi'_L$; ceci implique immédiatement, compte-tenu de la surjectivité de $Z_L \rightarrow Z$, que les applications *ensemblistes* sous-jacentes à ψ et ψ' sont identiques. Soit V un domaine affinoïde de Z et soit U un domaine affinoïde de Y tel que $\psi(V) = \psi'(V)$ soit contenu dans U ; soient \mathcal{A} et \mathcal{B} les algèbres affinoïdes correspondant respectivement à U et V . Comme $\psi_L = \psi'_L$, les deux morphismes $\mathcal{A}_L \rightarrow \mathcal{B}_L$ respectivement induits par ψ_L et ψ'_L sont égaux; la flèche $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_L$ étant injective, les deux morphismes $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ respectivement induits par ψ et ψ' sont égaux; il s'ensuit que $\psi = \psi'$, ce qu'on voulait démontrer.

Montrons enfin que 4) \Rightarrow 1); on suppose donc maintenant que φ est un monomorphisme compact d'espaces k -analytiques; nous allons montrer que c'est une immersion compacte. Par compacité de φ , l'espace $\mathcal{H}(x)$ -analytique Y_x est compact. La flèche φ étant un monomorphisme, $Y \rightarrow Y \times_X Y$ est un isomorphisme; il en va alors de même de $Y_x \rightarrow Y_x \times_{\mathcal{H}(x)} Y_x$, ce qui force l'espace compact Y_x à être de dimension nulle; c'est en conséquence un espace $\mathcal{H}(x)$ -affinoïde de dimension nulle, c'est-à-dire le spectre analytique d'une $\mathcal{H}(x)$ -algèbre de Banach finie \mathcal{A} . Celle-ci est, par ce qui précède, isomorphe à $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{H}(x)} \mathcal{A}$; par un argument de dimension, on a $\mathcal{A} = \{0\}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{H}(x)$. Autrement

dit, le cardinal d'une fibre de φ est au plus égal à 1 ; cela signifie que $Y \rightarrow X$ est ensemblistement injective.

Soit U un domaine affinoïde de X . Comme φ est compacte, $\varphi^{-1}(U)$ est un domaine analytique compact de Y . Soit (V_i) un recouvrement affinoïde fini de $\varphi^{-1}(U)$. Fixons i ; les flèches $V \rightarrow U$ et $V_i \rightarrow V$ sont des monomorphismes ; par conséquent, $V_i \rightarrow U$ est un monomorphisme. En vertu d'un théorème de Temkin et du 3.2.16.3, $V_i \rightarrow U$ est une immersion compacte ; il existe donc un domaine analytique compact U_i de U tel que $V_i \rightarrow U$ se factorise par une immersion fermée $V_i \rightarrow U_i$. Comme $V_i \rightarrow U_i$ est sans bord, $V_i \hookrightarrow \varphi^{-1}(U_i)$ est sans bord ; par conséquent, V_i est une réunion de composantes connexes de $\varphi^{-1}(U_i)$. Comme φ est injective, $\varphi(\varphi^{-1}(U_i) - V_i)$ est un compact de U_i qui est disjoint de $\varphi(V_i)$; par conséquent l'on peut, quitte à remplacer U_i par un voisinage analytique compact convenable de $\varphi(V_i)$ dans celui-ci, supposer que $V_i = \varphi^{-1}(U_i)$. Posons $V = \bigcup U_i$; c'est un domaine analytique compact de U par lequel $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ se factorise ; il découle de notre construction que $\varphi^{-1}(U) \rightarrow V$ est G-localement sur son but une immersion fermée ; c'est donc une immersion fermée, ce qui achève la démonstration. \square

(3.2.18) Corollaire. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques et soit L une extension complète de k .*

i) φ identifie Y à un domaine analytique fermé de X si et seulement si φ_L identifie Y_L à un domaine analytique fermé de X_L ;

ii) φ est un isomorphisme si et seulement si φ_L est un isomorphisme.

Démonstration. Comme $Y \rightarrow X$ est surjective si et seulement si $Y_L \rightarrow X_L$ est surjective, ii) sera une conséquence immédiate de i). Il suffit dès lors de montrer i) ; l'implication directe est évidente, et l'on peut donc se contenter de montrer l'implication réciproque.

On suppose que φ_L identifie Y_L à un domaine analytique fermé de X_L . Le morphisme φ_L est en particulier une immersion compacte ; par la proposition 3.2.17 ci-dessus, φ est une immersion compacte. Soit U un domaine analytique compact de X ; il existe un domaine analytique compact V de U tel que $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ se factorise par une immersion fermée $\varphi^{-1}(U) \rightarrow V$. Soit W un domaine affinoïde de V ; la flèche $\varphi^{-1}(W) \rightarrow W$ est une immersion fermée ; appelons \mathcal{A} et \mathcal{B} les algèbres affinoïdes respectivement associées à W et $\varphi^{-1}(W)$. La flèche $\varphi^{-1}(W_L) \rightarrow W_L$ identifie à la fois $\varphi^{-1}(W_L)$ à un fermé de Zariski et à un domaine analytique compact de W_L ; par conséquent, elle identifie $\varphi^{-1}(W_L)$ à une réunion de composantes connexes de W_L , et $\text{Spec } \mathcal{B}_L \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}_L$ est de ce fait une immersion ouverte ; comme $\varphi^{-1}(W) \rightarrow W$ est une immersion fermée, \mathcal{B} est une \mathcal{A} -algèbre de Banach finie, et \mathcal{B}_L s'identifie donc à $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_L$. Par descente fidèlement plate schématique, l'immersion fermée $\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$ est une immersion ouverte, $\varphi^{-1}(W) \rightarrow W$ identifie de ce fait $\varphi^{-1}(W)$ à une réunion de composantes connexes de W , et en particulier à un domaine analytique compact de W . Il s'ensuit que $\varphi^{-1}(U) \rightarrow V$ identifie $\varphi^{-1}(U)$ à un domaine analytique compact de V , et donc de U ; la propriété que l'on souhaite établir étant G-locale sur le but, ceci achève la démonstration. \square

Descente des domaines analytiques

(3.2.19) Proposition. *Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme fini étale d'espaces k -analytiques, et soit V un domaine analytique fermé de Y . Son image sur X est un domaine analytique fermé de X .*

Démonstration. La question étant G -locale sur X , on peut supposer X affinoïde et connexe. Dans ce cas, Y est affinoïde. En raisonnant composante connexe par composante connexe sur Y , on se ramène au cas où Y est de surcroît connexe; enfin, quitte à remplacer Y par un revêtement fini étale $Y' \rightarrow Y$ convenable, et V par son image réciproque sur Y' , on peut supposer que $Y \rightarrow X$ est un revêtement galoisien; le domaine analytique $\bigcup_{g \in \text{Gal}(Y/X)} g(V)$ a même image que V sur X , ce qui permet de le substituer à V et donc de supposer que V est stable sous $\text{Gal}(Y/X)$.

Soit $y \in V$ et soit x son image sur X . L'extension graduée $\widetilde{\mathcal{H}(y)}/\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est alors galoisienne, et l'ouvert quasi-compact $\widetilde{(V, y)}$ de $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(y)}/\widetilde{\mathcal{H}(x)}}$ est stable sous l'action de Galois.

La proposition 2.2.50 assure que l'image de $\widetilde{(V, y)}$ sur $\widetilde{(X, x)}$ est un ouvert quasi-compact U de ce dernier. Il correspond à un domaine analytique fermé (U, x) de (X, x) . L'image réciproque de (U, x) sur (Y, x) est le domaine analytique fermé de (Y, y) correspondant à l'image réciproque de U sur $\widetilde{(Y, y)}$; comme $\widetilde{(V, y)}$ est stable sous Galois, cette image réciproque est égale à $\widetilde{(V, y)}$ – et coïncide avec l'image réciproque de U sur $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(y)}/\widetilde{\mathcal{H}(x)}}$ tout entier. Par conséquent, $(V, y) \rightarrow (X, x)$ se factorise par (U, x) , et $(V, y) \rightarrow (U, x)$ est sans bord. Étant par ailleurs quasi-étale (puisque $Y \rightarrow X$ est étale), il est étale.

Il existe dès lors un voisinage analytique compact et connexe U' de x dans U et un voisinage analytique compact V' de y dans V tel que $Y \rightarrow X$ induise un morphisme fini et étale de V' vers U' ; l'image de V' sur X est alors égale à U' .

Ainsi, tout point de V a un voisinage dans V dont l'image sur X est un domaine analytique compact de X . Par compacité de V , l'image de V sur X est un domaine analytique compact de X . \square

(3.2.20) Théorème. *Soit X un espace k -analytique et soit V un sous-ensemble de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) V est domaine analytique de X ;
- ii) l'image réciproque de V sur $X_{\widehat{k^a}}$ est un domaine analytique de $X_{\widehat{k^a}}$.

Démonstration. L'implication ii) \Rightarrow i) est claire; on suppose maintenant que ii) est vraie, et l'on va prouver i); pour toute extension complète L de k , on notera V_L l'image réciproque de V sur $X_{\widehat{k^a}}$.

L'assertion à prouver étant locale pour la G -topologie de X , on peut supposer que X est affinoïde et V compact. En vertu du théorème de Gerritzen-Grauert, $V_{\widehat{k^a}}$ est alors une réunion finie de domaines rationnels de $X_{\widehat{k^a}}$.

(3.2.20.1) *Tout domaine rationnel de $X_{\widehat{k^a}}$ est défini sur une extension finie séparable de k contenue dans $\widehat{k^a}$. En effet, soit W un tel domaine; il est défini par une conjonction finie d'inégalités $\{|f_i| \leq r_i |g|\}_i$ où les r_i sont des réels strictement positifs et où g et les f_i sont des fonctions analytiques sans zéro*

commun sur $X_{\widehat{k^a}}$. Il s'ensuit immédiatement que $|g|$ est minorée par un réel strictement positif sur W , et donc que l'on peut rajouter une condition du type $1 \leq r|g|$ à la liste de celles qui décrivent W .

Si l'on se donne des fonctions analytiques f'_1, \dots, f'_n, g' sur $X_{\widehat{k^a}}$ telles que les réels $\|f'_1 - f_1\|, \dots, \|f'_n - f_n\|, \|g' - g\|$ soient suffisamment petits, le domaine rationnel de $X_{\widehat{k^a}}$ défini par les inégalités

$$\{|f'_i| \leq r_i |g'|\}_i \text{ et } 1 \leq r|g'|$$

coïncide avec W . Il existe donc une extension finie F de k contenue dans $\widehat{k^a}$ et des fonctions analytiques f'_1, \dots, f'_n, g' sur X_F telles que le domaine rationnel W puisse être défini par les inégalités

$$\{|f'_i| \leq r_i |g'|\}_i \text{ et } 1 \leq r|g'|.$$

Si l'on désigne par F_{sep} la fermeture séparable de k dans F il existe un entier non nul n tel que les $(f'_i)^{p^n}$ et $(g')^{p^n}$ proviennent de l'anneau des fonctions analytiques sur $X_{F_{\text{sep}}}$; comme W peut être tout aussi bien défini par les inégalités

$$\{|(f'_i)^{p^n}| \leq r_i^{p^n} |(g')^{p^n}|\}_i \text{ et } 1 \leq r^{p^n} |(g')^{p^n}|,$$

il provient d'un domaine rationnel de $X_{F_{\text{sep}}}$.

(3.2.20.2) Il découle de ce qui précède qu'il existe une extension finie séparable L de k contenue dans $\widehat{k^a}$ telle que $V_{\widehat{k^a}}$ provienne d'un domaine analytique de X_L , qui est nécessairement égal à l'image de $V_{\widehat{k^a}}$ sur $X_{\widehat{k^a}}$, c'est-à-dire à V_L . Comme V est lui-même égal à l'image de V_L sur X , la proposition 3.2.19 garantit alors que V est un domaine analytique compact de X . \square

Descente du caractère affinoïde

(3.2.21) Si L est une extension complète de k alors $k \hookrightarrow L$ est une injection admissible; il s'ensuit que pour toute k -algèbre de Banach \mathcal{A} la flèche $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_L$ est une injection admissible.

(3.2.22) Soit X un espace k -analytique *quasi-compact*; choisissons un recouvrement affinoïde fini (X_i) de X . Pour tout i , l'algèbre des fonctions analytique sur X_i est k -affinoïde; elle est de ce fait munie d'une classe d'équivalence de normes (bien définie à équivalence près); choisissons une norme $\|\cdot\|_i$ dans cette classe. L'application $f \mapsto \sup_i \|f|_{X_i}\|_i$ est une norme sur l'algèbre \mathcal{A} des fonctions analytique sur X , qui fait de celle-ci une k -algèbre de Banach. À équivalence près, $\|\cdot\|$ ne dépend pas du choix des $\|\cdot\|_i$.

Elle ne dépend pas non plus du recouvrement (X_i) . Pour le voir, donnons-nous un second recouvrement affinoïde fini (X'_j) de X , choisissons pour tout j une norme $\|\cdot\|'_j$ sur l'algèbre des fonctions analytiques sur X'_j et notons $\|\cdot\|'$ la norme sur \mathcal{A} déduite des $\|\cdot\|'_j$.

Fixons i ; il existe un recouvrement affinoïde fini (X''_ℓ) de X_i tel que pour tout ℓ le domaine affinoïde X''_ℓ soit contenu dans X'_j pour un certain indice j_ℓ ; par ailleurs, on choisit pour tout ℓ une norme $\|\cdot\|''_\ell$ sur l'algèbre des fonctions analytiques sur X''_ℓ .

Pour tout ℓ , il existe un réel positif C_ℓ tel que $\|g|_{X'_\ell}\|'_\ell \leq C_\ell \|g|_{j'_\ell}\|'_\ell$ pour toute fonction analytique g sur X'_ℓ . Le théorème d'acyclicité de Tate assure d'autre part l'existence d'un réel positif D_i tel que $\|g\|_i \leq D_i \sup_\ell \|g|_{X'_\ell}\|'_\ell$ pour toute fonction analytique g sur X_i . On en déduit que l'on a pour toute fonction f appartenant à \mathcal{A} les inégalités

$$\|f|_{X_i}\| \leq D_i \sup_\ell (C_\ell \|f|_{X'_\ell}\|'_\ell) \leq D_i (\sup_\ell C_\ell) \|f\|'.$$

Il existe donc pour tout i une constante positive Δ_i telle que $\|f|_{X_i}\| \leq \Delta_i \|f\|'$ pour toute $f \in \mathcal{A}$; par conséquent, $\|f\| \leq (\sup_i \Delta_i) \|f\|'$ pour toute $f \in \mathcal{A}$; il s'ensuit, par symétrie de leurs rôles, que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes, comme annoncé.

(3.2.23) Dans ce qui suit, on considèrera systématiquement l'algèbre des fonctions analytiques d'un espace k -analytique quasi-compact X comme munie de la (classe d'équivalence de la) norme définie par un recouvrement affinoïde fini quelconque de X .

(3.2.24) Soit X un espace k -analytique quasi-compact.

(3.2.24.1) Soit L une extension complète de k . Si \mathcal{B} désigne l'algèbre de Banach des fonctions analytiques sur X_L , il existe une flèche naturelle $\mathcal{A}_L \hookrightarrow \mathcal{B}$; on vérifie immédiatement, en le testant sur un recouvrement affinoïde (et à l'aide de 3.2.21) que cette flèche est injective et admissible.

(3.2.24.2) Supposons de plus que L possède une base topologique sur k , c'est-à-dire qu'il existe une famille (e_i) d'éléments de L tel que L s'identifie, comme k -espace de Banach, à la somme directe complétée $\widehat{\bigoplus k.e_i}$. L'injection admissible $\mathcal{A}_L \hookrightarrow \mathcal{B}$ est alors un isomorphisme. Pour le voir, donnons-nous une fonction f appartenant à \mathcal{B} . Pour tout domaine affinoïde V de X , la restriction de f à V_L possède une *unique* écriture de la forme $\sum a_i e_i$, où (a_i) est une famille de fonctions analytiques sur V satisfaisant les conditions de convergences usuelles. L'unicité évoquée assure le recollement coefficient par coefficient de cette décomposition; il existe donc une famille (a_i) de fonctions analytiques sur X telles que pour tout domaine affinoïde V de X la famille $(a_i|_V)$ satisfasse les conditions de convergence habituelles et vérifie l'égalité $f|_V = \sum a_i|_V e_i$. La considération d'un recouvrement affinoïde fini de X assure que la famille (a_i) satisfait elle-même les conditions de convergence habituelles, et l'on a alors (par vérification G-locale) l'égalité $f = \sum a_i e_i$, d'où notre assertion.

(3.2.25) Proposition. *Soit X un espace k -analytique et soit \mathbf{r} un polyrayon k -libre. L'espace $X_{\mathbf{r}} := X_{k_{\mathbf{r}}}$ est $k_{\mathbf{r}}$ -affinoïde si et seulement si X est k -affinoïde.*

Démonstration. Seule l'implication réciproque requiert une preuve; supposons donc que $X_{\mathbf{r}}$ est $k_{\mathbf{r}}$ -affinoïde; il est alors compact, ce qui entraîne la quasi-compacité de X . Soit \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) l'algèbre de Banach des fonctions analytiques X (resp. $X_{\mathbf{r}}$). En vertu du 3.2.24.2, l'algèbre \mathcal{B} s'identifie à $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$; comme \mathcal{B} est $k_{\mathbf{r}}$ -affinoïde, \mathcal{A} est k -affinoïde.

On dispose alors d'un morphisme naturel $\varphi : X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$; le morphisme $\varphi_{\mathbf{r}}$ est la composée de $X_{\mathbf{r}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathbf{r}})$; or la première de ces flèches est un isomorphisme car $X_{\mathbf{r}}$ est par hypothèse $k_{\mathbf{r}}$ -affinoïde, et on a vu que la seconde en est un aussi; par conséquent, $\varphi_{\mathbf{r}}$ est un isomorphisme; le

corollaire 3.2.18 assure alors que φ est un isomorphisme, et partant que X est k -affinoïde. \square

(3.2.26) Théorème. *On fait l'hypothèse que k est de caractéristique non nulle (celle-ci coïncide alors avec l'exposant caractéristique p de \tilde{k}). Soit X un espace k -analytique. Supposons qu'il existe un entier n tel que $X_{k^{1/p^n}}$ soit k^{1/p^n} -affinoïde; l'espace X est alors k -affinoïde.*

Démonstration. On se ramène par une récurrence triviale sur n au cas où $n = 1$; par ailleurs, la proposition 3.2.25 ci-dessus permet, quitte à étendre les scalaires à $k_{\mathbf{r}}$ pour un certain polyrayon k -libre \mathbf{r} bien choisi, de supposer que $|k^\times| \neq 1$ et que $X_{k^{1/p}}$ est strictement $k^{1/p}$ -affinoïde. Notons \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) l'algèbre des fonctions analytiques sur X (resp. $X_{k^{1/p}}$). Comme $X_{k^{1/p}}$ est compact, il découle de 3.2.1 que X est compact. La définition de X ne fait dès lors intervenir qu'une quantité (au plus) dénombrable de paramètres; il en va de même de l'isomorphisme entre $X_{k^{1/p}}$ et le spectre (analytique) d'une algèbre strictement $k^{1/p}$ -affinoïde; par conséquent, on peut supposer que k est topologiquement de type dénombrable sur son sous-corps complet premier (qui est \mathbb{F}_p muni de la valuation triviale).

Grâce à cette hypothèse, le corps $k^{1/p}$ possède une base topologique sur k (que l'on peut choisir comme étant une p -base topologique). Il résulte alors du 3.2.24.2 que l'injection admissible $\mathcal{A}_{k^{1/p}} \rightarrow \mathcal{B}$ est un isomorphisme.

L'algèbre \mathcal{B} est strictement $k^{1/p}$ -affinoïde; on choisit une surjection admissible $k^{1/p}\{T_1, \dots, T_n\} \rightarrow \mathcal{B}$. Pour tout i , on désigne par f_i l'image de T_i dans \mathcal{B} . Si (g_1, \dots, g_n) est un n -uplet d'éléments de \mathcal{B} tel que $\|g_i - f_i\|$ soit suffisamment petit pour tout i , le morphisme de $k^{1/p}\{T_1, \dots, T_n\}$ dans \mathcal{B} qui envoie chacun des T_i sur g_i est encore une surjection admissible; on peut donc, quitte à perturber un peu les f_i , supposer qu'il existe une extension finie F de k contenue dans $k^{1/p}$ telle que f_i appartienne pour tout i à \mathcal{A}_F , vue comme une sous-algèbre de \mathcal{B} via l'isomorphisme $\mathcal{A}_{k^{1/p}} \simeq \mathcal{B}$.

Le morphisme $F\{T_1, \dots, T_n\} \rightarrow \mathcal{A}_F$ qui envoie chaque T_i sur f_i devient par construction une surjection admissible après extension des scalaires de F à $k^{1/p}$. Comme k est topologiquement de type dénombrable sur son sous-corps premier, $k^{1/p}$ possède une base topologique sur F (que l'on peut choisir comme étant une p -base topologique); il s'ensuit que $F\{T_1, \dots, T_n\} \rightarrow \mathcal{A}_F$ est lui-même une surjection admissible, et donc que \mathcal{A}_F est strictement F -affinoïde.

L'algèbre \mathcal{A}_F étant strictement F -affinoïde, elle est en particulier strictement k -affinoïde. L'injection $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_F$ est finie; de plus, si a est un élément de \mathcal{A}_F de norme spectrale majorée par 1, alors a^p est un élément de \mathcal{A} dont la norme spectrale dans \mathcal{A} coïncide avec la norme spectrale dans \mathcal{A}_F (3.2.21) et est donc majorée par 1; il s'ensuit que $\widetilde{\mathcal{A}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_F}$ est entier, puis que \mathcal{A} est elle-même strictement k -affinoïde.

On dispose alors d'un morphisme naturel $\varphi : X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$; le morphisme $\varphi_{k^{1/p}}$ est la composée de $X_{k^{1/p}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}_{k^{1/p}})$; or la première de ces flèches est un isomorphisme car $X_{k^{1/p}}$ est par hypothèse $k^{1/p}$ -affinoïde, et on a vu que la seconde en est un aussi; par conséquent, $\varphi_{k^{1/p}}$ est un isomorphisme; le corollaire 3.2.18 assure alors que φ est un isomorphisme, et partant que X est k -affinoïde. \square

(3.2.27) Théorème. *Soit X un espace k -analytique et soit \mathcal{I} un faisceau cohérent d'idéaux sur X dont les éléments sont localement nilpotents; soit Y le sous-espace analytique fermé de X défini par \mathcal{I} . L'espace X est k -affinoïde si et seulement si Y est k -affinoïde.*

Démonstration. La proposition 3.2.25 ci-dessus permet, quitte à étendre les scalaires à $k_{\mathbf{r}}$ pour n'importe quel \mathbf{r} non vide, de supposer que $|k^\times| \neq 1$. L'implication directe est évidente; nous allons établir la réciproque, et nous supposons donc que Y est k -affinoïde. Comme Y et X ont le même espace topologique sous-jacent, X est compact; il existe donc un entier $n \geq 1$ tel que $\mathcal{I}^n = 0$; on se ramène par une récurrence immédiate sur n au cas où $n = 2$. On appelle \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) l'algèbre de Banach des fonctions analytiques sur X (resp. Y).

(3.2.27.1) *La cohomologie de tout faisceau cohérent sur X_G est triviale en degrés strictement positifs.* En effet, si \mathcal{F} est un tel faisceau, il s'insère dans une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I} \cdot \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/(\mathcal{I} \cdot \mathcal{F}) \rightarrow 0$; les deux termes extrêmes de cette suite sont annulés par \mathcal{I} , et peuvent donc être vus comme des faisceaux cohérents sur Y ; comme Y est affinoïde, leur cohomologie est triviale en degrés strictement positifs, et il en va donc de même de celle de \mathcal{F} .

(3.2.27.2) *Si I désigne l'espace des sections globales de \mathcal{I} alors I est un idéal de type fini de \mathcal{A} , et la flèche naturelle $\mathcal{A}/I \rightarrow \mathcal{B}$ est un isomorphisme.* En effet, l'on dispose d'une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{X_G} \rightarrow \mathcal{O}_{X_G}/\mathcal{I} \rightarrow 0$; celle-ci induit, en vertu du 3.2.27.1, une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{I}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{X_G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{X_G}/\mathcal{I}) \rightarrow 0,$$

que l'on peut récrire $0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow 0$, d'où notre seconde assertion.

En ce qui concerne la première, nous allons en fait montrer la noéthérianité de \mathcal{A} . Soit (f_m) une suite d'éléments de \mathcal{A} ; désignons pour tout m par J_m l'idéal de \mathcal{A} engendré par f_1, \dots, f_m ; nous allons montrer que la suite (J_m) est stationnaire, ce qui suffira à conclure. Pour tout m , notons \mathcal{I}_m l'image (faisceautique) du morphisme $\mathcal{O}_{X_G}^m \rightarrow \mathcal{O}_{X_G}$ défini par les f_i pour i variant de 1 à m . Si V est un domaine affinoïde de X , la noéthérianité de son algèbre de fonctions et la théorie des faisceaux cohérents sur V entraînent la stationnarité de la suite $(\mathcal{I}_m|_V)$; comme X est compact, il peut être recouvert par un nombre fini de domaines affinoïdes; la suite (\mathcal{I}_m) est donc stationnaire. Or il résulte de 3.2.27.1 que l'on a pour tout m l'égalité $J_m = H^0(X, \mathcal{I}_m)$; par conséquent, (J_m) est stationnaire, ce qu'on souhaitait établir.

(3.2.27.3) Conclusion. Comme $|k^\times| \neq \{1\}$ la surjection $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/I \simeq \mathcal{B}$ est admissible et induit donc, I étant nilpotent, un homéomorphisme entre les espaces topologiques $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{B})$; elle préserve de ce fait les seminormes spectrales. Choisissons une surjection admissible $k\{T_1/r_1, \dots, T_\ell/r_\ell\} \rightarrow \mathcal{B}$; pour tout i , donnons-nous un antécédent f_i dans \mathcal{A} de l'image de T_i dans \mathcal{B} ; le rayon spectral de l'image en question est majoré par r_i , et celui de f_i l'est donc aussi; par conséquent, $k\{T_1/r_1, \dots, T_\ell/r_\ell\} \rightarrow \mathcal{B}$ se relève en un morphisme $\lambda : k\{T_1/r_1, \dots, T_\ell/r_\ell\} \rightarrow \mathcal{A}$. Soit (i_1, \dots, i_m) une famille génératrice de I et soit $a \in \mathcal{A}$. Comme $k\{T_1/r_1, \dots, T_\ell/r_\ell\} \rightarrow \mathcal{B}$ est surjective, il existe $i \in I$ et $a' \in k\{T_1/r_1, \dots, T_\ell/r_\ell\}$ tels que $a = \lambda(a') + i$; on peut écrire $i = a_1 i_1 + \dots + a_m i_m$, où les a_j sont éléments de \mathcal{A} . Par le

même raisonnement que précédemment, il existe pour tout j un élément a'_j de $k\{T_1/r_1, \dots, T_\ell/r_\ell\}$ tel que $a = \lambda(a'_j)$ modulo I . Compte-tenu du fait que I est de carré nul, on a finalement $a = \lambda(a') + \sum \lambda(a'_j)i_j$.

Chacun des i_j est nilpotent; l'application λ se prolonge donc en un morphisme

$$k\{T_1/r_1, \dots, T_\ell/r_\ell, S_1, \dots, S_m\} \rightarrow \mathcal{A}$$

qui envoie S_j sur i_j pour tout j ; en vertu de ce qui précède, ce morphisme est une surjection, nécessairement admissible puisque $|k^\times| \neq \{1\}$; la k -algèbre de Banach \mathcal{A} est ainsi k -affinoïde.

On dispose d'un morphisme naturel d'espaces k -analytiques de X vers $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{A}) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des immersions fermées données par un faisceau d'idéaux nilpotents, et dont la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme puisque Y est affinoïde. Le morphisme composé de Y vers $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est sans bord; en raison de la surjectivité de $Y \rightarrow X$, le morphisme $X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est lui-même sans bord; c'est par ailleurs un homéomorphisme puisque c'est le cas des trois autres flèches du diagramme. Par conséquent, $X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est fini (3.2.2), ce qui implique que X est k -affinoïde (et comme $\mathcal{A} = H^0(X, \mathcal{O}_{X_G})$ la flèche $X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est alors un isomorphisme). \square

3.3 Les courbes analytiques : premières propriétés

Classification des points

(3.3.1) Une courbe algébrique (resp. k -analytique) sur k est un k -schéma séparé et localement de type fini (resp. un espace k -analytique séparé) *purement* de dimension 1.

(3.3.2) Soit x un point d'une courbe k -analytique. Comme X est de dimension 1, le degré de transcendance du corps $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ sur \widetilde{k} est inférieur ou égal à 1. De plus, s'il est égal à 1 alors $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ est de type fini sur \widetilde{k} , ce qui revient à dire que $\widetilde{\mathcal{H}}(x)_1$ est de type fini sur \widetilde{k}_1 , et que $|\widetilde{\mathcal{H}}(x)^\times|/|\widetilde{k}^\times|$ est de type fini (2.2.29.3).

On se trouve donc dans l'un des quatre cas suivants, exclusifs l'un de l'autre.

- Le corps $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ est une extension presque algébrique de k ; on dit alors que x est *de type 1*; tout point rigide est de type 1, et la réciproque est vraie si k est algébriquement clos ou trivialement valué.

- Le corps $\widetilde{\mathcal{H}}(x)_1$ est de type fini et de degré de transcendance 1 sur \widetilde{k}_1 , et $|\widetilde{\mathcal{H}}(x)^\times|/|\widetilde{k}^\times|$ est fini; on dit alors que x est *de type 2*.

- Le corps $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$ est une extension finie de \widetilde{k}_1 , et $|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|$ est de type fini et de rang rationnel égal à 1 ; on dit alors que x est *de type 3* ;
- Le corps $\mathcal{H}(x)$ n'est pas une extension presque algébrique de k , mais admet un plongement isométrique dans une extension immédiate de $\widehat{k^a}$; on dit alors que x est *de type 4*.

Notons que x est de type 1 ou 4 (resp. 2 ou 3) si et seulement si le corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est algébrique (resp. de type fini et de degré de transcendance 1) sur \widetilde{k} .

(3.3.3) *Exemple.* Soit $a \in k^\times$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^\times$. Il résulte de 2.2.46.6 que $\widetilde{T-a}$ est transcendant sur \widetilde{k} et que $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{a,r})} = \widetilde{k}(\widetilde{T-a})$; en conséquence, $\eta_{a,r}$ est de type 2 ou 3.

On a par ailleurs par définition de $\eta_{a,r}$ l'égalité $|\mathcal{H}(\eta_{a,r})^\times| = |k^\times| \cdot r^{\mathbb{Z}}$; le quotient $|\mathcal{H}(\eta_{a,r})^\times|/|k^\times|$ est donc engendré par r .

(3.3.3.1) *Supposons que $r \in |k^\times|^\mathbb{Q}$.* Soit m l'ordre de r modulo $|k^\times|$. Le groupe $|\mathcal{H}(\eta_{a,r})^\times|/|k^\times|$ est cyclique d'ordre m , et $\eta_{a,r}$ est donc de type 2. En vertu de 2.2.29.2, $\tau := \frac{(T-a)^m}{\lambda}$ est transcendant sur \widetilde{k}_1 , et $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{a,r})}_1 = \widetilde{k}_1(\tau)$.

(3.3.3.2) *Supposons que $r \notin |k^\times|^\mathbb{Q}$.* Le groupe $|\mathcal{H}(\eta_{a,r})^\times|/|k^\times|$ est alors libre de rang 1, et $\eta_{a,r}$ est donc de type 3. En vertu de 2.2.29.2, $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{a,r})}_1 = \widetilde{k}_1$.

(3.3.4) Si X est une courbe k -analytique et si Y est un sous-ensemble de X on notera $Y_{[0]}$ l'ensemble des points rigides de Y et $Y_{[1]}$ (resp. $Y_{[2]}$, resp.) l'ensemble de ses points de type 1 (resp. 2, resp. ...). On désignera par $Y_{[2,3]}$ la réunion de $Y_{[2]}$ et $Y_{[3]}$, par $Y_{[0,2,3]}$ la réunion de $Y_{[0]}$, $Y_{[2]}$, et $Y_{[3]}$, etc.

(3.3.5) Soit X une courbe k -analytique et soit $x \in X_{[2,3]}$; nous allons dire quelques mots de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ et $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}}$.

(3.3.5.1) Commençons par une remarque générale. Soit $\langle \cdot \rangle$ une valuation non triviale appartenant à $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}}$ et soit κ son corpoïde résiduel. Le groupe $\langle \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\times \rangle$ est alors de rang rationnel au moins 1. Comme $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est de type fini et de degré de transcendance 1 sur \widetilde{k} , on déduit de 2.2.46.4 et 2.2.47 les faits suivants :

- le groupe $\langle \mathcal{H}(x)^\times \rangle$ est libre de rang 1 ;
- le corpoïde $\kappa_{\mathbb{R}_+^\times \times \{1\}}$ est une extension finie de \widetilde{k} .

(3.3.5.2) *Supposons que $x \in X_{[2]}$.* Le corps résiduel classique $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$ est alors de la forme $\widetilde{k}_1(\mathcal{C})$, où \mathcal{C} est une \widetilde{k}_1 -courbe projective, normale et intègre (mais pas nécessairement géométriquement intègre), qui est uniquement déterminée et que l'on appellera *la courbe résiduelle* en x ; le groupe $|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|$ est fini.

Le lemme 2.2.53 assure que $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}} \rightarrow \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1/\widetilde{k}_1}$ est un homéomorphisme (préservant les ouverts affines). L'espace topologique $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1/\widetilde{k}_1} = \mathbb{P}_{\widetilde{k}_1(\mathcal{C})/\widetilde{k}_1}$ est lui-même homéomorphe à l'espace topologique sous-jacent au schéma \mathcal{C} ; au point générique correspond la valuation triviale, et à chaque point fermé une valuation discrète.

(3.3.5.3) *Supposons que $x \in X_{[3]}$. Le groupe $|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|$ est alors de rang rationnel égal à 1, et $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$ est une extension finie de \widetilde{k} . Soit r un élément de $|\mathcal{H}(x)^\times|$ qui n'appartient pas à $\sqrt{|k^\times|}$, et soit $\tau \in \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\times$ un élément de degré r . Désignons par F le sous-corpoïde de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ engendré par \widetilde{k} et $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$; son groupe des degrés est égal à $|k^\times|$, et l'annéloïde $F[\tau, \tau^{-1}]$ est dès lors un corpoïde.*

Par construction, F est fini sur \widetilde{k} ; il vient $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}} = \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/F}$. Par ailleurs, le groupe $\deg(\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\times)/\deg(F^\times)$ est de torsion par choix de τ ; on déduit alors du lemme 2.2.51 que

$$\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}} = \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/F} \simeq \mathbb{P}_{F[\tau, \tau^{-1}]/F}.$$

L'annéloïde d'une valuation sur $F[\tau, \tau^{-1}]$ contient nécessairement τ ou τ^{-1} . Il s'ensuit aussitôt que $\mathbb{P}_{F[\tau, \tau^{-1}]}$ compte trois éléments : la valuation triviale, celle dont l'anneau est $F[\tau]$, et celle dont l'anneau est $F[\tau^{-1}]$. Les deux dernières sont des points fermés de $\mathbb{P}_{F[\tau, \tau^{-1}]}$, et la première en est un point ouvert et dense.

Bonté des courbes analytiques

(3.3.6) Lemme. *Soit X une courbe k -analytique et soit $x \in X_{[2,3]}$; soit $\langle \cdot \rangle$ une \widetilde{k} -valuation non triviale de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$. Il existe un élément ω de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ tel que $\langle \omega \rangle > 1$ et tel que $\langle \cdot \rangle$ soit la seule \widetilde{k} -valuation de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ à posséder cette propriété.*

Démonstration. On distingue deux cas.

Supposons que $x \in X_{[2]}$. On reprend les notations du 3.3.5.2; la valuation $\langle \cdot \rangle$ est induite par une valuation discrète de $\widetilde{k}_1(\mathcal{C})$, elle-même définie par un point fermé \mathcal{P} de \mathcal{C} . Le théorème de Riemann-Roch assure que $N\mathcal{P}$ est engendré par ses sections globales pour N assez grand, ce qui fournit une fonction rationnelle sur \mathcal{C} ayant un et un seul pôle situé en \mathcal{P} ; on peut prendre pour ω une telle fonction.

Supposons que $x \in X_{[3]}$. On reprend les notations du 3.3.5.3; la valuation $\langle \cdot \rangle$ est ou bien la seule \widetilde{k} -valuation de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ dont l'anneau ne contient pas τ , ou bien la seule dont l'anneau ne contient pas τ^{-1} ; on peut donc prendre $\omega = \tau$ dans le premier cas, et $\omega = \tau^{-1}$ dans le second. \square

(3.3.7) Proposition. *Toute courbe k -analytique est un bon espace.*

Démonstration. Soit X une courbe k -analytique et soit x un point de X . Si $x \in X_{[1,4]}$ il appartient à l'intérieur de X , et (X, x) est donc bon. Supposons que $x \in X_{[2,3]}$. Comme X est par définition séparée, (X, x) est un ouvert quasi-compact et non vide de $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}}$; il résulte de la forme explicite de ce dernier (3.3.5.2 et 3.3.5.3) que (X, x) est de la forme $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}} \setminus \{\langle \cdot \rangle_1, \dots, \langle \cdot \rangle_r\}$ où les $\langle \cdot \rangle_i$ sont des valuations non triviales, ou encore fermées en tant que points de $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}}$. Pour chaque i , il existe en vertu du lemme 3.3.6 ci-dessus un

élément ω_i de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ tel que $\langle \omega_i \rangle_i > 1$ et telle que $\langle \cdot \rangle_i$ soit la seule \widetilde{k} -valuation de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ à posséder cette propriété. L'ouvert (X, x) peut dès lors se décrire comme étant égal à $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)/\widetilde{k}}} \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$; il est donc affine, ce qui équivaut à la bonté de (X, x) . \square

3.4 Étude détaillée de la droite projective

(3.4.1) On munit $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ de l'ordre partiel pour lequel $x \leq y$ si $|f(x)| \leq |f(y)|$ pour tout $f \in k[T]$. Toute chaîne non vide $(x_i)_i$ de points de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ admet une borne inférieure, à savoir le point défini par la semi-norme $f \mapsto \inf |f(x_i)|$.

(3.4.2) Soit $a \in k$ et soit $r \geq 0$. Si $x \in \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $x \leq \eta_{a,r}$;
- ii) $|(T - a)(x)| \leq r$.

En effet, i) \Rightarrow ii) est clair. Supposons que ii) soit vraie, et soit $f \in k[T]$; écrivons $f = \sum a_i(T - a)^i$. On a alors

$$|f(x)| \leq \max |a_i| \cdot |(T - a)(x)|^i \leq \max |a_i| r^i = |f(\eta_{a,r})|,$$

d'où i).

(3.4.3) Soient a et b deux éléments de k et r et s deux réels positifs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\eta_{b,s} \leq \eta_{a,r}$;
- ii) $\max(|b - a|, s) \leq r$.

En effet, en vertu de l'égalité $T - a = T - b + b - a$ on a

$$|(T - a)(\eta_{b,s})| = \max(|b - a|, s),$$

et l'équivalence requise provient dès lors du 3.4.2 ci-dessus, que l'on applique avec $x = \eta_{b,s}$.

Remarquons une conséquence de ce qui précède : $\eta_{a,r} = \eta_{b,s}$ si et seulement $r = s$ et $|a - b| \leq r$.

(3.4.4) Soit $a \in k$ et soit $r > 0$. On notera $\mathbb{D}(a, r)$ (resp. $\mathbb{D}^\circ(a, r)$) le disque fermé (resp. ouvert) de Berkovich de centre a et de rayon r , c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par l'inégalité $|T - a| \leq r$ (resp. $|T - a| < r$). Si L est une extension complète de k , l'ensemble des L -points de $\mathbb{D}(a, r)$ (resp. $\mathbb{D}^\circ(a, r)$) est en bijection avec le disque ouvert (resp. fermé) de centre a et de rayon r de l'espace métrique L .

Le disque fermé $\mathbb{D}(a, r)$ est un domaine affinoïde de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$, d'algèbre associée $k\{(T - a)/r\}$. En vertu de 3.4.2, il peut être défini comme l'ensemble des x majorés par $\eta_{a,r}$. La norme de $k\{(T - a)/r\}$ est induite par $\eta_{a,r}$, et le bord de Shilov de $\mathbb{D}(a, r)$ est donc $\{\eta_{a,r}\}$.

Le disque ouvert $\mathbb{D}^\circ(a, r)$ est un ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$, égal à la réunion des $\mathbb{D}(a, s)$ pour $s \in]0; r[$.

(3.4.5) Soient a et b dans k et soient r et s deux réels strictement positifs.

(3.4.5.1) Comme $\mathbb{D}(a, r)$ (resp. $\mathbb{D}(b, s)$) est par ce qui précède l'ensemble des points de $\mathbb{A}^{1, \text{an}}$ majorés par $\eta_{a, r}$ (resp. $\eta_{b, s}$), on a $\mathbb{D}(b, s) \subset \mathbb{D}(a, r)$ si et seulement si $\eta_{b, s} \leq \eta_{a, r}$, c'est-à-dire encore, d'après 3.4.3, si et seulement si $\max(|b - a|, s) \leq r$.

(3.4.5.2) Si $\mathbb{D}(b, s) \cap \mathbb{D}(a, r) \neq \emptyset$ alors $\mathbb{D}(b, s)$ et $\mathbb{D}(a, r)$ sont comparables pour l'inclusion. En effet, d'après notre hypothèse il existe une extension complète L de k telle que $\mathbb{D}(b, s)(L) \cap \mathbb{D}(a, r)(L) \neq \emptyset$. Choisissons λ dans cette intersection; on a $|\lambda - a| \leq r$ et $|\lambda - b| \leq s$, d'où $|b - a| \leq \max(r, s)$; on conclut à l'aide de 3.4.5.1.

(3.4.5.3) En écrivant un disque ouvert comme réunion croissante de disques fermés, on déduit de ce qui précède les faits suivants :

i) On a $\mathbb{D}^\circ(b, s) \subset \mathbb{D}^\circ(a, r)$ si et seulement si $|a - b| < r$ et $s \leq r$.

ii) Si $\mathbb{D}^\circ(b, s) \cap \mathbb{D}^\circ(a, r) \neq \emptyset$ alors $\mathbb{D}^\circ(b, s)$ et $\mathbb{D}^\circ(a, r)$ sont comparables pour l'inclusion.

(3.4.6) Soient a et b deux éléments de k et soient r et s deux réels strictement positifs, et supposons que les boules $\mathbb{D}(a, r)$ et $\mathbb{D}(b, s)$ soient disjointes. Soit $x \in \mathbb{D}(a, r)$ et soit $y \in \mathbb{D}(b, s)$. Comme $\mathbb{D}(a, r)$ est l'ensemble des éléments majorés par $\eta_{a, r}$, tout élément majoré par x appartient encore à $\mathbb{D}(a, r)$; par conséquent, y n'est pas majoré par x . Par symétrie, x n'est pas majoré par y et x et y sont ainsi incomparables.

L'assertion analogue pour les boules ouvertes s'en déduit immédiatement.

(3.4.7) Soit $f \in k[T]$, soit $a \in k$ et soit $r > 0$. Si f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}(a, r)$, elle est inversible sur ce dernier; comme le bord de Shilov de $\mathbb{D}(a, r)$ est un singleton, cela entraîne que $|f|$ est constante sur $\mathbb{D}(a, r)$.

Ce résultat s'étend immédiatement à $\mathbb{D}^\circ(a, r)$, que l'on écrit comme réunion croissante de disques fermés.

(3.4.8) Soit F une chaîne non vide de points de $\mathbb{A}_k^{1, \text{an}}$; on suppose que pour tout $y \in F$ il existe $a \in k$ et $r > 0$ tels que $y = \eta_{a, r}$. Soit f un élément de $k[T]$; posons $x = \inf F$ et $\rho = |f(x)| = \inf_{y \in F} |f(y)|$. Soient ρ_- et ρ_+ deux réels tels que $\rho_- < \rho < \rho_+$.

(3.4.8.1) Il existe $y \in F$ tel que $|f(y)| < \rho_+$. Soient a et r tels que le point y de F soit égal à $\eta_{a, r}$; comme $\eta_{a, r} = \inf_{s > r} \eta_{a, s}$, il existe $R > r$ tel que $|f(\eta_{a, R})| < \rho_+$; comme on a l'encadrement $x \leq y < \eta_{a, R}$, le point x appartient à $\mathbb{D}^\circ(a, R)$. L'égalité $|f(\eta_{a, R})| < \rho_+$ implique que $|f| < \rho_+$ sur $\mathbb{D}(a, R)$.

(3.4.8.2) Soit $\rho' \in]\rho_-; \rho[$. Nous allons maintenant montrer l'existence d'une famille finie $((a_i, r_i))_i$ d'éléments de $k \times \mathbb{R}_+^\times$ possédant les propriétés suivantes :

i) les boules fermées $\mathbb{D}(a_i, r_i)$ sont deux à deux disjointes et contenues dans $\mathbb{D}^\circ(a, R)$;

ii) soit G une chaîne non vide de $\mathbb{A}_k^{1, \text{an}}$ constituée de points de la forme $\eta_{b, s}$ avec $b \in k$ et $s \geq 0$, et soit ξ sa borne inférieure; si $\xi \in \mathbb{D}^\circ(a, R) - \coprod \mathbb{D}(a_i, r_i)$ alors $|f(\xi)| \geq \rho'$.

L'assertion est évidente si $f = 0$; on peut donc supposer $f \neq 0$. Commençons par remarquer qu'il suffit d'établir l'assertion ii) lorsque ξ est lui-même de la forme $\eta_{b,s}$. Supposons en effet qu'elle ait été prouvée dans ce cas particulier, et soit G comme dans ii). Comme le point ξ appartient à $\mathbb{D}^\circ(a, R)$, il existe $t < R$ tel que $|(T - a)(\xi)| < t$; par conséquent, il existe $y \in G$ tel que $|(T - a)(y)| < t$. Si $z \in G$ alors $\xi \leq z$, ce qui empêche z d'être majoré par l'un des η_{a_i, r_i} . Ainsi, tout élément z de G majoré par y appartient à $\mathbb{D}^\circ(a, t) - \coprod \mathbb{D}(a_i, r_i)$, et *a fortiori* à $\mathbb{D}^\circ(a, R) - \coprod \mathbb{D}(a_i, r_i)$. Ceci entraîne, en vertu de notre hypothèse, que $|f(z)| \geq \rho'$. Il s'ensuit que $|f(\xi)| \geq \rho'$.

Il suffit donc de montrer l'existence de la famille $((a_i, r_i))_i$ de sorte que ii) soit satisfaite lorsque ξ est lui-même de la forme $\eta_{b,s}$.

On procède comme suit. Supposons tout d'abord que pour tout $b \in k$ tel que $|b - a| < R$, l'on ait $|f(b)| \geq \rho'$. Comme $s \mapsto |f(\eta_{b,s})|$ est croissante pour tout b , on a $|f(\eta_{b,s})| \geq \rho'$ pour tout $s \geq 0$ et tout $b \in \mathbb{D}^\circ(a, R)(k)$, et l'on peut prendre pour $((a_i, r_i))_i$ la famille *vide*.

Supposons maintenant qu'il existe $a_1 \in k$ tel que $|a_1 - a| < R$ et tel que $|f(a_1)| < \rho'$. L'application $s \mapsto |f(\eta_{a_1,s})|$ étant croissante, et l'on a

$$|f(\eta_{a_1,R})| = |f(\eta_{a,R})| \geq \rho = |f(x)|.$$

Il existe donc $r_1 \in [0; R[$ tel que $|f(\eta_{a_1,r_1})| = \rho'$ et qui est maximal pour cette propriété.

On doit à nouveau distinguer deux cas. Le premier est celui dans lequel $|f(b)| \geq \rho'$ pour tout $b \in k$ tel que $|b - a| < R$ et $|b - a_1| > r_1$. Dans ce cas, soit (b, s) tel que $\eta_{b,s} \in \mathbb{D}^\circ(a, R) - \mathbb{D}(a_1, r_1)$. Si $|b - a_1| \leq r_1$ alors $s > r_1$, et l'on a donc $|f(\eta_{b,s})| > \rho'$ par choix de r_1 ; et si $|b - a_1| > r_1$ on a alors $|f(\eta_{b,s})| \geq |f(\eta_{b,0})| = |f(b)| \geq \rho'$, et la famille à un élément (a_1, r_1) convient.

Le second est celui où il existe a_2 tel que $|a_2 - a_1| > r_1$, $|a_2 - a| < R$, et $|f(a_2)| < \rho'$. Dans ce cas, il existe par le même raisonnement que ci-dessus un réel $r_2 \in]0; R[$ tel que $|f(\eta_{a_2,r_2})| = \rho'$ et qui est maximal pour cette propriété.

Les boules $\mathbb{D}(a_1, r_1)$ et $\mathbb{D}(a_2, r_2)$ sont disjointes. En effet, supposons le contraire. Comme $|a_2 - a_1| > r_1$, la boule $\mathbb{D}(a_2, r_2)$ n'est pas contenue dans $\mathbb{D}(a_1, r_1)$: elle contient donc strictement $\mathbb{D}(a_1, r_1)$, ce qui implique que $r_2 > r_1$ et que $\eta_{a_2,r_2} = \eta_{a_1,r_2}$; par conséquent, $|f(\eta_{a_1,r_2})| = \rho'$, contredisant la définition de r_1 .

En poursuivant ce procédé, on construit de façon récursive une suite $((a_i, r_i))_i$ d'éléments de $k \times \mathbb{R}_+^\times$ (finie ou non, cf. γ) telle que :

α) les $\mathbb{D}(a_i, r_i)$ sont des boules fermées deux à deux disjointes contenues dans $\mathbb{D}(a, R)$;

β) pour tout i , on a $|f(a_i)| < \rho'$ et $|f(\eta_{a_i,r_i})| = \rho'$;

γ) la suite s'arrête au rang n si et seulement si $|f(\eta_{b,s})| \geq \rho'$ pour tout (b, s)

tel que $\eta_{b,s} \in \mathbb{D}^\circ(a, R) - \coprod_{i=1}^n \mathbb{D}(a_i, r_i)$.

La condition β) entraîne que $|f|$ n'est constante sur aucune des $\mathbb{D}(a_i, r_i)$, et partant que $|f|$ n'est inversible sur aucune des $\mathbb{D}(a_i, r_i)$ (3.4.7). Chacune des boules $\mathbb{D}(a_i, r_i)$ contient donc au moins un point rigide en lequel f s'annule. Comme $f \neq 0$, l'ensemble des points rigides en lesquels elle s'annule est fini. Par conséquent, la suite s'arrête à un certain rang n , et la condition γ) garantit que la famille $((a_1, r_1), \dots, (a_n, r_n))$ satisfait les conditions requises.

L'arbre compact $\widehat{\mathfrak{A}}(k)$ se plonge dans $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$

(3.4.9) On déduit de 3.4.3 : que la formule $\zeta_{a,r} \mapsto \eta_{a,r}$ définit sans ambiguïté une application injective \mathfrak{t} de $\aleph(k)$ dans $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ (pour la définition de $\aleph(k)$, cf. 1.2.1.1); et que $\mathfrak{t}(x) \leq \mathfrak{t}(y)$ si et seulement si $x \leq y$. Il s'ensuit que si F est une chaîne de $\aleph(k)$ alors $\mathfrak{t}(F)$ est une chaîne de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$; si de plus F est non vide, $\inf_{y \in F} \mathfrak{t}(y)$ est donc bien défini (3.4.1).

Si $a \in k$ et $r \in \mathbb{R}_+$ il est immédiat que $\eta_{a,r} = \inf_{R>r} \eta_{a,R}$. Autrement dit, $\mathfrak{t}(\zeta_{a,r}) = \inf_{y \in]\zeta_{a,r}; \infty[} \mathfrak{t}(y)$.

On prolonge \mathfrak{t} à $\mathfrak{A}(k)$ en posant $\mathfrak{t}(x) = \inf_{y \in]x; \infty[} \mathfrak{t}(y)$ pour tout x appartenant à $\mathfrak{A}(E) - \aleph(E)$. Il résulte de la remarque précédente que l'égalité

$$\mathfrak{t}(x) = \inf_{y \in]x; \infty[} \mathfrak{t}(y)$$

vaut en réalité pour tout $x \in \mathfrak{A}(k)$; ceci implique, $\mathfrak{t}|_{\aleph(k)}$ étant croissante, que \mathfrak{t} est croissante.

(3.4.10) Nous allons montrer que l'application $\mathfrak{t} : \mathfrak{A}(k) \rightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ est injective, et plus précisément qu'elle établit un *isomorphisme d'ensembles ordonnés* de $\mathfrak{A}(k)$ sur son image. Sachant que \mathfrak{t} est croissante, il reste à vérifier que si x et y sont deux points de $\mathfrak{A}(k)$ tels que $\mathfrak{t}(x) \leq \mathfrak{t}(y)$ alors $x \leq y$.

On procède par l'absurde. Supposons tout d'abord que $x > y$, et choisissons $z \in]y; x[$. Comme z et x sont strictement supérieurs à y ils appartiennent tous deux à $\aleph(k)$; par conséquent, $\mathfrak{t}(z) < \mathfrak{t}(x)$; comme \mathfrak{t} est croissante, $\mathfrak{t}(y) \leq \mathfrak{t}(z)$, d'où l'inégalité $\mathfrak{t}(y) < \mathfrak{t}(x)$, contradictoire avec nos hypothèses.

Supposons maintenant que x et y soient non comparables; cela signifie que $x \wedge y > x$ et $x \wedge y > y$. Il résulte alors de 1.2.8 qu'il existe deux éléments a et b de k et deux réels strictement positifs r et s tels que $x \in \mathbb{B}^\circ(a, r')$, tels que $y \in \mathbb{B}^\circ(b, s')$, et tels que $\mathbb{B}^\circ(a, r') \cap \mathbb{B}^\circ(b, s') = \emptyset$. Comme \mathfrak{t} est croissante, les inégalités $x \leq \zeta_{a,r'}$ et $y \leq \zeta_{b,s'}$ impliquent que $\mathfrak{t}(x) \leq \eta_{a,r'}$ et $\mathfrak{t}(y) \leq \eta_{b,s'}$; autrement dit, $\mathfrak{t}(x) \in \mathbb{D}(a, r')$ et $\mathfrak{t}(y) \in \mathbb{D}(b, s')$.

Puisque $\mathbb{B}(a, r') \cap \mathbb{B}(b, s') = \emptyset$, on a $|a - b| \geq \max(r', s')$; il s'ensuit que $\mathbb{D}(a, r') \cap \mathbb{D}(b, s')$ est également vide, et partant que $\mathfrak{t}(x)$ et $\mathfrak{t}(y)$ ne sont pas comparables (3.4.6). On aboutit ainsi à une contradiction.

(3.4.11) On déduit de 3.4.10 que l'on a pour tout $a \in k$ et tout $r > 0$ les égalités

$$\mathfrak{t}^{-1}(\mathbb{D}(a, r)) = \mathbb{B}(a, r) \text{ et } \mathfrak{t}^{-1}(\mathbb{D}^\circ(a, r)) = \mathbb{B}^\circ(a, r).$$

(3.4.12) On étend \mathfrak{t} à $\widehat{\mathfrak{A}}(k)$ en posant $\mathfrak{t}(\infty) = \infty$; l'application \mathfrak{t} ainsi prolongée reste injective.

L'application \mathfrak{t} est continue. Sa continuité en tout point de $\widehat{\mathfrak{A}}(k)$ provient de 3.4.8 et sq. ainsi que du 3.4.11 ci-dessus. Il reste à établir sa continuité en ∞ . Le point ∞ de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ admet une base de voisinages constitués des ouverts de la forme $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} - \mathbb{D}(0, r)$ avec $r > 0$; or si $r > 0$ il résulte de 3.4.11

que $t^{-1}(\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} - \mathbb{D}(0, r)) = \widehat{\mathfrak{Z}}(k) - \mathbb{B}(a, r)$, qui est un ouvert de $\widehat{\mathfrak{Z}}(k)$; ceci achève la démonstration.

Ainsi, t apparaît comme une injection continue d'un espace topologique compact dans un espace topologique séparé. Par conséquent, elle établit un homéomorphisme entre l'arbre compact $\widehat{\mathfrak{Z}}(k)$ et son image $t(\widehat{\mathfrak{Z}}(k))$, que l'on notera $\mathfrak{P}(k)$. La fonction rayon $\rho : \widehat{\mathfrak{Z}}(k) \rightarrow [0; +\infty]$ induit *via* l'homéomorphisme $\widehat{\mathfrak{Z}}(k) \simeq \mathfrak{P}(k)$ une fonction de $\mathfrak{P}(k)$ dans $[0; +\infty]$ que nous noterons encore ρ .

(3.4.13) Remarque. L'espace métrique k se plonge topologiquement dans $\widehat{\mathfrak{Z}}(k)$ *via* la flèche $a \mapsto \zeta_{a,0}$. Composée avec t , cette flèche induit un plongement topologique $k \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$, donné par la formule $a \mapsto \eta_{a,0}$; il coïncide ainsi avec le plongement naturel $k \hookrightarrow \mathbb{P}^1(k) \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$.

(3.4.14) Propriétés de l'arbre $\mathfrak{P}(k)$: le cas général.

(3.4.14.1) Il résulte de la définition de t que $\mathfrak{P}(k)$ est la réunion de $\mathbb{P}^1(k)$, de l'ensemble des points de la forme $\eta_{a,r}$ avec $a \in k$ et $r > 0$, et enfin de l'ensemble des points de la forme $t(x)$ avec $x \in \widehat{\mathfrak{Z}}(k) - \mathfrak{N}(k)$. Ce dernier ensemble s'identifie, en vertu de 1.2.33, à celui des classes d'équivalence de chaînes évanescentes de boules fermées de k .

(3.4.14.2) Soit $x \in \widehat{\mathfrak{Z}}(k)$ et soit ξ le point $t(x)$ de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$.

Supposons que x appartient à $k \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire que $\xi \in \mathbb{P}^1(k)$, ou que $x \in \widehat{\mathfrak{Z}}(k) - \mathfrak{N}(k)$; on déduit alors de 1.2.27.2 et 1.2.27.3 que $\mathfrak{P}(k)$ est unibranche en ξ .

Supposons maintenant que x soit de la forme $\zeta_{a,r}$ avec $r > 0$; on a alors $\xi = \eta_{a,r}$. Distinguons maintenant deux cas :

- le cas où $r \notin |k^\times|$; on a alors $B(a, r) = B^\circ(a, r)$, et l'on déduit de 1.2.27.1 que $\mathfrak{P}(k)$ est de valence 2 en ξ ;
- le cas où $r \in |k^\times|$; l'ensemble $\Theta(a, r)$ (défini au 1.2.10) est en bijection canonique avec \tilde{k}_r , et donc en bijection (non canonique en général) avec \tilde{k}_1 . Ceci entraîne, en vertu de 1.2.27.1, que la valence de $\mathfrak{P}(k)$ en ξ est égale au cardinal de $\mathbb{P}^1(\tilde{k}_1)$.

(3.4.15) Un cas particulier important : celui d'un corps local.

Supposons que k est local, c'est-à-dire que $|k^\times|$ est libre de rang 1, et que \tilde{k} est fini; soit q le cardinal de ce dernier.

(3.4.15.1) Comme $|k^\times|$ est libre de rang 1, *il n'existe pas de chaîne évanescente de boules fermées de k* ; par conséquent, $\mathfrak{P}(k)$ est la réunion de $\mathbb{P}^1(k)$ et de l'ensemble des points de la forme $\eta_{a,r}$ avec $a \in k$ et $r > 0$ (3.4.14.1).

(3.4.15.2) Tout point de $\mathbb{P}^1(k)$ est un point unibranche de $\mathfrak{P}(k)$ (3.4.14.2). Comme par ailleurs $\mathbb{P}^1(k)$ est compact (puisque k est local), il s'ensuit que $\mathfrak{P}(k) - \mathbb{P}^1(k)$ est un sous-arbre ouvert de $\mathfrak{P}(k)$.

Soit $\xi \in \mathfrak{P}(k) - \mathbb{P}^1(k)$; il s'écrit $\eta_{a,r}$ pour un certain $a \in k$ et un certain $r > 0$. D'après 3.4.14.2, la valence de $(\mathfrak{P}(k), \xi)$ vaut 2 si $r \notin |k^\times|$, et $q + 1$ sinon; compte-tenu du fait que $|k^\times|$ est libre de rang 1, ceci entraîne que $\mathfrak{P}(k) - \mathbb{P}^1(k)$ est un arbre localement fini, dont les sommets sont exactement les points de la forme $\eta_{a,r}$ avec $a \in k$ et $r \in |k^\times|$, et sont tous de valence $q + 1$.

(3.4.15.3) Remarque. On déduit de sa construction que $\mathfrak{B}(k) - \mathbb{P}^1(k)$ s'identifie à l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_2(k)$.

La courbe $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$ s'identifie à l'arbre $\mathfrak{B}(\widehat{k^a})$

(3.4.16) Nous allons montrer que le compact $\mathfrak{B}(\widehat{k^a})$ de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$ est égal à $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$ tout entier. Pour cela, donnons-nous un point x de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$; nous allons vérifier qu'il appartient à l'image de \mathfrak{t} . C'est évident si $x = \infty$; on suppose maintenant que $x \in \mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$. Soit F l'ensemble des majorants de x dans $\mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$ qui sont de la forme $\eta_{a,r}$, avec $a \in \widehat{k^a}$ et $r \geq 0$.

Soient y et z deux éléments de F ; écrivons $y = \eta_{a,r}$ et $z = \eta_{b,s}$. Par définition de F , le point x appartient à l'intersection des boules $\mathbb{D}(a,r)$ et $\mathbb{D}(b,s)$, laquelle est en conséquence non vide; il s'ensuit que ces deux boules sont comparables pour l'inclusion, ce qui implique que y et z sont comparables. L'ensemble F est donc une chaîne, qui contient par ailleurs η_r pour tout $r > |T(x)|$.

Il s'ensuit que $F = \mathfrak{t}(G)$ pour une certaine chaîne saturée G de $\mathfrak{N}(k)$. Soit x_0 la borne inférieure de G ; nous allons montrer que $x = \mathfrak{t}(x_0)$, ce qui permettra de conclure. Par définition de \mathfrak{t} , on a $\mathfrak{t}(x_0) = \inf_{t \in G} \mathfrak{t}(t) = \inf_{y \in F} y$; il s'agit donc de s'assurer que $x = \inf_{y \in F} y$.

Soit $a \in k$; posons $r = |T(x) - a|$. On a $x \in \mathbb{D}(a,r)$; autrement dit, $\eta_{a,r} \in F$. Comme $|(T-a)(\eta_{a,r})| = r$, on a $\inf_{y \in F} |(T-a)(y)| \leq r = |(T-a)(x)|$. La définition de F assurant par ailleurs que $|(T-a)(x)| \leq \inf_{y \in F} |(T-a)(y)|$, il vient

$$|(T-a)(x)| = \inf_{y \in F} |(T-a)(y)|.$$

Ceci vaut pour tout $a \in \widehat{k^a}$. Le corps $\widehat{k^a}$ étant algébriquement clos, une semi-norme multiplicative sur $\widehat{k^a}[T]$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur les polynômes de la forme $T - a$ avec $a \in \widehat{k^a}$; il s'ensuit que $x = \inf_{y \in F} y$, ce qui achève la démonstration.

(3.4.17) Ainsi, $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$ est un arbre compact. Les faits suivants résultent de 3.4.14.

(3.4.17.1) L'arbre $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$ est la réunion de $\mathbb{P}^1(\widehat{k^a})$, de l'ensemble des points de la forme $\eta_{a,r}$ avec $a \in \widehat{k^a}$ et $r > 0$, et de $\mathfrak{t}(\square(\widehat{k^a}) - \mathfrak{N}(\widehat{k^a}))$, lequel s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalence de chaînes évanescents de boules fermées de $\widehat{k^a}$. Cet ensemble est vide si et seulement si $\widehat{k^a}$ est sphériquement complet, ou encore si et seulement si il n'admet pas d'extension immédiate stricte.

(3.4.17.2) Si $x \in \mathbb{P}^1(\widehat{k^a})$ ou si x appartient à $\mathfrak{t}(\square(\widehat{k^a}) - \mathfrak{N}(\widehat{k^a}))$ alors x est un point unibranche de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$.

(3.4.17.3) Si x est de la forme $\eta_{a,r}$ avec $r > 0$ alors la valence de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\mathrm{an}}$ en x vaut 2 si $r \notin |(\widehat{k^a})^\times|$, et est sinon infinie et plus précisément égale au cardinal de $\mathbb{P}^1(\widehat{k_1^a})$.

(3.4.18) Soit x un point de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$.

(3.4.18.1) Supposons que $x \in \mathbb{P}^1(\widehat{k^a})$; le point x est alors de type 1.

(3.4.18.2) Supposons que $x = \eta_{a,r}$ avec $a \in \widehat{k^a}$ et $r \in |(\widehat{k^a})^\times|$. Le point x est alors de type 2 si $r \in |\widehat{k^a}^\times|$, et de type 3 sinon (3.3.3 et sq.).

(3.4.18.3) Supposons que $x \in \mathfrak{t}(\square(\widehat{k^a}) - \aleph(\widehat{k^a}))$. Nous allons montrer qu'il est de type 4, en excluant les trois autres cas. Le point x n'est pas rigide puisqu'il n'appartient pas à $\mathbb{P}^1(\widehat{k^a})$. Il ne peut pas non plus être de type 2 ou 3. Pour le voir, on raisonne par l'absurde en supposant donc que c'est le cas. Le degré de transcendance de $\mathcal{H}(x)$ sur $(\widehat{k^a})$ est alors égal à 1. Comme $\widehat{k^a}$ est algébriquement clos, $\widehat{k^a}(T)^\times$ est engendré par les monômes $(T - a)$ où a parcourt $\widehat{k^a}$, et il existe dès lors un élément a dans $\widehat{k^a}$ tel que $(T - a)(x)$ soit transcendant sur $\widehat{k^a}$, ce qui signifie que x est égal à $\eta_{a,|(T-a)(x)|}$ (2.2.46.5) et débouche ainsi sur une contradiction.

(3.4.19) Nous allons maintenant donner une description des bases de voisinages des points de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$, selon leur type; elle se fonde sur les résultats établis aux 1.2.12 et sq. Soit donc x un point de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$.

(3.4.19.1) Supposons que x est de type 1 ou 4; il possède alors une base de voisinages de la forme $\mathbb{D}^\circ(a, r)$ avec $a \in \widehat{k^a}$ et $r > 0$ (1.2.12.3). Notons une conséquence de ce fait : l'intersection $\bigcap_{(a,r), x \in \mathbb{D}^\circ(a,r)} \mathbb{D}^\circ(a, r) = \{x\}$ (c'était *a priori* évident pour les points de type 1, mais pas pour ceux de type 4).

(3.4.19.2) Supposons que x est de type 2, c'est-à-dire de la forme $\eta_{a,r}$ avec $a \in \widehat{k^a}$ et $r \in |(\widehat{k^a})^\times|$. Il possède alors (1.2.12.2) une base de voisinages de la forme $\mathbb{D}^\circ(a, R) - \prod_{i \in I} \mathbb{D}(a_i, r_i)$ où $R > r$, où I est fini, où les r_i sont strictement inférieurs à r , et où les a_i appartiennent à $B(a, r)$ et sont tels que $|a_i - a_j| = r$ dès que $i \neq j$.

(3.4.19.3) Supposons que x est de type 3, c'est-à-dire de la forme $\eta_{a,r}$ avec $a \in \widehat{k^a}$ et $r \notin |(\widehat{k^a})^\times|$. Il possède alors (1.2.12.2) une base de voisinages de la forme $\mathbb{D}^\circ(a, R) - \mathbb{D}(a, s)$ où $R > r$ et où $s < r$.

L'arbre $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ et certains de ses sous-arbres finis

(3.4.20) La courbe $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ est un arbre compact d'après 3.4.16; comme $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ est homéomorphe à $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}/\mathbf{G}$, c'est également un arbre compact, dont l'arbre $\mathfrak{P}(k)$ est un sous-arbre compact.

(3.4.21) Soient a et b deux éléments de k , que l'on voit comme appartenant à $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ (ils s'identifient respectivement à $\eta_{a,0}$ et $\eta_{b,0}$). Il résulte de 3.4.9 et sq. que l'intervalle $[a; b]$ est égal à

$$\{\eta_{a,r}\}_{0 \leq r \leq |b-a|} \cup \{\eta_{b,r}\}_{0 \leq r \leq |b-a|},$$

et que l'intervalle $[a; \infty[$ est égal à $\{\eta_{a,r}\}_{0 \leq r \leq +\infty}$, avec la convention $\eta_{a,+\infty} = \infty$. En particulier, $[0; \infty[= \{\eta_r\}_{0 \leq r \leq +\infty}$.

(3.4.22) En tant que sous-arbre compact et non vide de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$, l'intervalle $[0; \infty]$ en est un sous-arbre admissible.

(3.4.22.1) Comme $|T(\eta_r)| = r$ pour tout r , la restriction de $|T|$ à $[0; \infty]$ coïncide avec (la restriction de) la fonction rayon ρ ; c'est en particulier une fonction strictement croissante.

(3.4.22.2) Nous allons démontrer que $|T|$ est localement constante en dehors de $[0; \infty]$ et que la rétraction canonique $\pi : \mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \rightarrow [0; \infty]$ est égale à $x \mapsto \eta_{|T(x)|}$.

Soit $x \in \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$. Si $x = 0$ ou $x = \infty$ alors $\rho(x) = x = \eta_{|T(x)|}$; supposons maintenant que $x \notin \{0, \infty\}$. Soit L une extension complète de k telle que x possède un antécédent L -rationnel sur $\mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$, correspondant à un élément λ de L^\times . Posons $r = |T(x)| = |\lambda|$. L'intervalle $I := [\lambda; \eta_{\lambda,r,L}]$ est égal à $\{\eta_{\lambda,t,L}\}_{0 \leq t \leq r}$, et $|T|$ est égale à r identiquement sur I . L'image J de I sur $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ est une partie connexe contenant x et η_r , et sur laquelle $|T| = r$ identiquement. Il s'ensuit que $J \cap [0; \infty] = \{\eta_r\}$, ce qui entraîne que $\pi(x) = \eta_r$.

Supposons que x n'appartienne pas à $[0; \infty]$ et soit U sa composante connexe dans $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus [0; \infty]$. On a alors $\pi(y) = \pi(x)$ pour tout $y \in U$; compte-tenu de ce qui précède, il vient $|T(y)| = |T(x)|$. Par conséquent, $|T|$ est localement constante en dehors de $[0; \infty]$.

(3.4.22.3) Soit $a \in k$. Il résulte immédiatement des définitions que l'automorphisme de translation par a de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ induit un homéomorphisme de $\mathfrak{P}(k)$ sur lui-même qui préserve ρ . On en déduit, au vu de ce qui précède, les faits suivants :

- la restriction de $|T - a|$ à $[a; \infty]$ coïncide avec ρ , et est en particulier strictement croissante;
- la fonction $|T - a|$ est localement constante en dehors de $[a; \infty]$ et la rétraction canonique de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ sur $[a; \infty]$ est égale à $x \mapsto \eta_{a,|(T-a)(x)|}$.

(3.4.23) Soit $f \in k(T)$ une fraction rationnelle non nulle et *scindée*, c'est-à-dire quotient de deux polynômes scindés premiers entre eux. On note E l'ensemble des zéros et pôles de f ; pour tout $a \in E$, on note m_a la multiplicité correspondante, qui appartient à $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(3.4.23.1) Soit Γ la réunion des $[a; \infty]$ pour $a \in E$. Comme la fonction f s'écrit $\lambda \prod_{a \in E} (T - a)^{m_a}$ pour un certain $\lambda \in k^*$, on déduit du 3.4.22.3 ci-dessus que $|f|$ est localement constante en dehors de Γ .

(3.4.23.2) Soit Γ' l'ensemble des points de valence 2 de l'arbre fini Γ , et soit I un intervalle ouvert non vide de Γ' . Par construction de Γ , l'intervalle I est de la forme $] \eta_{a,r}; \eta_{a,R}[$ où $a \in E$ et où $0 \leq r < R \leq +\infty$. De plus, si $b \in E$ on est nécessairement dans l'un des deux cas suivants :

- $[b; \infty] \supset] \eta_{a,r}; \eta_{a,R}[$; c'est le cas si et seulement si $b \leq \eta_{a,r}$, soit encore si et seulement si $|(T - a)(b)| \leq r$, c'est-à-dire enfin si et seulement si b appartient à la boule fermée $B(a, r)$ du corps k .
- $[b; \infty] \cap] \eta_{a,r}; \eta_{a,R}[= \emptyset$; c'est le cas si et seulement si b n'est majoré par aucun $\eta_{a,s}$ pour $s < R$, soit encore si et seulement si $|(T - a)(b)| \geq R$, c'est-à-dire enfin si et seulement si b n'appartient pas à la boule ouverte $B^\circ(a, R)$ du corps k .

Il s'ensuit, en vertu de 3.4.22.3, que la restriction de $|f|$ à $] \eta_{a,r} \eta_{a,R} [$ coïncide avec $\rho^{\sum_{b \in E \cap B(a,r)} m_b}$.

(3.4.23.3) Pour tout $a \in E$, on note P_a l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que $\sum_{b \in E \cap B(a,r)} m_b = 0$. On note E' l'ensemble des $a \in E$ tels que P_a soit non vide, et E'' l'ensemble $E \setminus E'$. Si $a \in E'$ on désigne par $\lambda(a)$ la borne inférieure de P_a ; si $a \in E''$ on pose $\lambda(a) = +\infty$.

Soit $a \in E'$, et soit $r \in P_a$; notons que comme m_a est non nulle, la boule $B(a, r)$ contient au moins un élément de E distinct de a . Si l'on pose $r_0 = \max_{b \in B(a,r) \cap E, b \neq a} |a - b|$ alors $\sum_{b \in B(a,r_0) \cap E} m_b = 0$. Il s'ensuit que $\lambda(a)$ est de la forme $|a - b|$ pour un certain $b \in E \setminus \{a\}$ et qu'il appartient à P_a .

(3.4.23.4) Convenons de dire qu'une boule fermée C de k est *adaptée à f* si elle est de la forme $B(a, \lambda(a))$ pour un certain $a \in E'$. Si c'est le cas, on dira qu'un tel a est un *centre admissible* de C . Notons que comme $\lambda(a) \in |k^*|$ il coïncide avec le diamètre de C (et ne dépend en particulier pas du centre admissible a considéré).

(3.4.23.5) Soit C une boule fermée de k adaptée à f et soit r son diamètre. On note Γ_C la réunion des $[a; \eta_{a,r}]$ où a parcourt l'ensemble des centres admissibles de C . Par construction, Γ_C est un sous-arbre fermé et non vide de Γ , contenu dans $\mathbb{D}(a, r)$ pour tout centre admissible a de C .

Soit D une boule fermée de k adaptée à f et distincte de C . Nous allons montrer que $\Gamma_C \cap \Gamma_D = \emptyset$. Soit s le diamètre de D , soit c un centre admissible de C et soit d un centre admissible de D .

Supposons que $|c - d| > \max(r, s)$. On a alors $\mathbb{D}(c, r) \cap \mathbb{D}(d, s) = \emptyset$, et *a fortiori*, $\Gamma_C \cap \Gamma_D = \emptyset$.

Supposons que $|c - d| \leq \max(r, s)$. On a alors une relation d'inclusion non triviale entre C et D , disons par exemple $C \subset D$. Comme C et D sont par hypothèse distinctes, l'inclusion est stricte, ce qui entraîne que $r < s$. Supposons que $\Gamma_C \cap \Gamma_D$ soit non vide. La réunion de ces deux sous-arbres de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ est alors un arbre, et on a en particulier $[c; \eta_{c,s}] \subset \Gamma_C \cup \Gamma_D$. Comme $\Gamma_C \subset \mathbb{D}(c, r)$, on a $] \eta_{c,r}; \eta_{c,s} [\subset \Gamma_D$.

Comme Γ_D est la réunion finie des $[a; \eta_{a,s}]$ où a parcourt l'ensemble des centres admissibles de D , il existe un tel a tel que $] \eta_{c,r}; \eta_{c,s} [\subset [a; \eta_{a,s}]$; par compacité, ce dernier intervalle contient aussi $\eta_{c,r}$. Ceci entraîne que $\eta_{c,r} = \eta_{a,r}$, ou encore que $|c - a| \leq r$; puisque c est un centre admissible de C , on a

$$0 = \sum_{\alpha \in B(c,r) \cap E} m_\alpha = \sum_{\alpha \in B(a,r) \cap E} m_\alpha,$$

ce qui contredit le fait que a est un centre admissible de la boule D , dont le diamètre $s = \lambda(a)$ est $> r$.

(3.4.23.6) On note Γ_∞ la réunion des $[a; \infty] = [a, \lambda(a)]$ pour a parcourant E'' ; c'est un sous-arbre connexe de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ (éventuellement vide).

Soit C une boule fermée de k adaptée à f et soit r son diamètre. L'intersection $\Gamma_\infty \cap \Gamma_C$ est vide. En effet, supposons qu'elle ne le soit pas. Il

existe alors un centre admissible c de C et un élément a de E'' tel que $[c; \eta_{c,r}]$ rencontre $[a; \infty]$. Il existe donc $s \leq r$ tel que $\eta_{a,s} = \eta_{c,s}$; on a *a fortiori* $\eta_{a,r} = \eta_{c,r}$; en conséquence, $B(a, r) = B(c, r)$. Mais c est un centre admissible de C , d'où les égalités $0 = \sum_{\alpha \in D(c,r) \cap E} m_\alpha = \sum_{\alpha \in D(a,r) \cap E} m_\alpha$, ce qui contredit l'appartenance de a à E'' .

(3.4.23.7) Notons Γ_f la réunion des $[a; \eta_{a,\lambda(a)}]$ où a parcourt E . C'est un sous-graphe compact de Γ . Par ce qui précède, on peut l'écrire comme la réunion disjointe de Γ_∞ et des Γ_C où C parcourt l'ensemble des boules fermées de k adaptées à f ; ses composantes connexes sont exactement les Γ_C ainsi que Γ_∞ si celui-ci est non vide; notons que par construction, aucune d'elles n'est réduite à un point.

Soit I un intervalle ouvert non vide contenu dans Γ' . D'après 3.4.23.2, I est de la forme $] \eta_{a,r}; \eta_{a,R}[$ avec $a \in E$, et la restriction de $|f|$ à I est égale à $\rho^{\sum_{\alpha \in E \cap B(a,r)} m_\alpha}$. Nous allons montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) la restriction de $|f|$ à I est constante;
- 2) $\sum_{\alpha \in E \cap B(a,r)} m_\alpha = 0$;
- 3) $I \cap \Gamma_f = \emptyset$;
- 4) $I \not\subset \Gamma_f$.

Il est clair que 1) \iff 2). Supposons maintenant que 2) est vraie et soit b appartenant à E . Supposons que $[b; \infty]$ rencontre I . Dans ce cas, il le contient (car $I \subset \Gamma'$); par compacité, il contient $\eta_{a,r}$. Il vient alors $\eta_{a,r} = \eta_{b,r}$, puis $B(a, r) = B(b, r)$. En conséquence, $\sum_{\alpha \in E \cap B(b,r)} m_\alpha = 0$, et donc $\lambda(b) \leq r$.

Il s'ensuit que $[b; \eta_{b,\lambda(b)}]$ ne rencontre pas $I =]\eta_{b,r}; \eta_{b,R}[$. Ceci valant pour tout $b \in E$, on a bien $I \cap \Gamma_f = \emptyset$, et 3) est vraie.

L'implication 3) \implies 4) est évidente. Supposons enfin que 4) soit vraie et soit b appartenant à $E \cap B(a, r)$. Comme $I \not\subset \Gamma_f$, l'intervalle $[b; \eta_{b,\lambda(b)}]$ ne contient pas $I =]\eta_{b,r}; \eta_{b,R}[$. Il s'ensuit trivialement que $\lambda(b) < R$. Mais on a même $\lambda(b) \leq r$. En effet, supposons $\lambda(b) = s$ avec $r < s < R$. Cela signifie que $\sum_{\alpha \in E \cap B(b,s)} m_\alpha = 0$, et que $\sum_{\alpha \in E \cap B^\circ(b,s)} m_\alpha \neq 0$. Il existe donc un élément α de E tel que $|b - \alpha| = s$. L'arbre Γ contient $] \eta_{b,r}; \eta_{b,R}[$ et $[\alpha; \eta_{\alpha,s}] = [\alpha; \eta_{b,s}]$, dont l'intersection est $\{\eta_{b,s}\}$. Le point $\eta_{b,s}$ est donc de valence au moins 3 sur Γ , contredisant le choix de I . On a bien finalement $\lambda(b) \leq r$.

Ceci entraîne que $b \in E'$, et que $B(b, \lambda(b)) \subset B(a, r)$. Ainsi, $E \cap B(a, r)$ est contenu dans une réunion (nécessairement disjointe) de boules adaptées à f et elles-mêmes incluse dans $B(a, r)$. Il s'ensuit que $\sum_{\alpha \in E \cap B(a,r)} m_\alpha = 0$, ce qui montre 2) et achève la preuve de l'équivalence souhaitée.

(3.4.23.8) Soit U l'ouvert de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus E$ formé des points au voisinage desquels $|f|$ est constante. Nous allons montrer que U est le complémentaire de Γ_f , par double inclusion.

L'ouvert U ne rencontre pas Γ_f . Soit $x \in \Gamma_f$ et soit V un voisinage ouvert de x . Comme x n'est pas un point isolé de Γ_f , l'ouvert V contient un intervalle

ouvert I aboutissant à x . Quitte à restreindre I , on peut supposer qu'il est contenu dans Γ' . Puisque $I \subset \Gamma_f$, il résulte de 3.4.23.7 que la restriction de $|f|$ à I est de la forme ρ^m pour un certain m non nul. En conséquence, $|f|_V$ n'est pas constante, et $x \notin U$.

La fonction $|f|$ est localement constante en dehors de Γ_f . Soit $x \in \mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \Gamma_f$. Si $x \notin \Gamma$ alors $|f|$ est constante au voisinage de x (3.4.23.1).

Supposons que $x \in \Gamma$. Par compacité de Γ_f , il existe un voisinage ouvert Δ de x dans Γ qui ne rencontre pas Γ_f . Quitte à le restreindre, on peut supposer que $\Delta \setminus \{x\}$ est une réunion finie d'intervalles ouverts contenus dans Γ' et aboutissant à x . Il résulte de 3.4.23.7 que $|f|$ est constante sur chacun de ces intervalles ouverts; par continuité, elle est constante de valeur $|f(x)|$ sur Δ .

Soit r la rétraction canonique de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ sur Γ . L'ouvert $r^{-1}(\Delta)$ est un voisinage de x dans $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus E$. La fonction $|f|$ est comme on l'a vu plus haut localement constante sur $r^{-1}(\Delta) \setminus \Delta$. Par ailleurs, soit $y \in r^{-1}(\Delta) \setminus \Delta$ et soit V la composante connexe de y dans $y \in r^{-1}(\Delta) \setminus \Delta$. Par définition, $r(y)$ est le seul point de ∂V . La valeur constante de $|f|$ sur V est donc égale à $|f(r(y))|$, c'est-à-dire à $|f(x)|$ puisque $r(y) \in \Delta$. Ainsi, $|f|$ est constante de valeur $|f(x)|$ sur $r^{-1}(\Delta)$.

(3.4.24) On désigne maintenant par f une fonction non nulle quelconque de $k(T)$.

(3.4.24.1) La fonction f est scindée dans $\widehat{k^a}(T)$. D'après 3.4.23 et sq., l'ouvert U de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ formé des points au voisinage desquels f est définie, inversible et de norme constante est le complémentaire d'un sous-arbre fini, non vide et non singleton $\Gamma_{f,\widehat{k^a}}$ de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$; si I désigne un intervalle ouvert non vide de $\Gamma_{f,\widehat{k^a}}$ constitué de points de valence 2 de ce dernier, la restriction de $|f|$ à I est de la forme ρ^N pour un certain entier relatif non nul N ; en particulier, cette restriction est strictement monotone. Il résulte de sa définition que U est stable sous G , et il en va évidemment de même de $\Gamma_{f,\widehat{k^a}}$.

(3.4.24.2) La fonction f est définie et inversible sur U/G , et $|f|_y$ est localement constante car la projection $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}/G$ est ouverte. Par ailleurs, le quotient $\Gamma_{f,\widehat{k^a}}/G$ est un arbre, et $\Gamma_{f,\widehat{k^a}} \rightarrow \Gamma_{f,\widehat{k^a}}/G$ est injective par morceaux (th. 1.9.11). On en déduit que $\Gamma_{f,\widehat{k^a}}/G$ n'est pas réduit à un singleton, et qu'il existe un sous-ensemble fini S de $\Gamma_{f,\widehat{k^a}}/G$ tel que pour tout intervalle ouvert non vide I contenu dans $(\Gamma_{f,\widehat{k^a}}/G) \setminus S$, la restriction de $|f|$ à I soit strictement monotone.

En conséquence, U/G est exactement l'ensemble des points en lesquels f est définie et au voisinage desquels $|f|$ est constante. Si f est scindée, $\Gamma_{f,\widehat{k^a}}/G$ coïncide donc avec l'arbre Γ_f défini au 3.4.23.7; on peut par conséquent sans risque d'ambiguïté poser en général $\Gamma_f = \Gamma_{f,\widehat{k^a}}/G$. Nous dirons que Γ_f est l'arbre de variation de f .

(3.4.24.3) *Exemple : le cas d'un polynôme.* Supposons que $f \in k[T]$, et soit E l'ensemble de ses racines dans $\widehat{k^a}$. Pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, la boule fermée de $\widehat{k^a}$ de centre a et de rayon r ne contient aucun pôle de f . Il s'ensuit que $\lambda(a) = +\infty$, que l'arbre $\Gamma_{f,\widehat{k^a}}$ est la réunion des $[a; \infty]$ pour $a \in E$, et que $|f|$ est strictement croissante sur $[a; \infty]$ pour tout $a \in E$.

Soit $a \in E$ et soit α son image sur $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$; c'est le point rigide défini par l'annulation du polynôme minimal de a sur k . Il résulte de 1.9.16.2 (appliqué en prenant pour X l'arbre à un bout $\mathbb{A}_{k^a}^{1,\text{an}}$, avec $\omega = \infty$) que la flèche quotient $\mathbb{P}_{k^a}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ induit un homéomorphisme entre $[a; \infty]$ et $[\alpha; \infty]$.

Soit F l'ensemble des points rigides de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ en lesquels f s'annule. Il résulte de ce qui précède que Γ_f est égal à $\bigcup_{\alpha \in F} [\alpha; \infty]$, et que $|f|$ est strictement croissante sur $[\alpha; \infty]$ pour tout $\alpha \in E$.

3.5 Toute courbe analytique est un graphe

Courbes analytiques : allure globale

(3.5.1) Théorème. *Toute courbe analytique est un graphe.*

Démonstration. Soit X une courbe k -analytique. Comme X est topologiquement le quotient de X_{k^a} par l'action de Galois il suffit, pour montrer que X est un graphe, de s'assurer que X_{k^a} en est un; on peut par conséquent supposer k algébriquement clos. On sait que X est localement compact et localement connexe par arcs; il suffit donc de vérifier *localement* que X est un graphe.

Comme X est bon, on se ramène au cas où X est affinoïde. Il suffit, en vertu de la proposition 1.9.22, de démontrer que le normalisé de X est un graphe; autrement dit, on peut supposer que X est normal.

Comme k est algébriquement clos, X est quasi-lisse. Chacun de ses points possède donc un voisinage isomorphe à un domaine affinoïde de l'analytification d'une k -courbe projective, irréductible et lisse; on peut dès lors faire l'hypothèse que X est un domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} , pour une certaine k -courbe algébrique, projective, irréductible et lisse \mathcal{X} . Le complémentaire de X dans \mathcal{X}^{an} est une réunion de composantes connexes de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \partial X$; comme ∂X est fini (c'est le bord de Shilov de X), il suffit de démontrer que \mathcal{X}^{an} est un graphe.

Il existe un morphisme fini et plat de \mathcal{X} vers \mathbb{P}_k^1 ; soit \mathcal{Y} le normalisé de \mathcal{X} dans une clôture normale de l'extension $k(T) \subset \kappa(\mathcal{X})$ induite par ce morphisme. Si G désigne le groupe de Galois de cette clôture normale, et si H est le sous-groupe de G correspondant à $\kappa(\mathcal{X})$, on dispose d'homéomorphismes

$$\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \simeq \mathcal{Y}^{\text{an}}/G \text{ et } \mathcal{X}^{\text{an}} \simeq \mathcal{Y}^{\text{an}}/H.$$

Nous avons vu au 3.4.16 ci-dessus que l'espace topologique $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ est un arbre. Soit ℓ un entier strictement supérieur à 1 et inversible dans k . Tout revêtement topologique de \mathcal{Y}^{an} pouvant être vu comme un revêtement étale de cet espace, il résulte de GAGA et de la finitude du groupe $H^1(\mathcal{Y}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ que $H^1(\mathcal{Y}_{\text{top}}^{\text{an}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est fini. Le théorème 1.10.1 assure alors que \mathcal{Y}^{an} est un graphe; il s'ensuit, en vertu du théorème 1.9.11, que \mathcal{X}^{an} est un graphe. \square

(3.5.2) Proposition. *Soit X une courbe k -analytique et soit $x \in X_{[0]}$. L'ensemble $\text{br}(X, x)$ est fini, et son cardinal est égal au nombre d'antécédents de x sur le normalisé de X .*

Démonstration. Soit X' la normalisée de X , soit $\varphi : X' \rightarrow X$ la flèche canonique et soient x_1, \dots, x_r les antécédents de x sur X' . Il existe un voisinage affinoïde V de x dans X possédant les propriétés suivantes :

- V est un arbre et l'espace $V_{\text{red}} \setminus \{x\}$ est normal ;
- $\varphi^{-1}(V)$ est de la forme $\coprod_{1 \leq i \leq r} V_i$ où V_i est pour tout i un voisinage affinoïde

de x_i qui est un arbre.

Il résulte des hypothèses faites sur V que $\coprod (V_i \setminus \{x_i\}) \rightarrow V \setminus \{x\}$ est bijective ; étant par ailleurs finie et de ce fait compacte, cette flèche est un homéomorphisme. Il s'ensuit que $\pi_0(V \setminus \{x\})$ est en bijection naturelle avec $\coprod_i \pi_0(V_i \setminus \{x_i\})$; par conséquent, l'application canonique

$$\coprod_i \text{br}(X', x_i) \rightarrow \text{br}(X, x)$$

est bijective.

Cela permet de se ramener au cas où la courbe X est normale ; il s'agit alors de prouver que $\text{br}(X, x)$ est un singleton. Soit F le complété de la clôture parfaite de k et soit Z la normalisée de X_F . La flèche $X_F \rightarrow X$ est un homéomorphisme. Soit V un ouvert connexe non vide de X_F ; il est de la forme U_F , où U est un ouvert connexe et non vide de X . Comme X est normale, U est irréductible ; il s'ensuit que $V = U_F$ est irréductible ; par conséquent, l'image réciproque W de V sur Z , qui s'identifie à la normalisée de V , est connexe. Ceci valant pour tout ouvert connexe et non vide V de X_F , la flèche $Z \rightarrow X$ est un homéomorphisme ; on peut donc, pour établir notre assertion, remplacer X par Z , c'est-à-dire finalement supposer X normale et k parfait ; la courbe X est alors quasi-lisse. Le corps $\mathcal{H}(x) = \kappa(x)$ est une extension finie séparable de k , qui se plonge dans l'anneau local hensélien $\mathcal{O}_{X,x}$; on peut donc, quitte à restreindre X et à remplacer k par $\mathcal{H}(x)$, supposer que x est un k -point ; étant lisse, il possède un voisinage qui est un disque, et est de ce fait unibranche. \square

Morphismes finis et plats entre courbes analytiques : le degré d'une branche sur son image

(3.5.3) Soit X une courbe k -analytique ; c'est un graphe (th. 3.5.1) ce qui autorise à parler de ses branches (1.7.1). Si $Y \rightarrow X$ est un morphisme compact entre courbes k -analytiques (*e.g.* φ est fini, ou φ identifie Y à un domaine analytique fermé de X), si $y \in Y$, si x désigne son image sur X et si $\varphi^{-1}(x)$ est fini, on dispose d'une application naturelle $\text{br}(Y, y) \rightarrow \text{br}(X, x)$ (1.7.2). On vérifie immédiatement que la flèche $\text{br}(Y, y) \rightarrow \text{br}(X, x)$ reste bien définie lorsque $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ est un morphisme de *germes* de courbes k -analytiques à fibre finie.

(3.5.4) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme fini et plat entre courbes k -analytiques ; soit $x \in X$; soit a une branche de X issue de x .

(3.5.4.1) Si d désigne le degré de φ au-dessus de x et si U est un voisinage ouvert de x dans X qui est un arbre, le cardinal de toute fibre de φ en un point de U est majoré par d ; il s'ensuit que pour tout ouvert connexe V de U

le cardinal de $\pi_0(\varphi^{-1}(V))$ est majoré par d ; par conséquent, $\varphi^{-1}(a)$ est fini de cardinal au plus égal à d .

(3.5.4.2) Soit $b \in \varphi^{-1}(a)$; soit U un voisinage ouvert de x dans X qui est un arbre et qui est tel que $\varphi^{-1}(U)$ soit une réunion disjointe d'arbres et sépare les antécédents de x . Soit W la composante connexe de $\varphi^{-1}(a(U))$ qui correspond à b . Le morphisme $V \rightarrow a(U)$ est fini et plat, et son degré ne dépend pas du choix de U : on le déduit du fait que si U' est un voisinage ouvert connexe de x dans U , alors la composante connexe de $\varphi^{-1}(a(U'))$ qui correspond à b n'est autre que $W \times_{a(U)} a(U')$. Ce degré est appelé *degré de b au-dessus de a* et est noté $\deg(b \rightarrow a)$.

(3.5.4.3) Soit y un antécédent de x . On a

$$\begin{aligned} \deg^y \varphi &= \deg(\varphi^{-1}(U)_y \rightarrow U) = \deg(\varphi^{-1}(U)_y \times_U a(U) \rightarrow a(U)) \\ &= \sum_{W \in \pi_0(f^{-1}(a(U))), W \subset \varphi^{-1}(U)_y} \deg(W \rightarrow a(U)) \\ &= \sum_{b \in \text{br}(Y, y) \cap \varphi^{-1}(a)} \deg(b \rightarrow a). \end{aligned}$$

L'exemple des fonctions non constantes

(3.5.5) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques; supposons que Y est de dimension finie d . Pour tout $x \in X$, la dimension de $\varphi^{-1}(x)$ est au plus d (on peut le vérifier après extension des scalaires, et donc supposer x rigide, auquel cas $\varphi^{-1}(x)$ est un fermé de Zariski de Y , d'où l'assertion); la dimension de φ en tout point de Y est donc majorée par d , et le lieu Z des points où elle vaut d est par conséquent un fermé de Zariski de Y . Il est purement de dimension d . En effet, il s'agit de vérifier que si $z \in Z$ alors $\dim_z Z = d$; on peut s'en assurer après extension des scalaires, et donc supposer z rigide; dans ce cas, la fibre $\varphi^{-1}(\varphi(z))$ est un fermé de Zariski de Y , qui possède par définition de Z une composante irréductible T de dimension d passant par z ; mais l'on a alors clairement $T \subset Z$ et donc $\dim_z Z = d$, d'où notre assertion.

(3.5.6) Lemme. Soit d un entier et soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques; supposons Y purement de dimension d . Soit $\{Y_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des composantes irréductibles de Y , et soit J le sous-ensemble de I formé des indices i tels que $\varphi|_{Y_i}$ soit constante. Le lieu Z des points de Y en lesquels φ est de dimension d est alors égal à $\bigcup_{i \in J} Y_i$.

Démonstration. Soit $i \in J$. Comme $\varphi|_{Y_i}$ est constante, $\varphi(Y_i)$ est égal à $\{x\}$ pour un certain point rigide x de X . L'inclusion $Y_i \subset \varphi^{-1}(x)$ implique que la dimension de φ en tout point de Y_i est minorée par d , et donc égale à d puisque $\dim Y = d$; par conséquent, $\bigcup_{i \in J} Y_i \subset Z$.

Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Comme Z est purement de dimension d (3.5.5), il est réunion de composantes irréductibles de Y ; il suffit dès lors de s'assurer que si $i \in I$ est tel que $Y_i \subset Z$ alors $i \in J$.

Soit i tel que $Y_i \subset Z$. Choisissons un polyrayon k -libre \mathbf{r} tel que $Y_{i,\mathbf{r}} = \prod_{j \neq i} Y_{j,\mathbf{r}}$ ait un point $k_{\mathbf{r}}$ -rigide y ; l'image de y sur $X_{\mathbf{r}}$ est un point $k_{\mathbf{r}}$ -rigide x ; comme $\varphi_{\mathbf{r}} : Y_{\mathbf{r}} \rightarrow X_{\mathbf{r}}$ est de dimension d en tout point de $Y_{i,\mathbf{r}}$, la fibre $\varphi_{\mathbf{r}}^{-1}(x)$ est un fermé de Zariski de $Y_{\mathbf{r}}$ qui contient y et est de dimension d en celui-ci; puisque $Y_{i,\mathbf{r}}$ est la seule composante irréductible de $Y_{\mathbf{r}}$ qui contienne y , on a $Y_{i,\mathbf{r}} \subset \varphi_{\mathbf{r}}^{-1}(x)$; autrement dit, $\varphi_{\mathbf{r}}(Y_{i,\mathbf{r}}) = \{x\}$.

Si t désigne l'image de x sur X alors $\varphi(Y_i) = \{t\}$; nous allons montrer que t est rigide, ce qui prouvera que $\varphi|_{Y_i}$ est constante et achèvera la démonstration. Si z est un antécédent de t sur $X_{\mathbf{r}}$, la fibre de $Y_{i,\mathbf{r}}$ en z est non vide; par conséquent, $z = x$. Il s'ensuit que $\mathcal{M}(\mathcal{H}(t) \widehat{\otimes}_k k_{\mathbf{r}})$ est réduit à un point; par conséquent, \mathbf{r} est $\mathcal{H}(t)$ -libre et le corps $\mathcal{H}(x)$ s'identifie alors à $\mathcal{H}(t)_{\mathbf{r}}$. Par hypothèse, $\mathcal{H}(t)_{\mathbf{r}} = \mathcal{H}(x)$ est une $k_{\mathbf{r}}$ -algèbre de Banach finie; il en découle que $\mathcal{H}(t)$ est une k -algèbre de Banach finie et le point t est bien rigide. \square

(3.5.7) Corollaire. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques; supposons Y purement de dimension d . Si x est un point non rigide de X , la dimension de $\varphi^{-1}(x)$ est strictement inférieure à d .*

Démonstration. Soit y un point de Y en lequel la dimension de φ est d . En vertu du lemme 3.5.6 ci-dessus, y est situé sur une composante irréductible Y' de Y telle que $\varphi|_{Y'}$ soit constante; par conséquent, $\varphi(y)$ est rigide, et diffère donc de x . \square

(3.5.8) Si $\varphi : Y \rightarrow X$ est un morphisme entre espaces k -analytiques et si Y est une courbe, le lemme 3.5.6 ci-dessus implique que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) φ est de dimension nulle en tout point de Y ;
- b) la restriction de φ à chacune des composantes irréductibles de Y est non constante.

Remarquons que si φ satisfait ces deux propositions alors φ est fini en tout point de Y en lequel il est intérieur, et en particulier en tout point de l'intérieur analytique de Y .

(3.5.9) Soit Y une courbe k -affinoïde et soit \mathcal{A} l'algèbre associée; nous allons montrer qu'il existe une fonction analytique $f : Y \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ qui satisfait les conditions équivalentes a) et b) du 3.5.8 ci-dessus.

Il s'agit d'exhiber une fonction $f \in \mathcal{A}$ dont la restriction à chacune des composantes irréductibles de Y soit non constante. En raisonnant composante connexe par composante connexe, on se ramène au cas où Y est connexe et non vide, et l'on distingue deux cas.

Le cas où Y est irréductible. Comme $\dim_k Y = 1$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ qui n'est pas entière sur k , et répond au problème posé.

Le cas où l'ensemble $\{Y_i\}$ des composantes irréductibles de Y comprend au moins deux éléments. On choisit alors pour tout i une fonction f_i dans \mathcal{A} dont la restriction à Y_i est génériquement inversible, et dont le lieu des zéros contient $\bigcup_{j \neq i} Y_j$; on pose $f = \sum f_i$; la définition de f assure que pour tout indice i la restriction de f à Y_i est génériquement inversible, et qu'elle s'annule au moins en un point (ceci parce que Y est connexe et possède au moins deux composantes irréductibles, ce qui garantit que Y_i rencontre Y_j pour au moins un indice $j \neq i$); par conséquent, f répond là encore au problème posé.

(3.5.10) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre courbes k -analytiques qui satisfait les conditions équivalentes a) et b) du 3.5.8 et soit y un point de Y en lequel φ est intérieur. Le morphisme de germes $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ est alors fini. Si de plus X est normale en x et Y est réduite en y , alors $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ est *plat*. Pour le voir on peut, quitte à restreindre X et Y (opération qui préserve visiblement la propriété a)), supposer que X et Y sont toutes deux affinoïdes, que Y est réduite, que X est normale et irréductible et que $Y \rightarrow X$ est fini. Si Z est une composante irréductible de Y son image sur X est un fermé de Zariski, nécessairement égal à X pour des raisons de dimension. Soit \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) l'algèbre des fonctions analytiques sur X (resp. Y).

L'anneau \mathcal{A} est intègre, noethérien, normal et de dimension de Krull au plus égale à 1. Le schéma \mathcal{B} est réduit, et chaque composante irréductible de $\text{Spec } \mathcal{B}$ se surjecte sur $\text{Spec } \mathcal{A}$. Il s'ensuit que si f est un élément non nul de \mathcal{A} alors f n'est pas un diviseur de zéro dans \mathcal{B} ; par conséquent, \mathcal{B} est \mathcal{A} -plat, ce qui prouve notre assertion.

(3.5.11) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre courbes k -analytiques, soit $y \in Y$ et soit x son image sur X ; on suppose que x n'est pas rigide. La dimension de φ en y est alors nulle d'après le corollaire 3.5.7. On suppose de plus que φ est intérieur en y , et que X est réduite en x .

(3.5.11.1) Le morphisme fini de germes $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ est alors plat : en effet, comme X est réduite et x non rigide, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps, et $\mathcal{O}_{Y,y}$ est dès lors un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module plat.

(3.5.11.2) Supposons de plus que Y est réduite en y ; comme y n'est pas rigide, l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un corps; par conséquent, Y est normale en y , et X est normale en x pour le même motif. Il existe donc un voisinage affinoïde connexe et normal W de y dans Y , et un voisinage affinoïde connexe et normal V de x dans X , tels que φ induise un morphisme fini et plat $W \rightarrow V$; soient \mathcal{A} et \mathcal{B} les algèbres de fonctions respectives de V et W ; elles sont intègres, $\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$ est fini et dominant, et y et x sont situés au-dessus des points génériques respectifs de $\text{Spec } \mathcal{B}$ et $\text{Spec } \mathcal{A}$.

Le dévissage de l'extension $\kappa(\text{Spec } \mathcal{A}) \hookrightarrow \kappa(\text{Spec } \mathcal{B})$ en ses parties séparables et radicielles induit un dévissage analogue de $\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$ au-dessus d'un ouvert non vide \mathcal{U} de $\text{Spec } \mathcal{A}$; soit V' un voisinage affinoïde connexe de x dans \mathcal{U}^{an} et soit W' la composante connexe de y dans $W \times_V V'$. Par construction, $W' \rightarrow V'$ admet une factorisation $W' \rightarrow Z \rightarrow V'$ où $W' \rightarrow Z$ est fini, plat et radiciel, où Z est connexe et où $Z \rightarrow V'$ est fini étale.

(3.5.12) Si $\varphi : Y \rightarrow X$ est un morphisme fini entre courbes k -analytiques et si X est normale, alors φ est ouvert. En effet, comme la question est purement topologique, on peut remplacer Y par Y_{red} et donc supposer que Y est réduite; mais en vertu du 3.5.10 ci-dessus, $Y \rightarrow X$ est alors plat, et partant ouvert.

3.6 Disques et couronnes déployés et virtuels

Disques et couronnes plongés

(3.6.1) Si I est un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times , nous noterons \mathbb{D}_I le domaine analytique de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par la condition $|T| \in I$. Il résulte de 3.4.22

que l'application $r \mapsto \eta_r$ induit un homéomorphisme entre I et un intervalle admissible η_I de \mathbb{D}_I , et que la rétraction canonique de \mathbb{D}_I vers η_I est donnée par la formule $x \mapsto \eta_{|T(x)|}$; en particulier, \mathbb{D}_I est connexe et non vide.

Si I est ouvert dans \mathbb{R} alors $\eta_I = S(\mathbb{D}_I)$, et le domaine \mathbb{D}_I est affinoïde si et seulement si I est compact. Comme $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ est lisse, \mathbb{D}_I est quasi-lisse. Si $r \in \mathbb{R}_+^\times$ nous écrirons \mathbb{D}_r au lieu de $\mathbb{D}_{\{r\}}$. Si L est une extension complète de k , nous utiliserons les notations $\mathbb{D}_{I,L}$, $\mathbb{D}_{r,L}$ et $\eta_{I,L}$ dans un sens évident. Pour toute extension complète L de k , l'espace L -analytique $\mathbb{D}_{I,L}$ est connexe; par conséquent, \mathbb{D}_I est géométriquement connexe.

(3.6.2) Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times et soit L une extension complète de k . Il résulte des définitions que la flèche $\mathbb{D}_{I,L} \rightarrow \mathbb{D}_I$ induit un homéomorphisme $\eta_{I,L} \simeq \eta_I$, et que $\mathbb{D}_{I,L} \rightarrow \mathbb{D}_I$ commute aux retractions canoniques de $\mathbb{D}_{I,L}$ sur $\eta_{I,L}$ et de \mathbb{D}_I sur η_I .

Par ailleurs, le point $\eta_{r,\widehat{k^a}}$ de $\mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ est par sa définition même invariant sous l'action de Galois; il s'ensuit que si L est une extension presque algébrique de k , l'image réciproque de η_I sur $\mathbb{D}_{I,L}$ est exactement $\eta_{I,L}$.

(3.6.3) Si I est un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times , l'anneau k_I des fonctions analytiques sur \mathbb{D}_I s'identifie à la k -algèbre des séries $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i$ telles que $|a_i| r^i$ tende vers zéro lorsque $|i|$ tend vers l'infini pour tout $r \in I \setminus \{0\}$ et telles que $a_i = 0$ pour tout $i < 0$ si $0 \in I$.

(3.6.4) Soit $r \in \mathbb{R}_+^\times$ et soit $s > r$. Nous allons décrire les bords de Shilov des espaces k -affinoïdes $k_{[0;r]}$, k_r et $k_{[r;s]}$ ainsi que les annéloïdes résiduels de leurs algèbres de fonctions.

(3.6.4.1) Soit $f = \sum a_i T^i$ une fonction analytique sur $\mathbb{D}_{[0;r]}$; pour tout x appartenant $\mathbb{D}_{[0;r]}$, on a

$$|f(x)| \leq \max |a_i| \cdot r^i = |f(\eta_r)|;$$

par conséquent, le bord de Shilov de $\mathbb{D}_{[0;r]}$ est le singleton $\{\eta_r\}$.

La (semi-) norme spectrale de l'algèbre affinoïde $k_{[0;r]}$ est donc égale à $\sum a_i T^i \mapsto \max |a_i| r^i$. En vertu de 2.2.45.5 et par densité de $k[T]$ dans $k_{[0;r]}$, il s'ensuit que $\tau \mapsto \widetilde{T}$ induit un isomorphisme $\widetilde{k}[r^{-1}\tau] \simeq \widetilde{k}_{[0;r]}$.

(3.6.4.2) Soit $f = \sum a_i T^i$ une fonction analytique sur \mathbb{D}_r ; pour tout x appartenant \mathbb{D}_r , on a

$$|f(x)| \leq \max |a_i| \cdot r^i = |f(\eta_r)|;$$

par conséquent, le bord de Shilov de \mathbb{D}_r est le singleton $\{\eta_r\}$.

La (semi-) norme spectrale de l'algèbre affinoïde k_r est donc égale à $\sum a_i T^i \mapsto \max |a_i| r^i$. En vertu de 2.2.45.6 et par densité de $k[T, T^{-1}]$ dans k_r , il s'ensuit que $\tau \mapsto \widetilde{T}$ induit un isomorphisme $\widetilde{k}[r^{-1}\tau, r\tau^{-1}] \simeq k_r$.

(3.6.4.3) Soit $f = \sum a_i T^i$ une fonction analytique sur $\mathbb{D}_{[r;s]}$; pour tout x appartenant $\mathbb{D}_{[r;s]}$, on a

$$|f(x)| \leq \max\{|a_i| \cdot r^i, |a_i| \cdot s^i\}_i = \max(|f(\eta_r)|, |f(\eta_s)|);$$

par conséquent, le bord de Shilov de $\mathbb{D}_{[r;s]}$ est contenu dans $\{\eta_r, \eta_s\}$. Comme $|T(\eta_r)| < |T(\eta_s)|$ et $|T^{-1}(\eta_r)| > |T^{-1}(\eta_s)|$, ce bord de Shilov est en fait *exactement égal* à la paire $\{\eta_r, \eta_s\}$.

La (semi-) norme spectrale de l'algèbre affinoïde $k_{[0;r]}$ est donc égale à $\sum a_i T^i \mapsto \max\{|a_i|r^i, |a_i|s^i\}_i$. En vertu de 2.2.45.6 et et par densité de $k[T, T^{-1}]$ dans $k_{[r;s]}$, il s'ensuit que $\tau \mapsto \widetilde{T}, \sigma \mapsto \widetilde{T}^{-1}$ induit un isomorphisme $\widetilde{k}[r^{-1}\tau, s\sigma^{-1}]/\sigma\tau \simeq \widetilde{k}_{[r;s]}$.

(3.6.5) Soit $r \in \mathbb{R}_+^\times$ et soit f une fonction analytique non nulle sur \mathbb{D}_r ; écrivons $f = \sum a_i T^i$, et notons \mathcal{E} l'ensemble fini et non vide des indices $j \in \mathbb{Z}$ tels que $|a_j|r^j = \max_i |a_i|r^i$.

(3.6.5.1) Supposons que l'ensemble \mathcal{E} soit un singleton $\{j\}$; on a alors $a_j \neq 0$ et $f = a_j T^j(1 + u)$, où u appartient à l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_r}(\mathbb{D}_r)^{\circ\circ}$ formé des fonctions analytiques sur \mathbb{D}_r dont la norme est strictement majorée par 1 en tout point de \mathbb{D}_r ; par conséquent, f est inversible.

(3.6.5.2) Réciproquement, supposons que f est inversible, et montrons que \mathcal{E} est un singleton. Le bord de Shilov de \mathbb{D}_r étant un singleton, la valeur absolue de la fonction inversible f est constante sur \mathbb{D}_r . Il s'ensuit que \widetilde{f} ne s'annule pas sur $\widetilde{\mathbb{D}_r}$; par conséquent, \widetilde{f} est un élément inversible de la \widetilde{k} -algèbre \widetilde{k}_r . Or on a vu au 3.6.4.3 que \widetilde{T} est transcendant sur \widetilde{k} et que $\widetilde{k}_r = \widetilde{k}[\widetilde{T}, \widetilde{T}^{-1}]$. On en déduit que \widetilde{f} est de la forme $\widetilde{a}\widetilde{T}^j$ pour un certain $a \in k^\times$ et un certain $j \in \mathbb{Z}$; mais la définition de la flèche $g \mapsto \widetilde{g}$ assure alors que $\mathcal{E} = \{j\}$.

(3.6.5.3) En général, le lieu des zéros de f sur \mathbb{D}_r est un ensemble fini de points rigides. On peut donc écrire $f = gh$, où g est une fonction inversible et où h est un polynôme unitaire en T dont toutes les racines dans $\widehat{k^a}$ sont de valeur absolue égale à r .

Si d est le degré de h alors $d = \max \mathcal{E} - \min \mathcal{E}$. Pour le voir, on peut étendre les scalaires et donc supposer h de la forme $\prod(T - \alpha_\ell)$ où les α_ℓ sont des éléments de k de valeur absolue égale à r . Écrivons $g = \sum b_i T^i$; comme g est inversible, il résulte de 3.6.5.2 qu'il existe un unique indice j tel que $|b_j|r^j = \max |b_i|r^i$; un calcul immédiat montre alors que \mathcal{E} contient j et $j + d$, et est contenu dans $\{j, j + 1, \dots, j + d\}$, d'où notre assertion. Remarquons que celle-ci entraîne que k_r/f est une k -algèbre finie de dimension $\max \mathcal{E} - \min \mathcal{E}$.

(3.6.6) Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times , et soit $f = \sum a_i T^i$ un élément de k_I .

(3.6.6.1) Si $0 \notin I$, il résulte de 3.6.5.1 et de 3.6.5.2 que f est inversible si et seulement si pour tout $r \in I$ il existe un unique entier $j(r)$ tel que

$$|a_{j(r)}|r^{j(r)} = \max |a_i|r^i.$$

Si c'est le cas, la fonction $r \mapsto j(r)$ est localement constante, et partant constante sur I . Il s'ensuit que f est inversible si et seulement si il existe un entier j (nécessairement unique) tel que $|a_j|r^j > \max |a_i|r^i$ pour tout $i \neq j$ et pour tout $r \in I$.

(3.6.6.2) Si $0 \in I$, il résulte du 3.6.6.1 que f est inversible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i) $a_0 = f(0) \neq 0$;
- ii) il existe un entier j (nécessairement unique) tel que $|a_j|r^j > |a_i|r^i$ pour tout $r \in I \setminus \{0\}$ et pour tout $i \neq j$.

L'unique entier j de la condition ii) ne peut, compte-tenu de i), être égal qu'à 0. Par conséquent, f est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$ et $|a_i|r^i < |a_0|$ pour tout $r \in I$ et tout $i > 0$; si c'est le cas, la norme de f est identiquement égale à $|a_0|$ sur \mathbb{D}_I .

(3.6.7) Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times . Il découle du 3.6.6.2 ci-dessus que si $0 \in I$ et si f est une fonction inversible sur \mathbb{D}_I , il existe un scalaire $a \neq 0$ tel que $|f - a| < |a|$ en tout point de \mathbb{D}_I ; cette propriété est prise en défaut si $0 \notin I$, la fonction T constituant un contre-exemple. Il s'ensuit que si I et J sont deux intervalles de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times et si $\mathbb{D}_I \simeq \mathbb{D}_J$ alors I et J ou bien contiennent tous deux 0 ou bien sont tous deux contenus dans \mathbb{R}_+^\times .

(3.6.8) Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times , et soit $f = \sum a_i T^i$ un élément de k_I . On note φ le morphisme $\mathbb{D}_I \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ induit par f . On suppose qu'il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ (nécessairement unique) tel que $|a_j|r^j > |a_i|r^i$ pour tout $r \in I \setminus \{0\}$ et tout $i \neq j$; cela équivaut à dire, en vertu de 3.6.6.1, que f ne s'annule pas sauf peut-être à l'origine si $0 \in I$; nous dirons que $a_j T^j$ est le *monôme strictement dominant* de f . On note Λ l'application de \mathbb{R}_+ dans lui-même qui envoie r sur $|a_j|r^j$.

Si $0 \in I$, notre hypothèse force j à être égal à la valuation T -adique de la série f de $k_I \subset k[[T]]$. On peut donc écrire dans tous les cas (que 0 appartienne ou non à I) la fonction f comme un produit $a_j T^j (1 + u)$ où u est une fonction analytique sur \mathbb{D}_I telle que $|u(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{D}_I$.

Notons deux conséquences de cette égalité : si $y \in \mathbb{D}_I$ et si $x = \varphi(y)$ alors $|T(x)| = |a_j| \cdot |T(y)|^j = \Lambda(|T(y)|)$, et l'élément $\widetilde{f}(y)$ de $\widetilde{\mathcal{H}}(y)$ est égal à $\widetilde{a}_j (\widetilde{T}(y))^j$.

On suppose de plus que $j \neq 0$. L'application continue Λ induit alors un homéomorphisme de I sur un intervalle J de \mathbb{R}_+ , et l'on peut voir φ , ce que nous faisons à partir de maintenant, comme un morphisme de \mathbb{D}_I vers \mathbb{D}_J . Nous allons montrer : que φ est fini et plat de degré $|j|$; que $\varphi^{-1}(\eta_J) = \eta_I$; que $\varphi(\eta_r) = \eta_{\Lambda(r)}$ pour tout $r \in I$; et que $\mathcal{H}(\eta_r)/\mathcal{H}(\varphi(\eta_r))$ est sans défaut pour tout $r \in I$.

(3.6.8.1) *Le morphisme φ est compact.* Cela résulte du fait que si J' est un intervalle compact contenu dans J alors $\varphi^{-1}(\mathbb{D}_{J'}) = \mathbb{D}_{\Lambda^{-1}(J')}$.

(3.6.8.2) *Le morphisme φ est sans bord.* Soit $y \in \mathbb{D}_I$; posons $r = |T(y)|$ et $x = \varphi(y)$. Si $r = 0$ ou si r n'est pas une extrémité de I , alors y appartient à l'intérieur analytique de \mathbb{D}_I et φ est par conséquent intérieur en y .

Supposons maintenant que r soit non nul et soit une extrémité de I . Quitte à composer à la source par l'isomorphisme $\mathbb{D}_{I^{-1}} \simeq \mathbb{D}_I$ donné par $T \mapsto T^{-1}$, on peut supposer que r est le plus grand élément de I ; quitte à composer au but par l'isomorphisme $\mathbb{D}_J \simeq \mathbb{D}_{J^{-1}}$ donné par $T \mapsto T^{-1}$, on peut supposer que $j > 0$.

Comme (\mathbb{D}_I, y) est le domaine analytique du germe sans bord $(\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}, y)$ défini par l'inégalité $|T| \leq r = |T(y)|$, la réduction $(\widetilde{\mathbb{D}_I}, y)$ est l'ouvert $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}(y)/\widetilde{k}}\{\widetilde{T}(y)\}$. Comme $\Lambda(r)$ est le plus grand élément de J (puisque l'on a supposé $j > 0$),

on voit de même que la réduction (\mathbb{D}_J, x) est l'ouvert $\mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}\{\widetilde{T(x)}\}$. Par la forme même de f , le plongement de $\mathcal{H}(x)$ dans $\mathcal{H}(y)$ induit par φ envoi $\widetilde{T(x)}$ sur $\widetilde{a_j(T(y))^j}$. L'entier j étant strictement positif, l'image réciproque de $(\mathbb{D}_J, x) = \mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}\{\widetilde{T(x)}\}$ sur $\mathbb{P}_{\mathcal{H}(y)/\tilde{k}}$ est égale à $\mathbb{P}_{\mathcal{H}(y)/\tilde{k}}\{\widetilde{T(y)}\}$, c'est-à-dire à (\mathbb{D}_I, y) ; il s'ensuit que φ est intérieur en y .

(3.6.8.3) *Description des fibres de φ .* Soit $x \in \mathbb{D}_I$; nous allons montrer que $\varphi^{-1}(x)$ est de la forme $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ où \mathcal{A} est une k -algèbre de Banach finie de rang $|j|$.

Prouvons-le tout d'abord lorsque x est k -rationnel. Il est alors donné par une équation de la forme $T = \alpha$, où α est un élément de k tel que $|\alpha| \in J$. Posons $r = \Lambda^{-1}(\alpha)$. La fibre $\varphi^{-1}(x)$ est le lieu des zéros de $f - \alpha$.

Si $\alpha = 0$ on a $0 \in J$ et donc $0 \in I$; l'entier j est alors strictement positif et la fonction f est, comme on l'a vu, égale à $T^j g$ où g est une fonction inversible sur \mathbb{D}_J . Il s'ensuit que la fibre $\varphi^{-1}(0)$ est, en tant qu'ensemble, égale à $\{0\}$; en tant qu'espace analytique, elle s'identifie par conséquent à $\mathcal{M}(k_{[0;s]}/T^j g)$ pour n'importe quel réel s de $I \setminus \{0\}$, et donc à $\mathcal{M}(k[T]/T^j)$, d'où notre assertion.

Si $\alpha \neq 0$ la fibre $\varphi^{-1}(x)$ est contenue dans \mathbb{D}_r et s'identifie dès lors à $\mathcal{M}(k_r/(f - \alpha))$. On peut écrire $f - \alpha = \sum b_i T^i$, où $b_i = a_i$ si $i \neq 0$ et $b_0 = a_0 - \alpha$; on a $|b_j| r^j = |b_0| = |\alpha|$ et $|b_i| r^i < |\alpha|$ pour tout $i \notin \{0, j\}$. On déduit alors de 3.6.5.3 que $k_r/(f - \alpha)$ est une k -algèbre de Banach finie de rang $|j|$, ce qui prouve là encore notre assertion.

Supposons maintenant x quelconque. Il existe une extension complète L de k telle que x ait un antécédent L -rationnel x' sur $\mathbb{D}_{J,L}$. Il résulte de ce qui précède que $\varphi_L^{-1}(x')$ est compacte et de dimension nulle; la fibre $\varphi^{-1}(x)$ hérite de ces propriétés, ce qui revient à dire qu'elle est de la forme $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ où \mathcal{A} est une k -algèbre de Banach finie. On a dès lors $\varphi_L^{-1}(x') \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A} \otimes_k L)$; comme le rang du L -espace vectoriel $\mathcal{A} \otimes_k L$ est égal à $|j|$ en vertu du cas particulier déjà traité, le rang du k -espace vectoriel \mathcal{A} est égal à $|j|$, ce qui achève la démonstration.

(3.6.8.4) *Le morphisme φ est fini et plat de degré $|j|$.* La flèche φ est compacte et sans bord, c'est-à-dire propre; étant de surcroît à fibres finies, elle est finie (3.2.2); comme \mathbb{D}_I est réduit et comme \mathbb{D}_J est normal, φ est plate (3.5.10); on déduit alors de l'étude des fibres menée ci-dessus que $\deg \varphi = |j|$.

(3.6.8.5) *Image réciproque de η_J et étude de $\varphi(\eta_r)$.* Si $0 \in J$ on a vu ci-dessus que la fibre $\varphi^{-1}(\eta_0) = \varphi^{-1}(0)$ est réduite à $\{0\} = \{\eta_0\}$; il découle des égalités $\mathcal{H}(\eta_0) = \mathcal{H}(\varphi(\eta_0)) = k$ que l'extension $\mathcal{H}(\eta_0)/\mathcal{H}(\varphi(\eta_0))$ est triviale, et en particulier sans défaut.

Soit maintenant r un élément de $I \setminus \{0\}$. Posons $y = \eta_r$ et $x = \varphi(y)$; on a vu en début de preuve que $|T(x)| = \Lambda(|T(y)|) = \Lambda(r)$.

L'élément $\widetilde{T(y)}$ de $\mathcal{H}(y)$ est transcendant sur \tilde{k} ; par conséquent, $\widetilde{a_j(T(y))^j}$ est transcendant sur \tilde{k} (l'entier j est non nul), ce qui implique que $x = \eta_{\Lambda(r)}$.

Le plongement $\mathcal{H}(x) \hookrightarrow \mathcal{H}(y)$ induit par φ envoi $\widetilde{T(x)}$ sur $\widetilde{a_j(T(y))^j}$. L'élément $\tau^j - \widetilde{T(x)}/\widetilde{a_j}$ de $\mathcal{H}(x)[r^{-1}\tau]$ est irréductible, par exemple par l'avatar gradué du critère d'Eisenstein qui vaut pour l'annéloïde principal $\tilde{k}[\widetilde{T(x)}]$. Le

degré de $\widetilde{\mathcal{H}(y)}$ sur $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ vaut donc $|j|$; par conséquent, le degré de $\mathcal{H}(y)$ sur $\mathcal{H}(x)$ est au moins égal à $|j|$; il est par ailleurs au plus égal à $|j|$ puisque φ est de degré j .

On a donc $[\widetilde{\mathcal{H}(y)} : \widetilde{\mathcal{H}(x)}] = |j| = \deg \varphi$, ce qui implique que y est l'unique antécédent de x ; puisque $[\mathcal{H}(y) : \mathcal{H}(x)] = |j|$, l'extension $\mathcal{H}(y)/\mathcal{H}(x)$ est sans défaut.

On a bien établi que $\varphi^{-1}(\eta_J) = \eta_I$, que $\varphi(\eta_r) = \eta_{\Lambda(r)}$ pour tout $r \in I$, et que $\mathcal{H}(\eta_r)/\mathcal{H}(\varphi(\eta_r))$ est sans défaut pour tout $r \in I$.

(3.6.9) Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times et soit $f = \sum a_i T^i$ une fonction appartenant à k_I ; supposons que le monôme a_0 de f soit strictement dominant. La fonction f peut alors s'écrire $a_0(1+u)$, où $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\circ$. Si φ désigne le morphisme de \mathbb{D}_I vers $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ induit par f , il résulte de l'écriture de f que $|f| = |a_0|$ identiquement sur \mathbb{D}_I , et que $\varphi(\mathbb{D}_I)$ est contenu dans le disque de centre a_0 et de rayon $|a_0|$; par conséquent, $\varphi(\mathbb{D}_I)$ ne rencontre pas $\eta_{[0;+\infty[}$.

(3.6.10) Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times ; on dira qu'une fonction analytique $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)$ est une *fonction coordonnée* sur \mathbb{D}_I si et seulement si elle induit un isomorphisme $\mathbb{D}_I \simeq \mathbb{D}_J$ pour un certain intervalle J de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times .

(3.6.11) Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R}_+^\times et soit J un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times ; soit $f = \sum a_i T^i$ un élément de k_I et soit $\varphi : \mathbb{D}_I \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ le morphisme induit par f .

(3.6.11.1) Supposons qu'il existe $j \in \{-1, 1\}$ tel que le monôme $a_j T^j$ de f soit strictement dominant, et que $J = |a_j|.I^j$ (ce qui implique que $0 \notin J$); dans ce cas, il résulte de 3.6.8 que φ induit un morphisme fini et plat de degré 1, c'est-à-dire un isomorphisme, entre \mathbb{D}_I et \mathbb{D}_J .

(3.6.11.2) Réciproquement, supposons que φ induise un isomorphisme entre \mathbb{D}_I et \mathbb{D}_J . Dans ce cas 0 n'appartient pas à J (3.6.7), et f est donc inversible. Par conséquent, elle possède un monôme strictement dominant $a_j T^j$. L'entier j ne peut être nul, car sinon $\varphi(\mathbb{D}_I)$ ne rencontrerait pas η_J (3.6.9), contredisant par là la surjectivité de φ ; par conséquent, φ induit un morphisme fini et plat de degré $|j|$ de \mathbb{D}_I sur $\mathbb{D}_{|a_j|.I^j}$ (3.6.8); il s'ensuit que $|j| = 1$, que $J = |a_j|.I^j$, et que φ induit l'homéomorphisme $\eta_r \mapsto \eta_{|a_j|.r}$ de η_I vers η_J .

(3.6.11.3) Ainsi, f est une fonction coordonnée sur \mathbb{D}_I si et seulement si $a_j T^j$ est strictement dominant pour un certain $j \in \{1, -1\}$. Si c'est le cas, f induit un isomorphisme $\mathbb{D}_I \simeq \mathbb{D}_{|a_j|.I^j}$; si de plus I est infini, et si l'on oriente $\eta_I = \{\eta_r\}_{r \in I}$ dans le sens où r croît, alors $j = 1$ (resp. $j = -1$) si et seulement si $|f|_{\eta_I}$ est croissante (resp. décroissante).

(3.6.12) Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ contenant 0 et rencontrant \mathbb{R}_+^\times , et soit J un intervalle de \mathbb{R}_+ rencontrant \mathbb{R}_+^\times .

(3.6.12.1) Soit $f = \sum a_i T^i$ un élément de k_I . Supposons que le monôme $a_1 T$ de f soit strictement dominant et que $J = |a_1|.I$ (ce qui implique que $0 \in J$); soit a un élément de k dont la valeur absolue appartient à J . Il résulte de 3.6.8 que f induit un morphisme fini et plat de degré 1, c'est-à-dire un isomorphisme, entre \mathbb{D}_I et \mathbb{D}_J . La translation par a définissant un automorphisme de \mathbb{D}_J , la fonction $f + a$ induit un isomorphisme entre \mathbb{D}_I et \mathbb{D}_J .

(3.6.12.2) Réciproquement, soit $g \in k_I$ induisant un isomorphisme ψ entre \mathbb{D}_I et \mathbb{D}_J ; l'existence même de g force J à contenir 0 (3.6.7). L'image de l'origine par φ est un point k -rationnel de \mathbb{D}_J , c'est-à-dire un élément $a \in k$ tel que $|a| \in J$. La translation par $(-a)$ définissant un automorphisme de \mathbb{D}_J , sa composée avec ψ est un isomorphisme $\varphi : \mathbb{D}_I \rightarrow \mathbb{D}_J$ qui est induit par $f := g - a$ et qui envoie l'origine sur l'origine; par conséquent, $f(0) = 0$, et l'injectivité (ensembliste) de φ implique que f est inversible sur $\mathbb{D}_I \setminus \{0\}$. On en déduit que f possède un monôme strictement dominant $a_j T^j$ avec $j > 0$; en vertu de 3.6.8, la fonction f induit un morphisme fini et plat de degré j de \mathbb{D}_I sur $\mathbb{D}_{|a_j|I^j}$; comme φ est un isomorphisme, $j = 1$ et $J = |a_1|I$.

(3.6.12.3) Ainsi, une fonction g sur \mathbb{D}_I est une fonction coordonnée si et seulement si elle est de la forme $a + f$ où $f = \sum a_i T^i$ est une fonction dont le monôme $a_1 T$ est strictement dominant et où a est un scalaire tel que $|a| \in |a_1|I$, et si c'est le cas g induit un isomorphisme $\mathbb{D}_I \simeq \mathbb{D}_{|a_1|I}$.

(3.6.13) Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R}_+^\times . On a vu au 3.6.6.1 que si f est une fonction analytique sur \mathbb{D}_I , elle est inversible si et seulement si elle possède un monôme strictement dominant $a_j T^j$ (3.6.8). Si c'est le cas, elle s'écrit $a_j T^j (1 + u)$, où $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^{\circ\circ}$, et la fonction continue $|f|$ sur \mathbb{D}_I est égale à $|a_j| \cdot |T|^j$.

(3.6.13.1) Posons $\mathcal{Z}_I = \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\times / k^\times \cdot (1 + \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^{\circ\circ})$. On déduit de 3.6.13 que l'application qui envoie une fonction inversible sur le degré de son monôme quasi-dominant induit un isomorphisme de groupes $\mathcal{Z}_I \simeq \mathbb{Z}$; en vertu de 3.6.11.3, une fonction analytique f sur \mathbb{D}_I en est une fonction coordonnée si et seulement si elle est inversible et s'envoie sur un générateur de \mathcal{Z}_I .

Soit J un intervalle non vide de I . Il résulte des définitions que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_I & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z}_J & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \end{array}$$

est commutatif; en particulier, $\mathcal{Z}_I \rightarrow \mathcal{Z}_J$ est un isomorphisme.

Notons deux conséquences de ce qui précède :

- la restriction induit également un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\times / (1 + \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^{\circ\circ}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{D}_J}(\mathbb{D}_J)^\times / (1 + \mathcal{O}_{\mathbb{D}_J}(\mathbb{D}_J)^{\circ\circ});$$

- si $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\times$ alors f est une fonction coordonnée sur \mathbb{D}_I si et seulement si $f|_{\mathbb{D}_J}$ est une fonction coordonnée sur \mathbb{D}_J .

(3.6.13.2) Soit φ un automorphisme de \mathbb{D}_I au-dessus d'un automorphisme g de k qui n'est pas nécessairement trivial. L'automorphisme φ agit sur le groupe \mathcal{Z}_I par multiplication par un certain $\varepsilon \in \{-1, 1\}$; on dira que φ est *direct* (resp. *indirect*) si $\varepsilon = 1$ (resp. -1).

La fonction $\varphi^* T$ est de la forme $a T^\varepsilon (1 + u)$ avec $a \in k^\times$ et $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^{\circ\circ}$. L'automorphisme φ se décompose sous la forme $\mathbb{D}_I \xrightarrow{\psi} \mathbb{D}_I \xrightarrow{\pi} \mathbb{D}_I$, où π est le morphisme de changement de base associé à l'automorphisme g de k et où ψ est un k -automorphisme, induit par la fonction coordonnée $a T^\varepsilon (1 + u)$.

La flèche π fixe η_I point par point (3.6.2), et ψ induit un automorphisme de η_I qui est nécessairement de la forme $\eta_r \mapsto \eta_{|a|.r^\varepsilon}$ (3.6.11 et sq.). Par conséquent, $\varphi(\eta_I) = \eta_I$ et l'homéomorphisme de η_I induit par φ est égal à $\eta_r \mapsto \eta_{|a|.r^\varepsilon}$. Il s'ensuit :

- que si I est infini alors φ est direct si et seulement si il préserve les deux orientations de η_I (cette condition est automatiquement satisfaite si I est semi-ouvert) ;
- que si φ est direct alors $|a|.I = I$, ce qui entraîne que $|a| = 1$ (et donc que φ fixe η_I point par point) sauf éventuellement si $I = \mathbb{R}_+^\times$;
- que si φ est direct et si φ appartient à un groupe compact d'automorphismes agissant sur \mathbb{D}_I , alors φ fixe η_I point par point (et ce, même si I est égal à \mathbb{R}_+^\times) : pour le voir, on remarque que sous notre hypothèse, l'ensemble $\{\varphi^n(\eta_r)\}_n = \{\eta_{|a|^{n_r}}\}_n$ est contenu dans un compact de \mathbb{D}_I , ce qui signifie que $\{|a|^{n_r}\}_r$ est contenu dans un compact de \mathbb{R}_+^\times , et donc que $|a| = 1$.

(3.6.13.3) Remarque. Si I est ou bien infini, ou bien de la forme $\{r\}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$, l'application qui envoie une fonction inversible f sur $|f|$ induit, en vertu de l'expression de $|f|$ donnée au 3.6.13, un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\times / (1 + \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^{\circ\circ}) \simeq |\mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\times|.$$

On peut dès lors, au 3.6.13.1, remplacer $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\times / (1 + \mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^{\circ\circ})$ par $|\mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\times|$ et \mathcal{Z}_I par $|\mathcal{O}_{\mathbb{D}_I}(\mathbb{D}_I)^\times|/|k^\times|$, et de même concernant J s'il est lui aussi de la forme requise.

(3.6.14) Soit X une courbe k -analytique et soit U un ouvert de X qui est isomorphe à \mathbb{D}_I pour un certain intervalle ouvert non vide I de \mathbb{R}_+^\times . Soit x un point de ∂U soit ω un bout de U convergeant vers x (il peut arriver que les deux bouts de U convergent vers x , et $S(\overline{U})$ est alors un cercle, cf. 1.7.18.2). Soit r la borne de I correspondant à ω . Nous allons établir les faits suivants.

a) Le point x est k -rationnel si $r \in \{0, +\infty\}$, de type 2 si $r \in \sqrt{|k^\times|}$, et de type 3 si $r \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$.

b) Si x est de type 2 ou 3 alors $|\mathcal{H}(x)^\times| \subset |k^\times|.r^{\mathbb{Z}}$, et X est quasi-lisse en x .

Pour ce faire, on peut toujours supposer (quitte à composer par $T \mapsto T^{-1}$) que r est la borne supérieure de I ; on fixe un isomorphisme entre U et $\mathbb{D}_{]r_0;r[}$ pour un certain $r_0 \in [0; +\infty[$.

(3.6.14.1) Une première remarque. Soit f une fonction définie sur un voisinage V de x et inversible sur $V \setminus \{x\}$. Il existe $s \in]r_0;r[$ tel que l'intersection de V avec $U = \mathbb{D}_{]r_0;r[}$ contienne $\mathbb{D}_{]s;r[}$. La restriction de f à $\mathbb{D}_{]s;r[}$ est inversible ; elle s'écrit donc, en vertu de 3.6.6.1, $a_i T^i + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{i\}} a_j T^j$ pour un certain $i \in \mathbb{Z}$,

avec $a_i \neq 0$ et $|a_j|t^j < |a_i|t^i$ pour tout $j \neq i$ et tout $t \in]s;r[$. On a alors $|f| = |a_i|.|T|^i$ sur $\mathbb{D}_{]s;r[}$; par passage à la limite, $|f(x)| = |a_i|.r^i$. Nous dirons que $a_i T^i$ est le monôme strictement dominant de f le long de ω .

(3.6.14.2) Si x est de type 1 ou 4, il est k -rationnel. Comme x est de type 1 ou 4, toute fonction inversible au voisinage de x est de norme constante au voisinage de x , et a donc un monôme strictement dominant le long de ω qui est de degré nul.

Soit $\lambda \in \kappa(x)^\times$ et soit f une fonction définie et inversible au voisinage de x telle que $f(x) = \lambda$; par ce qui précède, son monôme strictement dominant le long de ω est de la forme a avec $a \in k$.

Si $f - a$ était inversible en x , son monôme strictement dominant le long de ω serait par construction non nul, ce qui est contradictoire; par conséquent, $\lambda = f(x) = a$ et $\kappa(x) = k$.

(3.6.14.3) *Le cas où x est k -rationnel, de type 2 ou de type 3.* Nous allons tout d'abord nous donner une fonction f définie sur un voisinage ouvert V de x et inversible sur $V \setminus \{x\}$, par un procédé dépendant du type de x .

Le cas où x est k -rationnel. Choisissons un voisinage affinoïde W de x dans X , soit \mathcal{A} l'algèbre des fonctions analytiques sur W , et soit \mathbf{x} le point fermé de $\text{Spec } \mathcal{A}$ correspondant à x . Il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que \mathbf{x} soit un point isolé du lieu des zéros (ensembliste) de f sur $\text{Spec } \mathcal{A}$; par conséquent, $f(x) = 0$ et il existe un voisinage ouvert V de x dans X contenu dans W et tel que f soit inversible sur $V \setminus \{x\}$.

Le cas où x est de type 2. On choisit f de sorte que $f(x) \notin k$.

Le cas où x est de type 3. On choisit f de sorte que $|f(x)| \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$.

On note aT^i le monôme strictement dominant de f le long de ω .

Supposons que x est k -rationnel. On a alors $0 = |f(x)| = |a|.r^i$, ce qui entraîne que $r = +\infty$ (et que $i < 0$).

Supposons que x est de type 2. Si $i = 0$ alors comme $f(x) \notin k$, la fonction $f - a$ est inversible au voisinage de x , et si bT^j désigne son monôme strictement dominant on a nécessairement $j \neq 0$; en remplaçant f par $f - a$, on se ramène au cas où $i \neq 0$.

On a $|f(x)| = |a|.r^i$. Comme x est de type 2, on a $|f(x)| \in \sqrt{|k^\times|}$; il s'ensuit, i étant non nul, que $r \in \sqrt{|k^\times|}$.

Supposons que x est de type 3. On a alors d'une part $|f(x)| \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$, et d'autre part $|f(x)| = |a|.r^i$. Par conséquent, $r \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$ (et $i \neq 0$).

(3.6.14.4) *Supposons maintenant que $x \in X_{[2,3]}$.* Si f est une fonction inversible au voisinage de x , il résulte de 3.6.14.1 que $|f(x)| = |a|.r^i$ pour un certain $a \in k^\times$ et un certain $i \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, $|\mathcal{H}(x)^\times| \subset |k^\times|.r^\mathbb{Z}$.

Soit Y le lieu des points en lequel X n'est pas quasi-lisse : c'est un fermé de Zariski de X . Le point x étant de type 2 ou 3, son adhérence de Zariski X' dans X n'est autre que sa composante irréductible, et c'est un voisinage de x dans X . Comme $U \simeq \mathbb{D}_{]r_0; r[}$, l'ouvert U est lisse, et $Y \cap U = \emptyset$; par conséquent, Y ne contient aucun voisinage de x ; en particulier, Y ne contient pas X' , et ne contient dès lors pas x , ce qu'on souhaitait établir.

Disques et couronnes : le point de vue intrinsèque

(3.6.15) Rappelons que si X est un graphe et Δ un sous-graphe faiblement admissible de X , on désigne par Δ^b l'unique ouvert de X dont Δ soit un sous-graphe admissible. La plupart du temps, nous appliquerons cette définition lorsque X sera un arbre à un bout ω et Δ de la forme $]x; \omega[$ avec $x \in X$ (qu'un tel sous-arbre soit faiblement admissible découle de 1.5.2.2).

(3.6.16) Un k -disque est un espace k -analytique *isomorphe* à un ouvert $\mathbb{D}_{[0;r[}$ de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ pour un certain $r > 0$; une fonction induisant un tel isomorphisme sera qualifiée de *fonction coordonnée* sur le disque en question; cette définition est, en vertu de 3.6.12.3, compatible avec celle donnée au 3.6.10.

Un k -disque est non vide, lisse, et géométriquement connexe.

(3.6.17) *Exemple.* Soit x un point de type 2 ou 3 de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$, et soit Z une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$ possédant un k -point z . Supposons qu'il existe une composante connexe Z' de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{z\}$ distincte de Z et possédant un k -point z' ; dans ce cas, Z est un disque (et il en va de même de Z' par symétrie).

Pour le voir, on se ramène par une homographie au cas où $z = 0$ et où $z' = \infty$. Étant situé sur le segment qui joint 0 à ∞ , le point x est égal à η_r pour un certain $r > 0$, et Z est alors nécessairement le disque ouvert de centre 0 et de rayon r .

(3.6.18) Soit X un k -disque; choisissons une fonction coordonnée f sur X ; elle induit un isomorphisme $X \simeq \mathbb{D}_{[0;r[}$ de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ avec $0 < r$.

(3.6.18.1) L'espace topologique X est un arbre paracompact à un bout; son squelette est par conséquent vide.

(3.6.18.2) Il résulte de 3.6.12.3 : qu'une fonction g sur X en est une fonction coordonnée si et seulement si elle s'écrit $a + \sum_{i>0} a_i f^i$, où $\sum a_i T^i$ est une série appartenant à $k_{[0;r[}$ dont le monôme $a_1 T$ est strictement dominant, et où a est un scalaire tel que $|a| < |a_1| \cdot r$; et que si c'est le cas, g induit un isomorphisme $X \simeq \mathbb{D}_{[0;|a_1| \cdot r[}$.

Le réel r de la définition 3.6.16 est donc bien déterminé modulo $|k^\times|$. On pourra ainsi parler sans ambiguïté du *rayon modulo $|k^\times|$* d'un k -disque, que l'on peut définir comme la borne supérieure, en norme, de n'importe quelle de ses fonctions coordonnées; il est clair que deux k -disques sont isomorphes si et seulement si ils ont même rayon modulo $|k^\times|$.

(3.6.19) Un ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ est un k -disque si et seulement si il est défini par une inégalité de la forme $|T - \alpha| < R$, avec $\alpha \in k$ et $R > 0$: cela vient du fait que tout ouvert *strict* de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ ayant exactement un bout et possédant un k -point est de cette forme, et que $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ lui-même n'est pas un k -disque en raison du théorème de Liouville.

(3.6.20) Si I est un intervalle non vide de \mathbb{R}_+^\times , une k -couronne de type I est un espace k -analytique *isomorphe* à \mathbb{D}_I ; une fonction induisant un tel isomorphisme sera qualifiée de *fonction coordonnée* sur la couronne en question; cette définition est, en vertu de 3.6.11.3, compatible avec celle donnée au 3.6.10.

Une k -couronne est non vide, quasi-lisse et géométriquement connexe.

(3.6.20.1) Si X est une couronne de type I , alors X_L est une L -couronne de type I pour toute extension complète L de k . Il résulte de 3.6.11 *et sq.* que l'intervalle I est uniquement déterminé à une transformation de \mathbb{R}_+^\times près de la forme $r \mapsto \lambda r^j$ avec $\lambda \in |k^\times|$ et $j \in \{-1, 1\}$; lorsqu'on parlera du type de X , il s'agira donc d'une classe d'intervalles.

(3.6.20.2) On appellera k -couronne de type $]*, *[$ (resp. $]0, *[,$ resp. $]*, +\infty[,$ etc.) toute k -couronne de type I pour un certain intervalle I de la forme $]r; R[$ avec $0 < r < R$ (resp. $]0; r[$ avec $r > 0$, resp. $]r; +\infty[$ avec $0 < r$, etc.); notons que les notions de k -couronne de type $]0; *[,$ $]*, *[,$ et $]*, +\infty[$ coïncident, et qu'une k -couronne de type $]0; +\infty[$ est un espace k -analytique isomorphe à $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$. On dira qu'une k -couronne est *ouverte* si son type est ouvert.

(3.6.21) *Exemple.* Soient x et x' deux points distincts de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$, et soit U la composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x, x'\}$ contenant $]x; x'[,$ (que l'on peut également décrire comme l'ouvert $]x; x'^{[b]}$).

(3.6.21.1) Supposons que x et x' sont de type 2 ou 3 et qu'il existe deux composantes connexes Z et Z' de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x, x'\}$ possédant les propriétés suivantes :

- $Z(k) \neq \emptyset$ et $Z'(k) \neq \emptyset$;
- $\partial Z = \{x\}$ et $\partial Z' = \{x'\}$.

Sous ces hypothèses, U est une k -couronne de type $]*, *[$. Pour le voir, on choisit $z \in Z(k)$ et $z' \in Z'(k)$, puis l'on se ramène par une homographie au cas où $z = 0$ et où $z' = \infty$. Comme x et x' sont tous deux situés sur le segment qui joint 0 à ∞ , il existe deux réels strictement positifs distincts r et r' tels que $x = \eta_r$ et $x' = \eta_{r'}$; notre assertion s'ensuit aussitôt.

(3.6.21.2) Supposons que x est k -rationnel, que x' est de type 2 ou 3 et qu'il existe Z' comme ci-dessus; alors U est une k -couronne de type $]0; *[,$: pour le voir, on choisit $z' \in Z'(k)$, puis l'on se ramène par une homographie au cas où $x = 0$ et où $z' = \infty$. Comme x' est situé sur le segment qui joint 0 à ∞ , il existe $r' > 0$ tel que $x = \eta_{r'}$; notre assertion s'ensuit aussitôt.

(3.6.21.3) Supposons que x et x' soient k -rationnels; alors U est une k -couronne de type $]0; +\infty[,$: pour le voir, on se ramène par une homographie au cas où $x = 0$ et où $x' = \infty$, et l'assertion est alors triviale.

(3.6.22) Soit X une k -couronne; le groupe

$$\mathcal{Z}(X) := \mathcal{O}_X(X)^\times / k^\times (1 + \mathcal{O}_X(X)^{\circ\circ})$$

est libre de rang 1, et une fonction f sur X est une fonction coordonnée si et seulement si elle est inversible et s'envoie sur un générateur de $\mathcal{Z}(X)$ (cela résulte de 3.6.13.1). Si le type de X est infini ou bien de la forme $\{r\}$ avec $r \notin \sqrt{|k^\times|}$ alors le groupe $\mathcal{Z}(X)$ s'identifie à $|\mathcal{O}_X(X)^\times|/|k^\times|$ (rem. 3.6.13.3).

(3.6.23) Soit X une k -couronne; choisissons une fonction coordonnée f sur X ; elle induit un isomorphisme $X \simeq \mathbb{D}_I$ pour un certain intervalle I non vide de \mathbb{R}_+^\times .

(3.6.23.1) En tant qu'espace topologique, X est un arbre paracompact; l'isomorphisme $X \simeq \mathbb{D}_I$ identifie η_I à un sous-arbre admissible de X , qui ne dépend pas du choix de f (3.6.11 et sq.); on l'appelle le *squelette analytique* de X et on le note $\mathbb{S}^{\text{an}}(X)$; si I est ouvert alors X est un arbre à deux bouts et $\mathbb{S}^{\text{an}}(X) = \mathbb{S}(X)$; si I n'est pas ouvert alors X est un arbre ayant au plus un bout et $\mathbb{S}(X) = \emptyset$. Si L est une extension complète de k alors $X_L \rightarrow X$ induit un homéomorphisme $\mathbb{S}^{\text{an}}(X_L) \rightarrow \mathbb{S}^{\text{an}}(X)$ (3.6.2).

(3.6.23.2) On déduit du 3.6.11.3, qu'une fonction g sur X est une fonction coordonnée si et seulement si g s'écrit $\sum a_i f^i$, où $\sum a_i T^i$ est une série de k_I

dont $a_j T^j$ est un monôme strictement dominant pour un certain $j \in \{-1, 1\}$; si c'est le cas alors g induit un isomorphisme $X \simeq \mathbb{D}_{|a_j| T^j}$ (cela découle encore de 3.6.11.3), et si de plus I est infini alors le sens de variation de $|g|$ sur $S^{\text{an}}(X)$ est égal (resp. opposé) à celui de $|f|$ si et seulement si $j = 1$ (resp. $j = (-1)$); notons que le sens de variation en question ne dépend que de la classe de $|g|$ modulo $|k^\times|$, c'est-à-dire encore de l'image de g dans $\mathcal{Z}(X)$.

Ainsi, lorsque I est infini, choisir un générateur de $\mathcal{Z}(X)$ revient à choisir une orientation sur $S^{\text{an}}(X)$ (celle pour laquelle la fonction coordonnée correspondante est croissante en norme). Pour cette raison, nous permettrons, même dans le cas où I est un singleton, d'appeler *orientation de X* un générateur de $\mathcal{Z}(X)$.

Si g est une fonction coordonnée sur X , le quotient des bornes supérieure et inférieure de $|g|$ sur X est par ce qui précède un élément de $]0; +\infty[$ égal au quotient des bornes supérieure et inférieure de I ; il ne dépend donc pas du choix de la fonction coordonnée g , et est appelé le *module* de X et est noté $\text{Mod}(X)$; il est invariant par extension des scalaires, et est égal à 1 si et seulement si I est un singleton (ce qui revient à demander que $S^{\text{an}}(X)$ soit un singleton).

Si J est un intervalle non vide de $S^{\text{an}}(X)$, on notera J^\sharp l'image réciproque de J par la rétraction canonique de X sur $S^{\text{an}}(X)$; si J est ouvert dans $S^{\text{an}}(X)$ alors $J^\sharp = J^b$ (notons que J^b n'est tout simplement pas défini si J n'est pas ouvert dans $S^{\text{an}}(X)$). Le sous-ensemble J^\sharp de X en est un domaine analytique, qui est une couronne de type $|g(J)|$ pour n'importe quelle fonction coordonnée g sur X ; son squelette analytique coïncide avec J . On qualifiera de *sous-couronne* de X tout domaine analytique de X de cette forme.

Si J est un intervalle non vide de $S^{\text{an}}(X)$ alors $\text{Mod}(J^\sharp) = \text{Mod}(\overline{J}^\sharp)$. Et si J_1 est un intervalle de $S^{\text{an}}(X)$ rencontrant J alors

$$\text{Mod}((J \cup J_1)^\sharp) = \text{Mod}(J^\sharp) \cdot \text{Mod}(J_1^\sharp) \cdot (\text{Mod}(J \cap J_1)^\sharp)^{-1}.$$

(3.6.23.3) Supposons que $S^{\text{an}}(X)$ n'est pas un singleton, et soit ω l'une des deux extrémités du segment $\widehat{S^{\text{an}}(X)}$ de la compactification \widehat{X} ; notons que si $S^{\text{an}}(X)$ est un intervalle ouvert alors ω est simplement l'un des deux bouts de X . Choisissons une fonction coordonnée sur X qui soit croissante en norme sur $S^{\text{an}}(X)$ lorsqu'on oriente celui-ci vers ω . Sa limite en ω est, en vertu de la description des fonctions coordonnées donnée au 3.6.23.2, un élément de $]0; +\infty[$ qui est bien déterminé modulo $|k^\times|$ et que l'on appellera *le rayon extérieur de X en ω modulo $|k^\times|$* . Si J est un intervalle non vide de $S^{\text{an}}(X)$ aboutissant à ω , le rayon extérieur de J^\sharp modulo $|k^\times|$ en ω est égal à celui de X .

Si L est une extension complète de k et si l'on appelle ω_L le point de $\widehat{S^{\text{an}}(X_L)} \simeq \widehat{S^{\text{an}}(X)}$ qui correspond à ω , il résulte des définitions que le rayon extérieur de X_L en ω_L est égal à celui de X en ω modulo $|L^\times|$.

(3.6.23.4) Si X est de type $]0, * [$ (ou $]*, +\infty [$, ce qui revient au même), il y a exactement un bout de X en lequel son rayon extérieur modulo $|k^\times|$ est infini; on l'appellera le *bout infini* de X . Si L est une extension complète de k , il résulte de l'invariance du rayon extérieur par extension des scalaires que le bout infini de X_L est celui qui correspond au bout infini de X via l'homéomorphisme $S(X_L) \simeq S(X)$.

(3.6.23.5) Si Y est une sous-couronne de X , la restriction des fonctions induit des isomorphismes

$$|\mathcal{O}_X^\times| \simeq |\mathcal{O}_Y^\times| \text{ et } \mathcal{L}(X) \simeq \mathcal{L}(Y),$$

et une fonction analytique inversible g sur X en est une fonction coordonnée si et seulement si sa restriction à Y est une fonction coordonnée de Y (3.6.13.1 et rem. 3.6.13.3).

(3.6.23.6) Si L est une extension complète de k , toute fonction coordonnée sur X est encore une fonction coordonnée sur X_L ; par conséquent, la flèche naturelle $\mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X_L)$ est un isomorphisme.

(3.6.23.7) Si φ est un automorphisme de X *au-dessus d'un automorphisme de k qui n'est pas nécessairement trivial*, on dira que φ est *direct* (resp. *indirect*) s'il préserve (resp. permute) les deux orientations de X . Si $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ est infini, φ est direct si et seulement si il préserve les orientations de $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$, ce qui est automatique si celui-ci est semi-ouvert (3.6.13.2).

(3.6.24) Soient X et Y deux k -couronnes et soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme tel que $\varphi(Y)$ rencontre $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$. Choisissons une fonction coordonnée g sur Y et une fonction coordonnée f sur X . La fonction g identifie naturellement $\mathbf{S}^{\text{an}}(Y)$ à $\eta_{|g|}(\mathbf{S}^{\text{an}}(Y))$.

L'image réciproque de f sur Y est une fonction inversible, elle est donc de la forme $\sum a_i g^i$ où $\sum a_i T^i$ est une série admettant un monôme strictement dominant $a_d T^d$. Comme $\varphi(Y) \cap \mathbf{S}^{\text{an}}(X) \neq \emptyset$, il découle de 3.6.9 que $d \neq 0$. On déduit alors de 3.6.8 *et sq.* les faits suivants :

- il existe un intervalle non vide I de $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ tel que φ induise un morphisme fini et plat de degré $|d|$ de Y sur I^\sharp ;
- la fonction f identifie I à $\eta_{|a_d| \cdot |g|}(\mathbf{S}^{\text{an}}(Y))^d$;
- l'image réciproque de I sur Y est égale à $\mathbf{S}^{\text{an}}(Y)$, et $\mathbf{S}^{\text{an}}(Y) \rightarrow I$ est l'homéomorphisme qui correspond à $\eta_r \mapsto \eta_{|a_d| \cdot r^d}$ *via* les identifications évoquées ci-dessus;
- pour tout $y \in I$ d'image x sur X l'extension $\mathcal{H}(y)/\mathcal{H}(x)$ est sans défaut et de degré $|d|$.

(3.6.24.1) Il s'ensuit, en vertu du lemme 1.5.18, que $Y \rightarrow I^\sharp$ commute aux rétractions canoniques de ses source et but sur leurs squelettes analytiques respectifs $\mathbf{S}^{\text{an}}(Y)$ et I .

Soit J un intervalle non vide tracé sur $\mathbf{S}^{\text{an}}(Y)$. Il découle de ce qui précède que $J^\sharp = \varphi^{-1}(\varphi(J)^\sharp)$, et $J^\sharp \rightarrow \varphi(J)^\sharp$ est par conséquent fini et plat de degré $|d|$; le type de J^\sharp est égal à $|g|(J)$, et celui de $\varphi(J)$ à $|f|(\varphi(J)) = |a_d| \cdot |g|(J)^d$, et donc à $|g|(J)^d$ (*cf.* 3.6.20.1).

(3.6.24.2) En vertu de 3.6.13, l'image de $\mathcal{L}(X) \simeq \mathcal{L}(I^\sharp)$ dans $\mathcal{L}(Y)$ est un sous-groupe d'indice $|d|$ de ce dernier.

(3.6.24.3) Remarquons que si φ est lui-même fini et plat, $\varphi(Y)$ est égal à X et rencontre donc $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$: ce qui précède est alors valable avec $I = \mathbf{S}^{\text{an}}(X)$.

(3.6.25) Soit X un k -disque et soit Y un domaine analytique de X qui est une k -couronne aboutissant à l'unique bout ω de X . Choisissons une fonction coordonnée f sur X ; elle induit un isomorphisme $X \simeq \mathbb{D}_{[0;R[}$ pour un certain $R > 0$; soit I l'intervalle ouvert de X correspondant à $\eta_{[0;R[}$ *via* cette

identification. Puisque $S^{\text{an}}(Y)$ aboutit à ω , il existe un sous-intervalle ouvert J de I aboutissant à ω et contenu dans $S^{\text{an}}(Y)$; l'ouvert I^b de X est une k -couronne aboutissant à ω , et $f|_{I^b}$ est une fonction coordonnée sur I^b , qui est croissante en norme sur I . On en déduit que le rayon extérieur modulo $|k^\times|$ de Y en ω (qui coïncide avec celui de I^b , cf. *supra*) est égal à R , c'est à dire au rayon de X modulo $|k^\times|$.

(3.6.26) Soit X un $\widehat{k^a}$ -disque, soit $x \in X_{[2,3]}$ et soit ω l'unique bout de X . Choisissons une fonction coordonnée f sur X telle que la composante connexe de $X \setminus \{x\}$ contenant l'unique élément de $f^{-1}(0)$ soit relativement compacte (il revient au même de demander qu'elle ne contienne pas $]x; \omega[$). Le morphisme f identifie X à l'ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par l'inégalité $|T| < R$ pour un certain réel $R > 0$; par construction, il envoie x sur un point de l'intervalle joignant l'origine à $\eta_{R, \widehat{k^a}}$; par conséquent, $f(x) = \eta_{r, \widehat{k^a}}$ pour un certain r vérifiant $0 < r < R$.

Le rapport r/R ne dépend que de x , et pas du choix de f . En effet, f identifie $]x; \omega[^b$ à l'ouvert de $\mathbb{A}_r^{1,\text{an}}$ défini par les inégalités $r < |T| < R$; par conséquent, $]x; \omega[^b$ est une couronne et r/R est égal à l'inverse de son module.

Nous dirons que r/R est le *rayon normalisé* de x , et nous le noterons $r_{\text{norm}}(x)$. La définition de r_{norm} s'étend comme suit à X tout entier : si $y \in X_{[1,4]}$ alors $]y; \omega[\subset X_{[2,3]}$; l'application r_{norm} est donc bien définie sur $]y; x[$; elle est par sa construction même continue, strictement décroissante lorsqu'on se dirige vers y , et positive; elle admet donc une limite en y , que l'on appelle encore le rayon normalisé de y et que l'on note $r_{\text{norm}}(y)$; pour tout $y \in X$, on vérifie immédiatement que $r_{\text{norm}}(y) \in [0; 1[$ et que $r_{\text{norm}}(y) = 0$ si et seulement si y est de type 1, c'est-à-dire $\widehat{k^a}$ -rationnel.

Soit I un intervalle tracé sur X et aboutissant à ω ; par définition de r_{norm} , la restriction de celle-ci à I est continue, strictement monotone, et tend vers 1 à l'approche de ω .

Revêtements de Kummer des couronnes

(3.6.27) Si X est un espace k -analytique, et si P est un polynôme non nul à coefficients dans \mathcal{O}_X , nous nous permettrons de noter $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X[T]/P)$ le X -espace analytique obtenu par recollement des espaces $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X(V)[T]/P)$, où V parcourt l'ensemble des domaines affinoïdes de X .

(3.6.28) Soit ℓ un entier inversible dans k et soit X un espace k -analytique. On dispose sur le site $X_{\text{ét}}$ de la suite exacte de Kummer

$$1 \longrightarrow \mu_\ell \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^\ell} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

qui induit une injection $f \mapsto (f)$ de $\mathcal{O}_X(X)^\times / (\mathcal{O}_X(X)^\times)^\ell \hookrightarrow H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$, dont l'image sera notée $\text{Kum}_\ell(X)$.

Tout faisceau étale localement constant sur $X_{\text{ét}}$ est représentable, et c'est en particulier le cas de tout μ_ℓ -torseur. En conséquence, $H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ classe les μ_ℓ -torseurs étales analytiques sur X à isomorphisme près; la classe d'isomorphie correspondant par ce biais à (f) est celle de $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X[T]/(T^\ell - f))$; nous dirons qu'un tel μ_ℓ -torseur est de Kummer.

Si Y est un espace k -analytique et si $\varphi : Y \rightarrow X$ est un morphisme, la flèche naturelle $H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell) \rightarrow H^1(Y_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ envoie $\text{Kum}_\ell(X)$ dans $\text{Kum}_\ell(Y)$.

(3.6.29) Exemple. Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R}_+^\times . La fonction T^ℓ induit un revêtement fini et plat $\mathbb{D}_I \rightarrow \mathbb{D}_{I^\ell}$; on vérifie immédiatement que ce revêtement identifie \mathbb{D}_I au toseur de Kummer $\mathcal{M}(\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{I^\ell}}[T]/(T^\ell - S))$, où nous notons S (et non T) la coordonnée standard de \mathbb{D}_{I^ℓ} , pour éviter toute confusion.

(3.6.30) Soit X une k -couronne. Comme X est géométriquement connexe, l'application composée

$$k^\times / (k^\times)^\ell \rightarrow \mathcal{O}_X(X)^\times / (\mathcal{O}_X(X)^\times)^\ell \simeq \text{Kum}_\ell(X)$$

est injective; on note $\text{Kum}'_\ell(X)$ son conoyau. À partir de maintenant, on suppose que ℓ est premier à p .

(3.6.30.1) Le groupe $1 + \mathcal{O}_X(X)^{\circ\circ}$ est alors ℓ -divisible. Il en résulte que $\text{Kum}'_\ell(X)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{Z}(X)/\ell\mathcal{Z}(X)$. Il est en conséquence isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, mais non canoniquement dès que $\ell \geq 3$: il y a alors deux générateurs distingués de $\text{Kum}'_\ell(X)$, opposés l'un de l'autre; chacun correspond à une orientation de X .

Si k^\times est ℓ -divisible, ce qui est par exemple le cas si k est algébriquement clos, alors $\text{Kum}_\ell(X) = \text{Kum}'_\ell(X)$; et ce qu'on vient de voir concernant $\text{Kum}'_\ell(X)$ vaut dès lors pour $\text{Kum}_\ell(X)$.

(3.6.30.2) Soit Y une sous-couronne de X . La flèche $\text{Kum}_\ell(X) \rightarrow \text{Kum}_\ell(Y)$ induit un morphisme $\text{Kum}'_\ell(X) \rightarrow \text{Kum}'_\ell(Y)$ qui, en vertu de ce qui précède et de 3.6.23.5, est un isomorphisme; il en résulte que $\text{Kum}_\ell(X) \simeq \text{Kum}_\ell(Y)$.

Soit L une extension complète de k . La flèche $\text{Kum}_\ell(X) \rightarrow \text{Kum}_\ell(X_L)$ induit un morphisme $\text{Kum}'_\ell(X) \rightarrow \text{Kum}'_\ell(X_L)$, qui, en vertu de ce qui précède et de 3.6.23.6, est un isomorphisme.

(3.6.30.3) Soit x un point de type 3 de $S^{\text{an}}(X)$. Le singleton $\{x\}$ est alors une sous-couronne de X , et l'on dispose dès lors d'isomorphismes naturels

$$\text{Kum}_\ell(X) \simeq \text{Kum}_\ell(\{x\}) \simeq H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell),$$

le premier d'après le 3.6.30.1 ci-dessus, et le second d'après le théorème 90 de Hilbert appliqué au corps $\mathcal{H}(x)$.

(3.6.31) Nature coronaire des revêtements de Kummer de X . On fixe une fonction coordonnée f sur X .

(3.6.31.1) L'espace k -analytique $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X[T]/(T^\ell - f))$ est une k -couronne dont T est une fonction coordonnée: cela découle immédiatement de 3.6.29.

(3.6.31.2) Soit n un entier, et soit d le PGCD de n et ℓ ; écrivons $\ell = rd$ et $n = sd$. On suppose que $T^d - 1$ est scindé dans k , et l'on note μ_1, \dots, μ_d ses racines. Posons $Y = \mathcal{M}(\mathcal{O}_X[T]/(T^\ell - f^n))$. On a

$$T^\ell - f^n = T^{rd} - f^{sd} = \prod_i (T^r - \mu_i f^s)$$

(en tant que sections de $\mathcal{O}_X[T]$). Si i et j sont deux entiers distincts compris entre 1 et d , la différence $(T^r - \mu_i f^s) - (T^r - \mu_j f^s) = (\mu_i - \mu_j)f$ est une

section inversible du faisceau d'algèbres $\mathcal{O}_X[T]$, d'où par le lemme chinois un isomorphisme naturel de \mathcal{O}_X -algèbres

$$\mathcal{O}_X[T]/(T^\ell - f^n) \simeq \prod_i \mathcal{O}_X[T]/(T^r - \mu_i f^s),$$

puis une décomposition

$$Y \simeq \prod_i \mathcal{M}(\mathcal{O}_X[T]/(T^r - \mu_i f^s)).$$

Choisissons deux entiers relatifs u et v tels que $ur + vs = 1$ et fixons i . On vérifie immédiatement que

$$T \mapsto \mu_i^v \tau^s \text{ et } \tau \mapsto f^v T^u$$

définissent deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre les \mathcal{O}_X -algèbres $\mathcal{O}_X[T]/(T^r - \mu_i f^s)$ et $\mathcal{O}_X[\tau]/(\tau^r - \mu_i^u f)$.

Dès lors,

$$\mathcal{M}(\mathcal{O}_X[T]/(T^r - \mu_i f^s)) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{O}_X[\tau]/(\tau^r - \mu_i^u f)).$$

En vertu de 3.6.31.1, ce dernier est une k -couronne dont τ est une fonction coordonnée.

Il résulte de ce qui précède que toute composante connexe de Y est une k -couronne dont $f^v T^u$ est une fonction coordonnée.

(3.6.31.3) Soit maintenant Y un μ_ℓ -torseur de Kummer quelconque sur X . D'après 3.6.30.1, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in k^\times$ tels que $Y \simeq \mathcal{M}(\mathcal{O}_X[T]/(T^\ell - af^n))$; fixons deux entiers u et v tels que $u\ell + vn = \text{PGCD}(\ell, n)$.

Soit Z une composante connexe de Y , et soit Z' une composante connexe de $Z_{\widehat{k^a}}$. Soit α une racine n -ième de a dans $\widehat{k^a}$. On a

$$Y_{\widehat{k^a}} \simeq \mathcal{M}(\mathcal{O}_{X_{\widehat{k^a}}}[T]/(T^\ell - af^n)) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{O}_{X_{\widehat{k^a}}}[T]/(T^\ell - (\alpha f)^n)).$$

Comme αf est une fonction coordonnée de la $\widehat{k^a}$ -couronne $X_{\widehat{k^a}}$, il résulte de 3.6.31.2 que Z' est une $\widehat{k^a}$ -couronne dont $(\alpha f)^v T^u$ est une fonction coordonnée; c'est évidemment aussi le cas de $f^v T^u$.

Soit φ le morphisme d'espaces $\mathfrak{s}(Z)$ -analytiques de Z vers $\mathbb{A}_{\mathfrak{s}(Z)}^{1,\text{an}}$ induit par $f^v T^u$. La composante Z' s'identifie à $Z \widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(Z)} \widehat{k^a}$ relativement à un certain plongement $\mathfrak{s}(Z) \hookrightarrow \widehat{k^a}$. Le morphisme $\varphi \widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(Z)} \widehat{k^a}$ n'est alors autre que le morphisme de Z' vers $\mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ fourni par la fonction par $f^v T^u$. Par conséquent, $\varphi \widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(Z)} \widehat{k^a}$ induit un isomorphisme $Z' \simeq \mathbb{D}_{I, \widehat{k^a}}$ pour un certain intervalle non vide I de \mathbb{R}_+^\times . Il s'ensuit que $\varphi(Z) \subset \mathbb{D}_{I, \mathfrak{s}(Z)}$; par descente, le morphisme induit $Z \rightarrow \mathbb{D}_{I, \mathfrak{s}(Z)}$ est un isomorphisme (cor. 3.2.18).

Ainsi, Z est une $\mathfrak{s}(Z)$ -couronne dont $f^v T^u$ est une fonction coordonnée.

Disques et couronnes virtuels

(3.6.32) Soit X une courbe k -analytique connexe et non vide. Nous la qualifierons de *disque virtuel sur k* si $X_{\widehat{k^a}}$ est un $\widehat{k^a}$ -disque, et si c'est le cas nous dirons qu'une extension complète L de k *déploie* X si X_L est un L -disque. Si $|k^\times| \neq \{1\}$ (resp. si $|k^\times| = \{1\}$) nous qualifierons de *gentiment virtuel* tout disque virtuel sur k qui est déployé par une extension finie séparable (resp. finie) de k .

Nous dirons simplement que X est un disque virtuel (resp. gentiment virtuel), *sans mention du corps de base*, si c'est un disque virtuel *sur le corps* $\mathfrak{s}(X)$.

(3.6.32.1) Tout disque virtuel sur k est lisse, non vide et géométriquement connexe.

(3.6.32.2) Si X est un disque virtuel sur k alors X_L est un disque virtuel sur L pour toute extension complète L de k .

(3.6.32.3) Si X est un disque virtuel sur k , toute fonction inversible sur X est de norme constante : pour le voir, on se ramène immédiatement au cas déployé par extension des scalaires, et l'assertion requise résulte alors de 3.6.6.2.

(3.6.33) Donnons maintenant quelques exemples de disques virtuels.

(3.6.33.1) Tout k -disque est un disque virtuel sur k .

(3.6.33.2) Si X est un disque virtuel qui est déployé par une extension finie, séparable et modérément ramifiée de k , alors X est un k -disque.

(3.6.33.3) *Un exemple de disque virtuel non trivial.* Soit X l'ouvert de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_2}^{1,\text{an}}$ défini par l'inégalité $|T^2 - 2| < |2|$. Si K est une extension complète de \mathbb{Q}_2 dans laquelle 2 est un carré alors X_K est un disque de $\mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$, qui peut être décrit par l'inégalité $|T - \sqrt{2}| < |\sqrt{2}|$. Il en résulte que X est un disque virtuel sur \mathbb{Q}_2 ; mais X n'est pas un \mathbb{Q}_2 -disque, puisqu'on vérifie immédiatement que $X(\mathbb{Q}_2) = \emptyset$.

(3.6.33.4) Soit $a \in k$, soit r un réel strictement positif et soit Y une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\eta_{a,r}\}$. Comme $\eta_{a,r}$ est pluribranche, il existe une composante connexe Z de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\eta_{a,r}\}$ qui est distincte de Y . Soit L une extension finie de k telle que $Y(L)$ et $Z(L)$ soient non vides (son existence est assurée par densité de k^a dans $\widehat{k^a}$ si $|k^\times| \neq \{1\}$, et par la description explicite de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ sinon). Le point $\eta_{a,r}$ ne possédant qu'un antécédent sur $\mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$, à savoir $\eta_{a,r,L}$, l'espace Y_L (resp. Z_L) s'écrit comme une réunion disjointe finie $\coprod Y_i$ (resp. $\coprod Z_j$) de composantes connexes de $\mathbb{P}_L^{1,\text{an}} \setminus \{\eta_{a,r,L}\}$. Puisque Y et Z possèdent chacun un L -point, il existe deux indices i_0 et j_0 , et deux L -points y et z de $\mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$ respectivement situés sur Y_{i_0} et Z_{j_0} . Cela entraîne que Y_{i_0} est un L -disque (3.6.17). Il en résulte que Y est un disque virtuel, déployé par une extension finie de $\mathfrak{s}(Y)$.

(3.6.34) Soit X un disque virtuel sur k . Il s'identifie topologiquement au quotient du disque $X_{\widehat{k^a}}$ par \mathbf{G} ; en conséquence, X est un arbre paracompact à un bout. Notons ω (resp. $\omega_{\widehat{k^a}}$) l'unique bout de X (resp. $X_{\widehat{k^a}}$).

(3.6.34.1) Si $y \in X_{\widehat{k^a}}$ et si x désigne son image sur X , il découle de 1.9.16.2 que $X_{\widehat{k^a}} \rightarrow X$ induit un homéomorphisme $[y; \omega_{\widehat{k^a}}[\rightarrow [x; \omega[$.

(3.6.34.2) Soit U un ouvert de $X_{\widehat{k^a}}$ qui est une couronne et soit $g \in \mathbf{G}$. L'ouvert $g(U)$ s'identifiant à $U \widehat{\otimes}_g \widehat{k^a}$, c'est une couronne de même module que U . Il s'ensuit que la fonction r_{norm} sur $X_{\widehat{k^a}}$ est invariante sous l'action de \mathbf{G} ; elle définit donc une application, que l'on note encore r_{norm} et appelle encore le rayon normalisé, de X vers $[0; 1[$. En vertu du 3.6.34.1 ci-dessus, si I est un intervalle tracé sur X et aboutissant à ω alors la restriction de r_{norm} à I est continue, strictement monotone, et tend vers 1 à l'approche de ω ; si $x \in X$, le rayon normalisé de x est nul si et seulement si x est de type 1.

(3.6.35) Soit X une courbe k -analytique connexe et non vide, et soit I un intervalle non vide de \mathbb{R}_+^\times . Nous qualifierons X de *couronne virtuelle sur k* de type I si $X_{\widehat{k^a}}$ est une $\widehat{k^a}$ -couronne de type I sur laquelle \mathbf{G} agit par automorphismes *directs* (3.6.23.7); on dira qu'une extension complète L de k *déploie* X si X_L est une L -couronne. Si $|k^\times| \neq \{1\}$ (resp. si $|k^\times| = \{1\}$) nous qualifierons de *gentiment virtuelle* toute couronne virtuelle sur k qui est déployée par une extension finie séparable (resp. finie) de k .

Nous dirons simplement que X est une couronne virtuelle (resp. gentiment virtuelle) *sans mention du corps de base* si c'est une couronne virtuelle *sur son corps des constantes* $\mathfrak{s}(X)$; nous appellerons couronne virtuelle *ouverte* toute couronne virtuelle de type ouvert.

(3.6.35.1) Si X est une couronne virtuelle de type I , alors I est bien déterminé à une transformation de la forme $r \mapsto \lambda r^d$ près avec $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$ et $d \in \{-1, 1\}$; lorsqu'on parlera *du* type de X , il s'agira donc d'une classe d'intervalles.

(3.6.35.2) On appellera k -couronne virtuelle de type $]*, * [$ (resp. $]0, * [$, resp. $]*, +\infty [$, etc.) toute k -couronne virtuelle de type I pour un certain intervalle I de la forme $]r; R [$ avec $0 < r < R$ (resp. $]0; r [$ avec $r > 0$, resp. $]r; +\infty [$ avec $0 < r$, etc.); notons que les notions de k -couronne virtuelle de type $]0; * [$ et $]*, +\infty [$ coïncident.

On dira qu'une couronne virtuelle est *ouverte* si son type est ouvert.

(3.6.35.3) Si X est une couronne virtuelle sur k alors X est non vide, quasi-lisse et géométriquement connexe; si X est ouverte alors X est sans bord.

(3.6.35.4) Soit X une courbe k -analytique connexe et non vide, soit F le complété d'une extension galoisienne de k dont on note \mathbf{H} le groupe de Galois, et soit \mathbf{G}' le sous-groupe de \mathbf{G} formé des éléments qui stabilisent F point par point. Supposons que X_F soit une F -couronne (auquel cas $X_{\widehat{k^a}}$ est *a fortiori* une $\widehat{k^a}$ -couronne); le groupe \mathbf{H} stabilise alors $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$ (3.6.13.2). Comme (l'image réciproque de) toute fonction coordonnée de X_F est encore une fonction coordonnée de $X_{\widehat{k^a}}$, le groupe \mathbf{G}' agit sur $X_{\widehat{k^a}}$ par automorphismes directs, et \mathbf{G} agit sur $X_{\widehat{k^a}}$ par automorphismes directs si et seulement si \mathbf{H} agit sur X_F par automorphismes directs; autrement dit, X est une k -couronne virtuelle si et seulement si \mathbf{H} agit sur X_F par automorphismes directs.

Si $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$ n'est pas un singleton cette dernière condition revient à demander, d'après 3.6.23.7, que \mathbf{H} agisse par homéomorphismes croissants sur $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$ et même, en vertu de la compacité de \mathbf{H} , qu'il fixe $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$ point par point.

Si $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$ est ouvert (auquel cas il coïncide avec $\mathbf{S}(X_F)$), cette dernière condition est satisfaite si et seulement si X est un arbre à deux bouts (1.9.17 *et sq.*).

Remarquons que si $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$ est un singleton, il est évidemment fixé point par point par \mathbf{H} , que l'action soit ou non par automorphismes directs.

(3.6.35.5) Soit X une couronne virtuelle sur k et soit F une extension presque algébrique de k . Identifions F à un sous-corps complet de $\widehat{k^a}$, contenant k , et notons \mathbf{G}' le sous-groupe de \mathbf{G} formé des éléments qui stabilisent F point par point. Les espaces X et X_F s'identifient respectivement à $X_{\widehat{k^a}}/\mathbf{G}$ et $X_{\widehat{k^a}}/\mathbf{G}'$. Comme X est une couronne virtuelle, \mathbf{G} agit par automorphismes directs sur $X_{\widehat{k^a}}$; c'est *a fortiori* le cas de \mathbf{G}' , et X_F est donc une F -couronne virtuelle.

D'après le 3.6.35.4, le groupe \mathbf{G} agit trivialement sur $\mathbf{S}(X_{\widehat{k^a}})$ (3.6.35.4), et son image sur X sera appelée le *squelette analytique* de X et sera notée $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$; cette terminologie est compatible avec la précédente dans le cas où X est déjà déployée sur k (3.6.2). Notons que $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}})$ est l'image réciproque de $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ sur $X_{\widehat{k^a}}$, et que $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}}) \rightarrow \mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ est un homéomorphisme.

Comme $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)_{\widehat{k^a}}$ est un sous-graphe admissible de $X_{\widehat{k^a}}$ stable sous \mathbf{G} et comme $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ est son image sur X , le lemme 1.9.12 assure que $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ est un sous-graphe admissible de X .

On déduit des résultats qui précèdent, appliqués d'une part directement, et d'autre part à la courbe F -couronne virtuelle X_F , que l'image réciproque de $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ sur X_F est égale à $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$ et que $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F) \rightarrow \mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ est un homéomorphisme. Le lemme 1.5.18 garantit alors que $X_F \rightarrow X$ commute aux rétractions canoniques de X_F et X sur leurs squelettes analytiques respectifs.

Si $x \in \mathbf{S}^{\text{an}}(X)$, il a d'après ce qui précède un et un seul antécédent sur $X_{\widehat{k^a}}$; le corps k est donc séparablement clos dans $\kappa(x)$ et $\mathcal{H}(x)$.

(3.6.35.6) Soit X une couronne virtuelle sur k et soit L une extension complète quelconque de k . Soit F une extension complète composée de L et $\widehat{k^a}$; la fermeture algébrique de L dans F est galoisienne sur L , et son groupe de Galois \mathbf{H} agit sur F . Comme $X_{\widehat{k^a}}$ est une $\widehat{k^a}$ -couronne, X_F est une F -couronne, et $X_F \rightarrow X_{\widehat{k^a}}$ induit un homéomorphisme entre $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$ et $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}})$ (3.6.1). Le groupe \mathbf{H} s'identifie naturellement à un sous-groupe de \mathbf{G} ; ce dernier agit par automorphismes directs sur $X_{\widehat{k^a}}$; comme (l'image réciproque de) toute fonction coordonnée de $X_{\widehat{k^a}}$ est encore une fonction coordonnée de X_F , le groupe \mathbf{H} agit par automorphismes directs sur X_F ; par conséquent, X_L est une L -couronne virtuelle (3.6.35.4). Chacune des applications $X_F \rightarrow X_L$, $X_F \rightarrow X_{\widehat{k^a}}$ et $X_{\widehat{k^a}} \rightarrow X$ induit un homéomorphisme entre le squelette analytique de sa source et celui de son but, et commute aux rétractions canoniques sur ces derniers (3.6.1 et 3.6.35.5); il en résulte que $X_L \rightarrow X$ induit un homéomorphisme entre $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_L)$ et $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ et commute aux rétractions canoniques sur ces derniers.

(3.6.35.7) Soit X une k -couronne virtuelle *ouverte*. En vertu de 1.9.17 et sq., il découle de l'égalité $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}}) = \mathbf{S}(X_{\widehat{k^a}})$ que $\mathbf{S}^{\text{an}}(X) = \mathbf{S}(X)$.

Supposons de plus que X est de type $]0, *[$. Si F est une extension complète de k déployant X , le bout de X qui correspond au bout infini de X_F via l'homéomorphisme $\mathbf{S}(X_F) \simeq \mathbf{S}(X)$ ne dépend pas de F : cela résulte de l'invariance du bout infini d'une couronne de type $]0, *[$ par extension des scalaires. On l'appelle le *bout infini* de X . Si L est une extension complète

quelconque de k , le bout de X qui correspond au bout infini de X_L via l'homéomorphisme $\mathbb{S}(X_L) \simeq \mathbb{S}(X)$ n'est autre que le bout infini de X .

(3.6.35.8) Soit X une couronne virtuelle sur k et soit $x \in \mathbb{S}^{\text{an}}(X)$. Soit y l'unique antécédent de x sur $X_{\widehat{k^a}}$; on déduit de la description explicite de $\mathbb{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}})$ (3.6.23.1) que toutes les composantes connexes de $X_{\widehat{k^a}} \setminus \{y\}$ sont des k^a -disques, à l'exception de celles qui sont de la forme I^b pour $I \in \pi_0(\mathbb{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}}) \setminus \{y\})$ (il y en a au plus 2), qui sont des $\widehat{k^a}$ -couronnes; on en déduit aussi que toutes les composantes connexes de $X_{\widehat{k^a}} - \mathbb{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}})$ sont des disques.

Il en résulte que toutes les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$ sont des disques virtuels, à l'exception de celles qui sont de la forme I^b pour $I \in \pi_0(\mathbb{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}}) \setminus \{y\})$ (il y en a au plus 2), qui sont des k -couronnes virtuelles de X ; et que toutes les composantes connexes de $X - \mathbb{S}^{\text{an}}(X)$ sont des disques virtuels.

Si ρ désigne la rétraction canonique de X sur $\mathbb{S}^{\text{an}}(X)$, il résulte de ce qui précède et de 3.6.32.3 que pour toute fonction inversible f sur X et tout $x \in X$ on a $|f(x)| = |f(\rho(x))|$.

(3.6.35.9) Soit X une couronne virtuelle sur k et soit I un intervalle non vide de $\mathbb{S}^{\text{an}}(X)$; soit $I_{\widehat{k^a}}$ l'image réciproque de I sur $X_{\widehat{k^a}}$. L'image réciproque de $I^\#$ sur $X_{\widehat{k^a}}$ est la sous-couronne $(I_{\widehat{k^a}})^\#$ de $X_{\widehat{k^a}}$; on en déduit que $I^\#$ est un domaine analytique de X (prop. 3.2.20), puis que c'est une k -couronne virtuelle de squelette analytique égal à I .

(3.6.35.10) Si X est une couronne virtuelle sur k , on dira qu'un domaine analytique Y de X en est une *sous-couronne virtuelle* s'il est de la forme $I^\#$ pour un certain intervalle non vide I de $\mathbb{S}^{\text{an}}(X)$. Dans ce cas, Y est une couronne virtuelle sur k de squelette analytique I . Plus précisément, Y_L est une sous-couronne de X_L pour toute extension complète L de k déployant X : on le déduit de la commutation de $X_L \rightarrow X$ aux rétractions canoniques sur les squelettes analytiques de ses source et but (3.6.35.6).

(3.6.35.11) Soit X une couronne virtuelle sur k et soit F une extension complète de k déployant X ; le module de la couronne X_F est visiblement indépendant du choix de F ; on l'appellera le module de X .

(3.6.36) Soit X un disque virtuel sur k , soit ω son unique bout et soit $\omega_{\widehat{k^a}}$ l'unique bout de $X_{\widehat{k^a}}$.

(3.6.36.1) En vertu de 1.9.16.1, il existe un intervalle ouvert tracé sur $X_{\widehat{k^a}}$, aboutissant à $\omega_{\widehat{k^a}}$, et invariant point par point sous l'action de \mathbb{G} ; son image sur X est un intervalle ouvert I qui aboutit à ω .

(3.6.36.2) Si $x \in I$, il a par construction un unique antécédent $x_{\widehat{k^a}}$ sur $X_{\widehat{k^a}}$, ce qui signifie que $\mathfrak{s}(X) = k$; on en déduit que tout ouvert de X rencontrant I est géométriquement connexe.

(3.6.36.3) Soit $x \in I$ et soit $x_{\widehat{k^a}}$ son unique antécédent sur $X_{\widehat{k^a}}$. Soit U (resp. V) la composante connexe de $X \setminus \{x\}$ contenant $]x; \omega[$ (resp. une composante connexe relativement compacte de $X \setminus \{x\}$). Comme U est géométriquement connexe, $U_{\widehat{k^a}}$ est une composante connexe de $X_{\widehat{k^a}} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$; quant à $V_{\widehat{k^a}}$, c'est une union finie et non vide de composantes connexes relativement compactes de $X_{\widehat{k^a}} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$.

Identifions $X_{\widehat{k^a}}$ à $\mathbb{D}_{]0;R[}$ pour un certain $R > 0$ *via* une fonction coordonnée. Le point x étant situé sur I , il est pluribranche ; par conséquent, $x_{\widehat{k^a}}$ est de type 2 ou 3, et donc de la forme $\eta_{a,r}$ pour un certain élément a de $\widehat{k^a}$ (de valeur absolue strictement inférieure à R) et un certain $r \in]0;R[$. Il en découle que $U_{\widehat{k^a}}$ est une couronne de type $]*,*[$, et que toute composante connexe de $V_{\widehat{k^a}}$ est un disque.

Il s'ensuit que x est de type 2 ou 3, que U est une couronne virtuelle de type $]*,*[$ sur k , et que V est un disque virtuel ; si V est de plus géométriquement connexe (c'est par exemple le cas si V contient $I - [x;\omega[$) alors V est un disque virtuel sur k .

(3.6.36.4) Si $y \in X$ il existe un point x situé sur $I \cap]y;\omega[$; en vertu de ce qui précède, la composante connexe de y dans $X \setminus \{x\}$ est un disque virtuel sur k qui est relativement compact dans X .

(3.6.37) Soit X une courbe k -analytique, soit U un ouvert de X qui est une couronne virtuelle ouverte, et soit $x \in \partial U$. Soit ω un bout de U convergeant vers x . Choisissons une sous-couronne virtuelle ouverte stricte Z de U qui aboutit à ω ; le bord de Z est de la forme $\{x, y\}$ avec $y \in U$.

Soit U' une composante connexe de $U_{\widehat{k^a}}$. C'est un arbre à deux bouts ; l'ensemble $\partial U'$ s'identifie naturellement à ∂U . Soit ω' le bout de U' correspondant à ω ; c'est l'unique bout de U' auquel l'image réciproque Z' de Z sur U' aboutit. Comme Z' est un arbre à deux bouts, son bord dans $X_{\widehat{k^a}}$ compte au plus deux points, et il se surjecte par ailleurs sur ∂Z . Par conséquent, $\partial Z'$ possède exactement un point x' au-dessus de x , et ω' converge vers x' .

Le point $g(x')$ appartient au bord de $g(U')$ pour tout $g \in \mathbf{G}$, et $\pi_0(U_{\widehat{k^a}})$ est fini ; l'orbite $\mathbf{G}.x'$ est de ce fait finie.

On fixe un isomorphisme $U' \simeq \mathbb{D}_{I, \widehat{k^a}}$ pour un certain intervalle ouvert I de \mathbb{R}_+^\times (la couronne virtuelle U est donc de type I), et l'on appelle r la borne de I qui correspond à ω' .

Supposons que $r \notin \{0, \infty\}$. En vertu de 3.6.14 *et sq.* le point x' est situé sur le lieu quasi-lisse de $X_{\widehat{k^a}}$ et est de type 2 (resp. 3) si et seulement si r appartient (resp. n'appartient pas) à $|(k^a)^\times|$. Par conséquent, x est situé sur le lieu quasi-lisse de X et est de type 2 (resp. 3) si et seulement si r appartient (resp. n'appartient pas) à $\sqrt{|k^\times|}$.

Supposons que $r \in \{0, \infty\}$. Il découle alors de *loc. cit.* que x' est un $\widehat{k^a}$ -point ; compte-tenu de la finitude de $\mathbf{G}.x'$, ceci entraîne que x est un point *rigide* de X .

(3.6.38) Remarque. Si les deux bouts de U convergent vers x , il résulte de ce qui précède appliqué à chacun des deux bouts de U que les deux bornes de I appartiennent toutes deux à $\sqrt{|k^\times|}$ si x est de type 2, appartiennent toutes deux à $\mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$ s'il est de type 3, et appartiennent toutes deux à $\{0, \infty\}$ s'il est rigide. Par conséquent si U est de type $]0;*[$, ou de type $]r;R[$ avec $r \in \sqrt{|k^\times|}$ et $R \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$, il existe un seul bout de U convergeant vers x .

On a ainsi prouvé l'assertion suivante : si X est une courbe k -analytique et si U est un ouvert de X qui est une couronne virtuelle de type $]0;*[$ ou de type $]r;R[$ avec $r \in \sqrt{|k^\times|}$ et $R \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$, alors \overline{U} est un arbre.

(3.6.39) Soit X une courbe k -analytique, et soit U un ouvert relativement compact de X qui est un disque virtuel. Comme U est un arbre à un bout, ∂U est un singleton $\{x\}$. Il existe en vertu de 3.6.36 et sq. une couronne virtuelle V de type $]*, *[$ contenue dans U et dont l'adhérence dans X contient x . Il découle alors de 3.6.37 que x est de type 2 ou 3 et que X est quasi-lisse en x .

(3.6.40) Proposition. Soient Y et X deux k -courbes analytiques ; on suppose que chacune d'elles est une couronne virtuelle. Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme tel que $\varphi(Y)$ rencontre $S^{\text{an}}(X)$.

i) Il existe un intervalle non vide I de $S^{\text{an}}(X)$ tel que φ induise un morphisme fini et plat $Y \rightarrow I^{\sharp}$.

ii) On a $\varphi^{-1}(I) = S^{\text{an}}(Y)$, et $S^{\text{an}}(Y) \rightarrow I$ est un homéomorphisme.

iii) La flèche $Y \rightarrow I^{\sharp}$ commute aux rétractions canoniques de ses source et but sur leurs squelettes analytiques respectifs $S^{\text{an}}(Y)$ et I .

iv) Si J est un intervalle non vide de $S^{\text{an}}(Y)$ alors $J^{\sharp} = \varphi^{-1}(\varphi(J)^{\sharp})$; si J_0 désigne le type de J^{\sharp} alors le type de $\varphi(J)^{\sharp}$ est égal à $J_0^{\frac{\text{deg}(Y \rightarrow I^{\sharp})}{[\mathfrak{s}(Y) : \mathfrak{s}(X)]}}$, et l'on a en particulier

$$\text{Mod}(\varphi(J)^{\sharp}) = \text{Mod}(J^{\sharp})^{\frac{\text{deg}(Y \rightarrow I^{\sharp})}{[\mathfrak{s}(Y) : \mathfrak{s}(X)]}}.$$

Démonstration. On va tout d'abord se ramener au cas où X et Y sont géométriquement connexes.

(3.6.40.1) Le morphisme φ admet une factorisation canonique

$$Y \rightarrow X \otimes_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y) \rightarrow X.$$

La flèche $\psi : X \otimes_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y) \rightarrow X$ est finie et plate de degré $[\mathfrak{s}(Y) : \mathfrak{s}(X)]$, le fermé $\psi^{-1}(S^{\text{an}}(X))$ de $X \otimes_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y)$ est égal à $S^{\text{an}}(X \otimes_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y))$, et

$$S^{\text{an}}(X \otimes_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y)) \rightarrow S^{\text{an}}(X)$$

est un homéomorphisme ; le morphisme ψ commute aux rétractions canoniques de ses source et but sur leurs squelettes analytiques respectifs, et si J est un intervalle non vide tracé sur $S^{\text{an}}(X \otimes_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y))$ alors les couronnes virtuelles J^{\sharp} et $\psi(J)^{\sharp}$ ont même type.

On peut donc remplacer X par $X \otimes_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y)$, puis φ par $Y \rightarrow X \otimes_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y)$ et enfin k par $\mathfrak{s}(Y)$, et par là se ramener au cas où Y et X sont géométriquement connexes.

(3.6.40.2) Preuve lorsque Y et X sont géométriquement connexes. Chacune des $\widehat{k^a}$ -courbes $Y_{\widehat{k^a}}$ et $X_{\widehat{k^a}}$ est alors une couronne ; si I est un intervalle tracé sur $S^{\text{an}}(X)$ (resp. $S^{\text{an}}(Y)$), on notera $I_{\widehat{k^a}}$ son image réciproque sur $S^{\text{an}}(Y_{\widehat{k^a}})$ (resp. $S^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}})$) ; on écrira simplement $I_{\widehat{k^a}}^{\sharp}$ au lieu de $(I^{\sharp})_{\widehat{k^a}} \simeq (I_{\widehat{k^a}})^{\sharp}$. Par hypothèse, $\varphi(Y)$ rencontre $S^{\text{an}}(X)$; en conséquence, $\varphi_{\widehat{k^a}}(Y_{\widehat{k^a}})$ rencontre $S^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}})$. Il découle alors de 3.6.24 : qu'il existe un intervalle non vide I tracé sur $S^{\text{an}}(X)$ tel que $\varphi_{\widehat{k^a}}$ induise un morphisme fini et plat $Y_{\widehat{k^a}} \rightarrow I_{\widehat{k^a}}^{\sharp}$; que $S^{\text{an}}(Y)_{\widehat{k^a}}$ est égal à l'image réciproque de $I_{\widehat{k^a}}$ sur $Y_{\widehat{k^a}}$; et que l'application continue $S^{\text{an}}(Y)_{\widehat{k^a}} \rightarrow I_{\widehat{k^a}}^{\sharp}$ est un homéomorphisme.

Dès lors, φ induit un morphisme de Y vers le domaine analytique I^{\sharp} de X ; et comme $Y_{\widehat{k^a}} \rightarrow I_{\widehat{k^a}}^{\sharp}$ est finie et plate, la flèche $Y \rightarrow I^{\sharp}$ est finie et plate

(3.2.4 et sq. – les remarques du 3.2.4.3 s'appliquent ici), de degré égal à celui de $Y_{\widehat{k^a}} \rightarrow I_{\widehat{k^a}}^\sharp$, d'où i). On déduit également de ce qui précède que $S^{\text{an}}(Y)$ est égal à l'image réciproque de I sur Y , et que $S^{\text{an}}(Y) \rightarrow I$ est un homéomorphisme, d'où ii). Il résulte alors aussitôt du lemme 1.5.18 que φ commute aux rétractions canoniques de ses source et but sur leurs squelettes analytiques respectifs, d'où iii).

Soit J un intervalle non vide de $S^{\text{an}}(Y)$; l'égalité $J^\sharp = \varphi^{-1}(\varphi(J)^\sharp)$ est une conséquence immédiate de iii). Le type J_0 de J^\sharp est égal à celui de $J_{\widehat{k^a}}^\sharp$, et le type de $\varphi(J)^\sharp$ est égal à celui de $\varphi(J)_{\widehat{k^a}}^\sharp = \varphi(J_{\widehat{k^a}})^\sharp$; mais ce dernier type est, en vertu de 3.6.24.1, égal à $J_0^{\text{deg}(Y_{\widehat{k^a}} \rightarrow I_{\widehat{k^a}}^\sharp)}$, soit encore à $J_0^{\text{deg}(Y \rightarrow I^\sharp)}$. \square

(3.6.41) Remarque. Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre couronnes virtuelles. Si φ est fini et plat alors $\varphi(Y) = X$, et la proposition ci-dessus s'applique donc, avec $I = S^{\text{an}}(X)$ tout entier.

(3.6.42) Soit X une k -couronne virtuelle et soit ℓ un entier premier à p . Soit Y un μ_ℓ -torseur de Kummer sur X , et soit Z une composante connexe de Y . C'est alors une couronne virtuelle, et gentiment virtuelle si X est gentiment virtuelle. En effet, soit L une extension complète de k déployant X . Si Z' est une composante connexe de Z_L , alors Z' est une composante connexe de Y_L , et est dès lors une $\mathfrak{s}(Z')$ -couronne en vertu de 3.6.31.3, d'où notre assertion.

En particulier, le morphisme $Z \rightarrow X$ est justiciable de la remarque 3.6.41 ci-dessus. Il s'ensuit notamment, compte-tenu de l'assertion ii) de la proposition 3.6.40, que tout point de $S^{\text{an}}(X)$ a un et un seul antécédent sur Z .

Existence de toises sur les sous-graphes compacts d'une courbe analytique

(3.6.43) *La toise canonique sur la compactification arboricole d'un disque virtuel.* Soit X un disque virtuel sur k , soit \widehat{X} sa compactification arboricole (sans autre structure que celle d'un espace topologique) et soit ω l'unique bout de X . Soit δ l'application de \widehat{X} dans \mathbb{R}_+ qui envoie ω sur 0 et x sur $1 - r_{\text{norm}}(x)$ si $x \in X$; c'est une toise partielle sur \widehat{X} , basée en ω et bornée par 1. La toise sur \widehat{X} induite par δ est invariante par tout automorphisme de X ; elle sera appelée la *toise canonique* sur \widehat{X} ; elle est bornée par 2.

Si Y est une courbe k -analytique et si U est un ouvert de Y qui est un disque virtuel relativement compact, \overline{U} s'identifie naturellement à \widehat{U} ; par conséquent, on pourra parler de la toise canonique sur \overline{U} .

(3.6.44) *La toise standard sur la droite projective.* Si U est une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\eta_1\}$, c'est un disque virtuel (3.6.33.4); on notera l_U la toise canonique sur $\overline{U} = U \cup \{\eta_1\}$.

Le sous-arbre $\{\eta_1\}$ de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ est admissible. La toise définie par concaténation des l_U et de la toise triviale sur $\{\eta_1\}$ sera appelée la *toise standard* de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$; elle est bornée par 2.

(3.6.45) Théorème. *Soit X une courbe k -analytique et soit Y un sous-graphe compact de X . Le graphe Y admet une toise.*

Démonstration. On commence par plusieurs réductions.

(3.6.45.1) *On peut supposer que X est affinoïde et que $Y = X$.* En effet, il existe par compacité de Y une famille finie (X_i) de domaines affinoïdes de X qui recouvrent Y . Il suffit de montrer que $\bigcup X_i$ admet une toise ; on peut pour ce faire, en vertu de 1.6.5, se contenter de montrer que chacun des X_i admet une toise ; on s'est donc bien ramené à la situation annoncée.

(3.6.45.2) *On peut supposer que X est un domaine affinoïde de l'analytifiée d'une k -courbe algébrique projective, irréductible et lisse \mathcal{X} .* En effet, le problème étant purement topologique, on peut étendre les scalaires au complété de la clôture parfaite de k , et donc supposer k parfait. Grâce à la proposition 1.9.26 on peut remplacer X par sa normalisation et donc le supposer quasi-lisse. Il admet alors un recouvrement fini (X_i) où chaque X_i est un domaine affinoïde de X s'immergeant dans l'analytification d'une k -courbe algébrique irréductible et lisse, que l'on peut compactifier en une courbe lisse puisque k est parfait. D'après le 1.6.5, il suffit de s'assurer que chacun des X_i admet une toise ; on s'est donc bien, là encore, ramené à la situation annoncée.

(3.6.45.3) Comme \mathcal{X} est lisse, il existe un morphisme fini et génériquement étale $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$; soit \mathcal{Y} la normalisée de \mathcal{X} dans une clôture galoisienne de l'extension $\kappa(\mathcal{X})/k(T)$, soit G le groupe de Galois de $\kappa(\mathcal{Y})$ sur $k(T)$, et soit H le sous-groupe de G correspondant à $\kappa(\mathcal{X})$. On dispose d'identifications topologiques naturelles

$$\mathcal{X}^{\text{an}} \simeq \mathcal{Y}^{\text{an}}/H \text{ et } \mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \simeq \mathcal{Y}^{\text{an}}/G.$$

On a vu au 3.6.44 que $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ admet une toise. On déduit alors du théorème 1.9.24 que \mathcal{Y}^{an} admet une toise, puis que \mathcal{X}^{an} en admet une. Par restriction, X admet une toise, ce qui achève la démonstration. \square

3.7 Algébrisation

Algébrisation des courbes analytiques propres

(3.7.1) Proposition. *Soit X une courbe k -analytique propre. L'ensemble des points rigides de X en est une partie dense pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. Si $|k^\times| \neq \{1\}$, il résulte du fait que X est sans bord que l'ensemble de ses points rigides en est une partie dense pour la topologie usuelle, et *a fortiori* pour la topologie de Zariski. On peut donc supposer que $|k^\times| = \{1\}$.

Soit \mathcal{U} un ouvert de Zariski non vide de X ; nous allons montrer qu'il contient un point rigide. Comme $\widehat{k^a}$ est une clôture algébrique de k , il suffit de montrer que $\mathcal{U}_{\widehat{k^a}}$ contient un point rigide, ce qui permet de se ramener au cas où k est algébriquement clos. On peut, quitte à remplacer X par sa normalisée, supposer que X est lisse, puis qu'elle est irréductible. Dans ce cas $X \setminus \mathcal{U}$ est un ensemble fini de k -points ; il suffit donc, pour conclure, de démontrer que X contient une infinité de k -points.

(3.7.1.1) *L'ensemble $X_{[2]}$ est non vide.* Supposons que ce ne soit pas le cas ; on a alors $X = X_{[1,3]}$. Si $x \in X_{[3]}$, le groupe $|\mathcal{H}(x)^\times|$ est libre de rang 1, et

possède donc un unique générateur strictement plus petit que 1 ; notons-le $r(x)$. Le point x possède un voisinage ouvert dans X qui est isomorphe à un ouvert de l'analytifiée \mathcal{Y}^{an} d'une k -courbe projective, lisse et irréductible \mathcal{Y} ; soit y le point de \mathcal{Y}^{an} correspondant à x via l'isomorphisme évoqué.

Pour tout point fermé P de \mathcal{Y} et tout $r \in]0; 1[$ notons $\xi_{P,r}$ le point de \mathcal{Y}^{an} correspondant à la valeur absolue r^{v_P} de $\kappa(\mathcal{Y})$, où v_P est la valuation discrète associée à P ; notons que $|\mathcal{H}(\xi_{P,r})^\times| = r^{\mathbb{Z}}$. Comme y est de type 3 il est de la forme $\xi_{P,r}$ avec r et P comme ci-dessus ; l'ensemble $\{\xi_{P,s}\}_{0 < s < 1}$ est alors un voisinage ouvert de y dans \mathcal{Y}^{an} .

Il s'ensuit que x possède un voisinage dans X qui est contenu dans $X_{[3]}$, homéomorphe à un intervalle ouvert, et sur lequel l'application r est continue et strictement monotone.

Si x est un k -point de X , il possède un voisinage ouvert V qui est un disque ; quitte à le restreindre, on peut supposer celui-ci isomorphe à l'ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par l'inégalité $|T| < s$ pour un certain $s \in]0; 1[$; cet ouvert peut simplement se décrire comme la réunion de l'origine et de $\{\eta_t\}_{0 < t < s}$; il s'ensuit que tout point de $V \setminus \{x\}$ est de type 3, et que $r(z) \rightarrow 0$ quand le point z de $V \setminus \{x\}$ tend vers x .

On déduit de ce qui précède que r se prolonge en une application continue de X dans \mathbb{R}_+ telle que $r(x) = 0$ pour tout k -point x de X . Par compacité, r atteint son maximum en un point x de X . Comme X n'est pas constitué uniquement de points rigides (c'est un espace de dimension 1) et comme r ne s'annule par construction qu'en les points rigides de X , le point x est de type 3. Mais on a vu plus haut qu'il possède alors un voisinage homéomorphe à un intervalle ouvert sur lequel r est strictement monotone, ce qui contredit le fait qu'elle atteigne son maximum en x .

(3.7.1.2) Conclusion. On peut donc choisir un point x de type 2 sur X . Par lissité, il existe un voisinage ouvert V de x dans X et un morphisme fini, étale et surjectif φ de V vers un ouvert U de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$. Comme $\varphi(x)$ est de type 2, c'est nécessairement le point η_1 de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$; en tant que voisinage de η_1 , l'ouvert U contient une infinité de k -points ; comme φ est fini et surjectif, V contient une infinité de k -points, ce qui achève la démonstration. \square

(3.7.2) Théorème. *Soit X une k -courbe propre. Elle est isomorphe à l'analytification d'une k -courbe projective.*

Démonstration. Commençons par rappeler que comme X est propre, les espaces vectoriels de cohomologie d'un faisceau cohérent sur X sont tous de dimension finie ; ce fait sera implicitement utilisé dans la suite.

L'ensemble des points de X dont l'anneau local est de Cohen-Macaulay est un ouvert de Zariski de X contenant tous les points non rigides de X (l'anneau local en un tel point est artinien), et rencontrant par conséquent chaque composante irréductible de X . Cela entraîne, en vertu de la proposition 3.7.1 ci-dessus, qu'il existe un ensemble fini D de points rigides de X , rencontrant toutes les composantes irréductibles de X et constitué de points dont l'anneau local est de Cohen-Macaulay.

Chaque point de D peut alors être localement défini, *ensemblistement*, comme le lieu d'annulation d'une fonction f qui n'est pas diviseur de zéro ;

il existe donc un diviseur de Cartier effectif D de X dont le support est égal à D ; soit \mathcal{L} le fibré en droites correspondant à D .

(3.7.2.1) Pour n assez grand le fibré $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections globales. Comme $\mathcal{L}|_{X-D}$ est trivial, il suffit de vérifier cette assertion en chacun des points de D . Pour tout entier n , la tensorisation par $\mathcal{L}^{\otimes n}$ de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

fournit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n-1} \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_D \rightarrow 0,$$

d'où une suite exacte de cohomologie

$$H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes n-1}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow 0,$$

le faisceau $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_D$ étant à support dans D et donc à cohomologie triviale en rang > 0 .

Par ce qui précède, la suite $(\dim_k H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes n}))_n$ est décroissante, et donc stationnaire à partir d'un certain rang. Par conséquent,

$$H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes n-1}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$$

est bijective pour n assez grand; il s'ensuit que $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_D)$ est surjective pour n assez grand, d'où notre assertion.

(3.7.2.2) Quitte à multiplier D (et \mathcal{L}) par un entier convenable, on peut donc supposer que \mathcal{L} est engendré par ses sections globales. Soit A la sous- k -algèbre graduée de $\bigoplus_n H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ engendrée par $H^0(X, \mathcal{L})$; c'est une k -algèbre graduée de type fini; comme \mathcal{L} est engendré par ses sections globales, on dispose d'un morphisme naturel d'espaces annelés de X vers $\mathcal{X} := \text{Proj } A$; il résulte de la propriété universelle de l'analytifiée que ce morphisme se factorise par une flèche $\varphi : X \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$.

Comme D est effectif, la fonction 1 définit une section globale de \mathcal{L} qui s'annule exactement en les points de D , lequel rencontre chacune des composantes irréductibles de X ; soit a l'élément de degré 1 de A qui correspond à cette section.

Soit Y une composante irréductible de X et soit y l'un des points de D situé sur Y . L'image x de y sur \mathcal{X}^{an} est située sur le lieu des zéros Z de a (vue comme section d'un fibré ample sur \mathcal{X}^{an}); si y' est un point de Y n'appartenant pas à D alors $\varphi(y) \notin Z$; en particulier, $\varphi(y) \neq x$; il s'ensuit que Y n'est pas contenue dans $\varphi^{-1}(x)$.

Si t est un point rigide de X , la fibre $\varphi^{-1}(\varphi(t))$ ne contient par ce qui précède aucune composante irréductible de X ; par conséquent, $\varphi^{-1}(\varphi(t))$ est de dimension nulle. L'ensemble des points de X en lesquels la dimension relative de X est nulle en est un ouvert de Zariski; comme il contient tous les points rigides de X , c'est X elle-même en vertu de la proposition 3.7.1.

Comme X est propre, φ est compacte; comme φ est de dimension relative 0 en tout point de X , et est par ailleurs sans bord puisque X est sans bord, φ est

fini en tout point de X ; étant propre et à fibres finies, φ est fini. Il découle alors du caractère projectif de \mathcal{X} et de GAGA que X est algébrisable. \square

(3.7.3) Remarque. Si X est normale, la preuve du théorème précédent peut être simplifiée : on choisit un point rigide P sur X (grâce à la proposition 3.7.1) ; c'est un diviseur de Cartier, et le même argument que ci-dessus montre que $\mathcal{O}(nP)$ est engendré par ses sections globales pour n assez grand.

En particulier, il existe n tel que $\mathcal{O}(nP)$ admette une section globale ne s'annulant pas en P ; celle-ci peut s'interpréter comme une fonction méromorphe non constante, et fournit ainsi un morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$; on procède alors encore une fois comme ci-dessus : on montre que ce morphisme est fini, et on conclut par GAGA.

(3.7.4) Remarque. En vertu de GAGA l'analytification des variétés propres est un foncteur pleinement fidèle. On peut donc reformuler le théorème 3.7.2 en disant que $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\text{an}}$ établit une équivalence entre la catégorie des k -courbes algébriques propres et celle des courbes k -analytiques propres.

Algébrisation des courbes formelles propres

(3.7.5) On appellera k° -courbe formelle (resp. k° -courbe algébrique) tout k° -schéma formel (resp. k° -schéma) plat, de type fini et purement de dimension (resp. de dimension relative) 1.

(3.7.6) Théorème. Soit \mathfrak{X} une k° -courbe formelle propre.

i) Il existe une k° -courbe algébrique projective \mathcal{X} telle que \mathfrak{X} s'identifie à la complétion de \mathcal{X} le long de sa fibre spéciale.

ii) Supposons que $|k^\times|$ est libre de rang 1, que $\mathfrak{X}_{\tilde{k}} := \mathfrak{X} \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$ et \mathfrak{X}_η sont réduits, que les composantes irréductibles de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ sont génériquement lisses, et qu'il existe un sous-corps dense F de k et une F -courbe algébrique \mathcal{Y} telle que

$$\mathfrak{X}_\eta \simeq (\mathcal{Y} \times_F k)^{\text{an}} ;$$

il existe alors une F° -courbe projective \mathcal{Y} telle que $\mathcal{Y}_\eta \simeq \mathcal{Y}$ et tel que \mathfrak{X} s'identifie à la complétion de $\mathcal{Y} \otimes_{F^\circ} k^\circ$ le long de sa fibre spéciale.

Démonstration. Le théorème est évident si $|k^\times| = \{1\}$; on suppose à partir de maintenant que ce n'est pas le cas, et l'on fixe un élément a de k tel que $0 < |a| < 1$.

(3.7.6.1) Preuve de i). Choisissons un fibré ample \mathcal{L} sur la \tilde{k} -courbe projective $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$. L'obstruction à relever \mathcal{L} en un fibré en droites sur \mathfrak{X} vit dans $H^2(\mathfrak{X}_{\tilde{k}}, k^{\circ\circ} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$; l'espace topologique $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ étant de dimension cohomologique 1, cette obstruction s'annule et \mathcal{L} se relève donc en un fibré en droites \mathfrak{L} sur \mathfrak{X} .

Soit n un entier. Pour tout idéal de définition \mathcal{I} de k° , le k°/\mathcal{I} -module $H^0(\mathfrak{X}/\mathcal{I}, \mathfrak{L}^{\otimes n}/\mathcal{I})$ est plat et de présentation finie, et par conséquent libre puisque k°/\mathcal{I} est local ; comme le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/\mathcal{I}}$ -module $\mathfrak{L}^{\otimes n}/\mathcal{I}$ est k°/\mathcal{I} -plat, la formation de ses sections globales commute aux changements de base.

On déduit de ce qui précède que

$$H^0(\mathfrak{X}/\mathcal{J}, \mathfrak{L}^{\otimes n}/\mathcal{J}) \simeq H^0(\mathfrak{X}/\mathcal{I}, \mathfrak{L}^{\otimes n}/\mathcal{I})/\mathcal{J}$$

pour tout couple $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ d'idéaux de définition de k° tel que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$; il s'ensuit que $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est un k° -module libre de rang fini.

Comme \mathcal{L} est ample, la \tilde{k} -algèbre $\bigoplus_n H^0(\mathfrak{X}_{\tilde{k}}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est engendrée par ses N premiers sommandes pour un certain entier N , ce qui revient à dire que pour tout entier n , l'application naturelle

$$\bigoplus_{n_1, \dots, n_r \leq N, \sum n_i = n} \left(\bigotimes_i H^0(\mathfrak{X}_{\tilde{k}}, \mathcal{L}^{\otimes n_i}) \right) \rightarrow H^0(\mathfrak{X}_{\tilde{k}}, \mathcal{L}^{\otimes n})$$

est surjective. En vertu du lemme de Nakayama, il s'ensuit que l'application

$$\bigoplus_{n_1, \dots, n_r \leq N, \sum n_i = n} \left(\bigotimes_i H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n_i}) \right) \rightarrow H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$$

est surjective pour tout n , ce qui signifie que la k° -algèbre $\bigoplus H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est de type fini ; comme elle est somme directe de modules libres, elle est sans torsion et donc plate ; par conséquent, elle est de présentation finie.

Posons $\mathcal{X} = \text{Proj} \bigoplus_n H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Comme \mathcal{L} est engendré par ses sections globales, il existe un morphisme naturel de \mathfrak{X} vers le complété $\widehat{\mathcal{X}}$ de \mathcal{X} le long de sa fibre spéciale.

Pour tout idéal de définition \mathcal{I} de k° , le fibré en droites \mathcal{L}/\mathcal{I} sur le k°/\mathcal{I} -schéma \mathfrak{X}/\mathcal{I} est relativement ample ; par conséquent, $\mathfrak{X}/\mathcal{I} \rightarrow \widehat{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}$ est un isomorphisme ; ceci valant pour tout \mathcal{I} , le morphisme $\mathfrak{X} \rightarrow \widehat{\mathfrak{X}}$ est un isomorphisme, ce qui achève de prouver i).

(3.7.6.2) Preuve de ii). Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses de ii). Choisissons sur chacune des composantes irréductibles de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ un point fermé en lequel \mathfrak{X} est lisse (c'est possible par hypothèse) ; notons $(P_i)_i$ la collection finie de points fermés ainsi obtenus.

Pour tout i , l'image réciproque U_i de P_i sur \mathfrak{X}_η est un ouvert non vide. Il existe un morphisme fini et plat de \mathcal{Y} vers \mathbb{P}_F^1 ; la flèche

$$\mathfrak{X}_\eta \simeq (\mathcal{Y}_k)^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$$

est ouverte ; il s'ensuit, compte-tenu de la densité de k^s dans $\widehat{k^a}$, de la densité de F dans k , et du lemme de Krasner, que l'image de U_i sur $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ contient un point rigide provenant d'un point fermé de \mathbb{P}_F^1 ; ce dernier possède par construction un antécédent Q_i sur \mathcal{Y} dont l'image réciproque Q'_i sur \mathcal{Y}_k est, modulo l'identification entre $(\mathcal{Y}_k)^{\text{an}}$ et \mathfrak{X}_η , contenue dans U_i . Comme P_i est un point lisse de \mathfrak{X}_s , il est contenu dans le lieu lisse du schéma formel \mathfrak{X} ; par conséquent, le fermé Q'_i est contenu dans le lieu lisse de $\mathfrak{X}_\eta \simeq (\mathcal{Y}_k)^{\text{an}}$, et Q_i est dès lors contenu dans le lieu lisse de \mathcal{Y} .

Soit \mathcal{L} le fibré en droites sur \mathcal{Y} correspondant au diviseur de Cartier $\sum Q_i$; l'image réciproque \mathcal{L}_k de \mathcal{L} sur \mathcal{Y}_k est le fibré en droites associé au diviseur de Cartier $\sum Q'_i$. Si P est un point quelconque du support de $\sum Q'_i$, il induit, *via* l'identification $(\mathcal{Y}_k)^{\text{an}} \simeq \mathfrak{X}_\eta$, un morphisme fini $\text{Spf } \mathcal{H}(P)^\circ \rightarrow \mathfrak{X}$, dont l'image est un fermé de Zariski de \mathfrak{X} de support $\{P_i\}$ pour un certain i ; c'est donc un

fermé de codimension 1 du lieu lisse de \mathfrak{X} , et *a fortiori* de son lieu régulier ; c'est de ce fait un diviseur de Cartier sur \mathfrak{X} . Il s'ensuit que $\mathcal{L}_k^{\text{an}}$, vu comme fibré en droites sur \mathfrak{X}_η , s'identifie à la fibre générique d'un fibré en droites \mathcal{L} sur \mathfrak{X} , qui est tel que $\mathcal{L}_{\tilde{k}}$ soit associé à un diviseur de Cartier de la forme $\sum n_i P_i$ où les n_i sont des entiers strictement positifs ; en particulier, $\mathcal{L}_{\tilde{k}}$ est ample ; il s'ensuit que \mathcal{L}_η et \mathcal{L} sont amples.

Choisissons un recouvrement formel affine (\mathfrak{U}_j) de \mathfrak{X} qui trivialisent \mathcal{L} . Pour tout j , l'espace analytique $(\mathfrak{U}_j)_\eta$ est un domaine affinoïde de \mathfrak{X}_η . Comme $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est réduite, la norme spectrale sur $H^0((\mathfrak{U}_j)_\eta, \mathcal{O}_{(\mathfrak{U}_j)_\eta})$ prend ses valeurs dans $|k|$, et

$$H^0(\mathfrak{U}_j, \mathcal{O}_{\mathfrak{U}_j}) = H^0((\mathfrak{U}_j)_\eta, \mathcal{O}_{(\mathfrak{U}_j)_\eta})^\circ.$$

Fixons un entier n . Le fibré $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est trivialisé par le recouvrement (\mathfrak{U}_j) . On définit comme suit une métrique sur $H^0(\mathfrak{X}_\eta, \mathcal{L}_\eta^{\otimes n})$: une section globale f de $\mathcal{L}_\eta^{\otimes n}$ étant donnée, on choisit pour tout j une trivialisatoin de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur \mathfrak{U}_j ; elle permet de voir la restriction $f|_{(\mathfrak{U}_j)_\eta}$ comme une fonction analytique sur $(\mathfrak{U}_j)_\eta$, dont la norme ne dépend pas de la trivialisatoin en question, et on définit $\|f\|$ comme le maximum des normes ainsi obtenues lorsque j varie. En vertu de ce qui précède, $\|f\| \in k$ et f s'étend en une section globale de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur \mathfrak{X} si et seulement si $\|f\| \leq 1$.

Le k -espace vectoriel $H^0(\mathfrak{X}_\eta, \mathcal{L}_\eta^{\otimes n})$ étant muni d'une norme qui prend ses valeurs dans $|k|$, il possède une base orthonormale pour cette dernière. On peut par ailleurs écrire, en vertu des théorèmes GAGA,

$$H^0(\mathfrak{X}_\eta, \mathcal{L}_\eta^{\otimes n}) \simeq H^0(\mathcal{Y}_k^{\text{an}}, (\mathcal{L}_k^{\text{an}})^{\otimes n}) \simeq H^0(\mathcal{Y}_k, \mathcal{L}_k^{\otimes n}) \simeq H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_F k,$$

et partant identifier $H^0(\mathfrak{X}_\eta, \mathcal{L}_\eta^{\otimes n})$ à $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_F k$.

Par densité de F dans k , il existe une base orthonormée de $H^0(\mathfrak{X}_\eta, \mathcal{L}_\eta^{\otimes n})$ constituée d'éléments appartenant à $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n})$.

Soit A_n le F° -module $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n})^\circ$; on déduit de ce qui précède que

$$H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) = H^0(\mathfrak{X}_\eta, \mathcal{L}_\eta^{\otimes n})^\circ \simeq A_n \otimes_{F^\circ} k^\circ$$

et que $A_n \otimes_{F^\circ} F \simeq H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n})$.

Par conséquent, si l'on appelle B la F° -algèbre graduée $\bigoplus A_n$, alors

$$B \otimes_{F^\circ} k^\circ \simeq \bigoplus_n H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}).$$

Le fibré \mathcal{L}_s étant ample, on a vu lors de la preuve de l'assertion i) au 3.7.6.1 que la k° -algèbre graduée $\bigoplus_n H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est de présentation finie, et que \mathfrak{X} s'identifie au complété formel le long de sa fibre spéciale du k° -schéma projectif associé. Par conséquent, B est de présentation finie, et si l'on pose $\mathcal{Y} = \text{Proj } B$ alors \mathfrak{X} s'identifie au complété formel de $\mathcal{Y} \otimes_{F^\circ} k^\circ$ le long de sa fibre spéciale.

On a par ailleurs $B \otimes_{F^\circ} F \simeq \bigoplus_n H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n})$. On en déduit, le fibré \mathcal{L} étant ample, que $\mathcal{Y}_\eta \simeq \mathcal{Y}$, ce qui achève la démonstration. \square

(3.7.7) Remarque. En vertu de GAGA, la restriction de $\mathcal{X} \mapsto \widehat{\mathcal{X}}$ à la catégorie des k° -schémas propres est pleinement fidèle. On peut donc reformuler l'assertion i) du théorème 3.7.6 en disant que $\mathcal{X} \mapsto \widehat{\mathcal{X}}$ induit une équivalence entre la catégorie des k° -courbes algébriques propres et celle des k° -courbes formelles propres.

Chapitre 4

Étude locale des courbes analytiques

4.1 Chirurgie sur les courbes analytiques

Prolongement d'un revêtement étale

(4.1.1) **Lemme.** *Soit x un point de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ et soit U une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$. Soit $y \in U$, soit $V \rightarrow]y; x[^{\flat}$ un revêtement fini étale et soit $t \in]y; x[$. Il existe un espace k -analytique W normal et lisse en dehors d'un ensemble fini de points rigides et un morphisme fini et plat $W \rightarrow U$ tel que*

$$W \times_U]t; x[^{\flat} \simeq_U V \times_U]t; x[^{\flat}.$$

Démonstration. Choisissons $\tau \in]y; t[$. Appartenant à l'intérieur d'un intervalle ouvert tracé sur $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$, le point τ est de type 2 ou 3 et est de ce fait situé au-dessus du point générique du schéma \mathbb{P}_k^1 ; le corps des fonctions F de ce dernier s'identifie donc naturellement à un sous-corps dense de $\mathcal{H}(\tau)$. La fibre V_τ est isomorphe au spectre analytique d'une $\mathcal{H}(\tau)$ -algèbre finie étale, laquelle provient par le lemme de Krasner d'une F -algèbre finie étale. Il existe par conséquent un morphisme $\mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ qui est fini, plat et génériquement étale sur son but, et un isomorphisme $V_\tau \simeq \mathcal{Y}_\tau^{\text{an}}$; en vertu des propriétés satisfaites par $\mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, la k -courbe \mathcal{Y} est lisse en dehors d'un ensemble fini de points fermés; par ailleurs l'on peut, quitte à remplacer \mathcal{Y} par sa normalisée, la supposer normale.

Le point τ étant situé au-dessus du point générique de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$, le morphisme $\mathcal{Y}^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ est étale au-dessus d'un voisinage de τ ; par conséquent, l'isomorphisme $V_\tau \simeq \mathcal{Y}_\tau^{\text{an}}$ s'étend en un Ω isomorphisme ι entre $V \times_U \Omega$ et $\mathcal{Y}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}} \Omega$ pour un voisinage ouvert convenable Ω de τ dans U , voisinage qui contient un ouvert de la forme $] \tau'; \tau[^{\flat}$ pour un certain $\tau' \in]y; \tau[$; par abus, l'on notera encore ι l'isomorphisme déduit de ι par le changement de base $] \tau'; \tau[^{\flat} \hookrightarrow \Omega$.

Soit Z la composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\tau\}$ qui contient y , et soit W l'espace k -analytique obtenu par recollement de $\mathcal{Y}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}} Z$ et $V \times_U] \tau'; \tau[^{\flat}$; $x[^{\flat}$

le long de l'isomorphisme ι entre leurs ouverts respectifs $\mathcal{Y}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}}]\tau'; \tau[^\flat$ et $V \times_U]\tau'; \tau[^\flat$. Puisque ι commute aux projections sur $]\tau'; \tau[^\flat$, les flèches

$$\mathcal{Y}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}} Z \rightarrow Z \text{ et } V \times_U]\tau'; \tau[^\flat \rightarrow]\tau'; \tau[^\flat$$

induisent un morphisme $\psi : W \rightarrow U$.

En vertu de l'égalité $Z \cap]\tau'; \tau[^\flat =]\tau'; \tau[^\flat$, le morphisme ψ est fini et plat localement sur son but, et partant globalement; l'on déduit par ailleurs de l'inclusion $]\tau'; \tau[^\flat \subset]\tau'; \tau[^\flat$ que $\psi^{-1}(]\tau'; \tau[^\flat)$ est U -isomorphe à $V \times_U]\tau'; \tau[^\flat$.

La k -courbe \mathcal{Y} est normale et lisse en dehors d'un ensemble fini de points fermés; par conséquent, l'ouvert $\mathcal{Y}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}} Z$ de \mathcal{Y}^{an} est normal, et lisse en dehors d'un ensemble fini de points rigides; par ailleurs, V est muni d'un morphisme étale vers l'espace lisse U , et est de ce fait lisse, et *a fortiori* normal. Comme W est construit par recollement de $\mathcal{Y}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}} Z$ et $V \times_U]\tau'; \tau[^\flat$, il est normal, et lisse en dehors d'un ensemble fini de points rigides. \square

La chirurgie proprement dite

(4.1.2) Théorème. *Soit X une courbe k -analytique sans bord et génériquement lisse, soit S un sous-ensemble fini de points lisses de X , et soit Ω une réunion finie de composantes connexes de $X \setminus S$ telle que $X - \Omega$ soit compact; on note \mathcal{E} l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus S$ non incluses dans Ω , et \mathcal{B} l'ensemble fini $\text{br}(X, S)_{\subset \Omega}$. Il existe :*

- un fermé T de X contenu dans Ω ;
- une k -courbe algébrique projective \mathcal{X} dont le lieu lisse est dense, et qui est normale si X est normale;
- une famille $(\Omega_b)_{b \in \mathcal{B}}$ d'ouverts connexes, non vides, normaux et deux à deux disjoints de \mathcal{X}^{an} ;
- un isomorphisme entre $X \setminus T$ et un ouvert de \mathcal{X}^{an} modulo lequel :

$$1) \quad \mathcal{X}^{\text{an}} \setminus S = \coprod_{W \in \mathcal{E}} W \coprod \left(\coprod_b \Omega_b \right);$$

- 2) \mathcal{B} s'identifie à $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, S)_{\subset \coprod_b \Omega_b}$, et pour tout $b \in \mathcal{B}$, la branche correspondante de \mathcal{X}^{an} appartient à $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, S)_{\subset \Omega_b}$ et en est le seul élément.

Démonstration. Pour tout $b \in \mathcal{B}$ l'on note x_b l'origine de b . L'on choisit un élément $(Z_b) \in \prod_{b \in \mathcal{B}} \text{Sec } b$ tel que les sections Z_b soient deux à deux disjointes; le sous-ensemble $T := \Omega - \coprod_b Z_b$ de Ω est un fermé du graphe X .

(4.1.2.1) *La construction des Ω_b et d'un espace analytique Y qui se révélera a posteriori être égal à \mathcal{X}^{an} .*

Fixons $b \in \mathcal{B}$. Comme x_b est un point lisse de X , il existe un revêtement fini étale φ de source un voisinage ouvert de x_b dans X et de but un ouvert de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$; on peut supposer que la source de φ est un arbre et que x_b est le seul antécédent de $\varphi(x_b)$.

Soit U la composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\varphi(x_b)\}$ qui correspond à la branche $\varphi(b)$. On peut supposer, quitte à restreindre Z_b , qu'il existe un élément $y \in U$ tel que $]y; \varphi(x_b)[^{\flat}$ soit contenu dans le but de φ et tel que Z_b soit une composante connexe de $\varphi^{-1}(]y; \varphi(x_b)[^{\flat})$; en vertu du lemme 4.1.1, on peut de surcroît faire l'hypothèse qu'il existe un espace k -analytique normal Ω_b , lisse en dehors d'un nombre fini de points rigides, muni d'un morphisme fini et plat ψ vers U et d'un U -isomorphisme $\iota_b : \psi^{-1}(]y; \varphi(x_b)[^{\flat}) \simeq Z_b$.

Les ouverts de X de la forme $Z_b \times_{]y; \varphi(x_b)[^{\flat}}]t; \varphi(x_b)[^{\flat}$, où t parcourt $]y; \varphi(x_b)[$, forment une base de sections de b ; chacun d'eux s'identifie, *via* l'isomorphisme ι_b , à l'ouvert $\psi^{-1}(]t; \varphi(x_b)[^{\flat})$ de Ω_b .

Les parties de U de la forme $U -]t; \varphi(x_b)[^{\flat}$, où t parcourt $]y; \varphi(x_b)[$, forment un système cofinal de compacts de U ; il résulte alors de la finitude de ψ que les parties de Ω_b de la forme $\Omega_b - \psi^{-1}(]t; \varphi(x_b)[^{\flat})$, où t parcourt $]y; \varphi(x_b)[$, forment un système cofinal de compacts de Ω_b ; cela peut se reformuler comme suit : *modulo l'isomorphisme ι_b , les parties de la forme $\Omega_b - Z$, où Z est une section de b contenue dans Z_b , forment un système cofinal de compacts de Ω_b .*

Soit Y l'espace k -analytique obtenu en recollant $X \setminus T$ et $\coprod \Omega_b$ le long de $\coprod Z_b$, que l'on peut voir *via* $\coprod \iota_b$ comme un ouvert de chacun des deux espaces en jeu; en vertu de ce qui précède, les propriétés suivantes sont satisfaites (on se permettra de voir à l'occasion certains sous-ensembles de X ne rencontrant pas T comme des sous-ensembles de Y , sans mention explicite de cette identification, en espérant que le contexte évite toute ambiguïté) :

- Y est topologiquement séparé;
- pour toute branche b appartenant à \mathcal{B} , l'adhérence de Ω_b dans Y est égale à $\Omega_b \cup \{x_b\}$ et est compacte;
- pour toute branche b appartenant à \mathcal{B} , l'on a $\text{br}(Y, S)_{\subset \Omega_b} = \{b\}$.

Par construction, l'on peut écrire

$$Y = \left(\coprod \Omega_b \right) \coprod S \coprod \left(\coprod_{W \in \mathcal{E}} W \right) \\ = \left(\bigcup \Omega_b \cup \{x_b\} \right) \cup (X - \Omega).$$

Chacun de ces deux derniers termes est compact; l'espace topologiquement séparé Y est donc compact.

L'espace Y est lisse sur k en dehors d'un ensemble fini de points rigides, et normal si X est normale. La courbe X est génériquement lisse; par conséquent, $X \setminus T$ est génériquement lisse, et normal si X est normale. On a vu plus haut que chacun des Ω_b est normal et lisse en dehors d'un ensemble fini de points rigides; comme Y est construit par recollement de $X - Z$ avec $\coprod \Omega_b$, et comme Y est compacte, l'assertion requise s'ensuit aussitôt.

(4.1.2.2) Algébrisation et conclusion. L'ouvert $X \setminus T$ de X est sans bord, puisque X est sans bord; chacun des Ω_b est fini sur un ouvert de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ et est en particulier sans bord. Il en résulte que la courbe analytique Y est sans bord; on a vu plus haut qu'elle est compacte. Elle est dès lors propre; il s'ensuit qu'elle est isomorphe à l'analytification d'une k -courbe algébrique projective \mathcal{X} .

Comme Y est lisse en dehors d'un ensemble fini de points rigides, et normale si X est normale, le lieu lisse de la courbe \mathcal{X} est dense, et celle-ci est normale si X est normale. \square

4.2 Branches et valuations

(4.2.1) Lemme. *Soit \mathcal{X} une courbe algébrique projective intègre munie d'un morphisme fini et plat sur \mathbb{P}_k^1 dont on note φ l'analytifié. Soit $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$, soit V une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$, et soit U l'ouvert $\varphi(V)$ de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$.*

i) Si V ne rencontre pas $\varphi^{-1}(\varphi(x))$, l'ouvert U est une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\varphi(x)\}$, et V est une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} - \varphi^{-1}(\varphi(x))$; c'est a fortiori une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$.

ii) Si V contient au moins un antécédent de $\varphi(x)$ alors $U = \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$.

Démonstration. Soit E l'ensemble fini $V \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$. Si E est vide alors $V \subset \mathcal{X}^{\text{an}} - \varphi^{-1}(\varphi(x))$ et en est donc une composante connexe; dès lors son image par la flèche finie et plate φ est une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\varphi(x)\}$, d'où i).

Montrons maintenant ii). Supposons que E est non vide. Si W est une composante connexe de $V \setminus E$, c'est une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} - \varphi^{-1}(\varphi(x))$, et $\varphi(W)$ est de ce fait une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\varphi(x)\}$. Par conséquent, $\Omega := \varphi(V \setminus E)$ est une réunion de composantes connexes de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\varphi(x)\}$. L'ensemble E étant non vide, $U = \Omega \cup \{x\}$.

L'application φ est ouverte; il s'ensuit que U est un voisinage de x . Or le seul voisinage de x dans $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ qui soit réunion de $\{x\}$ et de composantes connexes de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\varphi(x)\}$ est $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ lui-même; par conséquent, $U = \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$. \square

L'anneau associé à une branche

(4.2.2) Soit X une courbe k -analytique, soit $x \in X$ et soit b une branche de X issue de x . On notera $\mathcal{O}_X(b)$ la limite inductive des $\mathcal{O}_X(V)$ où V parcourt l'ensemble des sections de b ; il existe un morphisme naturel de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{O}_X(b)$.

Nous dirons qu'une fonction f appartenant à $\mathcal{O}_X(b)$ est *modérée* si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ l'une des trois assertions suivantes est satisfaite :

A) il existe une section Z de b sur laquelle f est définie et telle que $|f(z)| = \lambda$ pour tout $z \in Z$;

B) il existe une section Z de b sur laquelle f est définie et telle que $|f(z)| < \lambda$ pour tout $z \in Z$;

C) il existe une section Z de b sur laquelle f est définie et telle que $|f(z)| > \lambda$ pour tout $z \in Z$.

Notons que comme deux sections de b se rencontrent toujours, ces assertions sont exclusives l'une de l'autre. Si f satisfait A) (resp. B), resp. C)) nous dirons que $|f| = \lambda$ (resp. $|f| < \lambda$, resp. $|f| > \lambda$) *le long de b* .

(4.2.3) Lemme. *Soit $\varphi : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ un morphisme fini et plat entre germes ponctuels de courbes k -analytiques. Soit $b \in \text{br}(Y, y)$ et soit a son image dans $\text{br}(X, x)$;*

i) Il existe un morphisme naturel de $\mathcal{O}_{X,x}$ -algèbres $\varphi^* : \mathcal{O}_X(a) \rightarrow \mathcal{O}_Y(b)$.

ii) Si $b \in \text{br}(Y, y)$ et si $\varphi \in \mathcal{O}_X(a)$ alors f est modérée si et seulement si $\varphi^* f$ est modérée, et dans ce cas le comportement de $|f|$ le long de a est le même que celui de $|\varphi^* f|$ le long de b .

iii) Le $\mathcal{O}_X(a)$ -module $\mathcal{O}_Y(b)$ est de présentation finie et localement libre de rang $\text{deg}(b \rightarrow a)$;

iv) Si φ est galoisien de groupe G alors G agit naturellement sur $\text{br}(Y, y)$; si H désigne le stabilisateur de b alors H agit naturellement sur $\mathcal{O}_Y(b)$ et $\mathcal{O}_Y(b)^H$ s'identifie à $\mathcal{O}_X(a)$.

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où φ est induit par un « vrai » morphisme $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ entre courbes k -analytiques pointées, noté encore φ ; on peut supposer que φ est fini et plat, que y est le seul antécédent de x sur Y , que Y et X sont des arbres et, pour la preuve de iv), que φ est galoisien de groupe G . Pour tout $\beta \in \varphi^{-1}(a)$ et toute section Z de a , on note Z_β la composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$ qui correspond à β .

Pour toute $Z \in \text{Sec } a$ il existe une flèche canonique $\mathcal{O}_X(Z) \rightarrow \mathcal{O}_Y(Z_b)$; par passage à la limite on obtient une flèche $\lim_{\overleftarrow{Z}} \mathcal{O}_X(Z) \rightarrow \lim_{\overleftarrow{S}} \mathcal{O}_Y(Z_b)$; mais le terme de gauche s'identifie à $\mathcal{O}_X(a)$ et celui de droite à $\mathcal{O}_Y(b)$, d'où i).

Si $Z \in \text{Sec } a$, si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et si $f \in \mathcal{O}_X(Z)$ il découle de la surjectivité de $Z_b \rightarrow Z$ que $|f|$ est égale (resp. strictement inférieure, resp. strictement supérieure) à λ en tout point de Z si et seulement si $|\varphi^* f|$ est égale à (resp. strictement inférieure à, resp. strictement supérieure à) λ en tout point de Z_b , d'où ii).

Prouvons maintenant iii) ; posons $n = \text{deg } \varphi$. Il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que le \mathcal{O}_X -module $\varphi_* \mathcal{O}_Y$ soit libre de rang n au-dessus de U ; soit (f_1, \dots, f_n) une base du $\mathcal{O}_X(U)$ -module $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$. Pour toute section Z de a qui est contenue dans U , le $\mathcal{O}_X(Z)$ -module $\prod_{\beta} \mathcal{O}_Y(Z_\beta) = \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(Z))$ est libre de base (f_i) ; par passage à la limite, le $\mathcal{O}_X(a)$ -module $\prod_{\beta} \mathcal{O}_Y(\beta)$ est libre de base (f_i) .

Fixons une section Z de a qui est contenue dans U . Par ce qui précède, la flèche naturelle

$$\left(\prod \mathcal{O}_Y(Z_b) \right) \otimes_{\mathcal{O}_X(Z)} \mathcal{O}_X(a) \rightarrow \prod \mathcal{O}_Y(\beta)$$

est un isomorphisme ; par conséquent, $\mathcal{O}_Y(Z_\beta) \otimes_{\mathcal{O}_X(Z)} \mathcal{O}_X(a) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\beta)$ est un isomorphisme pour tout β . Il suffit donc de montrer que le $\mathcal{O}_X(Z)$ -module $\mathcal{O}_Y(Z_b)$ est projectif, de présentation finie et de rang égal à $\text{deg}(b \rightarrow a)$. Qu'il soit projectif et de présentation finie résulte du fait qu'il est facteur direct du $\mathcal{O}_X(Z)$ -module libre de type fini $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(Z))$; il reste à étudier son rang.

Soit V un domaine affinoïde *non vide* de Z . Le $\mathcal{O}_X(V)$ -module $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(V))$ est libre de base (f_i) . Par conséquent, la flèche naturelle

$$\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(Z)) \otimes_{\mathcal{O}_X(Z)} \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(V))$$

est un isomorphisme. Comme sa source et son but sont respectivement égaux à $(\prod \mathcal{O}_Y(Z_\beta)) \otimes_{\mathcal{O}_X(Z)} \mathcal{O}_X(V)$ et $\prod \mathcal{O}_Y(Z_\beta \cap \varphi^{-1}(V))$, le morphisme

$$\mathcal{O}_Y(Z_\beta) \otimes_{\mathcal{O}_X(Z)} \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_Y(Z_\beta \cap \varphi^{-1}(V))$$

est un isomorphisme pour tout β . Le $\mathcal{O}(V)$ -module $\mathcal{O}_Y(Z_b) \otimes_{\mathcal{O}_X(Z)} \mathcal{O}_X(V)$ est dès lors isomorphe à $\mathcal{O}_Y(Z_b \cap \varphi^{-1}(V))$ qui est lui-même localement libre de rang $\deg(b \rightarrow a)$ d'après la définition du degré d'une branche au-dessus d'une autre.

Comme Z est connexe, $\mathcal{O}_X(Z)$ n'a pas d'idempotents non triviaux. Le rang du $\mathcal{O}_X(Z)$ -module projectif et de présentation finie $\mathcal{O}_Y(Z_b)$, vu comme fonction sur $\text{Spec } \mathcal{O}_X(Z)$, est donc constant. Comme ledit module devient, après tensorisation par l'anneau non nul $\mathcal{O}(V)$, localement libre de rang $\deg(b \rightarrow a)$, son rang est nécessairement $\deg(b \rightarrow a)$, et iii) est démontré.

Prouvons iv). Que G agisse sur $\text{br}(Y, y)$ résulte de 3.5.3 ; que le stabilisateur H de b agisse sur $\mathcal{O}_Y(b)$ est un cas particulier de l'assertion i) ci-dessus, déjà établie. Soit $Z \in \text{Sec } a$ et soit $g \in G$; on a pour toute branche β de $\varphi^{-1}(a)$ l'égalité $g(Z_\beta) = Z_{g(\beta)}$; on peut en particulier caractériser H comme le sous-groupe de G qui laisse invariante la composante Z_b . Par descente galoisienne l'on a $\mathcal{O}_X(Z) = \mathcal{O}_Y(Z_b)^H$; un passage à la limite sur Z fournit alors l'identification requise entre $\mathcal{O}_X(a)$ et $\mathcal{O}_X(b)^H$. \square

(4.2.4) Proposition. *Soit X une courbe k -analytique, soit x un point de X et soit Y un domaine analytique fermé de X contenant x . Soit f un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$.*

i) *Pour toute branche b de X issue de x l'image de f dans $\mathcal{O}_X(b)$ est modérée (cf. 4.2.2).*

ii) *Pour presque toute branche b de X issue de x , on a $|f| = |f(x)|$ le long de b .*

iii) *Il existe un sous-ensemble fini \mathcal{B} de $\text{br}(X, x)$ et un voisinage ouvert V_0 de x dans X qui est un arbre, et qui est tel que pour tout voisinage ouvert connexe V de x contenu dans V_0 l'on ait $V \cap Y = V - \prod_{b \in \mathcal{B}} b(V)$; l'image de $\text{br}(Y, x)$ dans $\text{br}(X, x)$ par l'injection naturelle est égale à $\text{br}(X, x) \setminus \mathcal{B}$; le domaine analytique Y est un voisinage de x dans X si et seulement si $\mathcal{B} = \emptyset$.*

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

(4.2.4.1) Preuve de i) et ii) lorsque $x \in X_{[0]}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Si $|f(x)| > \lambda$ alors $|f| > \lambda$ au voisinage de x . Si $|f(x)| \leq \lambda$ et si $\lambda > 0$ alors le lieu de validité V de l'inégalité $|f| \leq \lambda$ est un domaine analytique de X , et comme x est un point rigide de V il appartient à l'intérieur topologique de V dans X ; par conséquent, $|f| \leq \lambda$ au voisinage de x .

Si $|f(x)| = \lambda = 0$, choisissons un voisinage affinoïde X_0 de x dans X . Soit b une branche de X issue de x ; elle possède une section Z contenue dans une composante irréductible X'_0 de X' . Si $f|_{X'_0}$ est nilpotente alors $|f|$ est identiquement nulle sur Z ; sinon l'ensemble des zéros de f sur X'_0 est fini, et l'on peut donc restreindre Z de sorte que $|f|$ ne s'y annule pas.

L'assertion i) est une conséquence immédiate des faits qui précèdent, et ii) découle de la finitude de $\text{br}(X, x)$ (rem. 3.5.2).

(4.2.4.2) *Preuve de i) et ii) lorsque $x \in X - X_{[0]} - \partial^{\text{an}} X$.* La fonction f induit un morphisme de germes φ de (X, x) vers $(\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}, z)$ pour un certain $z \in \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$. Si z est rigide alors f est constante, et $|f|$ est donc constante au voisinage de x , d'où i) et ii). Sinon, φ est fini et plat. Si α appartient à $\text{br}(\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}, z)$ alors $\varphi^{-1}(\alpha)$ est fini; ceci permet en vertu de l'assertion ii) du lemme 4.2.3, de se ramener au cas où $X = \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ et où $f = T$. Si x n'appartient pas à $]0; \infty[$ alors $|T|$ est constante au voisinage de x , d'où i) et ii). Si $x \in]0; \infty[$, posons $r = |T(x)|$. Si $\lambda > r$ (resp. $\lambda < r$) alors $|T| < \lambda$ (resp. $|T| > \lambda$) au voisinage de x .

Soit V^- (resp. V^+) l'ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par la condition $|T| < r$ (resp. $|T| > r$). Les ouverts V^- et V^+ de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ sont deux composantes connexes de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$; et si W est une composante connexe de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$ distincte de V^- et V^+ alors $|T|$ est identiquement égale à r sur W . Compte-tenu du fait que $\text{br}(\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}, x) \rightarrow \pi_0(\mathbb{A}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\})$ est bijective, i) et ii) s'ensuivent immédiatement.

(4.2.4.3) *Preuve de iii), ainsi que de i) et ii) dans le cas général.* Supposons tout d'abord que $x \in X_{[1,4]}$; dans ce cas, i) et ii) sont satisfaites en vertu de 4.2.4.1 et 4.2.4.2; et iii) est vérifiée puisque Y est alors un voisinage de x dans X .

Supposons maintenant que $x \in X_{[2,3]}$. Quitte à étendre les scalaires au complété de la clôture parfaite de k puis à réduire X (ce qui ne modifie pas les espaces topologiques en jeu), on peut supposer que X est quasi-lisse en x ; en remplaçant X par un voisinage ouvert convenable de x , on se ramène au cas où X est lui-même un domaine analytique fermé d'une courbe lisse X' .

Preuve de iii). Les deux dernières assertions de iii) sont des conséquences évidentes de la première. Pour établir celle-ci, il suffit de démontrer l'existence d'un voisinage V_0 de x qui est un arbre et qui est tel que $V_0 \cap Y = V_0 - \prod_{b \in \mathcal{B}} b(V_0)$; le fait que $b(V_0) \cap V = b(V)$ pour tout voisinage ouvert connexe V de x dans V_0 conduira alors à la conclusion souhaitée.

Il existe un voisinage ouvert W de x dans X' , une famille finie (f_1, \dots, f_n) de fonctions analytiques sur W et un entier $m \geq n$ vérifiant la propriété suivante : le domaine analytique $X \cap W$ (resp. $Y \cap W$) de W est égal à l'ensemble des points $w \in W$ tels que $|f_i(w)| \leq |f_i(x)|$ pour tout $i \leq m$ (resp. pour tout $i \leq n$); on peut choisir W suffisamment petit pour que ce soit un arbre, et pour que les bords topologiques de $X \cap W$ et $Y \cap W$ dans W soient tous deux contenus dans $\{x\}$; cette dernière condition assure que toute composante connexe de $W \setminus \{x\}$ qui rencontre X (resp. Y) est contenue dans X (resp. Y).

Notons qu'en vertu du cas intérieur déjà traité (4.2.4.2) chaque fonction f_i est modérée sur toute branche de X' issue de x .

Soit \mathcal{B}_0 (resp. \mathcal{B}_1) le sous-ensemble de $\text{br}(W, x)$ formé des branches b pour lesquelles il existe un entier j appartenant à $\{1, \dots, n\}$ (resp. à $\{1, \dots, m\}$) tel que $|f_j| > |f_j(x)|$ le long de b . Les ensembles \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}_1 sont finis d'après le cas intérieur déjà traité (4.2.4.2); on peut donc, quitte à raboter certaines des composantes connexes de $W \setminus \{x\}$, supposer que pour toute $b \in \mathcal{B}_0$ (resp. \mathcal{B}_1) il existe j appartenant à $\{1, \dots, n\}$ (resp. à $\{1, \dots, m\}$) tel que $|f_j(z)| > |f_j(x)|$ pour tout $z \in b(W)$. Soit $b \in \text{br}(W, x)$.

Si $b \notin \mathcal{B}_0$ alors $|f_i| = |f_i(x)|$ le long de b pour tout i appartenant à $\{1, \dots, n\}$; il existe donc une section de b contenue dans Y ; par

conséquent, $b(W)$ rencontre Y ce qui, en vertu de l'hypothèse faite sur W , assure que $b(W) \subset Y$.

Si $b \in \mathcal{B}_0$ il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|f_j(z)| > |f_j(x)|$ pour tout $z \in b(W)$, ce qui assure que $b(W) \cap Y = \emptyset$.

En utilisant *mutatis mutandis* les mêmes arguments, on voit que si $b \notin \mathcal{B}_1$ alors $b(W) \subset X$, et que si $b \in \mathcal{B}_1$ alors $b(W) \cap X = \emptyset$.

Il s'ensuit que $W \cap X = W - \coprod_{b \in \mathcal{B}_1} b(W)$, et que $W \cap Y = W - \coprod_{b \in \mathcal{B}_0} b(W)$.

Si l'on pose $V_0 = W \cap X$ alors V_0 est un voisinage ouvert de x dans X ; l'ensemble $\text{br}(X, x)$ s'identifie à $\text{br}(W, x) - \mathcal{B}_1$; et modulo cette identification, on a

$$V_0 \cap Y = V_0 - \coprod_{b \in \mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_1} b(V_0),$$

d'où iii).

Preuve de i) et ii). Elles découlent immédiatement de l'assertion iii) que l'on vient d'établir, appliquée au domaine analytique fermé X' de X , et des assertions i) et ii) dans le cas intérieur, prouvées au 4.2.4.2. \square

(4.2.5) Théorème. *Soit X une courbe k -analytique, soit $x \in X - X_{[0]} - \partial^{\text{an}} X$, et soit $b \in \text{br}(X, x)$. Supposons qu'il existe une branche β de X issue de x et différente de b . Le point x appartient alors à $X_{[2,3]}$, et il existe une fonction f inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$ telle que $|f| > |f(x)|$ le long de b et telle que $|f| \leq f(x)$ le long de chacune des autres branches de X issues de x .*

Démonstration. On procède en plusieurs temps.

(4.2.5.1) Réduction au cas où X est lisse et connexe. Choisissons un voisinage affinoïde V de x dans X et une fonction analytique sur V dont la restriction à chacune des composantes irréductibles de V est non constante. Cette fonction définit un morphisme $V \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ qui est de dimension relative nulle, et intérieur en x ; soit ξ l'image de x sur $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$; comme x est non rigide, ξ est non rigide.

La droite affine étant réduite, il existe en vertu de 3.5.11.2 un voisinage affinoïde V_0 de x dans V_{red} et un voisinage affinoïde U de ξ dans $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ tel que $V \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ induise un morphisme fini et plat $V_0 \rightarrow U$ admettant une factorisation $V_0 \rightarrow V'_0 \rightarrow U$ où $V'_0 \rightarrow U$ est fini étale, et où $V_0 \rightarrow V'_0$ est fini, radiciel et plat. On peut successivement remplacer :

- X par le voisinage V de x ;
- V par V_{red} (le problème étudié est insensible au quotient par un idéal nilpotent);
- V_{red} par le voisinage V_0 de x ;
- V_0 par V'_0 et x par son image sur V'_0 (en raison du fait que $V_0 \rightarrow V'_0$ induit un homéomorphisme entre les espaces topologiques sous-jacents).

On se ramène ainsi au cas où X est lisse en x , puis, quitte à restreindre encore X , au cas où elle est lisse et connexe.

(4.2.5.2) Preuve dans le cas où X est lisse et connexe. Soit Ω la réunion de $b(X)$ et des composantes connexes de $X \setminus \{x\}$ qui ne sont pas relativement compactes; le théorème 4.1.2, appliqué à X , à son ouvert Ω , et à l'ensemble $S = \{x\}$, permet de remplacer X par l'analytification \mathcal{X}^{an} d'une k -courbe projective normale,

connexe et génériquement lisse \mathcal{X} telle que si V désigne la composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ contenant b , alors $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)_{\subset V} = \{b\}$.

Par hypothèse, il existe une branche β de \mathcal{X}^{an} issue de x et distincte de b ; soit W la composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ contenant β ; on a $W \neq V$. Il existe un point rigide P sur V (c'est dû au *Nullstellensatz* si $|k^\times| \neq \{1\}$, et à la description directe de \mathcal{X}^{an} sinon). Par le théorème de Riemann-Roch le fibré en droites $\mathcal{O}(NP)$ sur la courbe \mathcal{X} est engendré par ses sections globales pour N assez grand; il existe donc une fonction méromorphe sur \mathcal{X} dont P est le seul pôle; soit $\psi : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ le morphisme fini et plat qu'elle induit. Par construction, $\infty \notin \psi(W)$; l'on déduit alors du lemme 4.2.1 que W est une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} - \psi^{-1}(\psi(x))$, et que $\psi(W)$ une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\psi(x)\}$. L'infini n'appartient pas à $\psi(W)$, et ne peut être égal à $\psi(x)$ qui n'est pas rigide; l'ouvert $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\psi(x)\}$ de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ n'est donc pas connexe; il en découle que $\psi(x)$ est de type 2 ou 3, et il en va de même de x .

Soit U la composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\psi(x)\}$ qui contient ∞ . Comme ce dernier n'a qu'un antécédent sur \mathcal{X}^{an} , à savoir P , l'ouvert $\psi^{-1}(U)$ de \mathcal{X}^{an} est connexe et contenu dans V . Soit a l'unique élément de $\text{br}(\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}, \psi(x))_{\subset U}$. Toute branche de \mathcal{X}^{an} située au-dessus de a est contenue dans $\psi^{-1}(U)$, et *a fortiori* dans V . On sait par ailleurs que l'ensemble $\psi^{-1}(a) \cap \text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)$ est non vide, et il est par ce qui précède contenu dans $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)_{\subset V}$ qui est le singleton $\{b\}$; il en résulte que b est la seule branche issue de x et située au-dessus de a . Ceci permet, en vertu de l'assertion ii) du lemme 4.2.3, de supposer que $\mathcal{X} = \mathbb{P}_k^1$, et que V est la composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$ qui contient ∞ .

Choisissons un point rigide z sur $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} - V$ (il en existe car x est de type 2 ou 3) et soit m le polynôme minimal de $T(z)$ sur k ; posons $f = m(T)$. Il résulte de 3.4.24.3 que l'application $|f|$ est strictement croissante sur l'intervalle $[z; \infty]$ qui contient x , et est localement constante sur $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} - [z; \infty]$; par conséquent, f satisfait la propriété requise. \square

(4.2.6) Soit X une courbe k -analytique, soit $x \in X$ et soit $b \in \text{br}(X, x)$. Comme X est un bon espace, $\kappa(x)$ est dense dans $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ et l'on a donc $\kappa(x) = \widetilde{\mathcal{H}}(x)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$. Si f est un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ tel que $|f| \leq \lambda$ le long de b alors $|f(x)| \leq \lambda$, puisque x adhère à toute section de b . Cela a donc un sens de considérer l'élément $f(x)_\lambda$ de $\kappa(x)_\lambda$; si g est un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ tel que $|g(x)| \leq \lambda$ et $\widetilde{g(x)}_\lambda = \widetilde{f(x)}_\lambda$ alors $|g(x) - f(x)| < \lambda$ et l'on a donc $|g| \leq \lambda$ le long de b .

Le sous-ensemble de $\mathcal{O}_{X,x}$ formé des fonctions f telles que $|f| \leq \lambda$ le long de b est stable par somme; si f est un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ tel que $|f(x)| = \lambda$ et $|f| > \lambda$ le long de b alors $|1/f(x)| = 1/\lambda$ et $|1/f| < 1/\lambda$ le long de b ; et si α est un élément de k tel que $|\alpha| = \lambda$ alors $|\alpha| = \lambda$ le long de b .

On déduit de ces faits que

$$\coprod_{\mu \in \mathbb{R}_+^\times} \{ \widetilde{f(x)}_\mu \}_{f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et } |f| \leq \mu \text{ le long de } b}$$

est l'annéloïde d'une valuation $\langle \cdot \rangle_b$ de $\kappa(x) = \widetilde{\mathcal{H}}(x)$ qui est triviale sur \widetilde{k} . Si f est une fonction définie au voisinage de x telle que $|f(x)| = \lambda$ alors $\langle \widetilde{f(x)}_\lambda \rangle_b \leq 1$

(resp. < 1 , resp. > 1) si et seulement si $|f| \leq \lambda$ (resp. $< \lambda$, resp. $> \lambda$) le long de b . La restriction de $\langle \cdot \rangle_b$ à $\widetilde{\kappa(x)}_1 = \widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$ est une valuation classique, triviale sur \widetilde{k}_1 ; lorsqu'on la compose avec $|\cdot|$ on obtient une valuation $|\cdot|_b$ sur $\mathcal{H}(x)$, qui par construction raffine $|\cdot|$ et coïncide avec celle-ci sur k ; si $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ alors $|f(x)|_b \leq 1$ (resp. < 1 , resp. > 1) si et seulement si $|f| \leq 1$ (resp. < 1 , resp. > 1) le long de b ; le corps résiduel de $|\cdot|_b$ est celui de la restriction de $\langle \cdot \rangle_b$ à $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$.

(4.2.7) Il découle des égalités $|\kappa(x)^\times| = |\mathcal{H}(x)^\times|$ et $\widetilde{\kappa(x)}_1 = \widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$ et de la construction même de $|\cdot|_b$ que $(\mathcal{H}(x), |\cdot|_b)$ a même groupe des valeurs et même corps résiduel que $(\kappa(x), |\cdot|_{|\kappa(x)|})$.

(4.2.8) *Remarque.* Si $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1$ est algébrique sur k , autrement si $x \in X_{[1,3,4]}$, la valeur absolue de $\mathcal{H}(x)$ n'admet pas de raffinement strict coïncidant avec elle sur k , et l'on a donc alors $|\cdot|_b = |\cdot|$.

(4.2.9) *Remarque.* L'application $b \mapsto \langle \cdot \rangle_b$ (resp. $b \mapsto |\cdot|_b$) définit par sa construction même une *transformation naturelle* entre les foncteurs

$$(X, x) \mapsto \text{br}(X, x) \text{ et } (X, x) \mapsto \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}} \text{ (resp. et } (X, x) \mapsto \mathbb{P}_{\mathcal{H}(x)} \text{)}$$

ayant pour source la catégorie dont les objets sont les germes de courbes k -analytiques en un point non rigide, et les flèches les morphismes à fibre finie.

(4.2.10) **Théorème.** *Soit X une courbe k -analytique et soit $x \in X_{[2,3]}$; notons $\langle \cdot \rangle_0$ la valuation triviale sur $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$. L'application $b \mapsto \langle \cdot \rangle_b$ établit une injection $\text{br}(X, x) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}} \setminus \{\langle \cdot \rangle_0\}$ dont l'image \mathcal{U} est de complémentaire fini; cette injection est bijective si et seulement si x appartient à l'intérieur analytique de X ; l'ouvert quasi-compact $\mathcal{U} \cup \{\langle \cdot \rangle_0\}$ de $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}}$ est égal à (X, x) .*

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

(4.2.10.1) *Preuve dans le cas particulier où $x \notin \partial^{\text{an}} X$.* On a alors l'égalité $(X, x) = \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}}$; il suffit dès lors de démontrer que $\text{br}(X, x) \rightarrow \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}}$ est injective, d'image égale à $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}} \setminus \{\langle \cdot \rangle_0\}$.

Montrons que toute \widetilde{k} -valuation non triviale de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est de la forme $\langle \cdot \rangle_b$ pour une certaine $b \in \text{br}(X, x)$. Soit $\langle \cdot \rangle$ une \widetilde{k} -valuation non triviale de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$. Le lemme 3.3.6 fournit un élément ω de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ tel que $\langle \omega \rangle > 1$ et tel que $\langle \cdot \rangle$ soit la seule \widetilde{k} -valuation de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ à posséder cette propriété; remarquons que ω est obligatoirement transcendant sur \widetilde{k} .

Soit λ le degré de ω . Choisissons $f \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$ telle que $\widetilde{f(x)} = \omega$. Comme $\widetilde{f(x)}$ est transcendant et de degré λ sur \widetilde{k} et comme X est sans bord, la fonction f induit un morphisme fini et plat φ du germe (X, x) vers le germe $(\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}, \eta_\lambda)$. Soit a l'unique branche de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ issue de η_λ et contenue dans la composante connexe de ∞ dans $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \setminus \{\eta_\lambda\}$; il existe une branche b de X issue de x et située au-dessus de a . Par construction, $|T| > \lambda$ le long de a ; en conséquence, $|f| > \lambda$

le long de b ; il s'ensuit que $\langle \omega \rangle_b = \langle \widetilde{f(x)} \rangle_b > 1$, et par définition de ω cette inégalité force $\langle \cdot \rangle_b$ à être égale à $\langle \cdot \rangle$.

Il suffit pour conclure de démontrer que si $b \in \text{br}(X, x)$ alors $\langle \cdot \rangle_b$ est non triviale, et différente de $\langle \cdot \rangle_\beta$ pour toute branche β de X issue de x et différente de b . Soit donc $b \in \text{br}(X, x)$. Il découle de 3.3.5.2 et 3.3.5.3 qu'il existe *au moins deux* \widetilde{k} -valuations non triviales sur $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$; il y a par conséquent, en vertu du 4.2.10.1, au moins deux branches de X issues de x . Nous sommes dans les conditions d'application du théorème 4.2.5; on en déduit l'existence d'une fonction inversible f dans $\mathcal{O}_{X,x}$ telle que $|f| > |f(x)|$ le long de b , et telle que $|f| \leq |f(x)|$ le long de β pour toute branche β de $\text{br}(X, x)$ différente de b . Si l'on pose $\lambda = |f(x)|$, l'on a donc $\langle \widetilde{f(x)}_\lambda \rangle_b > 1$, ce qui montre que $\langle \cdot \rangle_b$ est non triviale, et $\langle \widetilde{f(x)}_\lambda \rangle_\beta \leq 1$ pour toute $\beta \in \text{br}(X, x) \setminus \{b\}$, ce qui montre que $\langle \cdot \rangle_\beta \neq \langle \cdot \rangle_b$ quelle que soit $\beta \in \text{br}(X, x) \setminus \{b\}$ et achève la démonstration dans le cas où $x \notin \partial^{\text{an}} X$.

(4.2.10.2) *Le cas général : une première réduction.* Soit F le complété de la clôture parfaite de k . L'application $X_F \rightarrow X$ est un homéomorphisme; si x_F désigne l'unique antécédent de x sur X_F alors $\text{br}(X_F, x_F)$ s'identifie à $\text{br}(X, x)$; le corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}(x_F)}$ (resp. \widetilde{F}) est une extension radicielle de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ (resp. \widetilde{k}), ce qui entraîne que $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x_F)/\widetilde{F}}} \rightarrow \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)/\widetilde{k}}}$ est bijective; ce fait, combiné au critère de Temkin assure par ailleurs que $x_F \in \partial^{\text{an}} X_F$ si et seulement si $x \in \partial^{\text{an}} X$.

Ces remarques (couplées à la compatibilité des différentes constructions en jeu à l'extension des scalaires de k à F) autorisent à supposer, quitte à étendre les scalaires à F , que k est parfait. Les questions considérées sont insensibles aux phénomènes de nilpotence, ce qui permet de faire l'hypothèse que X est réduite, et partant quasi-lisse en x . Il est alors loisible de la restreindre de sorte qu'elle s'identifie à un domaine analytique fermé d'une courbe lisse, et en particulier sans bord, que l'on notera X' .

(4.2.10.3) *Preuve du cas général.* L'assertion iii) de la proposition 4.2.4 assure que $\text{br}(X, x) \rightarrow \text{br}(X', x)$ est une injection dont l'image est de complémentaire fini; par conséquent, $\text{br}(X, x) \rightarrow \mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)/\widetilde{k}}}$ induit une bijection entre $\text{br}(X, x)$ et un sous-ensemble \mathcal{U} de $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)/\widetilde{k}}} \setminus \{\langle \cdot \rangle_0\}$ qui est de complémentaire fini. Soient $\langle \cdot \rangle_1, \dots, \langle \cdot \rangle_n$ les valuations appartenant à $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)/\widetilde{k}}} \setminus \{\langle \cdot \rangle_0\} \setminus \mathcal{U}$; pour tout i , le lemme 3.3.6 assure l'existence d'un élément homogène ω_i de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ tel que $\langle \omega_i \rangle_i > 1$ et tel que $\langle \cdot \rangle_i$ soit la seule \widetilde{k} -valuation de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ à posséder cette propriété; pour tout i , on choisit f_i dans $\mathcal{O}_{X',x}^\times$ telle que $f_i(x) = \omega_i$.

Par choix des ω_i , l'ouvert quasi-compact $\mathbb{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)/\widetilde{k}}} \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est égal à $\mathcal{U} \cup \{\langle \cdot \rangle_0\}$; par la théorie de Temkin, il s'identifie à (Y, x) , où Y est le domaine analytique fermé de X' défini par les inégalités $|f_i| \leq \|f_i(x)\|$. On déduit de cette description que le sous-ensemble $\text{br}(Y, x)$ de $\text{br}(X', x)$ est obtenu par l'ablation pour tout i de l'unique branche issue de x le long de laquelle $|f_i| > |f_i(x)|$, qui correspond à la valuation $\langle \cdot \rangle_i$; autrement dit, $\text{br}(Y, x) = \text{br}(X, x)$; en vertu de l'assertion iii) de la proposition 4.2.4, les germes (Y, x) et (X, x) coïncident; par conséquent, $\mathcal{U} \cup \{\langle \cdot \rangle_0\} = \widetilde{(X, x)}$, ce qu'il fallait démontrer. \square

(4.2.11) Regardons maintenant plus précisément la façon dont le théorème ci-dessus se décline selon le type de x .

(4.2.11.1) *Supposons que $x \in X_{[2]}$.* En vertu de 3.3.5.2, le théorème 4.2.10 se traduit alors comme suit : si \mathcal{C} désigne la courbe résiduelle en x , l'application qui envoie b sur la restriction de $\langle \cdot \rangle_b$ à $\tilde{k}_1(\mathcal{C})$ induit une injection, dont l'image est de complémentaire fini, de $\text{br}(X, x)$ dans l'ensemble des \tilde{k}_1 -valuations non triviales de $\tilde{k}_1(\mathcal{C})$; ce dernier s'identifiant à l'ensemble des points fermés de \mathcal{C} , on a finalement construit une bijection entre $\text{br}(X, x)$ et l'ensemble des points fermés d'un ouvert de Zariski non vide de \mathcal{C} , qui est égal à \mathcal{C} tout entier si et seulement si x est un point intérieur de X .

Soit $b \in \text{br}(X, x)$ et soit \mathcal{P} le point fermé de \mathcal{C} correspondant. La valuation $|\cdot|_b$ de $\mathcal{H}(x)$ est composée de $|\cdot|$ et de la valuation discrète associée à \mathcal{P} ; par conséquent, si $\lambda \in \mathcal{H}(x)$ est tel que $|\lambda| = 1$ et que $\tilde{\lambda}$ ait un zéro d'ordre 1 en \mathcal{P} , alors $|\mathcal{H}(x)^\times|_b = |\mathcal{H}(x)^\times| \oplus |\lambda|_b^{\mathbb{Z}}$, et $|\lambda|_b$ est infiniment proche de 1 inférieurement; quant au corps résiduel de $|\cdot|_b$, c'est celui de \mathcal{P} .

(4.2.11.2) *Supposons que $x \in X_{[3]}$.* En vertu de 3.3.5.3, le théorème 4.2.10 se traduit alors comme suit : soit r un élément de $|\kappa(x)^\times|$ n'appartenant pas à $\sqrt{|k^\times|}$ et soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ telle que $|f(x)| = r$; il y a au plus une branche de X issue de x le long de laquelle $|f| < r$, au plus une le long de laquelle $|f| > r$, et aucune le long de laquelle $|f| = r$; il y a par conséquent au plus deux branches de X issues de x , et l'égalité est atteinte si et seulement si x est intérieur.

Remarquons qu'il est possible que $\text{br}(X, x)$ soit vide : cela se produit si et seulement si x est un point isolé de X .

(4.2.12) Notons une conséquence immédiate du 4.2.11.2 ci-dessus : si $Y \rightarrow X$ est un morphisme fini et plat entre courbes k -analytiques et si y est un point de $Y_{[3]}$ dont on note x l'image sur X , alors $\text{br}(Y, y) \rightarrow \text{br}(X, x)$ est bijective.

(4.2.13) Si X est une courbe k -analytique et si Y est un domaine analytique fermé de X , le bord topologique de Y dans X est un sous-ensemble fermé et discret de X contenu dans $X_{[2,3]}$. On se propose, un tel ensemble étant donné, de décrire tous les domaines analytiques fermés de X dont il est le bord.

(4.2.14) **Proposition.** *Soit X une courbe k -analytique et soit S un sous-ensemble fermé et discret de X contenu dans $X_{[2,3]}$. Soit Y un sous-ensemble de X . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1) Y est un domaine analytique fermé de X de bord égal à S ;
- 2) $X - Y$ est une réunion $\bigcup_{i \in I} U_i$ de composantes connexes de $X \setminus S$ telles

que pour tout $x \in S$ l'ensemble des indices i pour lesquels $x \in \partial U_i$ soit fini et non vide.

Démonstration. L'implication 1) \Rightarrow 2) découle de l'assertion iii) de la proposition 4.2.4. Supposons maintenant que 2) est vraie, et prouvons 1). L'hypothèse 2) implique que Y est fermé de bord égal à S ; comme la propriété d'être un domaine analytique fermé est locale, il suffit de vérifier que tout point x de X possède un voisinage U tel que $V \cap Y$ soit un domaine analytique fermé de U . C'est évident si $x \notin Y$ ou si x appartient à l'intérieur topologique de Y ; il reste à traiter le cas où $x \in S$.

Dans cette situation, 2) implique l'existence d'un voisinage ouvert V de x dans X qui est un arbre et est tel que $V \cap Y$ soit de la forme $V - \coprod_{j \in J} V_j$ où J est un ensemble fini et où les V_j sont des composantes connexes deux à deux disjointes de $V \setminus \{x\}$. Chacune des V_j correspond à une branche b_j de X issue de x , et donc à un point fermé \mathcal{P}_j de (\widetilde{X}, x) en vertu du théorème 4.2.10 ci-dessus.

L'ouvert quasi-compact $\widetilde{(\widetilde{X}, x)} \setminus \{\mathcal{P}_j\}_j$ de (\widetilde{X}, x) s'identifie à $\widetilde{(Z, x)}$ pour un certain germe (Z, x) de domaine analytique fermé de (X, x) ; le théorème 4.2.10 garantit que $\text{br}(Z, x) = \text{br}(X, x) \setminus \{b_j\}_j$; l'assertion iii) de la proposition 4.2.4 assure alors que Z et Y coïncident au voisinage de x , ce qui achève la démonstration. \square

Image d'une branche par un morphisme de dimension relative nulle

(4.2.15) Lemme. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ une application continue entre espaces topologiques séparés, localement compacts et localement connexes. Soit V un ouvert connexe et non vide de Y , et soit U un ouvert de X tel que $\varphi(V) \subset U$. Supposons que l'application $V \rightarrow U$ induite par φ est compacte; l'ouvert V est alors une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$.*

Démonstration. Il résulte de sa définition que V est une partie ouverte, connexe et non vide de $\varphi^{-1}(U)$; il suffit dès lors de vérifier qu'elle est également fermée dans $\varphi^{-1}(U)$.

Soit $y \in \varphi^{-1}(U) \setminus V$ et soit x l'image de y sur U . Choisissons un voisinage U_0 de x dans X tel que $\overline{U_0}$ soit une partie compacte de U . Soit W le compact $(\varphi|_V)^{-1}(\overline{U_0})$. L'ouvert $\varphi^{-1}(U_0) - W$ de $\varphi^{-1}(U)$ contient y et ne rencontre pas V ; par conséquent, V est fermé dans $\varphi^{-1}(U)$. \square

(4.2.16) Proposition. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre deux courbes k -analytiques, soit $y \in Y$ et soit x son image sur X ; on suppose que φ est de dimension relative nulle en y .*

- 1) *L'ensemble $\text{br}(X, x) - \varphi(\text{br}(Y, y))$ est fini.*
- 2) *Il existe $U \in \text{Arb}(X, x)$ et $V \in \text{Arb}(Y, y)$ possédant les propriétés suivantes :*
 - i) *V est une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$ telle que $\varphi^{-1}(x) \cap V = \{y\}$;*
 - ii) *$V \rightarrow U$ est compacte à fibres finies;*
 - iii) *$V \setminus \{y\} \rightarrow U \setminus \{x\}$ est finie, ouverte, et plate si X est génériquement réduite.*

Démonstration. Notons pour commencer que l'on peut, pour montrer ces assertions, remplacer X par X_{red} et Y par $Y \times_X X_{\text{red}}$; cela permet de se ramener au cas où la courbe X est réduite, et l'on distingue alors deux cas selon la nature du point x .

(4.2.16.1) *Le cas où x est rigide.* L'ensemble $\text{br}(X, x)$ est alors fini, d'où 1). Pour prouver 2), remarquons tout d'abord que y est également rigide, ce qui entraîne que φ est sans bord en y ; il induit de ce fait un morphisme fini d'un voisinage ouvert V de y sur un voisinage ouvert U de x ; on peut supposer

que y est le seul antécédent de y sur V , et que U est une composante connexe de $\varphi^{-1}(x)$; on peut également faire l'hypothèse que U et V sont des arbres.

Comme U est génériquement réduite, les anneaux locaux en ses points non rigides sont des corps, et il existe dès lors un ouvert de Zariski *dense* de U au-dessus duquel le morphisme $V \rightarrow U$ est plat; par conséquent il est loisible, quitte à restreindre convenablement U et V , de faire en sorte que la flèche $V \setminus \{y\} \rightarrow U \setminus \{x\}$ soit finie et plate; notons qu'elle est alors ouverte, ce qui achève de montrer 2), et partant la proposition, lorsque x est rigide.

(4.2.16.2) *Le cas où x n'est pas rigide.* La version analytique du *Main Theorem* de Zariski assure l'existence d'un voisinage affinoïde Y_0 de y dans Y et d'une factorisation de φ sous la forme

$$Y_0 \rightarrow W \hookrightarrow T \rightarrow X$$

où $Y_0 \rightarrow W$ est fini, où W s'identifie à un domaine affinoïde de T , et où $T \rightarrow X$ est étale; soit t l'image de y sur $W \subset T$. La courbe X étant génériquement réduite, il en va de même de T et de W . Comme x n'est pas rigide, t ne l'est pas, et $(Y_0, y) \rightarrow (W, t)$ est en conséquence fini et plat; on peut donc restreindre W et Y_0 de sorte que $Y_0 \rightarrow W$ soit fini et plat, et que y soit l'unique antécédent de t sur Y_0 .

Nous allons construire le voisinage $U \in \text{Arb}(X, x)$ par restrictions successives. On commence par le choisir de sorte qu'il existe $Z \in \text{Arb}(T, t)$ fini et étale sur U possédant les trois propriétés suivantes :

- Z est une composante connexe de $T \times_X U$;
- t est l'unique antécédent de x sur Z ;
- $Z \cap \partial_T W \subset \{t\}$.

Il existe $W' \in \text{Arb}(W, t)$ tel que $Y_0 \times_W W'$ ne rencontre pas $\partial_Y Y_0$. Quitte à restreindre Z et U , on peut supposer que $Z \cap W \subset W'$.

Soit V l'image réciproque de $Z \cap W$ dans Y_0 . C'est un ouvert connexe de Y_0 qui ne rencontre pas $\partial_Y Y_0$; c'est donc un ouvert de Y . Il est inclus dans $\varphi^{-1}(U)$, et son intersection avec $\varphi^{-1}(x)$ est égale à $\{y\}$.

La flèche $V \rightarrow U$ est composée de $V \rightarrow W \cap Z, W \cap Z \hookrightarrow Z$ et $Z \rightarrow U$, qui sont toutes trois compactes et à fibres finies : la première et la troisième sont en effet finies, et la seconde est une immersion d'un domaine analytique fermé; la flèche $V \rightarrow U$ est dès lors elle-même compacte et à fibres finies; il découle alors du lemme 4.2.15 que V est une composante connexe de $\varphi^{-1}U$. Par ailleurs, $V \rightarrow W$ et $Z \rightarrow U$ sont sans bord, et le bord de $W \cap Z \hookrightarrow Z$ est contenu dans $\{t\}$; par conséquent, le bord de $V \rightarrow U$ est contenu dans $\{y\}$.

On déduit de ce qui précède que $V \setminus \{y\} \rightarrow U \setminus \{x\}$ est compacte, sans bord, et à fibres finies; elle est donc finie. De plus, soit $v \in V \setminus \{y\}$, soit w son image sur W et soit u son image sur U . Comme le morphisme fini $V \rightarrow Z \cap W$ est plat, $\mathcal{O}_{V,v}$ est plat sur $\mathcal{O}_{Z \cap W, w}$; comme $w \neq t$, il est contenu dans l'intérieur topologique de $W \cap Z$ dans Z , et l'anneau local $\mathcal{O}_{Z \cap W, w}$ est égal à $\mathcal{O}_{Z, w}$; et comme $Z \rightarrow U$ est étale, $\mathcal{O}_{Z, w}$ est plat sur $\mathcal{O}_{U, u}$.

Il s'ensuit que le morphisme fini $V \setminus \{y\} \rightarrow U \setminus \{x\}$ est plat; cela entraîne qu'il est ouvert et achève de prouver 2). Pour établir 1), on remarque que $\text{br}(V, y) \rightarrow$

$\text{br}(Z \cap W, t)$ est surjectif, que $\text{br}(Z \cap W, t) \rightarrow \text{br}(Z, t)$ est une injection dont l'image est de complémentaire fini (prop. 4.2.4), et enfin que $\text{br}(Z, t) \rightarrow \text{br}(U, x)$ est surjective. \square

(4.2.17) Commentaires. Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme entre deux courbes k -analytiques, soit y un point de Y en lequel φ est de dimension nulle, et soit x son image sur X ; soient $U \in \text{Arb}(X, x)$ et $V \in \text{Arb}(Y, y)$ satisfaisant les conditions i), ii), et iii) de la proposition 4.2.16 ci-dessus.

(4.2.17.1) Soit $U' \in \text{Arb}(U, x)$ et soit V' son image réciproque sur V . La flèche $V' \rightarrow U'$ est compacte et à fibres finies, et $V' \setminus \{y\} \rightarrow U' \setminus \{x\}$ est finie, ouverte, et plate si X est réduite.

Par ailleurs, V' est connexe. Pour le voir, on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il possède une composante connexe V'_0 qui ne contient pas y . L'ouvert V'_0 de V' est alors une composante connexe de $V' \setminus \{y\}$, et son image U'_0 sur U' est donc une composante connexe de $U' \setminus \{x\}$. D'autre part, V'_0 est fermé dans V' , ce qui implique que la composante connexe U'_0 de $U' \setminus \{x\}$ est fermée dans l'arbre U' , ce qui est absurde.

On déduit de ce qui précède que U' et V' satisfont encore les conditions i), ii), et iii) de *loc. cit.*

(4.2.17.2) Soit $b \in \text{br}(Y, y)$ et soit a son image dans $\text{br}(X, x)$.

L'image sur U de la composante connexe $b(V)$ de $V \setminus \{y\}$ est une composante connexe de $U \setminus \{x\}$ qui est nécessairement $a(U)$. Il s'ensuit, compte-tenu de l'assertion 1) de *loc. cit.*, que $U - \varphi(V)$ est une réunion finie de composantes connexes de $U \setminus \{x\}$.

Si X est réduite, la flèche $b(V) \rightarrow a(U)$ est finie et plate, et son degré ne dépend alors pas du choix de U et V (par exemple en vertu du 4.2.17.1 ci-dessus) ; on l'appellera le *degré de b sur a* ; cette définition coïncide avec la précédente dans le cas où $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ est fini et plat.

Fonctions sur une branche et hensélisé de la valuation associée

(4.2.18) Soit X une courbe k -analytique normale et soit x un point non rigide de X . L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors artinien et intègre ; il coïncide donc avec son corps résiduel $\kappa(x)$. Soit b une branche de X issue de x . Si Z est une section de b c'est un espace k -analytique connexe, non vide et normal ; l'anneau $\mathcal{O}(Z)$ est par conséquent intègre ; il en résulte, par passage à la limite, que $\mathcal{O}(b)$ est intègre. Le corps $\kappa(x)$ coïncidant avec $\mathcal{O}_{X,x}$, il se plonge dans $\mathcal{O}(b)$.

(4.2.19) Théorème. Soit X une courbe k -analytique normale et soit x appartenant à $X - X_{[0]} - \partial^{\text{an}} X$. Soit b une branche de X issue de x ; on note $\mathcal{O}_X(b)_{\text{alg}}$ (resp. $\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$) le corps égal à la fermeture algébrique (resp. séparable) de $\kappa(x)$ dans $\mathcal{O}_X(b)$.

i) Si $f \in \mathcal{O}_X(b)_{\text{alg}}$ alors f est modérée.

ii) Le sous-ensemble de $\mathcal{O}_X(b)_{\text{alg}}$ formé des fonctions f telles que $|f| \leq 1$ le long de b est l'anneau d'une valuation prolongeant la valuation $|\cdot|_b$ de $\kappa(x)$, et notée encore $|\cdot|_b$.

iii) Si $x \in X_{[23]}$ le corps valué $(\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}, |\cdot|_b)$ est le hensélisé de $(\kappa(x), |\cdot|_b)$. En vertu de la remarque 4.2.8, on a en particulier $(\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}, |\cdot|_b) = (\kappa(x), |\cdot|)$ dès que $x \in X_{[3]}$.

Démonstration. Commençons par deux remarques : l'assertion ii) est une conséquence triviale de i); et pour montrer i), on peut supposer, quitte à remplacer f par f^q pour une puissance convenable q de l'exposant caractéristique de k , que $f \in \mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$.

Choisissons un système projectif filtrant $((X_i, x_i))_i$ de germes d'espaces k -analytiques galoisiens sur (X, x) tel que la limite inductive des $\kappa(x_i)$ soit une clôture séparable de $\kappa(x)$, que l'on notera $\kappa(x)^s$ et que l'on verra comme la réunion des $\kappa(x_i)$. Pour tout i , l'ensemble $\text{br}(X_i, x_i)$ est fini et possède au moins un élément situé au-dessus de b ; il existe donc un élément $(b_i)_i$ de $\lim_{\leftarrow} \text{br}(X_i, x_i)$ tel que b_i soit situé pour tout i au-dessus de b .

D'après le 4.2.6 et la remarque 4.2.9, la branche b_i induit pour tout i une valuation $|\cdot|_{b_i}$ de $\kappa(x_i)$, et la famille des $|\cdot|_{b_i}$ se comporte bien vis-à-vis des restrictions; elle définit donc une valuation $|\cdot|'$ sur $\kappa(x)^s$ qui prolonge $|\cdot|_b$. Si $f \in \kappa(x_i)$ pour un certain i alors $|f|' \leq 1$ si et seulement si $|f|_{b_i} \leq 1$, c'est-à-dire et seulement si $|f| \leq 1$ le long de b_i .

La famille $(\mathcal{O}_{X_i}(b_i))_i$ est un système inductif filtrant d'anneaux intègres dont les flèches de transition sont injectives (lemme 4.2.3 iii)). Sa limite inductive est une $\kappa(x)$ -algèbre intègre A , que l'on verra comme la réunion des $\mathcal{O}_{X_i}(b_i)$. La donnée pour tout i de l'injection de $\kappa(x_i)$ dans $\mathcal{O}_{X_i}(b_i)$ permet de voir $\kappa(x)^s$ comme étant contenu dans A ; il coïncide alors avec la fermeture séparable de $\kappa(x)$ dans A .

Soit $f \in \mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$; son image dans A vit dans $\kappa(x)^s$, et partant dans $\kappa(x_i)$ pour un certain i ; autrement dit, la fonction f , vue comme appartenant à $\mathcal{O}_{X_i}(b_i)$, se prolonge en une fonction définie au voisinage de x_i .

Ceci entraîne (lemme 4.2.4) que f est modérée en tant qu'élément de $\mathcal{O}_{X_i}(b_i)$; d'après le lemme 4.2.3 elle est alors modérée en tant qu'élément de $\mathcal{O}_X(b)$, ce qui achève de prouver i), et $|f| \leq 1$ le long de b si et seulement si $|f| \leq 1$ le long de b_i , autrement dit si et seulement si $|f|' \leq 1$ (f est vue comme appartenant à $\mathcal{O}_X(b)$ pour la première condition, à $\mathcal{O}_{X_i}(b_i)$ pour la seconde, et à $\kappa(x)^s$ pour la troisième).

Pour tout i , notons H_i le sous-groupe de $\text{Gal}(\kappa(x_i)/\kappa(x))$ égal au stabilisateur de b_i via l'identification entre $\text{Gal}(\kappa(x_i)/\kappa(x))$ et $\text{Gal}((X_i, x_i)/(X, x))$; soit H la limite projective des H_i .

- Si $x \in X_{[2]}$ alors H est le stabilisateur de $|\cdot|'$ dans $\text{Gal}(\kappa(x)^s/\kappa(x))$ (4.2.11.1).

- Si $x \in X_{[3]}$ alors $H = \text{Gal}(\kappa(x)^s/\kappa(x))$ (4.2.12). Par ailleurs, on a dans ce cas $|\cdot|_b = |\cdot|$ (rem. 4.2.8), et $|\cdot|'$ est donc l'unique prolongement de $|\cdot|_b$ à $\kappa(x)^s$. Dès lors, H est là encore le stabilisateur de $|\cdot|'$ dans $\text{Gal}(\kappa(x)^s/\kappa(x))$.

Il découle du lemme 4.2.3 que l'action de H sur $\kappa(x)^s$ s'étend à A et que $A^H = \mathcal{O}_X(b)$. Le corps $(\kappa(x)^s)^H$ est donc égal à $\kappa(x)^s \cap \mathcal{O}_X(b)$, c'est-à-dire à $\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$. En conséquence $(\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}, |\cdot|'_{\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}})$ est le hensélisé de $(\kappa(x), |\cdot|_b)$. On a par ailleurs vu plus haut que l'anneau de $|\cdot|'_{\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}}$ est constitué des fonctions

majorées par 1 en valeur absolue le long de b ; on a donc $|\cdot|'_{\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}} = |\cdot|_b$, ce qui achève la démonstration. \square

(4.2.19.1) Remarque. Il découle de l’assertion iii) du théorème ci-dessus que lorsque $x \in X_{[2]}$, la valuation $|\cdot|_b$ de $\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$ a même groupe des valeurs et même corps résiduel que sa restriction à $\kappa(x)$; il nous arrivera pour cette raison dans ce cas de parler du groupe des valeurs et du corps résiduel de $|\cdot|_b$ sans expliciter le corps sur laquelle on la considère (lorsque $x \in X_{[3]}$ le problème ne se pose pas puisque les corps $\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$ et $\kappa(x)$ coïncident).

(4.2.19.2) Remarque. Soit $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ un morphisme fini et plat entre germes de courbes k -analytiques normales et sans bord. Supposons que $y \in Y_{[2,3]}$, soit $b \in \text{br}(Y, y)$ et soit a son image dans $\text{br}(X, x)$. Il est immédiat que $\mathcal{O}_X(a)_{\text{alg}}$ (resp. $\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}$) s’envoie dans $\mathcal{O}_Y(b)_{\text{alg}}$ (resp. $\mathcal{O}_Y(b)_{\text{sep}}$); il résulte de l’assertion ii) du lemme 4.2.9 que $\mathcal{O}_Y(b)_{\text{alg}}$ est une extension de corps valués de $\mathcal{O}_Y(b)_{\text{alg}}$.

(4.2.20) Proposition. Soit $\varphi : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ un morphisme fini et plat entre germes de courbes k -analytiques normales; on suppose que $y \in Y_{[2,3]}$. Soit $b \in \text{br}(Y, y)$ et soit a son image dans $\text{br}(X, x)$. L’extension $\mathcal{O}_Y(b)_{\text{sep}}/\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}$ est finie de degré $\deg(b \rightarrow a)$.

Démonstration. Les catégories des $\kappa(x)$ -algèbres étales, des $\mathcal{H}(x)$ -algèbres étales, et des revêtements finis étales du germe (X, x) sont équivalentes. Soit F la fermeture séparable de $\kappa(x)$ dans $\kappa(y)$, et soit (X', x') le germe fini étale sur (X, x) qui lui correspond. Le corps $\mathcal{H}(x') \simeq F \otimes_{\kappa(x)} \mathcal{H}(x)$ se plonge naturellement dans $\mathcal{H}(y)$; par conséquent, $Y' := Y \times_X X' \rightarrow Y$ possède un $\mathcal{H}(y)$ -point y' au-dessus de y , et le morphisme fini étale $(Y', y') \rightarrow (Y, y)$ est alors un isomorphisme; la composée de sa réciproque et de la projection vers (X', x') définit une factorisation $(Y, y) \rightarrow (X', x') \rightarrow (X, x)$; comme $\kappa(x') \simeq F$, l’extension $\kappa(x') \hookrightarrow \kappa(y)$ est purement inséparable.

On se ramène ainsi, pour démontrer la proposition, à traiter deux cas particuliers.

(4.2.20.1) Le cas où $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ est étale. Soit \mathcal{B} le sous-ensemble de $\text{br}(Y, y)$ formé des branches situées au-dessus de a . Soit $\beta \in \mathcal{B}$ et soit δ le degré de β sur a . L’on dispose d’un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \kappa(y) & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y(\beta) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \kappa(x) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(a) \end{array} ;$$

les anneaux $\mathcal{O}_Y(\beta)$ et $\mathcal{O}_X(a)$ sont intègres, et $\mathcal{O}_Y(\beta)$ est de présentation finie et localement libre de rang δ sur $\mathcal{O}_X(a)$ (lemme 4.2.3). Soit $f \in \mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}}$ et soit χ son polynôme caractéristique sur $\mathcal{O}_X(a)$; il est de degré δ et est égal à une puissance du polynôme minimal de f sur $\text{Frac } \mathcal{O}_X(a)$. Étant séparable sur $\kappa(y)$, l’élément f de $\mathcal{O}_Y(\beta)$ est séparable sur $\kappa(x)$ et les coefficients de son polynôme minimal sur $\text{Frac } \mathcal{O}_X(a)$ le sont alors aussi. Dès lors les coefficients de χ sont des éléments de $\mathcal{O}_X(a)$ séparables sur $\kappa(x)$; autrement dit, ils appartiennent à $\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}$. Ainsi, tout élément de $\mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}}$ est annulé par un polynôme unitaire de degré δ à coefficients dans $\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}$.

Il résulte du 4.2.11.1 que $\{|\cdot|_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ est l'ensemble des valuations de $\kappa(y)$ qui prolongent $|\cdot|_a$; par ailleurs, le théorème 4.2.19 assure que $\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}$ est le hensélisé de $(\kappa(x), |\cdot|_a)$ et que $\mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}}$ est le hensélisé de $(\kappa(y), |\cdot|_\beta)$ pour tout β dans \mathcal{B} . Il en résulte que

$$\kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}} = \prod_{\beta \in \mathcal{B}} \mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}}.$$

En conséquence, $\mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}}$ est pour tout β une extension finie séparable de $\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}$, et

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}} [\mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}} : \mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}] = [\kappa(y) : \kappa(x)] = \deg^y \varphi.$$

On a vu plus haut que quelque soit β appartenant à \mathcal{B} , chaque élément de $\mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}}$ est de degré au plus égal à $\deg(\beta \rightarrow a)$ sur $\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}$; il en découle, grâce au théorème de l'élément primitif, que le degré de l'extension finie séparable $\mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}}/\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}$ est au plus $\deg(\beta \rightarrow a)$. Des deux égalités

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}} \deg(\beta \rightarrow a) = \deg^y \varphi \quad \text{et} \quad \sum_{\beta \in \mathcal{B}} [\mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}} : \mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}] = \deg^y \varphi$$

l'on déduit alors que $[\mathcal{O}_Y(\beta)_{\text{sep}} : \mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}] = \deg(\beta \rightarrow a)$ pour tout $\beta \in \mathcal{B}$ et en particulier pour b , ce qui achève la preuve dans le cas où φ est étale.

(4.2.20.2) *Le cas où $\kappa(y)$ est purement inséparable sur $\kappa(x)$.* La valuation $|\cdot|_a$ admet alors un unique prolongement à $\kappa(y)$, ce qui signifie, en vertu du 4.2.11.1, que b est la seule branche de (Y, y) située au-dessus de a ; par conséquent, $\deg(b \rightarrow a) = \deg \varphi$. Par ailleurs $\mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}} \otimes_{\kappa(x)} \kappa(y)$ étant un corps, c'est le hensélisé de $(\kappa(y), |\cdot|_b)$, c'est-à-dire le corps $\mathcal{O}_Y(b)_{\text{sep}}$ (th. 4.2.19); il vient

$$[\mathcal{O}_Y(b)_{\text{sep}} : \mathcal{O}_X(a)_{\text{sep}}] = [\kappa(y) : \kappa(x)] = \deg^y \varphi = \deg(b \rightarrow a). \quad \square$$

4.3 Branches des courbes quasi-lisses

(4.3.1) Lemme. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme fini et plat entre courbes k -analytiques, soit $y \in Y$ et soit x son image sur X . Soit U une composante connexe de $X \setminus \{x\}$ et soit V une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$. Supposons que $\partial V = \{y\}$ et que $\text{br}(Y, y)_{\subset V}$ est un singleton $\{b\}$. Sous ces hypothèses, $\deg(b \rightarrow \varphi(b)) = \deg(V \rightarrow U)$.*

Démonstration. Posons $a = \varphi(b)$; comme b est contenue dans V son image a est contenue dans U . Il existe alors une section Z de a qui est contenue dans U et une bijection $\beta \mapsto Z_\beta$ entre $\varphi^{-1}(a)$ et $\pi_0(\varphi^{-1}(Z))$ telle que Z_β soit pour tout β une section de β dont le degré sur Z coïncide avec $\deg(\beta \rightarrow a)$. Comme y est le seul antécédent de x qui adhère à V , toute branche de Y située au-dessus de a et contenue dans V est issue de y ; comme $\text{br}(Y, y)_{\subset V} = \{b\}$, la branche b est la seule branche de $\varphi^{-1}(a)$ qui soit contenue dans V . Il s'ensuit que Z_b est la seule composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$ qui soit contenue dans V ; on a dès lors $Z_b = V \times_U Z$, et partant

$$\deg(b \rightarrow a) = \deg(Z_b \rightarrow Z) = \deg(V \rightarrow U). \quad \square$$

Un lemme de Gabber et ses conséquences

La suite de cet article repose de façon absolument cruciale sur la construction de fonctions méromorphes satisfaisant certaines conditions, elle-même fondée sur le lemme ci-dessous, communiqué à l’auteur par Gabber.

(4.3.2) Lemme (Gabber). *Soit F un corps algébriquement clos et soit \mathcal{X} une courbe algébrique projective, irréductible et lisse sur F . Soient V et W deux sous-ensembles non vides de $\mathcal{X}(F)$ et soit N un entier strictement positif. Il existe deux diviseurs effectifs D et D' sur \mathcal{X} tels que :*

- 1) D' est à support dans W ;
- 2) le degré de $D \cap V$ est premier à N ;
- 3) D et D' sont linéairement équivalents.

Démonstration. Comme V et W sont non vides, on peut choisir un point P sur V et un point Q sur W . La multiplication par N étant une isogénie de la variété abélienne $\text{Jac } \mathcal{X}$, il existe un fibré en droites \mathcal{L} sur \mathcal{X} tel que $\mathcal{L}^{\otimes N} \simeq \mathcal{O}(Q - P)$. Le théorème de Riemann-Roch assure qu’il existe un entier $m > 0$ et un diviseur effectif Δ sur \mathcal{X} tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(mQ) \simeq \mathcal{O}(\Delta)$. Il vient :

$$\mathcal{O}(N\Delta) \simeq \mathcal{L}^{\otimes N} \otimes \mathcal{O}(NmQ) \simeq \mathcal{O}(Q - P) \otimes \mathcal{O}(NmQ) \simeq \mathcal{O}((Nm + 1)Q - P),$$

et les diviseurs $D := P + N\Delta$ et $D' := (Nm + 1)Q$ satisfont les propriétés requises. \square

(4.3.3) Théorème. *Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique lisse et soit $x \in X_{[2,3]}$. Soit $b \in \text{br}(X, x)$. Il existe $z \in \mathbb{P}_{k^a}^{1,\text{an}}$ et un morphisme fini étale de germes $\varphi : (X, x) \rightarrow (\mathbb{P}_{k^a}^{1,\text{an}}, z)$ tel que $\deg(b \rightarrow \varphi(b))$ soit premier à p .*

Démonstration. On peut appliquer la construction du théorème 4.1.2, et ainsi supposer que X est l’analytifiée d’une k -courbe algébrique projective, intègre et lisse \mathcal{X} , telle que la propriété suivante soit satisfaite : si V désigne l’ouvert $b(\mathcal{X}^{\text{an}})$ alors $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)_{\subset V} = \{b\}$.

Comme $x \in X_{[2,3]}$, il résulte de 4.2.11.1 et 4.2.11.2 qu’il y a au moins deux branches de \mathcal{X}^{an} issues de x ; il existe donc une composante connexe W de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ qui est différente de V . Les sous-ensembles $V(\widehat{k^a})$ et $W(\widehat{k^a})$ de $\mathcal{X}(\widehat{k^a})$ sont non vides (par le *Nullstellensatz* si $|\widehat{k^a}^\times| \neq \{1\}$, et par la description explicite de \mathcal{X}^{an} sinon). On peut donc appliquer le lemme 4.3.2 : il existe deux diviseurs effectifs linéairement équivalents D et D' sur \mathcal{X} tels que D' soit à support dans $W(\widehat{k^a})$ et tels que $\deg(D \cap V(\widehat{k^a}))$ soit premier à p . Soit f une fonction rationnelle sur \mathcal{X} de diviseur $D' - D$. La fonction f ne s’annule pas sur $V(\widehat{k^a})$, et la somme des ordres des pôles de f sur $V(\widehat{k^a})$ est première à p (en particulier, f a au moins un pôle sur $V(\widehat{k^a})$).

Soit φ le morphisme fini et plat de \mathcal{X}^{an} dans $\mathbb{P}_{k^a}^{1,\text{an}}$ induit par f ; posons $z = \varphi(x)$. Le diviseur de f n’étant pas divisible par p , le morphisme φ est génériquement étale, et est donc étale en x . L’ouvert $U := \varphi(V)$ de $\mathbb{P}_{k^a}^{1,\text{an}}$ ne contient pas 0 ; par conséquent, U est une composante connexe de $\mathbb{P}_{k^a}^{1,\text{an}} \setminus \{z\}$ et V est une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$ (lemme 4.2.1). L’ouvert U contient ∞ ,

et le nombre de points comptés avec multiplicité de $\varphi_{|V}^{-1}(\infty)$ est premier à p ; par conséquent, $\deg(V \rightarrow U)$ est premier à p .

Nous sommes dans les conditions d'application du lemme 4.3.1; celui-ci garantit que $\deg(b \rightarrow \varphi(b)) = \deg(V \rightarrow U)$ et est donc premier à p , ce qu'il fallait démontrer. \square

Sections coronaires : le cas d'un point singulier isolé et «déployé»

(4.3.4) Soit X une courbe k -analytique génériquement quasi-lisse et soit x un point rigide de X ; soit X' la normalisée de X et soient x'_1, \dots, x'_r les antécédents de x sur X' . On fait l'hypothèse que les x'_i sont des k -points lisses; c'est par exemple toujours le cas si k est algébriquement clos.

(4.3.4.1) Soit $U \in \text{Arb}(X, x)$ tel que $U \setminus \{x\}$ soit lisse, et soit U' l'image réciproque de U sur X' . Il existe une famille $(V'_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'ouverts de U' telle que :

- pour tout i , l'ouvert V'_i est un k -disque contenant x_i ;
- les V'_i sont deux à deux disjoints.

Comme $U \setminus \{x\}$ est normale, la réunion V' des V'_i est un ouvert saturé de U' , qui est donc l'image réciproque d'un voisinage ouvert V de x dans U ; notons que l'image sur U de chacun des V'_i est connexe et contient x ; par conséquent, V est connexe et est dès lors un arbre.

La normalité de $U \setminus \{x\}$ implique que $V' \setminus \{x'_1, \dots, x'_r\} \rightarrow V$ est un isomorphisme. Pour tout i , l'ouvert $V'_i \setminus \{x'_i\}$ est une k -couronne de type $]0, *[$ et l'intervalle ouvert $S(V'_i \setminus \{x_i\})$ aboutit proprement à x'_i .

Il s'ensuit que $V \setminus \{x\}$ s'écrit comme une réunion disjointe $\coprod W_i$, où chaque W_i est une k -couronne de type $]0, *[$ dont le squelette aboutit proprement à x .

(4.3.4.2) Soit $b \in \text{br}(X, x)$ et soit \mathcal{S} le sous-ensemble de $\text{Interv}_a(X, b)$ formé des intervalles I tels que la section I^b de b soit une k -couronne de type $]0, *[$. Il résulte de ce qui précède que $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Soit $I \in \mathcal{S}$. On déduit de 3.6.14 *et al.* que le bout de I^b qui correspond à x est son bout infini. Il s'ensuit que les sections de b de la forme J^b , où $J \in \text{Interv}(X, x)_{\subset I}$ (qui constituent une base de sections de b) sont encore des k -couronnes de type $]0, *[$.

(4.3.4.3) Soit X une $\widehat{k^a}$ -courbe génériquement quasi-lisse et soit x un $\widehat{k^a}$ -point de X ; soit $b \in \text{br}(X, x)$. On appellera *section coronnaire* de b toute section Z de b qui est une couronne de type $]0, *[$ dont l'adhérence dans X est un arbre compact. Il résulte de ce qui précède : que si Z est une section coronnaire de b , le point x correspond au bout infini de Z ; et que b possède une base de sections coronaires.

Sections et voisinages coronaires en un point de type 2 ou 3 : le cas d'un corps de base algébriquement clos

(4.3.5) Théorème. *Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique génériquement quasi-lisse et soit x appartenant à $X_{[2,3]}$.*

- 1) *Si $x \in X_{[3]}$ il existe un voisinage ouvert Z de x dans X qui est une couronne dont l'adhérence dans X est un arbre compact, qui est telle que $x \in S^{\text{an}}(Z)$, et qui satisfait de surcroît les propriétés suivantes :*
 - *si $x \notin \partial^{\text{an}} X$ alors Z est de type $]*,*[$;*
 - *si $x \in \partial^{\text{an}} X$ et si x n'est pas un point isolé de X alors Z est de type $]*,*]$ et $\partial^{\text{an}} Z = \{x\}$;*
 - *si x est un point isolé de X alors $Z = \{x\} = \partial^{\text{an}} Z$ (et Z est de type $\{*\}$).*
- 2) *Si $b \in \text{br}(X, x)$ il existe une section Z de b qui possède les propriétés suivantes :*
 - i) *Z est une couronne de type $]*,*[$ dont l'adhérence dans X est un arbre compact ;*
 - ii) *il existe une fonction $\theta \in \kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}$ qui est définie sur Z , en est une fonction coordonnée et est telle que $|\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}^\times|_b = |\widehat{k^a}^\times| \oplus |\theta|_b^{\mathbb{Z}}$.*

Démonstration. On prouve les deux assertions séparément, mais par des méthodes analogues.

(4.3.5.1) Preuve de 1) dans le cas où $x \notin \partial^{\text{an}} X$. Soit b l'une des deux branches issues de x (4.2.11.2) ; le théorème 4.3.3 fournit un point z appartenant à $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ et un morphisme fini étale $\varphi : (X, x) \rightarrow (\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}, z)$ entre germes de courbes k -analytiques tel que le degré d de b au-dessus de $\varphi(b)$ soit premier à p . En composant à gauche si nécessaire par (le germe d') une homographie, l'on se ramène au cas où $z = \eta_{\widehat{k^a},r}$ pour un certain $r > 0$ n'appartenant pas à $|\widehat{k^a}^\times|$.

Le morphisme φ induit une surjection $\text{br}(X, x) \rightarrow \text{br}(\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}, \eta_{\widehat{k^a},r})$. Or ces deux ensembles sont de cardinal 2 (4.2.11.2 ; notons que pour le second, il n'est pas besoin d'invoquer cette référence – cela se voit directement) ; par conséquent, φ induit une bijection $\text{br}(X, x) \simeq \text{br}(\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}, \eta_{\widehat{k^a},r})$. Il s'ensuit que $\varphi^{-1}(\varphi(b)) = \{b\}$ et donc que $[\kappa(x) : \kappa(\eta_{\widehat{k^a},r})] = \deg \varphi = d$.

L'extension séparable $\kappa(x)/\kappa(\eta_{\widehat{k^a},r})$ de corps valués henséliens étant de degré premier à p , elle est *modérément ramifiée*. On a $|\kappa(\eta_r)^\times| = |\widehat{k^a}^\times| \oplus |T(\eta_r)|^{\mathbb{Z}}$; comme $|\widehat{k^a}^\times|$ est divisible et comme $\kappa(\eta_{\widehat{k^a},r})$ est algébriquement clos (il est égal à $\widetilde{k^a}$) la théorie de la ramification modérée assure que $\kappa(x)$ est isomorphe à $\kappa(\eta_{\widehat{k^a},r})[\tau]/(\tau^d - T(\eta_{\widehat{k^a},r}))$; il en résulte que le $(\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}, \eta_{\widehat{k^a},r})$ -germe fini étale (X, x) est isomorphe à $(\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}, \eta_{\widehat{k^a},\sqrt[r]{r}})$, qui est vu comme $(\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}, \eta_{\widehat{k^a},r})$ -germe *via* l'élévation à la puissance d ; il existe donc un voisinage ouvert Z de x dans X qui est une couronne de type $]*,*[$ telle que $x \in S(Z)$; quitte à remplacer Z par I^b , où I est un intervalle ouvert relativement compact de $S(Z)$ contenant x , on peut supposer que \overline{Z} est un arbre compact. Ainsi, 1) est démontré dans le cas où $x \notin \partial^{\text{an}} X$.

(4.3.5.2) Preuve de 3) dans le cas général. Comme x est de type 3, la courbe génériquement quasi-lisse X est quasi-lisse en x . Il existe donc un voisinage ouvert V de x dans X et une courbe k -analytique lisse W tel que V s'identifie à un domaine analytique fermé de W . En vertu du cas sans bord traité au 4.3.5.1 ci-dessus, il existe un voisinage ouvert T de x dans W qui est une couronne de type $]*, *[$ dont x appartient au squelette; notons I_1 et I_2 les deux composantes connexes de $S(Z)\{x\}$. Comme x est de type 3, il résulte de 3.4.19.3 et de l'assertion 4.2.4 que l'on peut supposer, quitte à restreindre T , que $T \cap V$ est de la forme $\{x\} \cup \bigcup_{i \in E} I_i^b$, où E est un sous-ensemble de $\{1, 2\}$; on peut également faire en sorte que $\overline{T \cap V}^V$ soit un arbre compact. Le voisinage $Z \cap V$ de x dans X répond alors aux conditions posées.

(4.3.5.3) Preuve de 2). Comme X est quasi-lisse, il existe un voisinage de x dans X qui est isomorphe à un domaine analytique fermé d'une courbe lisse X' ; grâce à l'assertion iii) de la proposition 4.2.4 et au 4.2.14, on peut remplacer X par X' , c'est-à-dire supposer que X est lisse. Si $x \in X_{[3]}$, l'assertion 2) est une conséquence triviale de 1); on suppose à partir de maintenant que $x \in X_{[2]}$. Soit $b \in \text{br}(X, x)$. Le théorème 4.3.3 fournit un point z appartenant à $\mathbb{P}_{\widehat{k}^a}^{1, \text{an}}$ et un morphisme fini étale $\varphi : (X, x) \rightarrow (\mathbb{P}_{\widehat{k}^a}^{1, \text{an}}, z)$ entre germes de courbes k -analytiques tel que le degré d de b au-dessus de $\varphi(b)$ soit premier à p . En composant à gauche si nécessaire par (le germe d') une homographie, l'on se ramène au cas où $z = \eta_{\widehat{k}^a, 1}$ et où $\varphi(b)$ est l'unique branche de $\mathbb{P}_{\widehat{k}^a}^{1, \text{an}}$ issue de $\eta_{\widehat{k}^a, 1}$ le long de laquelle $|T| < 1$.

On a $|T(\eta_{\widehat{k}^a, 1})| = 1$ et $|T|_{\varphi(b)} < 1$; par conséquent, $T(\widetilde{\eta_{\widehat{k}^a, 1}})$ s'annule au point de la courbe résiduelle en $\eta_{\widehat{k}^a, 1}$ qui correspond à $\varphi(b)$; cette courbe est isomorphe à $\mathbb{P}_{\widehat{k}^a}^1$, et le point correspondant ne peut être que l'origine, en laquelle $T(\widetilde{\eta_{\widehat{k}^a, 1}})$ s'annule à l'ordre 1. On déduit alors du 4.2.11.1 et de l'égalité $|\kappa(\eta_{\widehat{k}^a, 1})^\times| = |\widehat{k}^a{}^\times|$ que le groupe des valeurs de $|\cdot|_{\varphi(b)}$ est $|\widehat{k}^a{}^\times| \oplus |T|_{\varphi(b)}^{\mathbb{Z}}$, et que son corps résiduel est \widehat{k}^a et est en particulier algébriquement clos.

Par le théorème 4.2.19, $\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widehat{k}^a}^{1, \text{an}}}(\varphi(b))_{\text{sep}}$) s'identifie naturellement au hensélisé de $(\kappa(x), |\cdot|_b)$ (resp. $(\kappa(\eta_1), |\cdot|_{\varphi(b)})$). D'après la proposition 4.2.20 $\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$ est de degré d sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widehat{k}^a}^{1, \text{an}}}(\varphi(b))_{\text{sep}}$. L'extension de corps valués henséliens (rem. 4.2.19.2) $\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widehat{k}^a}^{1, \text{an}}}(\varphi(b))_{\text{sep}}$ étant de degré premier à p , elle est modérément ramifiée.

Compte-tenu du caractère divisible de $|\widehat{k}^a{}^\times|$, la théorie de la ramification modérée assure alors que $\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$ est engendré sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widehat{k}^a}^{1, \text{an}}}(\varphi(b))_{\text{sep}}$ par une racine d -ième τ de T , et que l'on a $|\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}^\times|_b = |\widehat{k}^a{}^\times| \oplus |\tau|_b^{\mathbb{Z}}$. Choisissons θ dans $\kappa(x)$ tel que $|\theta|_b = |\tau|_b$ (rem. 4.2.19.1); cela signifie que $|\theta/\tau| = 1$ le long de b .

Nous pouvons supposer, quitte à restreindre X , que le morphisme de germes φ est induit par un « vrai » morphisme fini et plat, noté encore φ , de X sur un voisinage ouvert U de η_1 , que X est un arbre, et que x est le seul antécédent de η_1 sur X .

Les ouverts de $\widehat{\mathbb{P}}_{k^a}^{1,\text{an}}$ qui peuvent s'écrire I^b , où I est un intervalle ouvert de la forme $] \eta_{k^a,s}; \eta_{k^a,1} [$ avec $0 < s < 1$, forment une base de sections de $\varphi(b)$; il existe donc I de la forme évoquée tel que $I^b \subset U$.

La section I^b de b est alors une couronne de type $]*, * [$ contenue dans U , dont T est une fonction coordonnée. Il existe une (unique) composante connexe Z de $\varphi^{-1}(I^b)$ qui soit une section de b ; la flèche $Z \rightarrow I^b$ est finie étale de degré d . Comme $\{Z \times_{I^b} J^b\}_J$, où J parcourt $\text{Interv}(\widehat{\mathbb{P}}_{k^a}^{1,\text{an}}, \eta_{k^a,1})_{\subset I}$, est une base de sections de b on peut supposer, quitte à restreindre I (et Z), que τ et θ sont définies sur Z , et que $|\tau/\theta| = 1$ identiquement sur Z .

Soit Z' le revêtement de Kummer de I^b obtenu par adjonction d'une racine d -ième de T ; la fonction τ étant une racine d -ième sur de T sur Z , elle définit une section du revêtement étale $Z \times_{I^b} Z' \rightarrow Z$, c'est-à-dire une factorisation de $Z \rightarrow I^b$ par $Z' \rightarrow I^b$; par comparaison des degrés, $Z \rightarrow Z'$ est un isomorphisme; par conséquent, Z est une couronne de type $]*, * [$, la fonction τ en est une fonction coordonnée et $Z \rightarrow I^b$ est un revêtement de Kummer. Comme $|\tau/\theta|$ est identiquement égale à 1 sur Z la fonction θ est elle aussi une fonction coordonnée de Z ; en restreignant Z (il suffit de la remplacer par n'importe laquelle de ses sous-couronnes ouvertes strictes aboutissant à x), on peut faire en sorte que son adhérence dans X soit un arbre compact, ce qui achève la démonstration. \square

(4.3.6) Faisons quelques commentaires à propos du théorème ci-dessus, en en conservant les notations.

(4.3.6.1) Supposons que $x \in X_{[3]}$; un voisinage ouvert Z de x satisfaisant les conditions de l'assertion 1) sera dit *coronaire*. Soit Z un voisinage coronaire de x ; les sous-couronnes de Z de la forme I^b , où I est un voisinage ouvert de x dans $S^{\text{an}}(Z)$, sont encore des voisinages coronaires de x ; elles forment une base de voisinages de x dans Z , et *a fortiori* dans X (3.4.19.3). Si f est une fonction analytique inversible sur Z , alors f est une fonction coordonnée si et seulement si $|f(x)|$ engendre $|\mathcal{H}(x)^\times|/|\widehat{k^a}^\times|$: compte-tenu du fait que x est de type 3, cela découle de 3.6.22 et 3.6.23.5.

(4.3.6.2) On ne suppose plus que $x \in X_{[3]}$. Nous dirons d'une section Z de b qui satisfait la condition i) de l'assertion 2) du théorème qu'elle est *coronaire*; si Z est une section coronaire de b (resp. une section coronaire de b satisfaisant ii)) et si Z' est une sous-couronne ouverte de Z aboutissant à x , il est immédiat que Z' est coronaire (resp. est coronaire et satisfait ii)).

Par ailleurs, si Z est une section coronaire de b , l'ensemble de ses sous-couronnes ouvertes aboutissant à x est exactement l'ensemble des I^b , où I parcourt $\text{Interv}(X, x)_{\subset S(Z)}$; c'est donc une base de sections de b .

On déduit de ce qui précède que b possède une base de sections qui sont coronaires et satisfont ii).

(4.3.6.3) Soit Z une section coronaire de b . Par ce qui précède, il existe une section Z' de b qui est coronaire, contenue dans Z et satisfait ii). L'intersection $S(Z) \cap S(Z')$ est un intervalle ouvert I aboutissant à x . Comme $I \subset S(Z) \cap S(Z')$, l'intervalle I est faiblement admissible dans Z aussi bien que dans Z' , et I^b est une sous-couronne ouverte de Z aussi bien que de Z' , qui aboutit à x puisque I aboutit à x . En tant que sous-couronne de Z aboutissant

à x , l'ouvert I^b est une section coronaire de b ; comme la section I^b est aussi une sous-couronne de Z' , elle satisfait ii).

Ainsi, Z possède une sous-couronne ouverte aboutissant à x et satisfaisant ii).

(4.3.6.4) Soit $f \in \mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}^\times$. En vertu de 4.3.6.2, il existe une section coronaire Z de b satisfaisant ii) et sur laquelle f et f^{-1} sont définies. Soit θ comme dans l'assertion 2), ii); comme f est une fonction inversible sur la couronne Z dont θ est une fonction coordonnée, il existe $\alpha \in \widehat{k^a}^\times$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|f| = |\alpha| \cdot |\theta|^m$ identiquement sur Z , et f est une fonction coordonnée de Z si et seulement si $m = 1$ ou $m = -1$; par définition même de $|\cdot|_b$, on a $|f|_b = |\alpha| \cdot |\theta|_b^m$. Il en résulte :

- α) qu'il existe un isomorphisme naturel $|\mathcal{O}_X(Z)^\times| \simeq |\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}^\times|_b$ compatible aux plongements de $|\widehat{k^a}^\times|$ dans ces deux groupes;
- β) que f est une fonction coordonnée de la couronne Z si et seulement si $|\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}^\times|_b = |\widehat{k^a}^\times| \oplus |f|_b^{\mathbb{Z}}$, ou encore si et seulement si $|f|_b$ engendre $|\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}^\times|_b$ modulo $|\widehat{k^a}^\times|$.

Supposons que f soit une fonction coordonnée de Z . La fonction $|f|$ a une limite λ en x , et de la définition de $|\cdot|_b$ découle la remarque suivante, qui permet de décrire entièrement $|\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}^\times|_b = |\widehat{k^a}^\times| \oplus |f|_b^{\mathbb{Z}}$ comme groupe ordonné : si $|f|$ est croissante (resp. décroissante) lorsqu'on oriente le squelette de Z dans la direction de x , alors $|f|_b$ est infiniment proche inférieurement (resp. supérieurement) de λ .

Notons que si $\lambda \notin |\widehat{k^a}^\times|$ (on déduit aisément de ce qui précède que cela se produit si et seulement si $x \in X_{[3]}$), on obtient le même ordre sur $|\widehat{k^a}^\times| \oplus |f|_b^{\mathbb{Z}}$ en décrétant que $|f|_b$ est égal à λ ; on retrouve ainsi l'égalité attendue lorsque $x \in X_{[3]}$ entre $|\cdot|_b$ et $|\cdot|$ sur $\kappa(x) = \mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}$ (rem. 4.2.8 et assertion iv) du th. 4.2.19).

Remarque. L'isomorphisme naturel évoqué en α) s'étend au cas où Z est coronaire sans satisfaire nécessairement ii) : en effet, Z contient d'après 4.3.6.3 une sous-couronne Z' qui aboutit à x et satisfait ii), et l'on conclut en utilisant le fait que la flèche naturelle $|\mathcal{O}_X(Z)^\times| \rightarrow |\mathcal{O}_X(Z')^\times|$ est un isomorphisme.

Sections coronaires : le cas d'un point singulier isolé quelconque

(4.3.7) Lemme. Soit X une courbe k -analytique génériquement quasi-lisse, soit x un point rigide de X et soit b une branche issue de X . Il existe une section Z de b qui est une couronne virtuelle de type $]0, *[$ dont l'adhérence dans X est un arbre compact.

Démonstration. Comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien, on peut restreindre X de sorte que $\mathfrak{s}(x) \subset \mathcal{O}_X(X)$; on peut dès lors, quitte à remplacer k par $\mathfrak{s}(x)$, supposer que $\mathfrak{s}(x) = k$. Le point x admet sous cette hypothèse un unique antécédent y sur $X_{\widehat{k^a}}$, lequel est fixe sous l'action de G ; notons p la flèche $X_{\widehat{k^a}} \rightarrow X$, qui s'identifie à $X_{\widehat{k^a}} \rightarrow X_{\widehat{k^a}}/G$.

Choisissons une branche β de $\text{br}(X_{\widehat{k^a}}, y)$ située au-dessus de b ; comme y est rigide, $\text{br}(X_{\widehat{k^a}y},)$ est fini et le stabilisateur H de β dans G est donc ouvert.

D'après 4.3.4.2, il existe $I \in \text{Interv}_a(X_{\widehat{k^a}}, \beta)$ tel que la $\widehat{k^a}$ -courbe I^b soit une couronne de type $]0, *[$. En vertu de la proposition 1.9.18, il existe un intervalle ouvert J appartenant à $\text{Interv}_{a,c}(X, x)_{\subset I}$ tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- p induit un homéomorphisme $\bar{J} \simeq p(\bar{J})$;
- l'intervalle J est fixe point par point sous H ;
- pour tout $g \in G - H$ on a $g(J^b) \cap J^b = \emptyset$;

Remarquons que comme J aboutit à y , l'ouvert J^b est lui aussi une couronne de type $]0, *[$. Soit Z l'image de J^b sur X ; toujours d'après la proposition 1.9.18, l'intervalle ouvert $p(J)$ de X aboutit proprement à x , est faiblement admissible, et vérifie l'égalité $Z = p(J^b)$; par conséquent, Z est un arbre à deux bouts dont l'adhérence dans X est un arbre compact.

Par construction, $Z_{\widehat{k^a}}$ est la réunion disjointe des $g(J^b)$, pour g parcourant un système de représentants de G/H ; chacune des $g(J^b)$ étant une couronne de type $]0, *[$, il s'ensuit que Z est une ∞ -couronne virtuelle de type $]0, *[$. \square

(4.3.8) Soit X une courbe k -analytique génériquement quasi-lisse, soit x un point rigide de X et soit $b \in \text{br}(X, x)$. On appellera *section coronaire* de b toute section Z de b qui est une couronne virtuelle de type $]0, *[$ dont l'adhérence dans X est un arbre compact; cette définition est compatible avec la précédente lorsque $\widehat{k^a}$ est algébriquement clos. Si Z est une section coronaire de b , il en va de même de I^b pour tout intervalle ouvert de $S(Z)$ aboutissant à x ; par conséquent, comme le lemme 4.3.7 assure l'existence d'une section coronaire de b , la branche b possède une base de telles sections.

Si Z est une section coronaire de b , son bord est de la forme $\{x, y\}$ avec $y \neq x$. Il résulte de 3.6.14 *et sq.* que le bout infini de Z est celui qui correspond à x , et que $y \in X_{[2,3]}$.

Sections et voisinages coronaires en un point de type 2 ou 3 : le cas d'un corps de base quelconque

(4.3.9) Proposition. *Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse et soit $x \in X$.*

1) *Si $x \in X_{[3]}$ il existe un voisinage ouvert Z de x dans X qui est une couronne gentiment virtuelle dont l'adhérence dans X est un arbre compact, qui est telle que $x \in S^{\text{an}}(Z)$, et qui satisfait de surcroît les propriétés suivantes :*

- si $x \notin \partial^{\text{an}} X$ alors Z est de type $]*, *[$;
- si $x \in \partial^{\text{an}} X$ et si x n'est pas un point isolé de X alors Z est de type $]*, *]$ et $\partial^{\text{an}} Z = \{x\}$;
- si x est un point isolé de X alors $Z = \{x\} = \partial^{\text{an}} Z$ (et Z est de type $\{*\}$).

2) *Si $b \in \text{br}(X, x)$ il existe une section Z qui est une couronne gentiment virtuelle de type $]*, *]$ dont l'adhérence dans X est un arbre compact. On peut de surcroît imposer à Z de vérifier la condition suivante : il*

existe une extension finie F de k , et même finie séparable si $|k^\times| \neq 1$, un antécédent x' de x sur X_F , une composante connexe Z' de Z_F aboutissant à x' qui est une F -couronne, et une fonction coordonnée sur Z' se prolongeant à un voisinage de x' dans X_F .

Démonstration. Comme $\mathcal{O}_{X,x} = \kappa(x)$, on peut restreindre X de sorte que $\mathfrak{s}(x) \subset \mathcal{O}_X(X)$; on peut dès lors, quitte à remplacer k par $\mathfrak{s}(x)$, supposer que $\mathfrak{s}(x) = k$. Le point x admet sous cette hypothèse un unique antécédent y sur $X_{\widehat{k^a}}$, lequel est fixe sous l'action de G ; notons p la flèche $X_{\widehat{k^a}} \rightarrow X$, qui s'identifie à $X_{\widehat{k^a}} \rightarrow X_{\widehat{k^a}}/G$.

(4.3.9.1) *Preuve de 1).* Le point y étant lisse de type 3), il possède un voisinage coronaire Y dans $X_{\widehat{k^a}}$ (th. 4.3.5 et 4.3.6.1). Le squelette analytique $S^{\text{an}}(Y)$ peut être vue comme une étoile de sommet y tracée sur $X_{\widehat{k^a}}$, faiblement admissible, dont la valence coïncide avec le cardinal de $\text{br}(Y, y)$. On peut par conséquent appliquer la proposition 1.9.21; elle assure entre autres l'existence d'un intervalle I tracé sur $S^{\text{an}}(Y)$, ouvert dans ce dernier, contenant y et stable sous G . Quitte à choisir un tel I et à remplacer Y par sa sous-couronne I^b , on peut supposer que Y elle-même est stable sous G ; on note Z le quotient Y/G ; c'est un voisinage ouvert de x . Comme Y est un arbre ayant au plus deux bouts, Z est un arbre ayant au plus deux bouts; son adhérence dans X est égale au quotient de \overline{Y} par G , et est donc un arbre compact.

Nous allons montrer que G agit par automorphismes directs sur Y , en distinguant trois cas.

Si Y est de type $\{*\}$, autrement dit si $Y = \{y\}$ cela découle du fait que G opère par isométries sur $\mathcal{H}(y)$, et agit donc trivialement sur $|\mathcal{H}(y)^\times|/|k^\times|$.

Si Y est de type $]*,*]$, cela provient du fait que comme $S^{\text{an}}(Y)$ est un intervalle semi-ouvert, G en préserve nécessairement les orientations.

Supposons maintenant que Y soit de type $]*,*[$. C'est le cas où $y \notin Y^{\text{an}}$, et donc où $x \notin X^{\text{an}}$. Comme x est de type 3), il y a exactement deux branches de X issues de x (4.2.11.2), et $Z \setminus \{x\}$ a de ce fait deux composantes connexes. Par conséquent, les images sur Z des deux composantes connexes de $Y \setminus \{y\}$ sont disjointes, ce qui signifie que ces composantes ne sont pas échangées par G ; autrement dit, l'action de ce dernier ne permute pas les orientations du squelette de Y , ce qu'on souhaitait établir.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^\times$ engendrant $|\kappa(y)^\times|$ modulo $|\widehat{k^a}^\times|$. La fermeture algébrique (et même séparable si $|k^\times| \neq \{1\}$) de k dans $\widehat{k^a}$ en est un sous-corps dense. Il existe par conséquent un voisinage ouvert U de x dans X , une extension finie L de k (que l'on peut prendre séparable si $|k^\times| \neq \{1\}$) et une fonction analytique inversible f sur U_L telle que $|f(y)| = r$.

Il découle de 4.3.6.1 qu'il est loisible de restreindre Y de sorte que $Y \subset U_{\widehat{k^a}}$, et que $f|_Y$ est alors une fonction coordonnée sur Y .

On peut voir f comme une fonction analytique sur Z_L , et elle induit par construction un isomorphisme entre $(Z_L) \widehat{\otimes}_L \widehat{k^a}$ et un ouvert de $\mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ défini par une condition de la forme $R < |T| < R'$; il s'ensuit par descente (corollaire 3.2.18) que f induit un isomorphisme entre Z_L et l'ouvert de $\mathbb{A}_L^{1,\text{an}}$ défini par la condition $R < |T| < R'$. Par conséquent, Z est une couronne *gentiment* virtuelle. Compte-tenu du fait que le type de Z est celui de Y ,

que $x \in \partial^{\text{an}}X$ si et seulement si $y \in \partial^{\text{an}}Y$, et que x est isolé dans X si et seulement si y est isolé dans Y , ceci achève la démonstration de i).

(4.3.9.2) Preuve de 2). Si $x \in X_{[3]}$ alors 2) est une conséquence triviale de 1); supposons maintenant que $x \in X_{[2]}$, et notons \mathcal{C} la courbe résiduelle en y ; soit b une branche de X issue de x .

Choisissons une branche β de $X_{\widehat{k^a}}$ issue de y et située au-dessus de b ; soit H son stabilisateur; c'est un sous-groupe ouvert de G (prop. 1.9.18). Choisissons une section coronaire Y de β . En vertu de la proposition 1.9.18, il existe un intervalle ouvert J appartenant à $\text{Interv}_{a,c}(X, x)_{\subset S(Y)}$ tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- p induit un homéomorphisme $\overline{J} \simeq p(\overline{J})$;
- l'intervalle J est fixe point par point sous H ;
- pour tout $g \in G - H$ on a $g(J^b) \cap J^b = \emptyset$;

Remarquons que J^b est une sous-couronne ouverte de Y aboutissant à y , et est donc elle aussi une section coronaire de β . Soit Z l'image de J^b sur X ; toujours d'après la proposition 1.9.18, l'intervalle ouvert $p(J)$ de X aboutit proprement à x , est faiblement admissible, et vérifie l'égalité $Z = p(J^b)$; par conséquent, Z est un arbre à deux bouts dont l'adhérence dans X est un arbre compact.

Par construction, $Z_{\widehat{k^a}}$ est la réunion disjointe des couronnes $g(J^b)$, pour g parcourant un système de représentants de G/H ; de ce fait, Z est une couronne virtuelle.

La branche β correspond à un point fermé \mathcal{P} de \mathcal{C} . La fermeture algébrique (et même séparable si $|k^\times| \neq \{1\}$) de k dans $\widehat{k^a}$ en est un sous-corps dense. Il existe par conséquent un voisinage ouvert U de x dans X , une extension finie L de k (que l'on peut prendre séparable si $|k^\times| \neq \{1\}$) et une fonction analytique f sur U_L telle que $|f(y)| = 1$ et telle que $f(y)$ ait un zéro d'ordre 1 en \mathcal{P} (on note encore f la fonction analytique sur $U_{\widehat{k^a}}$ induite par f).

Il découle de 4.3.6.4 et 4.2.11.1 qu'il est loisible de restreindre J de sorte que $J^b \subset U_{\widehat{k^a}}$, et que $f|_{J^b}$ soit une fonction coordonnée sur J^b .

Il existe une extension finie séparable F de L qui déploie, en tant qu'extension finie de k , la k -algèbre étale $\mathfrak{s}(Z)$; toute composante connexe de Z_F est alors un espace F -analytique géométriquement connexe; il existe par conséquent une composante connexe Z' de Z_F et un plongement $F \hookrightarrow \widehat{k^a}$ tels que $Z'_{\widehat{k^a}} \simeq J^b$.

On peut voir f comme une fonction analytique sur Z' , et elle induit par construction un isomorphisme entre $Z'_{\widehat{k^a}}$ et un ouvert de $\mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ défini par une condition de la forme $R < |T| < R'$; il s'ensuit par descente (corollaire 3.2.18) que f induit un isomorphisme entre Z' et l'ouvert de $\mathbb{A}_F^{1,\text{an}}$ défini par la condition $R < |T| < R'$. Par conséquent, Z' est une F -couronne dont f est une fonction coordonnée, ce qui achève de prouver 2). \square

(4.3.10) Faisons quelques commentaires à propos du lemme ci-dessus, en en conservant les notations.

(4.3.10.1) Supposons que $x \in X_{[3]}$. Un voisinage ouvert Z de x satisfaisant les conditions de l'assertion i) sera dit *coronaire*; cette terminologie est compatible

avec celle déjà introduite dans le cas algébriquement clos. Si Z est un voisinage coronaire de x , les sous-couronnes virtuelles de Z de la forme I^b , où I est un intervalle de $\mathbf{S}^{\text{an}}(Z)$ ouvert dans ce dernier et contenant x , sont encore des voisinages coronaires de x ; elles forment une base de voisinages de x dans Z , et *a fortiori* dans X ; cela découle, en vertu de la proposition 1.9.21, du fait que $\mathbf{S}^{\text{an}}(Z)$ peut être vu comme une étoile étoile tracée sur Z de sommet x et de valence égale au cardinal de $\text{br}(X, x)$.

(4.3.10.2) On ne suppose plus que $x \in X_{[3]}$. Une section Z de la branche b qui satisfait la condition énoncée en ii) sera qualifiée de *coronaire*; cette terminologie est compatible avec celle déjà introduite dans le cas algébriquement clos.

(4.3.10.3) Soit $I \in \text{Interv}(X, b)$; choisissons une section coronaire Z de b . Comme $\mathbf{S}(Z)$ et I définissent tous deux b , leur intersection contient un intervalle ouvert J_0 aboutissant à x ; si J est un intervalle ouvert aboutissant à x et contenu dans J_0 il appartient à $\text{Interv}_{a,c}(X, x)$, et J^b est une sous-couronne virtuelle ouverte de Z , et partant une section coronaire de b . Ainsi b possède-t-elle une base de sections coronaires de la forme J^b , où $J \in \text{Interv}_{a,c}(X, x)_{\subset I}$.

(4.3.10.4) Supposons que b possède une section coronaire Z_0 qui est une couronne; elle possède alors une base de telles sections (par exemple, les sous-couronnes ouvertes de Z_0 aboutissant à x). Soient Z_1 et Z_2 deux sections coronaires de b qui sont des couronnes; si Z_2 est une sous-couronne de Z_1 alors $\mathcal{Z}(Z_1) \simeq \mathcal{Z}(Z_2)$. La famille $\{\mathcal{Z}(Z)\}_Z$, où Z parcourt l'ensemble des sections coronaires de b qui sont des couronnes, apparaît ainsi comme un système filtrant dont toutes les flèches de transition sont des isomorphismes. On note $\mathcal{Z}(b)$ sa limite (à la fois inductive et projective, selon le sens dans lequel on considère les isomorphismes); c'est un groupe libre de rang 1. Pour toute section coronaire Z de b qui est une couronne, on dispose d'un isomorphisme naturel $\mathcal{Z}(Z) \simeq \mathcal{Z}(b)$; on obtient par ce biais, en vertu de 3.6.23.2, une bijection entre l'ensemble des générateurs de $\mathcal{Z}(b)$ et celui des orientations de la branche b (1.7.15).

Lorsque k est algébriquement clos, on déduit de l'assertion $\alpha)$ de 4.3.6.4 que $\mathcal{Z}(b)$ est naturellement isomorphe à $|\mathcal{O}_X(b)_{\text{sep}}^\times|/|k^\times|$, et donc également à $|\kappa(x)^\times|_b/|k^\times|$ (th. 4.2.19).

Degré d'une branche sur la branche image et ramification résiduelle

(4.3.11) Proposition. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme purement de dimension relative nulle entre courbes k -analytiques génériquement quasi-lisses, et soit y un point de $Y_{[0,2,3]}$; posons $x = \varphi(y)$.*

i) *Soit $b \in \text{br}(Y, y)$ et soit a son image dans $\text{br}(X, x)$. Il existe une section Z' de b et une section Z de a telles que :*

- Z' et Z sont coronaires;
- Z' est une composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$;
- $Z' \rightarrow Z$ est fini et plat de degré $\deg(b \rightarrow a)$.

ii) *Supposons que $y \in Y_{[3]}$. Il existe un voisinage ouvert Z' de y dans Y et un voisinage ouvert Z de x dans X tels que :*

- Z' et Z sont coronaires ;
- Z' est une composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$;
- il existe un intervalle I de $\mathbf{S}^{\text{an}}(Z)$ contenant x , tel que $\partial_Z I \subset \{x\}$, et tel que $Z' \rightarrow Z$ induise un morphisme fini et plat $Z' \rightarrow I^\sharp$.

Démonstration. On prouve les deux assertions séparément, mais avec des arguments similaires.

(4.3.11.1) Preuve de i). Commençons par remarquer que la proposition 4.2.16 permet de supposer, quitte à restreindre Y et X , que tous deux sont des arbres, que y est le seul antécédent de x sur Y , que $Y \rightarrow X$ est compacte à fibre finie, et que le morphisme $Y \setminus \{y\} \rightarrow X \setminus \{x\}$ est fini et plat. Soit V une section coronaire de a et soit V' la composante connexe de $\varphi^{-1}(V)$ qui correspond à b . Il existe une section coronaire Z' de b contenue dans V' ; posons $Z = \varphi(Z')$.

Comme Z' est connexe et comme $b \in \partial Z'$, l'ouvert Z de V est connexe et $a \in \partial Z$; cela entraîne que $Z \cap \mathbf{S}(V) \neq \emptyset$; le lemme 3.6.40 assure alors que Z est de la forme I^\flat pour un certain intervalle ouvert non vide I de $\mathbf{S}(V)$ et que $Z' \rightarrow Z$ est fini et plat. Comme $a \in \partial Z$, l'intervalle I aboutit nécessairement à x ; par conséquent, Z est une section coronaire de a .

La flèche finie (et plate) $Z' \rightarrow Z$ est compacte ; il résulte alors du lemme 4.2.15 que Z' est une composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$. Comme $Z' \subset V'$ on a nécessairement $Z = V' \times_V Z$; il en résulte que $\deg(Z' \rightarrow Z) = \deg(b \rightarrow a)$.

(4.3.11.2) Preuve de ii). Soit Z un voisinage coronaire de x dans X et soit Z' un voisinage coronaire de y dans $\varphi^{-1}(Z)$. Comme $x \in \mathbf{S}^{\text{an}}(Z)$, le lemme 3.6.40 assure $Z' \rightarrow V$ induit un morphisme fini et plat de Z' sur I^\sharp pour un certain intervalle non vide I de $\mathbf{S}^{\text{an}}(Z)$, qui contient évidemment x ; quitte à restreindre Z , on peut supposer que $\partial_Z I \subset \{x\}$.

La couronne virtuelle Z' est une partie ouverte, connexe et non vide de $\varphi^{-1}(Z)$. La flèche finie (et plate) $Z' \rightarrow I^\sharp$ est compacte, et I^\sharp est fermée dans Z puisque $x \in I$ et $\partial_Z I \subset \{x\}$; par conséquent, $I^\sharp \hookrightarrow Z$ est compacte, et $Z' \rightarrow Z$ l'est aussi par composition. Le lemme 4.2.15 garantit alors que Z' est une composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$. \square

(4.3.12) Commentaires. Dans la situation de l'assertion 2) (et en en conservant les notations), on se trouve plus précisément dans l'un des cas suivants.

(4.3.12.1) Le cas où Z' est de type $]*,*[$, autrement dit où $y \notin \partial^{\text{an}} Y$. La couronne virtuelle I^\sharp est alors de type $]*,*[$ (d'après le lemme 3.6.40), ce qui force Z à être égale à I^\sharp ; le morphisme φ est alors sans bord en y .

(4.3.12.2) Le cas où Z' est de type $]*,*]$, autrement dit où $y \in \partial^{\text{an}} Y$ et où y n'est pas isolé dans Y . La couronne virtuelle I^\sharp est alors de type $]*,*]$, ce qui laisse deux possibilités pour Z : ou bien $Z = I^\sharp$, et φ est sans bord en y ; ou bien Z est de type $]*,*[$, et $y \in \partial^{\text{an}} \varphi$.

(4.3.12.3) Le cas où Z' est de type $\{*\}$, autrement dit où y est un point isolé de Y , et où $Z' = \{y\}$. La couronne virtuelle I^\sharp est alors de type $\{*\}$, ce qui veut dire que $I = I^\sharp = \{x\}$; cela laisse trois possibilités pour Z : ou bien $Z = I^\sharp = \{x\}$, et φ est sans bord en y ; ou bien Z est de type $]*,*]$, et $y \in \partial^{\text{an}} \varphi$; ou bien Z est de type $]*,*[$, et $y \in \partial^{\text{an}} \varphi$.

(4.3.12.4) Dans chacun des cas où φ est sans bord en y , c'est-à-dire où $Z = I^\sharp$, le morphisme φ est fini et plat en y ; comme y est le seul antécédent de x sur Z' (puisque $S^{\text{an}}(Z')$ est égale à l'image réciproque de $S^{\text{an}}(Z)$ sur Z' , et puisque $S^{\text{an}}(Z') \rightarrow S^{\text{an}}(Z)$ est un homéomorphisme), on a l'égalité

$$\deg^y \varphi = \deg (Z' \rightarrow Z).$$

(4.3.13) **Théorème.** Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme de dimension relative nulle entre deux courbes $\widehat{k^a}$ -analytiques quasi-lisses; soit $y \in Y_{[2,3]}$ et soit x son image sur X .

i) Supposons que $y \in Y_{[2]}$, soit $b \in \text{br}(Y, y)$ et soit a la branche $\varphi(b)$; posons $d = \deg(b \rightarrow a)$. Notons \mathcal{D} (resp. \mathcal{C}) la courbe résiduelle en y (resp. x) et \mathcal{Q} (resp. \mathcal{P}) le point fermé qui correspond à b (resp. a) par la bijection du 4.2.11.1; le point \mathcal{P} est l'image de \mathcal{Q} (rem. 4.2.9) et l'on note e l'indice de ramification de $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ en \mathcal{Q} . On a alors $e = d$.

ii) Supposons que $y \notin \partial^{\text{an}}\varphi$; on alors $[\widetilde{\kappa(y)} : \widetilde{\kappa(x)}] = [\kappa(y) : \kappa(x)]$ si $y \in Y_{[2]}$, et $[|\kappa(y)^\times| : |\kappa(x)^\times|] = [\kappa(y) : \kappa(x)]$ si $y \in Y_{[3]}$; par conséquent, l'extension $\kappa(y)/\kappa(x)$ est sans défaut.

Démonstration. Nous allons prouver les deux assertions séparément.

(4.3.13.1) *Preuve de i).* La proposition 4.3.11 assure l'existence d'une section coronaire Z de a et d'une section coronaire Z' de b telle que φ induise une flèche finie et plate de degré d de Z' vers Z . D'après 3.6.24 (et 3.6.22), la flèche φ identifie $|\mathcal{O}_X(Z)^\times|$ à un sous-groupe d'indice d de $|\mathcal{O}_Y(Z')^\times|$. Il s'ensuit, en vertu du 4.3.6.4, que d est l'indice de ramification de $|\cdot|_b$ sur $|\cdot|_a$. La valuation $|\cdot|_b$ (resp. $|\cdot|_a$) est la composée de $|\cdot|$ et de la valuation discrète d'anneau $\mathcal{O}_{D,Q}$ (resp. $\mathcal{O}_{C,P}$); comme $|\kappa(y)^\times| = |\kappa(x)^\times| = |\widehat{k^a}^\times|$, l'indice de ramification de $|\cdot|_b$ sur $|\cdot|_a$ est égal à l'indice de ramification de $\mathcal{O}_{D,Q}$ sur $\mathcal{O}_{C,P}$. Ainsi, $d = e$, d'où i).

(4.3.13.2) *Preuve de ii).* Supposons tout d'abord que $y \in Y_{[2]}$. Le point x est alors également de type 2, et l'on note encore \mathcal{C} et \mathcal{D} les courbes résiduelles respectives en x et y . On identifie (\widetilde{X}, x) (resp. (\widetilde{Y}, y)) à un ouvert dense de \mathcal{C} (resp. \mathcal{D}). Choisissons un point fermé $\mathcal{P} \in (\widetilde{X}, x) \subset \mathcal{C}$; il correspond à une branche $a \in \text{br}(X, x)$. Notons $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_r$ les antécédents de \mathcal{P} sur \mathcal{D} ; comme φ est sans bord en y , l'image réciproque de (\widetilde{X}, x) sur \mathcal{D} est égale à (\widetilde{Y}, y) , ce qui implique que chacun des \mathcal{Q}_i appartient à (\widetilde{Y}, y) , et correspond donc à une branche b_i issue de y et situé au-dessus de a .

Étant sans bord et de dimension nulle en y , le morphisme φ est fini en y ; comme x n'est pas rigide et comme X est réduite par quasi-lissité $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ est fini et plat. Pour tout i , notons e_i l'indice de ramification de \mathcal{Q}_i sur \mathcal{P} ; on a $e_i = \deg(b_i \rightarrow a)$ pour tout i d'après l'assertion i) déjà établie. Il vient, en se souvenant que \mathcal{D} et \mathcal{C} sont des courbes projectives sur le corps algébriquement clos \widehat{k} :

$$\begin{aligned} [\kappa(y) : \kappa(x)] &= \deg^y \varphi = \sum_i \deg(b_i \rightarrow a) = \sum_i e_i \\ &= \deg(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}) = [\widetilde{\kappa(y)} : \widetilde{\kappa(x)}]. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $y \in Y_{[3]}$. En vertu de la proposition 4.3.11 et de 4.3.12.4), il existe un voisinage coronaire Z de x dans X et un voisinage coronaire Z' de y tel que φ induise un morphisme fini et plat $Z' \rightarrow Z$, de degré égal à $\deg^y \varphi$. D'après 3.6.24, l'extension $\mathcal{H}(y)/\mathcal{H}(x)$ est sans défaut et de degré $\deg^y \varphi$. Comme y et x sont de type 3, les corps résiduels $\widetilde{\mathcal{H}(y)}$ et $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ sont tous deux égaux à $\widetilde{k^a}$; par conséquent, $[|\mathcal{H}(y)^\times| : |\mathcal{H}(x)^\times|] = \deg^y \varphi$; par densité, $[|\kappa(y)^\times| : |\kappa(x)^\times|]$ est aussi égal à $\deg^y \varphi$, ce qui achève la démonstration. \square

Stabilité des corps de degré de transcendance résiduel gradué maximal

(4.3.14) Théorème. *Supposons que le corps k soit stable. Soit X un espace k -analytique et soit x un point d'Abhyankar de X dont on note d le rang; le corps $\mathcal{H}(x)$ est alors stable.*

Démonstration. Soit (Y, φ) une présentation d'Abhyankar de x , et soit \mathbf{r} le polyrayon tel que $\varphi(x) = \eta_{\mathbf{r}}$. Comme $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie de $\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})$ (3.2.12.3), il suffit de démontrer que $\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}})$ est stable. Par une récurrence immédiate, on se ramène finalement à montrer que $\mathcal{H}(\eta_r)$ est stable pour tout $r > 0$; fixons donc un tel r , et écrivons η au lieu de η_r , et η_F au lieu de $\eta_{r,F}$ pour toute extension complète F de k . Remarquons que si la valeur absolue de k est triviale, alors la valeur absolue de $\mathcal{H}(\eta)$ est ou bien triviale, ou bien discrète; dans chacun de ces deux cas, $\mathcal{H}(\eta)$ est stable, et l'on peut donc supposer à partir de maintenant que la valeur absolue de k est non triviale.

Soit L une extension finie séparable de $\mathcal{H}(\eta)$; nous allons démontrer que $[\widetilde{L} : \widetilde{\mathcal{H}(\eta)}] = [L : \mathcal{H}(\eta)]$, ce qui permettra de conclure, puisque la stabilité d'un corps complet se teste sur ses extensions finies séparables. La catégorie des $\mathcal{H}(\eta)$ -algèbres finies étales étant naturellement équivalente à la catégorie des revêtements finis étales du germe $(\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}, \eta)$, il existe un espace k -analytique Z , un point z de Z et un morphisme fini étale de Z sur un voisinage ouvert de η dans $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ qui envoie z sur η et est tel que l'extension $\mathcal{H}(z)$ de $\mathcal{H}(\eta)$ s'identifie à L . Comme $Z \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ est étale, Z est lisse.

Soient z_1, \dots, z_m les antécédents de $\eta_{\widehat{k^a}}$ sur $Z_{\widehat{k^a}}$. Comme $Z \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ est étale, $\mathcal{H}(z_i) \simeq \kappa(z_i) \otimes_{\kappa(z)} \mathcal{H}(z)$ pour tout i . En vertu du théorème 4.3.13, l'extension $\kappa(z_i)/\kappa(\eta_{\widehat{k^a}})$ est sans défaut pour tout i ; par conséquent, l'extension $\mathcal{H}(z_i)/\mathcal{H}(\eta_{\widehat{k^a}})$ est sans défaut pour tout i ; notons que $\prod \mathcal{H}(z_i)$ s'identifie à $L \otimes_{\mathcal{H}(\eta)} \mathcal{H}(\eta_{\widehat{k^a}})$.

Comme la valeur absolue de k est non triviale, k^s est dense dans $\widehat{k^a}$. Par le lemme de Krasner, $L \otimes_{\mathcal{H}(\eta)} (\mathcal{H}(\eta) \otimes_k k^s)$ s'écrit sous la forme $\prod L_i$, où L_i est pour tout i un sous-corps dense de $\mathcal{H}(z_i)$. Pour tout i , l'extension finie séparable $L_i/(\mathcal{H}(\eta) \otimes_k k^s)$ est sans défaut; on choisit un ensemble \mathcal{B}_i d'éléments de L_i^\times de cardinal $\dim_{\mathcal{H}(\eta) \otimes_k k^s} L_i$ et tel que les \widetilde{b} constituent, pour b parcourant \mathcal{B}_i , une base de \widetilde{L}_i sur $(\mathcal{H}(\eta) \otimes_k k^s)$.

Il existe une sous-extension finie F de k^s/k telle que les L_i et les \mathcal{B}_i soient «définis sur F », c'est-à-dire plus précisément telle que $L \otimes_{\mathcal{H}(\eta)} \mathcal{H}(\eta_F)$

s'écrive $\prod L'_i$, où chaque L'_i est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(\eta_F)$ dont le produit tensoriel avec $\mathcal{H}(\eta) \otimes_k k^s$ s'identifie à L_i , et qui contient \mathcal{B}_i modulo cette identification.

Fixons i . Les \tilde{b} , pour b parcourant \mathcal{B}_i , sont linéairement indépendants sur $(\mathcal{H}(\eta) \otimes_k k^s)$; ils le sont *a fortiori* sur $\mathcal{H}(\eta_F)$. Par conséquent, on a

$$[\widetilde{L}'_i : \widetilde{\mathcal{H}(\eta_F)}] \geq \text{card}(\mathcal{B}_i) = \dim_{\mathcal{H}(\eta) \otimes_k k^s} L_i = \dim_{\mathcal{H}(\eta_F)} L'_i,$$

et l'on a finalement $[\widetilde{L}'_i : \widetilde{\mathcal{H}(\eta_F)}] = \dim_{\mathcal{H}(\eta_F)} L'_i$.

On déduit par ailleurs des descriptions explicites de $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_F)}$ et $\widetilde{\mathcal{H}(\eta)}$ (cf. 2.2.46.6) que

$$[\widetilde{\mathcal{H}(\eta_F)} : \widetilde{\mathcal{H}(\eta)}] = [\widetilde{F} : \widetilde{k}] = [F : k],$$

cette dernière égalité provenant de l'hypothèse de stabilité de k .

On a alors d'une part

$$\begin{aligned} \sum [\widetilde{L}'_i : \widetilde{\mathcal{H}(\eta)}] &= [F : k] \sum [L'_i : \mathcal{H}(\eta_F)] \\ &= [F : k] \cdot [L : \mathcal{H}(\eta)], \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \sum [\widetilde{L}'_i : \widetilde{\mathcal{H}(\eta)}] &= [\widetilde{L} : \widetilde{\mathcal{H}(\eta)}] \sum [\widetilde{L}'_i : \widetilde{L}] \\ &\leq [L : \mathcal{H}(\eta)] \sum [L'_i : L] = [L : \mathcal{H}(\eta)] \cdot [\mathcal{H}(\eta_F) : \mathcal{H}(\eta)] = [L : \mathcal{H}(\eta)] \cdot [F : k] \\ &= \sum [\widetilde{L}'_i : \widetilde{\mathcal{H}(\eta)}], \end{aligned}$$

cette dernière égalité provenant de ce qui précède.

Par conséquent, l'inégalité large ci-dessus est en réalité une égalité, et l'on a en particulier

$$[\widetilde{L} : \widetilde{\mathcal{H}(\eta)}] = [L : \mathcal{H}(\eta)],$$

ce qui achève la démonstration. \square

(4.3.15) Corollaire. Soit X un espace $\widehat{k^a}$ -analytique, soit x un point d'Abhyankar de X et soit L une extension complète de $\widehat{k^a}$; on note π le morphisme canonique $X_L \rightarrow X$. Le sous-ensemble fini $x_{[L]}$ de $\pi^{-1}(x)$ (3.2.14) est alors un singleton $\{y\}$, et $\widetilde{\mathcal{H}(y)}$ s'identifie au corps des fractions de l'anneau $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widehat{k^a}} \widetilde{L}$ (lequel est intègre d'après 2.2.30).

Démonstration. Soit (Y, φ) une présentation d'Abhyankar de x , et soit \mathbf{r} le polyrayon tel que $\varphi(x) = \eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}}$. On a $\varphi(x) = \eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}}$ et $\varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}})$ est de dimension nulle d'après 3.2.12.3; soit d le degré de $\mathcal{H}(x)$ sur $\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}})$. Comme $\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}})$ est stable par le théorème 4.3.14, on a $[\widetilde{\mathcal{H}(x)} : \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}})}] = d$.

(4.3.15.1) En vertu de la proposition 3.2.13, $x_{[L]}$ est l'ensemble des antécédents de x sur $\varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r}, L})$. Soit $y \in x_{[L]}$. Le corps $\mathcal{H}(y)$ est un quotient de $\mathcal{H}(x) \otimes_{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}})} \mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}, L})$. Par conséquent, $[\mathcal{H}(y) : \mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r}, L})] \leq d$.

(4.3.15.2) Les corps $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})}$ et $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$ sont respectivement égaux aux algèbres de polynômes en les $T_i(\eta_{\mathbf{r},k^a})$ à coefficients dans $\widetilde{k^a}$ et \widetilde{L} . On en déduit que $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$ s'identifie au corps des fractions de $\widetilde{L} \otimes_{\widetilde{k^a}} \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})}$. Dès lors, la $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$ -algèbre $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})}} \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$ est le localisé de l'anneau intègre $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{k^a}} \widetilde{L}$ par l'image de $(\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})} \otimes_{\widetilde{k^a}} \widetilde{L})^{\neq 0}$, et est donc intègre. Étant par ailleurs entière sur le corps $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$, cette algèbre est un corps, et c'est dès lors plus précisément le corps des fractions de $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{k^a}} \widetilde{L}$ (puisque c'est un localisé de ce dernier).

(4.3.15.3) Le morphisme naturel du corps $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})}} \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$ dans $\widetilde{\mathcal{H}(y)}$ est nécessairement injectif. La dimension du $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$ -espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})}} \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$ est égale à d , et

$$[\widetilde{\mathcal{H}(y)} : \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}] \leq [\mathcal{H}(y) : \mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})] \leq d$$

Il vient

$$\widetilde{\mathcal{H}(y)} = \widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})}} \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$$

et

$$[\widetilde{\mathcal{H}(y)} : \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}] = [\mathcal{H}(y) : \mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})] = d.$$

Cette dernière égalité assure que la flèche naturelle

$$\mathcal{H}(x) \otimes_{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})} \mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L}) \rightarrow \mathcal{H}(y)$$

est un isomorphisme, ce qui entraîne que y est le seul antécédent de x sur $\varphi^{-1}(\eta_{\mathbf{r},L})$.

On a vu ci-dessus que $\widetilde{\mathcal{H}(y)} = \widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},k^a})}} \widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{r},L})}$, et ce dernier est en vertu de 4.3.15.2 le corps des fractions de $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \otimes_{\widetilde{k^a}} \widetilde{L}$; ceci achève la démonstration. \square

(4.3.16) **Corollaire.** *Soit X un espace k -analytique, soit x un point d'Abhyankar de X et soit L une extension complète de k . L'ensemble $x_{[L]}$ est en bijection naturelle avec celui des idéaux maximaux de $L \otimes_k \mathfrak{s}(x)$.*

Démonstration. Quitte à remplacer X par un voisinage convenable de x , on peut supposer que $\mathfrak{s}(X) = \mathfrak{s}(x)$. Écrivons $L \otimes_k \mathfrak{s}(x) = \prod L_i$, où chaque L_i est une extension finie séparable de L . En vertu de 3.2.15.5, il suffit de montrer que pour tout indice i , le sous-ensemble $x_{[L_i]}$ de X_{L_i} (défini en considérant X comme un espace $\mathfrak{s}(x)$ -analytique) est un singleton.

On se ramène ainsi au cas où $\mathfrak{s}(x) = k$. Soit L' une extension complète de k composée de $\widetilde{k^a}$ et L . Comme $\mathfrak{s}(x) = k$, le point x a un unique antécédent sur $X_{\widetilde{k^a}}$, qui coïncide avec $x_{[\widetilde{k^a}]}$. Il résulte du corollaire 4.3.15 que $x_{[L']} = (x_{[\widetilde{k^a}]})_{[L']}$ est un singleton. Puisque $x_{[L']}$ est la réunion des $y_{[L']}$ pour y parcourant $x_{[L]}$, l'ensemble $x_{[L]}$ est lui-même un singleton. \square

4.4 Voisinages des points d'une courbe quasi-lisse sur un corps algébriquement clos

(4.4.1) Si x est un point de type 2 d'une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique, on appellera *genre* de x le genre de la courbe résiduelle en x ; si x est un point de type 3, son genre sera *par définition* égal à 0; le genre d'un point x de type 2 ou 3 sera noté $g(x)$. Par abus, nous dirons simplement « point de genre tant » au lieu de « point de type 2 ou 3 et de genre tant ».

Si x est un point de type 2 ou 3 de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ alors $g(x) = 0$: si x est de type 3 c'est une conséquence de la définition, et si x est de type 2 cela résulte de 3.3.3.1.

(4.4.2) On fixe pour toute cette section un entier ℓ premier à p . Dans ce qui suit, nous dirons « μ_ℓ -torseur » pour « μ_ℓ -torseur étale ».

Germes de toseurs

(4.4.3) Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse et soit $x \in X_{[2,3]}$. Nous dirons que X est *bien découpé autour de x* si c'est un arbre, et si pour toute branche b de X issue de x l'une des deux conditions suivantes (exclusives l'une de l'autre) est satisfaite :

- $b(X)$ est relativement compacte dans X ;
- $b(X)$ est une couronne.

Lorsque la seconde condition est satisfaite, nous dirons parfois que $b(X)$ est une *composante coronaire* de $X \setminus \{x\}$.

(4.4.3.1) Supposons que X soit bien découpé autour de x , et soit U un voisinage ouvert de x dans X , bien découpé autour de x . Soit Z une composante coronaire de $X \setminus \{x\}$. L'intersection $U \cap Z$ est une composante connexe de $U \setminus \{x\}$. Si elle était relativement compacte dans U , elle coïnciderait avec Z , ce qui est absurde puisque cette dernière n'est pas relativement compacte dans X . En conséquence, $U \cap Z$ est nécessairement une composante coronaire de $U \setminus \{x\}$.

Nous dirons que le *couple* (U, X) est bien découpé autour de x si pour toute composante coronaire Z de U , la composante coronaire de $U \setminus \{x\}$ contenue dans U est une sous-couronne de Z .

(4.4.3.2) Il résulte de la proposition 1.7.16 et de 4.3.6.2 que le point x possède une base de voisinages ouverts bien découpés autour de x . Si U est un tel voisinage, le point x possède même plus précisément une base de voisinages ouverts V tels que le couple (V, U) soit bien découpé autour de x .

En effet, soit W un voisinage ouvert de x . Il existe un voisinage ouvert W_0 de x dans $U \cap W$ qui est bien découpé autour de x . Soit Π l'ensemble des composantes coronaires de U ; pour tout $Z \in \Pi$, l'intersection $Z \cap W_0$ est une couronne contenue dans Z et aboutissant à x , et il existe une sous-couronne C_Z de $Z \cap W_0$ qui aboutit à x et est aussi une sous-couronne de Z ; le complémentaire C'_Z de C_Z dans $Z \cap W_0$ est fermé dans W_0 , par exemple en vertu de la proposition 1.7.16. Le complémentaire V de $\coprod_{Z \in \Pi} C'_Z$ dans W_0 est alors un voisinage ouvert de x contenu dans W , et le couple (V, U) est bien découpé autour de x .

(4.4.4) Soient X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse et connexe, soit $x \in X_{[2]}$ et soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme fini étale. Soit \mathcal{C} la courbe résiduelle en x . Pour tout $y \in Y_x$ on note \mathcal{D}_y la courbe résiduelle en y .

(4.4.4.1) Soit $y \in Y_x$. Comme le corps $\mathcal{H}(x)$ est stable (th. 4.3.14) et comme $|\mathcal{H}(x)^\times|$ est divisible, on a l'égalité $[\widetilde{\mathcal{H}(y)}_1 : \widetilde{\mathcal{H}(x)}_1] = [\mathcal{H}(y) : \mathcal{H}(x)]$; en conséquence, $\widetilde{\mathcal{H}(y)}$ est non ramifiée sur $\mathcal{H}(x)$ si et seulement si $\widetilde{\mathcal{H}(y)}_1$ est séparable sur $\mathcal{H}(x)_1$, c'est-à-dire encore si et seulement si \mathcal{D}_y est génériquement étale sur \mathcal{C} .

(4.4.4.2) Soit Π le sous-ensemble de $\pi_0(Y \setminus \varphi^{-1}(x))$ formé des composantes connexes V satisfaisant les conditions suivantes :

- 1) le bord de V est de la forme $\{y\}$ pour un certain $y \in \varphi^{-1}(x)$;
- 2) l'ensemble $\text{br}(Y, y)_{\subset V}$ est un singleton $\{b\}$;
- 3) le morphisme $\mathcal{D}_y \rightarrow \mathcal{C}$ est étale en le point fermé de \mathcal{D}_y correspondant à b .

On désigne par Π' le sous-ensemble de $\pi_0(X \setminus \{x\})$ formé des composantes U telles que tout composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$ appartienne à Π .

(4.4.4.3) Soit $V \in \Pi$ et soit y l'unique point de son bord. L'image $\varphi(V)$ est une composante connexe de $X \setminus \{x\}$. L'ensemble $\text{br}(Y, y)_{\subset V}$ est un singleton $\{b\}$; posons $a = \varphi(b)$. Le lemme 4.3.1 assure que $\text{deg}(V \rightarrow \varphi(V)) = \text{deg}(b \rightarrow a)$. Par ailleurs, le morphisme $\mathcal{D}_y \rightarrow \mathcal{C}$ est par hypothèse étale en le point fermé de \mathcal{D}_y qui correspond à la branche b ; par le théorème 4.3.13 ceci entraîne l'égalité $\text{deg}(b \rightarrow a) = 1$. En conséquence, $\text{deg}(V \rightarrow \varphi(V)) = 1$; autrement dit, φ induit un isomorphisme $V \simeq \varphi(V)$.

(4.4.4.4) Supposons que $\mathcal{H}(y)$ est non ramifiée sur $\mathcal{H}(x)$ pour tout antécédent y de x , c'est-à-dire que \mathcal{D}_y est génériquement étale sur \mathcal{C} pour tout $y \in Y_x$. Cette hypothèse implique que presque toutes les composantes connexes de $Y \setminus \varphi^{-1}(x)$ appartiennent à Π , et partant que presque toutes les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$ appartiennent à Π' .

On déduit dès lors de 4.4.4.3 que le revêtement $Y \times_X U \rightarrow U$ est trivial pour presque toute composante connexe U de $X \setminus \{x\}$.

(4.4.5) Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse et soit $x \in X$. Le but de ce qui suit est d'étudier le groupe $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$, qui classe les germes de μ_ℓ -torseurs en x . Notons pour commencer l'existence d'isomorphismes naturels $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \simeq H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell) \simeq H^1(\kappa(x), \mu_\ell)$.

(4.4.5.1) Donnons une description explicite de ces isomorphismes. Soit h une classe appartenant à $H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell)$. Elle est de la forme (λ) pour un certain λ appartenant à $\mathcal{H}(x)^\times$, bien déterminé modulo $(\mathcal{H}(x)^\times)^\ell$. Dire que $H^1(\kappa(x), \mu_\ell) \simeq H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell)$ signifie simplement que le scalaire λ peut être choisi dans $\kappa(x)^\times$, et qu'un tel choix est unique modulo $(\kappa(x)^\times)^\ell$. Il existe donc une fonction $f \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$ telle que $h = (f(x))$, et la classe de $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ qui correspond à h est alors la classe de Kummer (f) . En termes de toseurs, c'est la classe du (germe en x) de $\mathcal{M}(\mathcal{O}_U[T]/(T^\ell - f)) \rightarrow U$, où U est un voisinage ouvert de x sur lequel f est définie et inversible.

(4.4.5.2) On déduit de 4.4.5.1 que tout μ_ℓ -torseur sur (X, x) est de Kummer, c'est-à-dire encore que tout μ_ℓ -torseur défini sur un ouvert contenant x est de Kummer au voisinage de x .

(4.4.5.3) Soit $h \in H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \simeq H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell)$, et soit Y un μ_ℓ -torseur sur (X, x) de classe h . Soit d l'ordre de h dans $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$. On déduit de 2.1.2.3 que la fibre Y_x comporte ℓ/d points.

(4.4.6) Supposons que $x \in X_{[14]}$. Le corps $\mathcal{H}(x)$ est complet et en particulier hensélien, $\widehat{\mathcal{H}(x)}_1$ est algébriquement clos, et $|\mathcal{H}(x)^\times|$ est divisible. Il s'ensuit que $H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell) = 0$ (2.3.35.3 et 2.3.35.4); en conséquence, $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ est trivial.

Autrement dit, tout μ_ℓ -torseur défini sur un ouvert contenant x est trivial au voisinage de x .

(4.4.7) Supposons que $x \in X_{[2,3]}$. Par convention, nous considérerons dans ce qui suit que toute branche de X issue de x est orientée *vers* x .

(4.4.8) Soit $a \in \text{br}(X, x)$ et soit $h \in H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$.

(4.4.8.1) La convention d'orientation adoptée induit un système compatible d'isomorphismes

$$\sigma_Z : \text{Kum}_\ell(Z) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

pour Z parcourant l'ensemble des sections coronaires de a .

Si Z est une section coronnaire de a et si Z' est un μ_ℓ -torseur de Kummer sur Z , l'image par σ_Z de la classe de Z' dans $\text{Kum}_\ell(Z)$ sera appelée *l'invariant* de Z' .

Soit U un voisinage ouvert de x tel que la classe h provienne d'une classe $h' \in H^1(U_{\text{ét}}, \mu_\ell)$, et soit Z une section coronnaire de a contenue dans l'ouvert U telle que $h'|_Z$ soit de Kummer (une telle section existe toujours puisque h' est de Kummer au voisinage de x , cf. 4.4.5). L'élément $\sigma_Z(h')$ de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ ne dépend que de a (et pas du choix de U, Z et h'); on le note $\theta_a(h)$.

(4.4.8.2) Soit $|\cdot|_a$ la valuation de $\kappa(x)$ associé à la variation en norme le long de a . Dans ce qui suit, nous allons utiliser implicitement le th. 4.3.5 ainsi que les commentaires qui en sont faits en 4.3.6.4.

Soit t une fonction inversible sur un voisinage ouvert U_0 de x dans U telle que pour toute section coronnaire Z de a dans U_0 , la fonction $t|_Z$ soit une fonction coordonnée de Z croissante en norme sur $S(Z)$ (il suffit de vérifier ces conditions sur *une* telle section Z).

Le groupe quotient $|\kappa(x)^\times|_a / |\widehat{k^a}^\times|$ est libre de rang 1, et est engendré par la classe de $|t(x)|_a$ qui ne dépend pas du choix de t . La formule $|t(x)|_a^m \mapsto m$ définit donc sans ambiguïté un isomorphisme $|\kappa(x)^\times|_a / |\widehat{k^a}^\times| \simeq \mathbb{Z}$, puis par passage au quotient un isomorphisme $\iota : |\kappa(x)^\times|_a / |\kappa(x)^\times|_a^\ell \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ (comme $|\widehat{k^a}^\times|$ est divisible, il disparaît lors de cette dernière opération).

Soit $\kappa(x)^h$ le hensélisé de $\kappa(x)$ pour $|\cdot|_a$. Puisque le corps résiduel de $|\cdot|_a$ est algébriquement clos, $H^1(\kappa(x)^h, \mu_\ell) \simeq |\kappa(x)^\times| / |\kappa(x)^\times|^\ell$. On note τ_a le morphisme composé

$$H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \simeq H^1(\kappa(x), \mu_\ell) \rightarrow H^1(\kappa(x)^h, \mu_\ell) \simeq |\kappa(x)^\times| / |\kappa(x)^\times|^\ell \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}.$$

Soit f une fonction inversible sur un voisinage U_1 de x dans U_0 telle que $h'_{|U_1} = (f)$, et soit Z une section coronaire de a contenue dans U_1 . Il existe $\lambda \in \widehat{k^a}^\times$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|f| = |\lambda| \cdot |t|^m$ identiquement sur Z . Il résulte du choix de t et de la définition de θ_a que $\theta_a(h) = \overline{m} \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

L'image de h dans $H^1(\kappa(x), \mu_\ell)$ est égale à $(f(x))$. Comme $|f| = |\lambda| \cdot |t|^m$ identiquement sur Z , on a $|f(x)|_a = |\lambda| \cdot |t(x)|_a^m$. Il vient

$$\tau_a(h) = \overline{m} = \theta_a(h).$$

(4.4.8.3) Supposons maintenant que x est de type 2, soit \mathcal{C} sa courbe résiduelle et soit \mathcal{P} le point fermé de \mathcal{C} correspondant à a . La valuation $|\cdot|_a$ étant composée de la valuation structurale de $\kappa(x)$ et de la valuation discrète associée à \mathcal{P} , on peut choisir la fonction t de sorte que $|t(x)| = 1$ et que $\widetilde{t(x)}$ soit une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\mathcal{C}, \mathcal{P}}$ (comme $|t(x)|_a$ est alors infiniment proche inférieurement de 1, la fonction $|t|$ est bien croissante en norme le long de a à l'approche de x).

Comme le point x est de type 2, le groupe $|\kappa(x)^\times|$ est divisible, ce qui entraîne que $H^1(\kappa(x), \mu_\ell) \simeq H^1(\kappa(x)^\circ, \mu_\ell) \simeq H^1(\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1, \mu_\ell)$. Par conséquent, on peut supposer que $|f(x)| = 1$, et la classe \widetilde{h} de $H^1(\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1, \mu_\ell)$ qui correspond à h via les isomorphismes canoniques $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \simeq H^1(\kappa(x), \mu_\ell) \simeq H^1(\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1, \mu_\ell)$ est alors précisément $(\widetilde{f(x)})$.

L'égalité $|f(x)|_a = |\lambda| \cdot |t(x)|_a^m$ implique que $|f(x)| = |\lambda| \cdot |t(x)|$; par conséquent, $|\lambda| = 1$, et il vient $|f(x)/t(x)^m|_a = 1$. Cette dernière égalité signifie que $\widetilde{f(x)/t(x)^m}$ est de valuation \mathcal{P} -adique (additive) nulle. En conséquence, la valuation \mathcal{P} -adique de $\widetilde{f(x)}$ est égale à m , et le résidu $\delta_{\mathcal{P}}(\widetilde{h})$ est égal à \overline{m} . Ainsi, $\theta_a(h) = \tau_a(h) = \delta_{\mathcal{P}}(\widetilde{h})$.

Remarquons pour terminer que comme la $\mathcal{H}(x)$ -algèbre étale

$$\mathcal{H}(x)[T]/T^\ell - f(x) = \prod_{y \in Y_x} \mathcal{H}(y)$$

est non ramifiée, il résulte de 4.4.4.4 que pour tout voisinage ouvert connexe V de x dans U , la classe h' s'annule sur presque toutes les composantes connexes de $V \setminus \{x\}$.

(4.4.9) On revient aux hypothèses et notations précédant le 4.4.8.3 : le point x est supposé appartenir à $X_{[2,3]}$, mais pas nécessairement à $X_{[2]}$. Si V est un voisinage ouvert connexe de x dans U , alors h' s'annule au-dessus de presque toutes les composantes connexes de $V \setminus \{x\}$: en effet, si $x \in X_{[2]}$ cela découle de 4.4.8.3 ; et si $x \in X_{[3]}$ alors comme $\text{br}(X, x)$ est fini, $\pi_0(V \setminus \{x\})$ l'est aussi, et l'assertion requise est tautologique.

Il existe en conséquence une base de voisinages ouverts V de x dans U possédant les propriétés suivantes :

- V est bien découpé autour de x (4.4.3) ;
- la classe $h'_{|V}$ est de Kummer ;
- la classe h' s'annule sur toute composante connexe de $V \setminus \{x\}$ qui est relativement compacte dans V .

Dans ce cas, pour toute branche $a \in \text{br}(X, x)$ telle que $a(V)$ soit coronaire, la restriction $h'_{|a(V)}$, est de Kummer, et $\sigma_{a(V)}(h'_{|a(V)}) = \theta_a(h)$.

(4.4.10) Proposition. *Soit X une courbe \widehat{k}^a -analytique quasi-lisse et soit x appartenant à $X_{[2,3]}$. Soit X_0 un voisinage ouvert de x dans X bien découpé autour de X . On note A l'ensemble des branches a issues de x telles que $a(X_0)$ soit coronaire.*

1) Soit $(\lambda_a)_{a \in \text{br}(X, x)}$ une famille d'éléments de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ tels que $\lambda_a = 0$ si $a \notin A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe un μ_ℓ -torseur $Y \rightarrow X_0$ tel que :

- ◇ Y se trivialise au-dessus de toute composante connexe de $X_0 \setminus \{x\}$ qui est relativement compacte dans X_0 ;
- ◇ pour tout $a \in A$, le μ_ℓ -torseur $Y \times_X a(X_0)$ est de Kummer, d'invariant λ_a .

ii) Il existe $h \in H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ telle que $\theta_a(h) = \lambda_a$ pour toute branche $a \in \text{br}(X, x)$.

iii) On a $x \in \partial X$ ou $\sum_{a \in A} \lambda_a = 0$.

De plus :

1a) si i) est vraie, la classe h de ii) peut être prise égale à la classe de $Y \times_{X_0} (X, x)$;

1b) si ii) est vraie, on peut choisir Y dans i) de sorte que $Y \times_{X_0} (X, x)$ ait pour classe h .

2) Supposons que $x \notin \partial X$ et soit \mathcal{K} le sous-groupe de $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ formé des classes h telles que $\theta_a(h) = 0$ pour tout $a \in \text{br}(X, x)$. Si $x \in X_{[3]}$ alors \mathcal{K} est trivial. Si $x \in X_{[2]}$, si \mathcal{C} désigne sa courbe résiduelle, et si \mathcal{J} désigne la jacobienne de \mathcal{C} alors

$$\mathcal{K} \simeq_\ell \mathcal{J}(\tilde{k}_1^a) \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g(x)}$$

(le premier de ces isomorphismes est canonique, le second ne l'est pas en général).

Démonstration. Nous allons montrer i) \Rightarrow ii), ii) \Rightarrow iii), iii) \Rightarrow ii) et ii) \Rightarrow i), et les autres assertions de l'énoncé seront établies incidemment.

(4.4.10.1) Preuve de i) \Rightarrow ii). On suppose que i) est vraie, et l'on note h la classe de $Y \times_X (X, x)$ dans $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$. On a par définition $\lambda_a = \theta_a(h)$ pour tout $a \in A$. Soit $a \in \text{br}(X, x) \setminus A$ et soit Z une section coronaire de a . Le toseur Y se trivialise au-dessus de $a(X)$ puisque $a \notin A$; il se trivialise *a fortiori* au-dessus de Z , ce qui entraîne que $\theta_a(h) = 0$. Ainsi, ii) est vraie, et l'on a par ailleurs établi 1a).

(4.4.10.2) Preuve de ii) \Rightarrow iii). On suppose que ii) est vraie. Pour montrer iii), on fait l'hypothèse que $x \notin \partial X$, et nous allons prouver que $\sum_{a \in \text{br}(X, x)} \theta_a(h) = 0$. Rappelons que pour toute branche a de X issue de x et toute section coronaire Z de a , la couronne Z sera supposée orientée vers x , et que σ_Z désigne l'isomorphisme : $\text{Kum}_\ell(Z) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ déduit de ce choix d'orientation.

On suppose que x est de type 3. L'ensemble $\text{br}(X, x)$ possède alors deux éléments a et b . Soit U un voisinage coronaire de x dans X tel que h provienne d'une classe de Kummer h' sur U . L'ouvert $U \setminus \{x\}$ a deux composantes connexes, à savoir $a(U)$ et $b(U)$, qui sont deux sous-couronnes ouvertes de U . Munissons U de l'orientation induite par celle de $a(U)$. Ce choix induit un isomorphisme $\rho : \text{Kum}_\ell(U) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

Comme l'orientation de U est induite par celle de $a(U)$, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Kum}_\ell(U) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \text{Id} \\ \text{Kum}_\ell(a(U)) & \xrightarrow{\sigma_{a(U)}} & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \end{array}$$

d'où l'on déduit que $\rho(h') = \theta_a(h)$.

Comme l'orientation de U est opposée à l'orientation induite par celle de $b(U)$, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Kum}_\ell(U) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow -\text{Id} \\ \text{Kum}_\ell(b(U)) & \xrightarrow{\sigma_{b(U)}} & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \end{array}$$

d'où l'on déduit que $\rho(h') = -\theta_b(h)$. En conséquence, $\theta_a(h) + \theta_b(h) = 0$.

On suppose que x est de type 2. Comme $x \notin \partial X$ l'ensemble $\text{br}(X, x)$ s'identifie à l'ensemble des points fermés de la courbe résiduelle \mathcal{C} .

On a vu en 4.4.8.3 que $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \simeq H^1(\widetilde{\mathcal{H}}(x)_1, \mu_\ell)$; on note \tilde{h} la classe de $H^1(\widetilde{\mathcal{H}}(x)_1, \mu_\ell)$ qui correspond à h . Si $a \in \text{br}(X, x)$, et si \mathcal{P} désigne le point fermé correspondant, on a d'après *loc. cit.* l'égalité $\theta_a(h) = \delta_{\mathcal{P}}(\tilde{h})$.

Comme $\sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{C}(\tilde{k}_q)} \delta_{\mathcal{P}}(\tilde{h}) = 0$ (cf. 2.1.4), il vient $\sum_{a \in \text{br}(X, x)} \theta_a(h) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

(4.4.10.3) *Preuve de iii) \Rightarrow ii) et de l'assertion 2) dans le cas d'un point de type 3.* On fixe une famille $(\lambda_a)_{a \in \text{br}(X, x)}$ satisfaisant les conditions de iii), et l'on suppose que x est de type 3.

Le cas où $\text{br}(X, x)$ est de cardinal 2. C'est celui où $x \notin \partial X$. Choisissons un voisinage coronaire U de x , et notons a et b les deux branches issues de x . Munissons U de l'orientation induite par celle de sa sous-couronne $a(U)$, et reprenons les notations du paragraphe de 4.4.10.2 consacré au cas du type 3. On déduit des deux diagrammes commutatifs de *loc. cit.* que $\sigma_{a(U)}(\rho^{-1}(\lambda_a)) = \lambda_a$ et que $\sigma_{b(U)}(\rho^{-1}(\lambda_a)) = -\lambda_a$. Si h désigne l'image de $\rho^{-1}(\lambda_a)$ dans $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ on a donc $\theta_a(h) = \lambda_a$ et $\theta_b(h) = \lambda_b$, d'où ii).

Prouvons par ailleurs l'assertion 2), toujours en supposant que $x \notin \partial X$. Soit $h \in \mathcal{H}$, et soit U un voisinage coronaire de x tel que h provienne d'une classe de Kummer h' sur U . Comme $\theta_a(h) = 0$ la restriction de h à $a(U)$ est triviale; comme $\text{Kum}_\ell(U) \simeq \text{Kum}_\ell(a(U))$ on a $h' = 0$, et donc $h = 0$; ainsi $\mathcal{H} = 0$, comme annoncé.

Le cas où $\text{br}(X, x)$ est de cardinal 1. Soit a l'unique branche de X issue de x , et soit U un voisinage coronaire de x dans X . On a $U \setminus \{x\} = a(U)$. On munit U de l'orientation induite par celle de $a(U)$; ce choix induit un isomorphisme $\rho : \text{Kum}_\ell(U) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Soit V un μ_ℓ -torseur sur U de classe $\rho^{-1}(\lambda_a)$. Comme l'orientation de U est induite par celle de $a(U)$, la restriction de V à $a(U)$ a pour invariant λ_a . Si h désigne la classe de $V \times_U (X, x)$ dans $\text{H}^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ on a donc $\theta_a(h) = \lambda_a$, d'où ii).

Le cas où $\text{br}(X, x) = \emptyset$. N'importe quelle classe $h \in \text{H}^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ satisfait alors, pour des raisons tautologiques, la condition énoncée en ii).

(4.4.10.4) *Preuve de iii) \Rightarrow ii) et de l'assertion 2) dans le cas d'un point de type 2.* On fixe une famille $(\lambda_a)_{a \in \text{br}(X, x)}$ satisfaisant les conditions de iii), on suppose que x est de type 2, on note \mathcal{C} sa courbe résiduelle et \mathcal{J} la jacobienne de \mathcal{C} .

Soit \mathcal{C} la courbe résiduelle en x ; on identifie $\widetilde{(X, x)}$ à un ouvert de Zariski non vide de \mathcal{C} . Si \mathcal{P} est un point fermé de $\widetilde{(X, x)}$, il correspond à une branche a issue de x , et l'on pose $\mu_{\mathcal{P}} = \lambda_a$. Pour prouver ii) il suffit, en vertu de 4.4.8.3, de montrer l'existence d'une classe $\tilde{h} \in \text{H}^1(\mathcal{H}(x)_1, \mu_\ell)$ telle que $\delta_{\mathcal{P}}(\tilde{h}) = \mu_{\mathcal{P}}$ pour tout point fermé \mathcal{P} de $\widetilde{(X, x)}$.

Supposons que $x \notin \partial X$. On a alors $\widetilde{(X, x)} = \mathcal{C}$, et $\sum \mu_{\mathcal{P}} = 0$ puisque $\sum \lambda_a = 0$ en vertu de l'hypothèse iii). L'existence d'une classe \tilde{h} satisfaisant les conditions requises provient alors de la suite exacte des résidus (2.1.4).

Prouvons par ailleurs l'assertion 2), toujours en supposant que $x \notin \partial X$. Il résulte de 4.4.8.3 que \mathcal{H} s'identifie à l'ensemble des classes de $\text{H}^1(\mathcal{H}(x)_1, \mu_\ell)$ dont tous les résidus en les points fermés de \mathcal{C} sont nuls. Il existe donc en vertu de 2.1.5.2 un isomorphisme canonique entre \mathcal{H} et ${}_\ell \mathcal{J}(\tilde{k}_1^q)$, lequel est lui-même isomorphe (non canoniquement en général) à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g(x)}$, d'où 2).

Supposons que $x \in \partial X$. L'ouvert $\widetilde{(X, x)}$ de \mathcal{C} est alors strict. Choisissons un point fermé \mathcal{Q} de \mathcal{C} qui n'est pas situé sur $\widetilde{(X, x)}$, et posons $\mu_\infty = -\sum \mu_{\mathcal{P}}$. La suite exacte des résidus assure l'existence d'une classe $\tilde{h} \in \text{H}^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ telle que pour tout point fermé \mathcal{P} de \mathcal{C} , le résidu $\delta_{\mathcal{P}}(\tilde{h})$ soit égal à :

- $\mu_{\mathcal{P}}$ si $\mathcal{P} \in \widetilde{(X, x)}$;
- μ_∞ si $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$;
- 0 sinon.

La classe \tilde{h} satisfait alors les conditions requises.

(4.4.10.5) *Preuve de ii) \Rightarrow i).* Supposons qu'il existe h comme dans ii); choisissons un voisinage ouvert U de x dans X_0 et un μ_ℓ -torseur $V \rightarrow U$ tel que la classe de $V \times_U (X, x)$ dans $\text{H}^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ soit égale à h . Quitte à restreindre U , on peut faire en sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

- $V \rightarrow U$ est de Kummer;
- le couple (U, X_0) est bien découpé autour de x .

Soit A' l'ensemble des branches a issues de x telles que $a(U)$ soit coronaire. Si $a \notin A'$ alors $a(U)$ est relativement compacte dans U , et est donc égale à $a(X_0)$. En conséquence, $X_0 = U \amalg (\prod_{a \in A'} a(X_0))$.

Pour tout $a \in A$, choisissons un μ_ℓ -torseur de Kummer $W_a \rightarrow a(X_0)$ d'invariant λ_a . Si $a \in A' \setminus A$, on note W_a le μ_ℓ -torseur trivial sur $a(X_0)$.

Soit $a \in A'$. Le toseur de Kummer $V \times_U a(U) \rightarrow a(U)$ a pour invariant $\theta_a(h) = \lambda_a$; il est en particulier trivial si $a \notin A$.

En conséquence, les restrictions à $\coprod_{a \in A'} a(U)$ des toseurs V et $\coprod_{a \in A'} W_a$ sont isomorphes; en choisissant un isomorphisme arbitraire entre elles, on obtient par recollement un μ_ℓ -torseur $Y \rightarrow X_0$ qui satisfait les propriétés énoncées en i), et dont le germe x a pour classe h . Ceci achève la démonstration de l'implication ii) \Rightarrow i) et de l'assertion 1b), et partant celle de la proposition. \square

(4.4.11) Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse, et soit $x \in X_{[2,3]} \setminus \partial X$. Il résulte de la proposition 4.4.10 que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g(x)} \longrightarrow H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \xrightarrow{\Pi \theta_a} \bigoplus_{a \in \text{br}(X, x)} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

(4.4.12) Supposons x de type 3, et fixons un voisinage coronaire U de x . On a $g(x) = 0$ et $\text{br}(X, x)$ est de cardinal 2. On dispose donc en vertu de la suite exacte ci-dessus d'un isomorphisme entre $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ et $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, qui est non canonique si $\ell > 2$: il n'est déterminé qu'au signe près et dépend du choix d'une des deux branches issues de x , c'est-à-dire du choix d'une orientation de U (à la branche a est associée l'orientation de U qui induit l'orientation de la sous-couronne $a(U)$ vers le point x).

(4.4.13) En fait, l'existence d'un isomorphisme $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ déterminé au signe près et dépendant du choix d'une orientation de U peut se montrer directement, sans référence à la suite exacte de 4.4.11, et sans même supposer que le point $x \in X_{[3]}$ est intérieur.

En effet, supprimons donc l'hypothèse que x est intérieur, et désignons toujours par U un voisinage coronaire de x . Puisque x est de type 3, le singleton $\{x\}$ est une sous-couronne de U . On dispose donc d'isomorphismes

$$H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \simeq \mathcal{H}(x)^\times / (\mathcal{H}(x)^\times)^\ell \simeq \text{Kum}_\ell(\{x\}) \simeq \text{Kum}_\ell(U) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}.$$

Tous ces isomorphismes sont canoniques, hormis le dernier qui n'est déterminé qu'au signe près et dépend du choix d'une orientation sur U , d'où notre assertion.

Notons par ailleurs que choisir une orientation sur U revient à en choisir une sur $\{x\}$, c'est-à-dire encore à choisir un générateur du groupe $|\mathcal{H}(x)^\times|/|(\widehat{k^a})^\times|$ (qui est libre de rang 1).

(4.4.14) **Lemme.** Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse, et soit x un point de $X_{[2]}$ de genre > 0 . Il existe un μ_ℓ -torseur sur X dont la fibre en x est connexe et qui se trivialise au-dessus de $Y \setminus \{x\}$.

Démonstration. Comme x est de type 2, le groupe $|\mathcal{H}(x)^\times|$ est divisible, et $H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell) \simeq H^1(\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1, \mu_\ell)$. Soit \mathcal{C} la courbe résiduelle de x . Comme elle est de genre $g(x) > 0$, on déduit de 2.1.5.2 qu'il existe une classe $\tilde{h} \in H^1(\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1, \mu_\ell)$ qui est d'ordre ℓ et est telle que $\delta_{\mathcal{P}}(\tilde{h}) = 0$ pour tout point fermé \mathcal{P} de \mathcal{C} .

Soit h la classe de $H^1(X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell \simeq H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell)$ qui correspond à \tilde{h} . Elle est d'ordre ℓ , et l'on a $\theta_a(h) = 0$ pour toute branche $a \in \text{br}(X, x)$ en vertu de 4.4.8.3. D'après 4.4.9, il existe un voisinage ouvert U de x bien découpé autour de x et un μ_ℓ -torseur de Kummer $V \rightarrow U$ dont le germe en x a pour classe h , et qui est trivial au-dessus de toute composante connexe de $U \setminus \{x\}$ relativement compacte dans U . Par ailleurs, pour toute branche $a \in \text{br}(X, x)$, le toreur $V \times_U a(U)$ est de Kummer, d'invariant $\theta_a(h) = 0$. En conséquence, V se trivialise également au-dessus de toute composante coronaire de $U \setminus \{x\}$, d'où finalement la trivialité de $V \times_U (U \setminus \{x\}) \rightarrow (U \setminus \{x\})$. En recollant V et $\mu_\ell \times_{\widehat{k^a}} (X \setminus \{x\})$ par un isomorphisme arbitraire au-dessus de $U \setminus \{x\}$ on obtient un μ_ℓ -torseur $Y \rightarrow X$, trivial au-dessus de $X \setminus \{x\}$, et dont le germe en x a pour classe h . Comme l'ordre de h est égal à ℓ , on déduit de 4.4.5.3 que Y_x est connexe, ce qui achève la démonstration. \square

Théorèmes de finitude globale

(4.4.15) Théorème. *Soit \mathcal{X} une $\widehat{k^a}$ -courbe algébrique projective, irréductible et lisse et soit $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$. Presque toutes les composantes connexes de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ sont des disques.*

Démonstration. Soit \mathcal{C} la courbe résiduelle en x . Soit f une fonction rationnelle sur \mathcal{X} telle que $|f(x)| = 1$ et telle que $f(x)$ induise un morphisme génériquement étale de \mathcal{C} sur $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$; soit $\varphi : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$ le morphisme fini et plat induit par f . Soit Π l'ensemble des composantes connexes V de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- 1) $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)_{\subset V}$ est un singleton $\{b_V\}$;
- 2) l'application $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$ induite par $f(x)$ est non ramifiée en le point fermé de \mathcal{C} qui correspond à b_V ;
- 3) V ne contient aucun antécédent de $\varphi(x)$.

Il résulte du fait que $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$ est génériquement étale que presque toutes les composantes connexes de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ appartiennent à Π . Soit V appartenant à Π . La condition 3) implique, d'après le lemme 4.2.1, que V est une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$. On déduit alors de 4.4.4.3 que la flèche $V \rightarrow U$ est un isomorphisme. En tant que composante connexe du complémentaire d'un point de type 2 dans $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$, l'ouvert U est un disque, et V est donc un disque, ce qui achève la démonstration. \square

(4.4.16) Lemme. *Soit \mathcal{X} une $\widehat{k^a}$ -courbe algébrique projective, irréductible et lisse, et soit x un point de \mathcal{X}^{an} de genre zéro; supposons que pour toute composante connexe V de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ l'ensemble $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)_{\subset V}$ est un singleton.*

- i) Si $Y \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$ est un revêtement fini étale déployé au-dessus de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$, il est trivial.
- ii) Supposons qu'il existe un entier ℓ premier à p et strictement supérieur à 1 tel que tout μ_ℓ -torseur étale au-dessus de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ soit déployé; la courbe \mathcal{X} est alors isomorphe à $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$.

Démonstration. Soit $Y \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$ un revêtement fini étale déployé au-dessus de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ et soit y un antécédent de x sur Y . Soit $b \in \text{br}(Y, y)$ et soit a

l'image de b dans $\text{br}(X, x)$. Comme Y est déployé au-dessus de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$, le degré de b au-dessus de a est égal à 1.

Si x est de type 3, il découle de l'assertion iii) du th. 4.2.19 et de la proposition 4.2.20 que $\kappa(y) \simeq \kappa(x)$.

Si x est de type 2, la courbe résiduelle en x est de genre zéro, c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{P}_{\bar{k}^a}^1$. Il découle du théorème 4.3.13 que la courbe résiduelle en y est étale sur la courbe résiduelle en x ; comme le schéma $\mathbb{P}_{\bar{k}^a}^1$ est simplement connexe, $\widetilde{\kappa}(y) \simeq \widetilde{\kappa}(x)$; en utilisant encore la proposition 4.3.13, il vient $\kappa(y) \simeq \kappa(x)$.

On a donc dans tous les cas $\kappa(y) \simeq \kappa(x)$ pour tout antécédent y de x . La fibre de Y au-dessus de x est par conséquent triviale, ce qui implique que Y est déployé sur un voisinage de x ; dès lors, $Y \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$ est un revêtement topologique.

Comme $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)_{\subset V}$ est un singleton pour toute composante connexe V de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$, le point x n'est situé sur aucune boucle du graphe \mathcal{X}^{an} . Le revêtement topologique $Y \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$ est donc déployé au-dessus de toutes les boucles de \mathcal{X}^{an} , et partant trivial, ce qui montre i).

Supposons qu'il existe un entier ℓ comme dans ii), et soit \mathcal{Y} un μ_ℓ -torseur étale sur \mathcal{X} . On déduit de i) et de l'hypothèse faite sur ℓ que le revêtement $\mathcal{Y}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$ est trivial; par GAGA, il en va de même de $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$. Autrement dit, $H^1(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mu_\ell) = 0$; par conséquent, $\mathcal{X} \simeq \mathbb{P}_{\bar{k}^a}^1$. \square

(4.4.17) Théorème. *Soit \mathcal{X} une $\widehat{k^a}$ -courbe algébrique projective, irréductible et lisse. L'ensemble des points de \mathcal{X}^{an} de genre strictement positif est fini.*

Démonstration. Soit ℓ un entier premier à p et supérieur ou égal à 2. Soit $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$ un point de genre > 0 . Le lemme 4.4.14 assure l'existence d'un μ_ℓ -torseur $Y(x) \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$ dont la fibre en x est connexe, et qui est trivial au-dessus de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$. Si x et x' sont deux points *distincts* de \mathcal{X}^{an} de genre > 0 , les toreseurs $Y(x)$ et $Y(x')$ sont non isomorphes (la fibre en x de $Y(x)$ est connexe alors que la fibre en x de $Y(x')$ est triviale). Combinée à GAGA, la flèche $x \mapsto Y(x)$ induit une *injection* de l'ensemble des points de genre > 0 de \mathcal{X}^{an} dans le groupe fini $H^1(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mu_\ell)$. \square

Voisinages d'un point de type 4 et revêtements des disques et couronnes

(4.4.18) Nous fixons pour tout ce paragraphe les notations suivantes :

- ℓ est un nombre premier différent de p ;
- \mathcal{X} est une $\widehat{k^a}$ -courbe algébrique projective, irréductible et lisse;
- x est un point de $\mathcal{X}_{[4]}^{\text{an}}$.

(4.4.19) Comme x est de type 4, c'est d'après le théorème 4.2.5 un point unibranché du graphe \mathcal{X}^{an} ; l'ensemble des points de genre > 0 de \mathcal{X}^{an} étant par ailleurs fini (th. 4.4.17), le point x possède une base de voisinages D satisfaisant les deux conditions qui suivent :

- i) ∂D est un singleton $\{\eta\}$ et $\overline{D} = D \cup \{\eta\}$ est un arbre compact ;
- ii) D ne contient aucun point de genre > 0 .

(4.4.20) Proposition. *Soit D comme ci-dessus ; tout μ_ℓ -torseur étale sur D est trivial.*

Démonstration. Soit $Y \rightarrow D$ un μ_ℓ -torseur étale, et soit U l'ensemble des points t de D tels que la fibre de Y en t soit triviale ; c'est un ouvert de D . Le but de ce qui suit est de démontrer que $U = D$: cela assurera que $Y \rightarrow D$ est un μ_ℓ -torseur *topologique*, et partant trivial puisque D est un arbre.

On raisonne par l'absurde, en supposant que ce n'est pas le cas. On munit \overline{D} de l'ordre défini par η . Soit \mathcal{T} une chaîne non vide de points de $D - U$. Par compacité, le filtre de $\overline{D} - U$ engendré par les sections commençantes de \mathcal{T} admet un point adhérent ; on vérifie aussitôt qu'il est différent de η et minore \mathcal{T} (c'est en plus précisément la borne inférieure).

Il s'ensuit, par le lemme de Zorn, qu'il existe un point t de $D - U$ qui est minimal. Comme $t \in D - U$, la fibre de Y en t n'est pas déployée. Notons b la branche issue de t définie par l'intervalle $[t; \eta]$. La fibre du μ_ℓ -torseur Y en t n'étant pas déployée, c'est un singleton $\{t'\}$, et $\kappa(t')$ est une extension cyclique de degré ℓ de $\kappa(t)$.

Le point t ne peut être de type 1 ou 4. Cela résulte du fait que si F est une extension immédiate du corps algébriquement clos $\widehat{k^a}$, toute extension de degré premier à p de $\widehat{k^a}$ est triviale.

Le point t ne peut être de type 3. Supposons qu'il le soit. Il existe alors un voisinage coronaire Z dans D au-dessus duquel Y est de Kummer. Comme Y_x est connexe, $Y \times_D Z$ est connexe et est donc une couronne (3.6.31 et sq.). Le morphisme $Y \times_D Z \rightarrow Z$ est fini et plat ; il s'ensuit en vertu de 3.6.24 et 3.6.24.3 que tout point de $S(Z)$ a un unique antécédent sur Y .

Par ailleurs, soit Z' la composante connexe de $Z \setminus \{t\}$ qui ne contient pas b . Par minimalité de t , les fibres de Y au-dessus de Z' sont toutes triviales ; c'est en particulier le cas des fibres de Y au-dessus de $S(Z') \subset S(Z)$, mais celles-ci sont des singletons d'après ce qui précède ; on aboutit ainsi à une contradiction.

Le point t ne peut être de type 2. Supposons qu'il le soit. Le groupe $|\kappa(t)^\times|$ est divisible ; le corps $\kappa(t')$ est donc une extension cyclique de degré ℓ de $\kappa(t)$ (une extension modérément ramifiée étant toujours sans défaut, il n'y a pas lieu ici d'invoquer le th. 4.3.13). Soit \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') la courbe résiduelle en t (resp. t').

Soit β une branche de D issue de t et différente de b et soit Z une section de β ; la minimalité de t assure que les fibres de Y au-dessus de Z sont triviales. Par conséquent, $Y \times_D Z \rightarrow Z$ est un μ_ℓ -torseur *topologique* ; comme Z est un arbre, il est trivial. En vertu du théorème 4.3.13, ceci entraîne que $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ est non ramifié au-dessus du point fermé de \mathcal{C} qui correspond à β .

Soit \mathcal{P} le point fermé de \mathcal{C} correspondant à b . D'après ce qui précède, la flèche $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ induit un revêtement galoisien cyclique d'ordre ℓ de l'ouvert $\mathcal{C} \setminus \{\mathcal{P}\}$; mais \mathcal{C} est de genre 0 (car D ne contient aucun point de genre strictement positif), et l'on aboutit ainsi à une contradiction, ce qui achève la démonstration. \square

(4.4.21) Remarque. La proposition précédente s'applique notamment lorsque $\mathcal{X} = \mathbb{P}_{k^a}^1$ et lorsque D est un disque ; la proposition 4.4.20 implique donc

que tout μ_ℓ -torseur étale sur un disque est trivial. Ce fait est dû à Berkovich, et notre démonstration est un décalque *mutatis mutandis* de sa preuve.

(4.4.22) Théorème. *Le point x possède un voisinage ouvert dans \mathcal{X}^{an} qui est un disque.*

Démonstration. Donnons-nous un voisinage D de x comme au 4.4.19. Soit Z une section coronaire de la branche de \mathcal{X}^{an} issue de η et contenue dans D ; choisissons un point ξ de $]x; \eta[$ situé sur $S(Z)$, et appelons Δ la composante connexe de $D \setminus \{\xi\}$ qui contient x . Remarquons que le voisinage Δ de x vérifie lui aussi les conditions énoncées au 4.4.19; par conséquent, la proposition 4.4.20 s'applique à Δ et garantit que tout μ_ℓ -torseur étale sur ce dernier est trivial.

Les composantes connexes de $Z \setminus \{\xi\}$ sont :

- la sous-couronne $] \xi; \eta]^b$ de Z ;
- la sous-couronne $(S(Z) - [\xi; \eta]^b)$ de Z , qui est contenue dans Δ ;
- des disques aboutissant à ξ .

Il en résulte que les composantes connexes de $D \setminus \{\xi\}$ sont :

- la sous-couronne $] \xi; \eta]^b$ de Z ;
- l'ouvert Δ ;
- des disques contenus dans Z et aboutissant à ξ ;

Comme D est un arbre, chacune de ces composantes contient une unique branche issue de ξ .

En prolongeant la couronne $] \xi; \eta]^b$ en un disque, on immerge D dans une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique propre, lisse et connexe qui est donc l'analytification d'une $\widehat{k^a}$ -courbe algébrique projective, lisse et intègre \mathcal{Y} .

Soit W une composante connexe de $\mathcal{Y}^{\text{an}} \setminus \{\xi\}$. Il découle de ce qui précède que W contient une et une seule branche issue de ξ , et que W est ou bien égale à Δ , ou bien un disque; ce dernier fait implique que tout μ_ℓ -torseur étale sur W est trivial (prop. 4.4.20 et rem. 4.4.21). Comme par ailleurs le point ξ est de genre 0 (il appartient à $S(Z)$), les hypothèses du lemme 4.4.16 sont satisfaites; il en résulte que $\mathcal{Y} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$.

L'ouvert Δ s'identifie dès lors à une composante connexe du complémentaire d'un point de type 2 ou 3 dans $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$; par conséquent, Δ est un disque. \square

Terminons par une proposition (due à Berkovich) et un lemme qui résultent de la remarque 4.4.21.

(4.4.23) Proposition (Berkovich). *Soit X une $\widehat{k^a}$ -couronne et soit ℓ un entier premier à p . Tout μ_ℓ -torseur étale sur X est de Kummer.*

Démonstration. Soit $h \in H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$. On sait que h est de Kummer au voisinage de tout point de X (4.4.5.2). Nous allons tout d'abord préciser un peu cette assertion en montrant que pour tout $x \in S(X)$ il existe un entier $r(x)$, unique modulo ℓ , tel que $h = (t^{r(x)})$ au voisinage de x .

(4.4.23.1) Existence de $r(x)$.

Le cas où x est de type 3. Les sous-couronnes ouvertes de X contenant x forment alors une base de voisinages de x ; il existe donc une telle sous-couronne Y telle que $h|_Y$ soit de Kummer. Comme $T|_Y$ est une fonction

coordonnée sur Y , la classe $h|_Y$ est bien de la forme $(T^{r(x)})$ pour un certain entier x .

Le cas où x est de type 2. Le groupe $|\mathcal{H}(x)^\times|$ étant divisible, on dispose d'un isomorphisme naturel $H^1(\mathcal{H}(x), \mu_\ell) \simeq H^1(\widetilde{\mathcal{H}(x)}_1, \mu_\ell)$; soit \tilde{h} la classe qui correspond par ce biais au germe de h en x .

Comme $|\mathcal{H}(x)^\times| = |\widehat{k^a}^\times|$, on peut, quitte à multiplier T par un élément convenable de $\widehat{k^a}^\times$, supposer que $|T(x)| = 1$; la courbe résiduelle \mathcal{C} en x s'identifie alors à $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$, et $\widetilde{T(x)}$ en est une fonction coordonnée. Notons son diviseur $[0] - [\infty]$; les branches issues de x correspondant aux points fermés 0 et ∞ sont précisément les deux branches issues de x et définies par $S(X)$ (puisque $|T|$ est localement constante en dehors de $S(X)$ et strictement monotone sur $S(X)$).

Soit $a \in \text{br}(X, x)$ une branche qui n'est pas contenue dans $S(X)$, soit U la composante connexe de $X \setminus \{x\}$ qui contient a , et soit \mathcal{P} le point fermé de \mathcal{C} correspondant à a . Comme U est un disque, on déduit de la proposition 4.4.20 et de 4.4.21 que $h|_U = 0$; en particulier, la restriction de h à toute section coronaire de a contenue dans U est nulle, ce qui signifie que $\theta_a(h|_{(X,x)}) = 0$. Par conséquent, $\delta_{\mathcal{P}}(\tilde{h}) = 0$ (4.4.8.3).

Fixons un entier $r(x)$ tel que $\delta_0(\tilde{h}) = r(x)$ modulo ℓ . D'après 2.1.4, on a $\delta_\infty(\tilde{h}) = -r(x)$ modulo ℓ . La classe \tilde{h} a ainsi les mêmes résidus que $\left(\widetilde{T(x)}^{r(x)}\right)$ en tout point fermé de la courbe \mathcal{C} . Celle-ci étant de genre 0, on en déduit que $\tilde{h} = \left(\widetilde{T(x)}^{r(x)}\right)$ (2.1.5.2), et partant que $h|_{(X,x)} = (T^{r(x)})$.

(4.4.23.2) Unicité de $r(x)$ modulo ℓ . Supposons qu'il existe un voisinage ouvert U de x et deux entiers r et s tels que $h|_U = (T^r) = (T^s)$. Il existe une sous-couronne ouverte Y de X contenue dans U (il suffit de prendre Y de la forme I^b , où I est un intervalle ouvert aboutissant à x , tracé sur $S(X) \cap U$, et suffisamment petit). L'égalité $(T^r) = (T^s)$ dans $\text{Kum}_\ell(Y)$ implique alors que r et s sont égaux modulo ℓ .

(4.4.23.3) Conclusion. Il résulte de la définition de $r(x)$ et de son unicité modulo ℓ que $x \mapsto r(x)$ définit sans ambiguïté une application localement constante de $S(X)$ vers $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Par connexité de $S(X)$, cette application est constante; soit r sa valeur.

Posons $h' = h - (T^r)$, et soit $Z \rightarrow X$ un μ_ℓ -torseur de classe h' . Par construction, h' est nulle au voisinage de tout point x de $S(X)$. Et comme toute composante connexe de $X \setminus S(X)$ est un disque, il résulte de la proposition 4.4.20 et de 4.4.21 que h' est triviale au-dessus de $X \setminus S(X)$. En conséquence, h' est triviale au voisinage de tout point de X , ce qui implique que Z est un μ_ℓ -torseur topologique. La couronne X étant un arbre, Z est trivial, $h' = 0$ et $h = (T^r)$, ce qui achève la démonstration. \square

(4.4.24) Lemme. Soit \mathcal{Y} une $\widehat{k^a}$ -courbe projective, irréductible et lisse. Supposons qu'il existe un point y de genre 0 sur \mathcal{Y}^{an} tel que $\mathcal{Y}^{\text{an}} \setminus \{y\}$ soit réunion disjointe de disques. La courbe \mathcal{Y} est alors isomorphe à $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$.

Démonstration. Fixons un entier ℓ au moins égal à 2 et premier à p . Si U est une composante connexe de $\mathcal{Y}^{\text{an}} \setminus \{y\}$ c'est un disque, et donc un arbre à un bout. Par conséquent, $\text{br}(\mathcal{Y}^{\text{an}}, y)_{\subset U}$ est un singleton, et la remarque 4.4.21 assure que $H^1(U, \mu_\ell) = 0$; l'assertion requise découle alors de l'énoncé ii) du lemme 4.4.16. \square

4.5 Étude locale des courbes quasi-lisses sur un corps de base quelconque

Étude locale des courbes quasi-lisses sur un corps de base quelconque : préliminaires

Soit X une courbe k -analytique.

(4.5.1) Soit $x \in X_{[2,3]}$. L'ensemble des antécédents de x sur $X_{\widehat{k^a}}$ est alors fini. en effet, on peut toujours supposer, quitte à le remplacer par le complété de sa clôture parfaite, que k est parfait, puis que X est réduite et par conséquent génériquement quasi-lisse, et en particulier quasi-lisse en x .

Il est alors loisible, en substituant à X un voisinage affinoïde convenable de x , puis en immergeant ce dernier dans l'analytification d'une courbe affine lisse, de supposer que X est elle-même l'analytification d'une courbe affine. On peut maintenant procéder de deux façons différentes.

(4.5.1.1) Première méthode. Tout antécédent de x sur $X_{\widehat{k^a}}$ est de type 2 ou 3, et est en particulier pluribranche (4.2.11.1 et 4.2.11.2); il a donc une orbite finie sous l'action de Galois.

(4.5.1.2) Seconde méthode. On se ramène, par normalisation de Noether, au cas où $X = \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$. Soit y un antécédent de x sur $\mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$. Le point y est le bord de Shilov d'un disque fermé D , qui possède un point rigide z ; si H désigne le stabilisateur de z dans G alors H est un sous-groupe ouvert de G qui stabilise D , et partant y .

(4.5.2) Si $x \in X_{[0,2,3]}$ la fermeture séparable de k dans $\kappa(x)$ sera notée $\mathfrak{s}(x)$; c'est en vertu de ce qui précède une extension finie séparable de k . Si $x \in X_{[2,3]}$ et si y est l'un des antécédents de x sur $X_{\widehat{k^a}}$, son genre ne dépend que de x ; nous l'appellerons encore le genre de x et le noterons $g(x)$; on prendra garde qu'il n'a aucune raison de coïncider avec le genre de la courbe résiduelle en x , dont la formation ne commute pas à l'extension des scalaires en général.

(4.5.3) L'ensemble E des points de genre strictement positif de X est une partie fermée et discrète de X . Pour le voir, on se ramène aussitôt au cas où X est compacte, et il s'agit alors de montrer que E est fini. Il suffit de le faire après extension des scalaires à $\widehat{k^a}$, ce qui autorise à supposer k algébriquement clos; quitte à remplacer X par sa normalisée, on se ramène ensuite au cas où X est quasi-lisse, et donc réunion finie de domaines affinoïdes de courbes lisses; on conclut alors à l'aide du théorème 4.4.17.

Bases de voisinages sur une courbe quasi-lisse

(4.5.4) Théorème. Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse et soit $x \in X$. Il possède un voisinage ouvert connexe V dans X qui satisfait les conditions

énoncées ci-dessous.

- Le graphe \bar{V} est un arbre compact.
- Si $x \in X_{[14]}$ alors V est un disque virtuel.
- Si $x \in X_{[3]}$ le voisinage V est coronaire.
- Si $x \in X_{[2]}$ alors $V \setminus \{x\}$ est réunion disjointe de disques virtuels et d'un nombre fini de couronnes gentiment virtuelles.

Démonstration. On traite séparément chacun des cas.

(4.5.4.1) *Le cas où $x \in X_{[14]}$.* Choisissons un antécédent y de x sur $X_{\widehat{k^a}}$. Comme y est de type 1 ou 4, c'est un point de l'intérieur analytique de $X_{\widehat{k^a}}$ et il possède donc un voisinage ouvert dans $X_{\widehat{k^a}}$ qui s'immerge dans l'analytification d'une $\widehat{k^a}$ -courbe projective et lisse ; en vertu du théorème 4.4.22, il existe alors un voisinage Y de y dans $X_{\widehat{k^a}}$ qui est un $\widehat{k^a}$ -disque. D'après la proposition 1.9.18 on peut, quitte à le restreindre, supposer que Y possède les deux propriétés suivantes :

- son adhérence dans $X_{\widehat{k^a}}$ est un arbre compact ;
- pour tout $g \in \mathbf{G}$ l'on a $g(Y) = Y$ ou $g(Y) \cap Y = \emptyset$.

Soit V l'image de Y sur X ; c'est un voisinage de x dont l'adhérence dans X est un arbre compact. Comme $\{g(Y)\}_{g \in \mathbf{G}}$ s'identifie à l'ensemble fini $\pi_0(Z_{\widehat{k^a}})$, l'espace $V_{\widehat{k^a}}$ est réunion disjointe de $\widehat{k^a}$ -disques, et V est de ce fait un disque virtuel.

(4.5.4.2) *Le cas où $x \in X_{[2]} - \partial^{\text{an}} X$.* Le point x possède un voisinage V dans X tel que \bar{V} soit un arbre compact, et tel que V s'immerge dans le lieu lisse de \mathcal{X}^{an} pour une certaine k -courbe projective \mathcal{X} ; dès lors $V_{\widehat{k^a}}$ s'immerge dans \mathcal{Y}^{an} , où \mathcal{Y} est la normalisée de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}$.

Comme x est de type 2, l'ensemble de ses antécédents sur $V_{\widehat{k^a}}$ est une partie finie S de $V_{\widehat{k^a}} \subset \mathcal{Y}^{\text{an}}$, constituée de points de type 2. La courbe \mathcal{Y}^{an} étant un graphe compact, presque toute composante connexe de $V_{\widehat{k^a}} \setminus S$ est une composante connexe de $\mathcal{Y}^{\text{an}} \setminus \{y\}$ pour un certain $y \in S$; il résulte alors du théorème 4.4.15 que presque toutes les composantes connexes de $V_{\widehat{k^a}} \setminus S$ sont des $\widehat{k^a}$ -disques ; par conséquent, pour presque toute composante connexe W de $V \setminus \{x\}$, l'espace $W_{\widehat{k^a}}$ est réunion disjointe de $\widehat{k^a}$ -disques, ce qui signifie que W est un disque virtuel.

Soit W une composante connexe de $V \setminus \{x\}$ qui n'est pas un disque virtuel ; elle contient une unique branche de Z issue de x ; en vertu du lemme 4.3.9, cette branche possède une section qui est une couronne gentiment virtuelle. On peut donc, en rabotant un nombre fini de composantes connexes de $V \setminus \{x\}$, faire en sorte que V possède la propriété requise.

(4.5.4.3) *Conclusion.* Si $x \in X_{[3]}$ l'existence d'un voisinage coronaire de x découle du théorème 4.3.5. Supposons maintenant que $x \in X_{[2]}$. Il possède un voisinage ouvert dans X dont l'adhérence est un arbre compact, et qui s'identifie à un domaine analytique fermé d'une courbe lisse X' . L'existence d'un voisinage V de x dans X qui soit de la forme voulue provient alors du cas sans bord traité au 4.5.4.2) ci-dessus et du corollaire 4.2.4.3. \square

(4.5.5) Remarque. Si $x \in X_{[3]}$ alors V est ou bien une couronne virtuelle dont x appartient au squelette (si $I = \{1, 2\}$), ou bien une « demi-couronne virtuelle de bord $\{x\}$ » (si I est un singleton), ou bien réduit au singleton $\{x\}$ (si I est vide); le premier cas correspond à celui où x appartient à l'intérieur analytique de X (et V en est alors un voisinage coronaire), le dernier à celui où il en est un point isolé.

Toise canonique et paracompacité des courbes analytiques

(4.5.6) Lemme. Soit X une courbe k -analytique et soit Γ un sous-graphe localement fini de X . Il existe un sous-ensemble fermé et discret Σ de Γ tel que $\Gamma \setminus \Sigma \subset X_{[2,3]}$.

Démonstration. Soit S l'ensemble des points de X ayant au moins deux antécédents sur le normalisé de X ; c'est un sous-ensemble fermé et discret de X contenu dans $X_{[0]}$. Soit Σ la réunion de $S \cap \Gamma$ et de l'ensemble des sommets de Γ ; c'est une partie fermée et discrète de Γ . Si $x \in \Gamma - \Sigma$ alors $\text{br}(\Gamma, x)$ est de cardinal 2, et $\text{br}(X, x)$ est donc de cardinal au moins égal à 2. Par conséquent, $x \in X_{[0,2,3]}$; comme par ailleurs x n'appartient pas à S , il ne peut être rigide (il serait sinon unibranche), et appartient finalement à $X_{[2,3]}$. Ainsi, $\Gamma - \Sigma \subset X_{[2,3]}$. \square

(4.5.7) Proposition. Soit X une courbe k -analytique. Il existe une toise canonique sur $X_{[2,3]}$.

Démonstration. La question est purement topologique. On peut donc, quitte à étendre les scalaires à $\widehat{k^{\text{parf}}}$ et à remplacer X par la courbe réduite sous-jacente, supposer k parfait et X réduite; chaque point de $X_{[2,3]}$ est alors quasi-lisse.

Soit I un segment tracé sur $X_{[2,3]}$ et soient x et y ses deux extrémités. En vertu de 4.3.6.3, il existe une suite $x = x_0 < x_1 < \dots < x_r = y$ d'éléments de I (orienté de x vers y) telle que pour tout i compris entre 1 et $r - 1$ la condition suivante soit vérifiée : l'intervalle ouvert $]x_i; x_{i+1}[$ est faiblement admissible et $]x_i; x_{i+1}[^{\text{b}}$ est une couronne (gentiment) virtuelle de type $] * * [$.

La somme des logarithmes des modules des couronnes virtuelles $]x_i; x_{i+1}[^{\text{b}}$ ne dépend pas du choix de la suite (x_i) : il suffit en effet de vérifier qu'elle est insensible à un raffinement de la subdivision initiale, ce qui est clair; on la note $l(I)$. Il résulte des propriétés élémentaires du module d'une couronne que $I \mapsto l(I)$ définit une toise sur $X_{[2,3]}$, qui est par construction invariante par tout automorphisme de X . \square

(4.5.8) Corollaire. Soit X une courbe k -analytique et soit Γ un sous-graphe localement fini de X . Le graphe Γ admet une toise.

Démonstration. D'après le lemme 4.5.6, il existe un sous-ensemble fermé et discret Σ de Γ tel que $\Gamma \setminus \Sigma \subset X_{[2,3]}$. En vertu de la proposition 4.5.7 ci-dessus, $\Gamma - \Sigma$ admet alors une toise, et il s'ensuit d'après la proposition 1.6.3 que Γ admet lui-même une toise. \square

(4.5.9) Proposition. Soit X une courbe k -analytique et soit Γ un sous-graphe localement fini de $X_{[2,3]}$. Soit F une extension presque algébrique de k et soit Γ_F l'image réciproque de Γ (d'après le cor. 1.9.20, Γ_F est un sous-graphe localement fini de X_F , et $\Gamma_F \rightarrow \Gamma$ est injective par morceaux). L'application $\Gamma_F \rightarrow \Gamma$ commute aux toises canoniques de ses source et but.

Démonstration. Soit F' l'extension complète de k composée de F et $\widehat{k^{\text{parf}}}$. Par construction, les toises canoniques sont invariantes par extension radicielle complétée des scalaires; il suffit donc de démontrer que $\Gamma_{F'} \rightarrow \Gamma_{\widehat{k^{\text{parf}}}}$ est une isométrie par morceaux, ce qui permet de supposer k parfait. Le problème considéré étant insensible aux phénomènes de nilpotence, on peut remplacer X par X_{red} , et donc la supposer réduite, et partant génériquement quasi-lisse. Soit I un segment tracé sur Γ_F , telle que $X_F \rightarrow X$ induise un homéomorphisme de I sur son image J . Nous allons démontrer que $\ell(J) = \ell(I)$, ce qui permettra de conclure.

Notons x et x' les deux extrémités de J , et y et y' leurs antécédents respectifs sur I . En vertu de 4.3.6.3, il existe une suite $x = x_0 < x_1 < \dots < x_r = x'$ d'éléments de J (orienté de x vers y) telle que pour tout i compris entre 1 et $r - 1$ la condition suivante soit vérifiée : l'intervalle ouvert $]x_i; x_{i+1}[$ est faiblement admissible et $]x_i; x_{i+1}[^{\flat}$ est une couronne (gentiment) virtuelle de type $] * * [$. Pour tout i , notons y_i l'unique antécédent de x_i sur I . Il suffit de vérifier que l'on a $\ell([y_i; y_{i+1}]) = \ell([x_i; x_{i+1}])$ pour tout i . On se ramène ainsi au cas où $]x; x'[^{\flat}$ est faiblement admissible et où $]x'; x[^{\flat}$ est une couronne gentiment virtuelle de type $] * * [$. Notons L le corps $\mathfrak{s}(]x; x'[^{\flat})$; le produit tensoriel $F \otimes_k L$ est un produit fini $\prod F_j$ d'extensions finies séparables de F .

L'ouvert $]x; x'[^{\flat}$ de X_F s'identifie à $\prod_j]x; x'[^{\flat} \times_L F_j$. L'image réciproque de $]x; x'[^{\flat}$ sur X_F est donc la réunion disjointe des $\mathbf{S}^{\text{an}}(]x; x'[^{\flat} \times_L F_j)$; il s'ensuit que $]y; y'[^{\flat}$ est égal à $\mathbf{S}^{\text{an}}(]x; x'[^{\flat} \times_L F_j)$ pour un certain j . Par définition de la toise canonique, $\ell([y; y'])$ est alors le module de la couronne virtuelle $]x; x'[^{\flat} \times_L F_j$, qui est égal à celui de $]x; x'[^{\flat}$, et partant à $\ell([x; x'])$, ce qui achève la démonstration. \square

(4.5.10) Théorème. *Soit X une courbe k -analytique.*

- 1) *Le graphe X admet une toise.*
- 2) *Soit Γ un sous-graphe admissible de X et soit r la rétraction canonique de X sur Γ . L'inclusion de Γ dans X est une équivalence homotopique; plus précisément il existe une application continue $h : [0; 1] \times X \rightarrow X$ telle que $h(0, \cdot) = r, h(1, \cdot) = \text{Id}_X$ et $h(t, x) = x$ pour tout $t \in [0; 1]$ et tout $x \in \Gamma$.*
- 3) *Le graphe X est paracompact, localement fortement contractile et a le type d'homotopie d'un graphe localement fini métrisable; de plus, X est contractile si et seulement si X est un arbre non vide, et il est alors fortement contractile.*

Démonstration. Tout sous-graphe compact de X admet une toise (3.6.45); comme par ailleurs tout sous-graphe localement fini de X admet une toise en vertu du corollaire 4.5.8, le graphe X admet lui-même une toise d'après le lemme 1.6.9. Les assertions 2) et 3) découlent alors directement du théorème 1.6.13. \square

Variation du corps des constantes sur une courbe

(4.5.11) Soit X une courbe k -analytique et soit X' sa normalisation. Soit I un intervalle ouvert tracé sur X et soit $x \in I$. Comme x est situé sur un intervalle ouvert, $\text{br}(X, x)$ est de cardinal au moins égal à deux. Comme $X_{[1,4]} \cap \partial^{\text{an}} X = \emptyset$, il découle de 4.2.5 que $x \in X_{[0,2,3]}$; si de plus $X' \rightarrow X$ est un

homéomorphisme (e.g si X est normale) alors $\text{br}(X, y)$ est un singleton pour tout $y \in X_{[0]}$ (prop. 3.5.2), ce qui entraîne que $x \in X_{[2,3]}$.

Il s'ensuit que $X_{[0,2,3]}$ est une partie convexe de X , et qu'il en va de même de $X_{[2,3]}$ si $X' \rightarrow X$ est un homéomorphisme, et donc notamment si X est normale.

(4.5.12) Soit X une courbe k -analytique, et soit $p : X \rightarrow X_{\widehat{k^a}}$ la flèche naturelle. Soit $x \in X_{[0,2,3]}$ et soit $b \in \text{br}(X, x)$. Comme $x \in X_{[0,2,3]}$ sa fibre sur $X_{\widehat{k^a}}$ est finie; le corollaire 1.9.19 assure l'existence d'un intervalle $J_0 \in \text{Interv}_a(X, b)$ (nécessairement tracé sur $X_{[0,2,3]}$ en vertu du 4.5.11 ci-dessus) tel que pour tout $J \in \text{Interv}(X, x)_{\subset J_0}$ et tout $y \in J$ le G -ensemble fini $p^{-1}(y)$ s'identifie canoniquement à $\pi_0(p^{-1}(J^b))$.

Par conséquent, pour tout $J \in \text{Interv}(X, x)_{\subset J_0}$ et tout $y \in J$ l'inclusion naturelle $\mathfrak{s}(J^b) \hookrightarrow \mathfrak{s}(y)$ est un isomorphisme; cela entraîne immédiatement que pour tout couple (J, J') d'intervalles appartenant à $\text{Interv}(X, x)_{\subset J_0}$ et tels que $J' \subset J$ l'inclusion naturelle $\mathfrak{s}(J^b) \hookrightarrow \mathfrak{s}((J')^b)$ est un isomorphisme.

Posons $\mathfrak{s}(b) = \varinjlim_{Z \in \overrightarrow{\text{Sec}} b} \mathfrak{s}(Z)$; en vertu de ce qui précède, $\mathfrak{s}(b)$ est une extension finie séparable égale à $\mathfrak{s}(J^b)$ pour n'importe quel $J \in \text{Interv}(X, x)_{\subset J_0}$, et si $y \in J_0$ alors $\mathfrak{s}(y) = \mathfrak{s}(b)$.

Les anneaux locaux de X étant henséliens, $\mathfrak{s}(x)$ s'immerge dans $\mathcal{O}_{X,x}$, et se plonge donc naturellement dans $\mathfrak{s}(b)$.

(4.5.13) Soit X une courbe k -analytique et soit Γ un sous-graphe fermé et localement fini de X tracé sur $X_{[0,2,3]}$.

(4.5.13.1) Chacun des points de Γ a un nombre fini d'antécédents; si F est une extension presque algébrique de k , les assertions suivantes se déduisent alors de 1.9.20 : l'image réciproque Γ_F de Γ sur X_F est un sous-graphe fermé et localement fini de X_F ; et la flèche $\Gamma_F \rightarrow \Gamma$ est injective par morceaux.

(4.5.13.2) Soit d l'application $x \mapsto [\mathfrak{s}(x) : k]$ de Γ dans \mathbb{N} . On déduit de 4.5.12 que d est constante par morceaux et semi-continue inférieurement, et que si $x \in \Gamma$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) d est continue en x ;
- ii) d est constante au voisinage de x ;
- iii) pour tout point y de Γ suffisamment proche de x l'on a $\mathfrak{s}(x) \simeq \mathfrak{s}(y)$;
- iv) pour toute branche $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ la flèche naturelle $\mathfrak{s}(x) \rightarrow \mathfrak{s}(b)$ est un isomorphisme.

(4.5.14) Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse et soit $x \in X_{[2,3]}$.

(4.5.14.1) Soit b une branche de X issue de x . Si Z est une section coronaire de b alors pour tout $I \in \text{Interv}(X, x)_{\subset \mathcal{S}(Z)}$ l'ouvert I^b est une sous-couronne virtuelle de b , et le plongement $\mathfrak{s}(Z) \hookrightarrow \mathfrak{s}(I^b)$ est donc un isomorphisme. On déduit alors de 4.5.12 que $\mathfrak{s}(Z)$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{s}(b)$.

(4.5.14.2) Soit V un ouvert de X qui est un disque virtuel de bord $\{x\}$ et soit b l'unique branche issue de x et contenue dans V . On sait qu'il existe un ouvert Z de V qui est une couronne virtuelle aboutissant à x et telle que $\mathfrak{s}(Z) = \mathfrak{s}(V)$

(3.6.36 et sq.); la couronne virtuelle Z est section coronaire de b , et l'on a par conséquent, $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(Z)$, d'où finalement l'égalité $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(V)$; ceci entraîne notamment que $\mathfrak{s}(x)$ se plonge naturellement dans $\mathfrak{s}(V)$.

Si y est un point de $V_{[0,2,3]}$ alors l'application de $[x; y]$ dans \mathbb{N} qui envoie z sur $[\mathfrak{s}(z) : k]$ est croissante lorsqu'on se dirige vers y : cela résulte de 1.9.16.3.

(4.5.14.3) Soit U un voisinage ouvert connexe de x qui est un arbre et qui est tel que $U \setminus \{x\}$ soit réunion disjointe de disques virtuels et de couronnes virtuelles, et soit $f \in \mathfrak{s}(x)$.

On peut voir f comme une fonction définie sur un voisinage U' de x , que l'on peut restreindre de sorte que la proposition suivante soit satisfaite : il existe une famille finie (U_i) de composantes connexes deux à deux disjointes de $U \setminus \{x\}$, et pour tout i un fermé Z_i de U_i , tels que $U_i - Z_i$ soit pour tout i une section coronaire de l'unique branche issue de x et contenue dans U_i , et tels que U' soit égal à $U - \coprod Z_i$. Il résulte de 4.5.14.1 et de 4.5.14.2 que $\mathfrak{s}(U_i) \rightarrow \mathfrak{s}(U_i - Z_i)$ est un isomorphisme pour tout i ; on en déduit que f admet un unique prolongement à U . Ainsi, l'injection naturelle $\mathfrak{s}(U) \rightarrow \mathfrak{s}(x)$ est un isomorphisme.

Modération des morphismes compacts et non constants entre courbes

(4.5.15) Soient Γ et Δ deux graphes localement finis, respectivement munis de deux toises ℓ_Γ et ℓ_Δ . On dira qu'une application continue $\varphi : \Delta \rightarrow \Gamma$ est une *dilatation* si φ est un homéomorphisme et s'il existe un réel $r \in \mathbb{R}_+^\times$ tel que $\ell_\Gamma(\varphi(I)) = r\ell_\Delta(I)$ pour tout segment I tracé sur Δ ; si Δ n'est pas discret, le réel r en question est uniquement déterminé et est appelé le *rapport* de φ . Lorsqu'il vaut 1, on dit que φ est une *isométrie*.

(4.5.16) Soient Γ et Δ deux graphes localement finis et soit φ une application continue $\Delta \rightarrow \Gamma$. Supposons qu'il existe un ensemble fermé et discret S de Γ tel que $\varphi^{-1}(S)$ soit discret dans Δ ; et supposons que $\Delta - \varphi^{-1}(S)$ et $\Gamma \setminus S$ soient chacun munis d'une toise. On dira que φ est une *dilatation (resp. isométrie) par morceaux* s'il existe un sous-ensemble fermé et discret T de Δ contenant $\varphi^{-1}(S)$ tel que pour toute composante connexe J de $\Delta \setminus T$ l'application φ induise une dilatation (resp. une isométrie) $J \simeq \varphi(J)$.

Toute dilatation par morceaux est injective par morceaux.

(4.5.17) Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme de dimension relative nulle entre deux courbes k -analytiques. Soit Γ un sous-graphe localement fini de X et soit Δ un sous-graphe localement fini de Y tel que $\varphi(\Delta) \subset \Gamma$. Le sous-ensemble $\Gamma_{[14]}$ de Γ en est une partie fermée et discrète, et $\varphi_{|\Delta}^{-1}(\Gamma_{[14]}) = \Delta_{[14]}$. Lorsqu'on parlera de dilatation par morceaux dans ce contexte, ce sera toujours au sens du 4.5.16 ci-dessus, avec les conventions implicites suivantes : $S = \Gamma_{[14]}$; les graphes $\Gamma \setminus S = \Gamma_{[2,3]}$ et $\Delta - \varphi_{|\Delta}^{-1}(S) = \Delta_{[2,3]}$ sont munis des restrictions respectives des toises canoniques de $X_{[2,3]}$ et $Y_{[2,3]}$ (4.5.7).

(4.5.18) *Exemples.*

(4.5.18.1) Soit X une courbe k -analytique, soit F une extension presque algébrique de k et soit Γ un sous-graphe localement fini de X . L'image

réciroque Γ_F de Γ sur X_F est un sous-graphe localement fini de X_F (cor. 1.9.20), et il découle de la proposition 4.5.9 que $\Gamma_F \rightarrow \Gamma$ est une isométrie par morceaux.

(4.5.18.2) Soient Y et X deux courbes k -analytiques, chacune d'elles étant une couronne virtuelle. Si $\varphi : Y \rightarrow X$ est un morphisme fini et plat, il résulte du lemme 3.6.40 que φ induit une dilatation de rapport $\frac{\deg \varphi}{[\mathfrak{s}(Y) : \mathfrak{s}(X)]}$ entre $S^{\text{an}}(Y)$ et $S^{\text{an}}(X)$.

Notons un cas particulier important : si $[\mathfrak{s}(Y) : \mathfrak{s}(X)] = \deg \varphi$, c'est-à-dire encore si Y s'identifie à $X \times_{\mathfrak{s}(X)} \mathfrak{s}(Y)$ (ce qui est notamment le cas lorsque Y est une composante connexe de X_L pour une certaine extension finie L de k), alors $S^{\text{an}}(Y) \rightarrow S^{\text{an}}(X)$ est une dilatation de rapport 1, c'est-à-dire une isométrie ; on peut également voir ce résultat comme une déclinaison de l'exemple 4.5.18.1 ci-dessus. Cela dit, le plus simple est de le vérifier directement : c'est une simple reformulation de l'invariance du module d'une couronne virtuelle par extension des scalaires (cette invariance est d'ailleurs le cœur de la preuve de la proposition 4.5.9 sur laquelle se fonde l'exemple 4.5.18.1).

(4.5.19) Théorème. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme compact et de dimension relative nulle entre courbes k -analytiques et soit Γ un sous-graphe fermé et localement fini de Y .*

- 1) *L'image de $\varphi(\Gamma)$ est un sous-graphe fermé et localement fini de X .*
- 2) *La flèche $\Gamma \rightarrow X$ est injective par morceaux.*
- 3) *La flèche $\Gamma_{[0,2,3]} \rightarrow \varphi(\Gamma_{[0,2,3]})$ est une dilatation par morceaux.*
- 4) *On suppose de surcroît que Y et X sont génériquement quasi-lisses ; on appelle T le sous-ensemble fermé et discret de Γ égal à la réunion de $\Gamma \cap \partial^{\text{an}}\varphi$ et de l'ensemble des points rigides de Γ en lesquels φ n'est pas plat.*
 - α) *si $y \in \Gamma_{[3]} \setminus T$, il existe un intervalle I qui est un voisinage ouvert de y dans $\Gamma_{[2,3]} \setminus T$ tel que φ induise une dilatation $I \simeq \varphi(I)$ de rapport $\frac{\deg^y \varphi}{[\mathfrak{s}(y) : \mathfrak{s}(\varphi(y))]}$, et tel que $\deg^z \varphi = \deg^y \varphi$ pour tout $z \in I$;*
 - β) *si $y \in \Gamma_{[0,2,3]}$ et si $b \in \text{br}(\Gamma, y)$, il existe $I \in \text{Interv}(\Gamma, b)_{\subset \Gamma_{[2,3]} \setminus T}$, tel que φ induise une dilatation $I \simeq \varphi(I)$ de rapport $\frac{\deg(b \rightarrow \varphi(b))}{[\mathfrak{s}(b) : \mathfrak{s}(\varphi(b))]}$, et tel que $\deg^z \varphi = \deg(b \rightarrow \varphi(b))$ pour tout $z \in I$;*
 - γ) *si $y \in \Gamma$ et si $b \in \text{br}(\Gamma, y)$, il existe $I \in \text{Interv}(\Gamma, b)_{\subset \Gamma_{[2,3]} \setminus T}$ tel que $\deg^z \varphi$ soit égal à $\deg(b \rightarrow \varphi(b))$ pour tout $z \in I$; si de plus le point y appartient à $\Gamma_{[1,3,4]} \setminus T$ et si Y est normale en y alors ce degré coïncide avec $\deg^y \varphi$.*

Démonstration. Les assertions à montrer sont locales sur le but, ce qui autorise à supposer que X est compacte ; la courbe Y l'est alors automatiquement, puisque φ est compact. On peut ensuite : étendre les scalaires au complété de la clôture parfaite de k , c'est-à-dire supposer que k est parfait ; puis remplacer X et Y par les courbes réduites sous-jacentes, c'est-à-dire se ramener au cas où X et Y sont génériquement quasi-lisses.

Le graphe Γ est fini et compact ; l'assertion 1) sera dès lors une conséquence de 2). L'assertion 2) elle-même est locale sur Γ , et découlera de 3) au voisinage

des points de $\Gamma_{[0,2,3]}$; l'assertion 3) résultera quant à elle de 4), β). Il reste donc à prouver 2) au voisinage des points de type 1 ou 4 non rigides, et 4).

(4.5.19.1) *Preuve de 2) et de 4), γ) au voisinage des points de type 1 ou 4 non rigides.* Soit $y \in \Gamma_{[1,4]} - \Gamma_{[0]}$ et soit x son image sur X ; le point x appartient à $X_{[1,4]} - X_{[0]}$. Comme y n'appartient pas au bord analytique de Y , comme il n'est pas rigide et comme X est réduit, φ est fini et plat en y . On déduit de 3.5.11.2 l'existence d'un voisinage affinoïde W de y dans Y et d'un voisinage affinoïde V de x dans X tel que $\varphi(W) \subset V$ et tel que $W \rightarrow V$ admette une factorisation $W \rightarrow Z \rightarrow V$ où $W \rightarrow Z$ est fini, plat et radiciel et où $Z \rightarrow V$ est fini étale; on peut supposer que y est le seul antécédent de x sur W . Soit Δ l'image de $\Gamma \cap W$ dans Z ; notons que $(\Gamma \cap W) \rightarrow \Delta$ est un homéomorphisme; par conséquent, le compact Δ est un graphe fini; soit Δ_0 l'image de Δ dans V , qui coïncide avec celle de $\Gamma \cap W$.

Comme $Z \rightarrow V$ est fini étale et comme Z et V sont connexes et non vides, il existe un morphisme fini étale $Z' \rightarrow Z$ tel que $Z' \rightarrow V$ soit un revêtement fini galoisien connexe dont on note G le groupe. L'espace Z s'identifie à un quotient Z'/H pour un certain sous-groupe H de G . Il découle du corollaire 1.9.20 que l'image réciproque Δ_1 de Δ_0 sur Z est un sous-graphe compact et fini, et que $\Delta_1 \rightarrow \Delta$ est injective par morceaux. L'image réciproque Γ_1 de Δ_1 sur W s'identifie à l'image réciproque de Δ_0 sur W ; comme elle est canoniquement homéomorphe à Δ_1 , c'est un graphe compact et fini, et $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_0$ est injective par morceaux.

Il s'ensuit que $(\Gamma \cap Z) \rightarrow \Delta_0$ est injective par morceaux, ce qui prouve 2). Par ailleurs, comme y et x sont de type 1 ou 4 et non rigides, les ensembles $\text{br}(X, x)$ et $\text{br}(Y, y)$ sont des singletons; notons b l'unique élément de $\text{br}(Y, y)$.

Supposons que la branche b appartienne à $\text{br}(\Gamma, y)$ (cela revient à demander que y ne soit pas isolé dans Γ); elle appartient *a fortiori* à $\text{br}(\Gamma_1, y)$, et l'on a dans ce cas $\text{br}(\Gamma_1, y) = \text{br}(\Gamma, y) = \{b\}$; l'ensemble $\text{br}(\Delta_0, x)$ est dès lors non vide, et coïncide nécessairement avec le singleton, $\text{br}(X, x)$.

On déduit de ce qui précède et du fait que y est le seul antécédent de x sur W qu'il existe un intervalle ouvert $I \in \text{Interv}(Y, b)_{\subset \Gamma_1}$ tel que pour tout $z \in I$, l'on ait $\varphi_{|W}^{-1}(\varphi(z)) = \{z\}$. On peut supposer, quitte à le restreindre, que I est contenu dans $\Gamma_{[2,3]}$ et dans l'intérieur topologique de W dans Y ; cette dernière condition assure, la flèche $W \rightarrow V$ étant finie et plate, que $I \subset \Gamma \setminus T$.

Comme y est le seul antécédent de x sur W et comme b est la seule branche de Y issue de y , on a $\deg^y \varphi = \deg(b \rightarrow \varphi(b)) = \deg(W \rightarrow V)$; et si $z \in I$ l'égalité $\varphi_{|W}^{-1}(\varphi(z)) = \{z\}$ assure que $\deg^z \varphi = \deg(W \rightarrow V) = \deg(b \rightarrow \varphi(b))$, ce qui achève de prouver 4), γ).

(4.5.19.2) *Preuve de 4).* On démontre chacune des trois assertions séparément.

Démonstration de α). Comme $y \notin \partial^{\text{an}} \varphi$, le morphisme φ est fini et plat en y . Il découle alors de l'énoncé ii) de la proposition 4.3.11 et de 4.3.12.4 qu'il existe un voisinage coronaire Z' de y dans Y et un voisinage coronaire Z de $\varphi(y)$ dans X tel que φ induise un morphisme fini et plat $Z' \rightarrow Z$ de degré $\deg^y \varphi$. Le point y étant de type 3 et situé sur $S^{\text{an}}(Z')$, on a $\text{br}(Y, y) = \text{br}(Z', y) = \text{br}(S^{\text{an}}(Z'), y)$ et l'on peut donc restreindre Z' (et Z) de sorte que $I := \Gamma \cap S^{\text{an}}(Z')$ soit un intervalle tracé sur Γ et ouvert dans ce dernier; l'inclusion de I dans Z' garantit par ailleurs que $I \subset \Gamma_{[2,3]}$, et que I évite T , puisque $Z' \rightarrow Z$ est

fini et plat. L'assertion α) découle alors de 4.5.18.2, du fait que $\mathfrak{s}(y) = \mathfrak{s}(Z')$ et $\mathfrak{s}(\varphi(y)) = \mathfrak{s}(\varphi(Z))$, et du fait que tout point z de $I \subset \mathbf{S}^{\text{an}}(Z)'$ est l'unique antécédent de $\varphi(z)$ sur Z' .

Démonstration de β). En vertu de l'énoncé i) de la proposition 4.3.11, il existe une section coronaire Z' de b dans Y et une section coronaire Z de $\varphi(y)$ dans X telles que φ induise un morphisme fini et plat $Z' \rightarrow Z$ de degré $\deg(b \rightarrow \varphi(b))$; on peut restreindre Z' (et Z) de sorte que $I := \mathbf{S}^{\text{an}}(Z')$ soit un contenu dans Γ ; l'inclusion de I dans Z' garantit par ailleurs que $I \subset \Gamma_{[2,3]}$, et que I évite T , puisque $Z' \rightarrow Z$ est fini et plat. L'assertion β) découle alors de 4.5.18.2, du fait que $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(Z')$ et $\mathfrak{s}(\varphi(b)) = \mathfrak{s}(\varphi(Z))$ (4.5.14.1), et du fait que tout point z de $I \subset \mathbf{S}^{\text{an}}(Z)'$ est l'unique antécédent de $\varphi(z)$ sur Z' .

Démonstration de γ). Cette assertion a été établie au 4.5.19.1 lorsque le point y appartient à $\Gamma_{[1,4]} - \Gamma_{[0]}$. Supposons maintenant que $y \in \Gamma_{[0,2,3]}$. L'existence d'un intervalle I ayant les propriétés requises découle alors immédiatement de l'assertion β) déjà prouvée; si $y \in \Gamma_{[3]} \setminus T$ alors $\varphi^{-1}(\varphi(b)) = \{b\}$, d'où il découle que $\deg(b \rightarrow \varphi(b)) = \deg^y \varphi$; enfin, si $y \in \Gamma_{[14]} \setminus T$, et si de plus Y est normale en y alors $\text{br}(Y, y) = \{b\}$, et il s'ensuit là encore que $\deg(b \rightarrow \varphi(b)) = \deg^y \varphi$. \square

(4.5.20) Théorème. Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme de dimension relative nulle entre courbes k -analytiques et soit Γ un sous-graphe fermé et localement fini de X .

- 1) L'image réciproque $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est un sous-graphe fermé et localement fini de Y .
- 2) Si $y \in \varphi^{-1}(\Gamma)$, si x désigne son image sur X et si $b \in \text{br}(Y, y)$ alors $b \in \text{br}(\varphi^{-1}(\Gamma), y)$ si et seulement si $\varphi(b) \in \text{br}(\Gamma, x)$.

Démonstration. La question étant purement topologique, on peut étendre les scalaires au complété de la clôture parfaite de k , et donc supposer k parfait; puis l'on peut remplacer Y et X par les courbes réduites associées, et donc supposer que Y et X sont réduites, et en partant génériquement quasi-lisses (le corps de base étant parfait).

Il est clair que $\varphi^{-1}(\Gamma)$ est fermé. Soit $y \in \varphi^{-1}(\Gamma)$, et soit x son image sur X . Nous allons montrer que y possède un voisinage dans $\varphi^{-1}(\Gamma)$ qui est un arbre fini. Pour ce faire, on peut, quitte à restreindre Y et X , supposer que ce sont des arbres compacts et que $\varphi^{-1}(x) = \{y\}$.

Soit $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ et soient β_1, \dots, β_r les antécédents de b dans $\text{br}(Y, y)$. Il existe une section U de b telle que $\varphi^{-1}(U)$ soit de la forme $\coprod_{1 \leq i \leq r} V_i$ où i est pour tout i une section de β_i , finie et plate sur U de degré $\deg(\beta_i \rightarrow b)$. Fixons i et un point y_i de V_i . En vertu de l'assertion 4), γ) du théorème 4.5.19 ci-dessus, il existe $z_i \in]x; y_i[$ tel que $\deg^z \varphi = \deg(\beta_i \rightarrow b)$ pour tout $z \in]y; z_i]$. Cette égalité, jointe au fait que $\deg(V_i \rightarrow U) = \deg(\beta_i \rightarrow b)$, implique que si $z \in]y; z_i]$ alors $\varphi_{|V_i}^{-1}(\varphi(z)) = \{z\}$; comme on a par ailleurs $\varphi^{-1}(x) = \{y\}$, il en résulte que φ induit un homéomorphisme $]y; z_i] \simeq]x; \varphi(z_i)]$ et que

$$\varphi_{|V_i}^{-1}(]x; \varphi(z_i)]) =]y; z_i].$$

Les intervalles $]x; \varphi(z_i)]$ sont tous tracés sur U , et aboutissent tous à x ; de plus, la branche b appartient par hypothèse à $\text{br}(\Gamma, x)$. Par conséquent, il

existe $t_b \in U$ tel que $]x; t_b[$ soit contenu dans $\Gamma \cap \bigcap]x; z_i]$. Par construction, l'image réciproque de $]x; t_b[$ est une réunion finie de segments dont les intersections deux à deux sont toutes égales à $\{y\}$; c'est en particulier un arbre compact fini.

La réunion Δ des segments $]x; t_b]$ pour b parcourant $\text{br}(\Gamma, x)$ est un voisinage de x dans Γ ; par conséquent, $\varphi^{-1}(\Delta)$ est un voisinage de y dans $\varphi^{-1}(\Gamma)$, et il résulte de ce qui précède que $\varphi^{-1}(\Delta)$ est un arbre compact et fini, ce qui achève la démonstration de 1).

Montrons maintenant 2). Si $b \in \text{br}(\varphi^{-1}(\Gamma), y)$ il est clair que $\varphi(b) \in \text{br}(\Gamma, x)$ puisque $\varphi^{-1}(\Gamma) \rightarrow X$ se factorise par Γ . Réciproquement, supposons que $\varphi(b) \in \text{br}(\Gamma, x)$. On déduit de l'assertion 2) du théorème 4.5.19 l'existence d'un intervalle $I \in \text{Interv}_a(Y, b)$ tel que φ induise un homéomorphisme entre \bar{I} et $\varphi(\bar{I})$; par conséquent, $\varphi(I)$ est un intervalle aboutissant proprement à x , et la branche qu'il définit est nécessairement $\varphi(b)$. Par hypothèse, $\varphi(b) \in \text{br}(\Gamma, x)$; il existe donc un intervalle ouvert J contenu dans $\varphi(I)$, aboutissant à x et inclus dans Γ ; son image réciproque $\varphi|_I^{-1}(J)$ est un intervalle qui est contenu dans I et aboutit à y , et définit par conséquent la branche b . Comme $\varphi|_I^{-1}(J) \subset \varphi^{-1}(\Gamma)$, on a bien $b \in \text{br}(\varphi^{-1}(\Gamma), y)$. \square

Variation des fonctions holomorphes et loi des nœuds

(4.5.21) Graphe de variation. Soit X une courbe k -analytique et soit f une fonction analytique inversible sur X ; elle induit un morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}$; soit Γ l'image réciproque de $\mathcal{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$ sur X . Notons que comme $\mathcal{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$ n'est constitué que de points de type 2 ou 3, le fermé Γ est contenu dans $X_{[23]}$.

(4.5.21.1) *Le fermé Γ de X en est un sous-graphe localement fini, et la flèche $\Gamma \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$ est une dilatation par morceaux.* En effet, soit $x \in \Gamma$; comme x est de type 2 ou 3, il est situé sur une et une seule composante irréductible X_0 de X . Comme l'ensemble $f(X_0)$ contient un point de $\mathcal{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$, il n'est pas réduit à un point rigide, ce qui signifie que la restriction de f à X_0 est non constante, c'est-à-dire encore de dimension relative nulle. On déduit du théorème 4.5.20 que $\Gamma \cap X_0$ est un graphe localement fini, et de l'assertion 3) du théorème 4.5.19 que $\Gamma \cap X_0 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$ est une dilatation par morceaux (pour appliquer en toute rigueur le théorème 4.5.19, on commence par se ramener en raisonnant localement sur Γ au cas d'une source compacte). Comme x n'appartient qu'à la composante irréductible X_0 de X , celle-ci est un voisinage de x dans X , et $\Gamma \cap X_0$ est dès lors un voisinage de x dans Γ , d'où notre assertion.

(4.5.21.2) La fonction $|T|$ étant localement constante sur $\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}} - \mathcal{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$, la fonction $|f|$ est localement constante sur $X - \Gamma$. Comme $\Gamma \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$ est une dilatation par morceaux, et comme $|T|$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$ (orienté de 0 vers ∞), la fonction $|f|$ n'est constante sur aucun intervalle non vide et non singleton de Γ .

Soit x un point isolé de Γ et soit U la composante connexe de x dans l'ouvert $X - (\Gamma \setminus \{x\})$. Si V est une composante connexe de $U \setminus \{x\}$ alors $|f|$ est localement constante, et donc constante, sur V ; et comme $x \in \partial V$, la valeur constante de $|f|$ sur V est égale à $|f(x)|$. Ainsi, $|f|$ est constante sur U . Il s'ensuit

que si Γ_0 désigne l'ensemble des points non isolés de Γ , l'ouvert $X - \Gamma_0$ est le plus grand ouvert de X sur lequel $|f|$ est localement constante; on dira que le graphe fermé et localement fini Γ_0 est le *graphe* de variation de f .

(4.5.21.3) Remarquons que $\Gamma - \Gamma_0 \subset \partial^{\text{an}} X$ (en particulier, $\Gamma = \Gamma_0$ dès que X est sans bord). En effet, soit $x \in \Gamma \setminus \partial^{\text{an}} X$, et soit ξ son image par φ . Comme x n'appartient pas au bord de X et comme φ est de dimension nulle en x , elle est finie en x . Comme ξ est de type 2 ou 3 et comme $\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}$ est réduit, $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}},\xi}$ est un corps, et φ est donc fini et *plat* en x . Par conséquent, si U est un voisinage ouvert de x dans X alors $\varphi(U)$ est un voisinage ouvert de ξ dans $\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}$, et contient en particulier un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$; il s'ensuit que $U \setminus \{x\}$ rencontre Γ , ce qui signifie que x n'est pas un point isolé de Γ .

(4.5.21.4) Soit $x \in \Gamma$, soit ξ son image sur $\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}$ et soit $b \in \text{br}(X, x)$. Soit b^- (resp. b^+) la branche de $\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}$ issue de ξ définie par $]0; \xi[$ (resp. $]\xi; \infty[$). Comme φ est de dimension nulle en x , l'image $\varphi(b)$ est bien définie. Il résulte de l'assertion 2) de théorème 4.5.20 que $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ si et seulement si $\varphi(b) = b^+$ ou $\varphi(b) = b^-$; les branches b^+ et b^- étant exactement les deux branches le long desquelles $|T|$ n'est pas constante, on peut reformuler cette dernière assertion en disant que $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ si et seulement si $|f|$ n'est pas constante le long de b .

Supposons que $b \in \text{br}(\Gamma, x)$, et posons $\varepsilon = 1$ (resp. -1) si $\varphi(b) = b^+$ (resp. b^-).

Comme la flèche $\Gamma \rightarrow \mathbb{S}(\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}})$ est une dilatation par morceaux, il existe $I \in \text{Interv}(\Gamma, b)$ et un réel $r > 0$ tel que φ induise une dilatation $I \simeq \varphi(I)$ de rapport r ; le réel r ne dépend que de b , et pas du choix de I . Le réel $\varepsilon r[\mathfrak{s}(b) : k]$, auquel on peut penser comme à la pente normalisée de $\log |f|$ le long de b , sera noté $\text{dlog}_b |f|$.

Le réel $\text{dlog}_b |f|$ est un entier, qui coïncide avec $\varepsilon \deg(b \rightarrow \varphi(b))$ lorsque X est génériquement quasi-lisse. En effet, le réel $\text{dlog}_b |f|$ n'est pas modifié si l'on remplace k par le complété de sa clôture parfaite, ni si l'on remplace X par X_{red} ; on peut ainsi supposer que X est génériquement quasi-lisse, et il n'y a plus alors qu'à appliquer l'assertion 2) du théorème 4.5.19.

(4.5.22) Théorème (harmonicité de $\log|f|$ pour f holomorphe). Soit X une courbe k -analytique sans bord et soit f une fonction analytique inversible sur X . Soit Γ son graphe de variation et soit $x \in \Gamma$. On a alors la « loi des nœuds » suivante :

$$\sum_{b \in \text{br}(\Gamma, x)} \text{dlog}_b |f| = 0.$$

Démonstration. Pour montrer cette égalité, on peut étendre les scalaires au complété de la clôture parfaite de k , puis remplacer X par X_{red} ; autrement dit, on peut se ramener au cas où X est génériquement quasi-lisse. Soit ξ l'image de x par le morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}$ que définit f . Comme X est sans bord, comme φ est de dimension relative nulle en x et comme $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}},\xi}$ est un corps (le point ξ étant de type 2 ou 3), le morphisme de germes $(X, x) \rightarrow (\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}, \xi)$ est fini et plat; soit d son degré. Soit b^- (resp. b^+) la branche de $\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}$ issue de ξ et définie par $]0; \xi[$ (resp. $]\xi; \infty[$) et soit \mathcal{B}^- (resp. \mathcal{B}^+) l'ensemble des antécédents de b^- (resp. b^+) dans $\text{br}(X, x)$; d'après 4.5.21.4, on a $\text{br}(\Gamma, x) = \mathcal{B}^+ \amalg \mathcal{B}^-$. Il

vient

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \text{br}(\Gamma, x)} \text{dlog}_b |f| &= \sum_{b \in \mathcal{B}^+} \text{dlog}_b |f| + \sum_{b \in \mathcal{B}^-} \text{dlog}_b |f| \\ &= \sum_{b \in \mathcal{B}^+} \text{deg}(b \rightarrow \varphi(b)) - \sum_{b \in \mathcal{B}^-} \text{deg}(b \rightarrow \varphi(b)) = d - d = 0. \quad \square \end{aligned}$$

(4.5.23) Remarque. La loi des nœuds énoncée ci-dessus vaut encore si l'on remplace Γ par n'importe quel sous-graphe fermé localement fini de X contenant le graphe de variation de f , à condition de poser $\text{dlog}_b |f| = 0$ pour toute branche b le long de laquelle $|f|$ est constante.

Chapitre 5

Triangulations des courbes analytiques quasi-lisses

5.1 Sous-graphes analytiquement admissibles, squelette analytique et triangulations

Lemmes de fusion

(5.1.1) **Lemme.** Soit X une courbe k -analytique, et soient U et V deux ouverts connexes et non vides de X possédant les propriétés suivantes :

- 1) U est une couronne virtuelle ;
- 2) V est un disque virtuel ;
- 3) V rencontre le squelette de U et il existe un élément u de ∂U qui n'appartient pas à V .

Sous ces hypothèses :

- $\mathfrak{s}(V) = \mathfrak{s}(U \cup V) = \mathfrak{s}(U)$; notons L ce corps ;
- $U \cup V$ est un disque virtuel sur L dont l'adhérence est compacte, égale à $U \cup V \cup \{u\}$, et est une composante connexe de $X \setminus \{u\}$;
- si F est une extension presque algébrique de L qui déploie U et si l'espace L -analytique V a un F -point, alors F déploie $U \cup V$.

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

(5.1.1.1) Comme V est un disque virtuel, il existe un intervalle ouvert I tracé sur V et aboutissant à son unique bout ω tel que $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(V)$ pour tout $x \in I$ (3.6.36.1 et 3.6.36.2)

(5.1.1.2) *Topologie de $V \cup U$.* Comme le graphe $V \cup U$ est réunion de deux ouverts connexes qui s'intersectent, il est connexe. Tout point de $(V \cup U) - \mathfrak{S}(U)$ a dans $V \cup U$ un voisinage qui est un arbre à un bout. Le squelette de $V \cup U$ est donc inclus dans $\mathfrak{S}(U)$, et il est connexe puisque $V \cup U$ est connexe ; comme un squelette n'a jamais de point isolé ni unibranche, $\mathfrak{S}(V \cup U)$ ne peut-être qu'un intervalle ouvert de $\mathfrak{S}(U)$, nécessairement strict puisque $\mathfrak{S}(U)$ rencontre V . Par ailleurs, $\mathfrak{S}(V \cup U)$ est fermé dans $V \cup U$, et *a fortiori* dans $\mathfrak{S}(U)$; il en résulte finalement que $\mathfrak{S}(U \cup V) = \emptyset$, et donc que $V \cup U$ est un arbre ayant au plus un

bout. Le point u appartenant en vertu de 2) au bord de $V \cup U$ dans le graphe X , l'arbre $V \cup U$ a exactement un bout ; son adhérence est égale à $V \cup U \cup \{u\}$ et s'identifie à sa compactification arboricole.

Le sous-ensemble $V \cup U$ de X est une partie connexe, non vide, ouverte et fermée de $X \setminus \{u\}$; c'en est donc une composante connexe.

(5.1.1.3) Comme $V \cup U \cup \{u\}$ est un arbre compact, le bord de $S(U)$ dans celui-ci est de la forme $\{u, \xi\}$ pour un certain $\xi \neq u$. Par convexité, l'ouvert non vide $V \cap S(U)$ est un intervalle ouvert de $S(U)$; soit η sa borne supérieure, lorsqu'on l'oriente en direction de u . Le point η adhère à V mais n'appartient pas à V : cela résulte de sa définition et du fait que $u \notin V$ par hypothèse. Comme ∂V ne peut contenir plus d'un élément (V étant un arbre à un bout), la borne inférieure de $V \cap S(U)$ appartient à V , et par conséquent n'appartient pas à $S(U)$; cela ne peut donc être que ξ .

L'arbre à un bout V apparaît dès lors comme la composante connexe de $V \cup U \cup \{u\} \setminus \{\eta\}$ contenant ξ . Son intersection avec U est la sous-couronne virtuelle $] \xi ; \eta]^p$ de U .

L'intervalle I du 5.1.1.1 peut en conséquence être restreint de façon à être contenu dans $] \xi ; \eta]$; fixons $x \in I$. Comme x est situé sur le squelette de U , le plongement $\mathfrak{s}(U) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ est un isomorphisme ; mais $\mathfrak{s}(V) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ est aussi un isomorphisme par définition de I .

Comme $\mathfrak{s}(U) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ et $\mathfrak{s}(V) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ se factorisent par $\mathfrak{s}(U \cap V)$ (ce dernier est bien défini puisque $U \cap V$ est connexe et non vide), les injections canoniques $\mathfrak{s}(U) \hookrightarrow \mathfrak{s}(U \cap V)$ et $\mathfrak{s}(V) \hookrightarrow \mathfrak{s}(U \cap V)$ sont des isomorphismes ; il s'ensuit que toute fonction appartenant à $\mathfrak{s}(U)$ (resp. $\mathfrak{s}(V)$) s'étend de manière naturelle en une fonction de $\mathfrak{s}(U \cup V)$.

Par conséquent, $\mathfrak{s}(U) = \mathfrak{s}(V) = \mathfrak{s}(U \cup V)$; notons L ce corps.

Pour toute extension presque algébrique F de L , on désignera par x_F l'unique antécédent de x sur $V \widehat{\otimes}_L F$; pour tout intervalle J tracé sur U , on désignera par J_F l'image réciproque de J sur $U \widehat{\otimes}_L F$; notons que $S(U)_F = S(U \widehat{\otimes}_L F)$.

Soit F une extension presque algébrique de L qui déploie U , et qui est telle que l'espace L -analytique V ait un F -point. On fixe un k -plongement de F dans $\widehat{k^a}$.

(5.1.1.4) Les composantes connexes de $(V \cup U) \widehat{\otimes}_L F \setminus \{x_F\}$ sont :

- la sous-couronne $U' :=]x; u]_F^p$ de $U \widehat{\otimes}_L F$;
- la composante connexe W de $V \widehat{\otimes}_L F \setminus \{x_F\}$ qui contient $] \xi ; x]_F$; elle n'aboutit pas à ω_F , et $W \widehat{\otimes}_F \widehat{k^a}$ est par conséquent réunion disjointe de composantes connexes de $V \widehat{\otimes}_L \widehat{k^a} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$ qui n'aboutissent pas à $\omega_{\widehat{k^a}}$, et sont donc des disques ;
- les composantes connexes de $U \widehat{\otimes}_L F \setminus \{x_F\}$ qui ne rencontrent pas l'intervalle $S(U)_F = S(U \widehat{\otimes}_L F)$; chacune d'elle est un disque virtuel (3.6.35.8).

(5.1.1.5) Prolongeons la F -couronne U' en un F -disque Z , et choisissons un F -point z sur $Z - U'$. En recollant Z et $(V \cup U) \widehat{\otimes}_L F$ le long de U' , on obtient un espace F -analytique lisse, topologiquement séparé, compact et connexe, qui est donc isomorphe à l'analytification d'une F -courbe algébrique projective,

irréductible et lisse \mathcal{Y} . On peut dès lors voir $(V \cup U) \widehat{\otimes}_L F$ comme une composante connexe de $\mathcal{Y}^{\text{an}} \setminus \{\zeta\}$, pour un certain point ζ de $\mathcal{Y}_{[2,3]}^{\text{an}}$, et z comme un F -point de \mathcal{Y}^{an} n'appartenant pas à $(V \cup U) \widehat{\otimes}_L F$.

La courbe projective $\mathcal{Y} \otimes_F \widehat{k^a}$ est lisse, et irréductible puisque x_F n'a qu'un antécédent sur $(\mathcal{Y} \otimes_F \widehat{k^a})^{\text{an}}$. Les composantes connexes de $(\mathcal{Y} \otimes_F \widehat{k^a})^{\text{an}} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$ sont, par construction de \mathcal{Y} et en vertu du 5.1.1.4, toutes des disques; de plus le point $x_{\widehat{k^a}}$, situé sur le squelette de la couronne $U \otimes_L \widehat{k^a}$, est de genre 0. Il s'ensuit, d'après le lemme 4.4.24, que $\mathcal{Y} \otimes_F \widehat{k^a} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$.

La F -courbe projective, lisse et irréductible \mathcal{Y} est ainsi de genre 0; comme $\mathcal{Y}(F) \neq \emptyset$ (cet ensemble contient z), la courbe \mathcal{Y} est isomorphe à \mathbb{P}_F^1 .

Le point ζ appartient à $\mathcal{Y}_{[2,3]}^{\text{an}}$, et l'ouvert $(U \cup V) \widehat{\otimes}_L F$ est une composante connexe de $\mathcal{Y}^{\text{an}} \setminus \{\zeta\}$ qui possède un F -point par choix de F . Par ailleurs, il existe un F -point sur \mathcal{Y}^{an} qui n'appartient pas à $(U \cup V) \widehat{\otimes}_L F$, à savoir z . On en déduit que $(U \cup V) \widehat{\otimes}_L F$ est un F -disque (3.6.17). \square

(5.1.2) Lemme. *Soit X une courbe k -analytique connexe et lisse. Supposons qu'il existe un point x de genre 0 sur X tel que $X \setminus \{x\}$ soit réunion disjointe de deux k -couronnes virtuelles X' et X'' et de disques virtuels; la courbe X est alors une k -couronne virtuelle, qui est déployée par toute extension presque algébrique de k déployant X' et X'' .*

Démonstration. Soit L une extension presque algébrique de k déployant X' et X'' . Par sa forme même, la courbe X est un arbre à deux bouts; il suffit donc de montrer que X_L est une L -couronne.

(5.1.2.1) Tout élément de $\mathfrak{s}(x)$ définit un élément de $\mathfrak{s}(U)$ pour une certaine sous-couronne U de X' (par exemple); le corps des constantes d'une k -couronne étant égal à k , il vient $\mathfrak{s}(x) = k$. Si F est une extension presque algébrique k , le point x a donc un unique antécédent x_F sur X_F .

(5.1.2.2) Prolongeons la L -couronne X'_L (resp. X''_L) en un L -disque Z' (resp. Z''), sur lequel on choisit un L -point z' (resp. z'') qui n'est pas situé sur X'_L (resp. X''_L). En recollant $Z' \amalg Z''$ et X_L le long de $X'_L \amalg X''_L$, on obtient une courbe L -analytique lisse, connexe, et compacte, et partant isomorphe à \mathcal{X}^{an} pour une certaine L -courbe algébrique projective, irréductible et lisse \mathcal{X} . Les composantes connexes de $\mathcal{X}_L^{\text{an}} \setminus \{x_L\}$ sont toutes des disques virtuels, et en particulier des arbres à un bout; il en résulte que $\mathcal{X}_L^{\text{an}}$ est un arbre. Il existe par construction deux points η' et η'' de \mathcal{X}^{an} , chacun étant de type 2 ou 3, tels que X_L s'identifie à la composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{\eta', \eta''\}$ contenant $] \eta', \eta'' [$, et tels qu'il existe deux composantes connexes T' et T'' de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{\eta', \eta''\}$ possédant les propriétés suivantes :

- $T'(L) \neq \emptyset$ et $T''(L) \neq \emptyset$;
- $\partial T' = \{\eta'\}$ et $\partial T'' = \{\eta''\}$.

(5.1.2.3) Choisissons un k -plongement de L dans $\widehat{k^a}$. Comme x_L n'a qu'un antécédent sur $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$, la $\widehat{k^a}$ -courbe projective et lisse $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}$ est irréductible. Par construction, toutes les composantes connexes de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$ sont des disques;

d'autre part, $x_{\widehat{k^a}}$ est par hypothèse de genre 0. Il s'ensuit, d'après le lemme 4.4.24 que $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{k^a}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$.

La L -courbe \mathcal{X} est de genre 0 ; elle possède un L -point par sa construction même (son analytifiée contient un L -disque), et est donc isomorphe à \mathbb{P}_L^1 ; on déduit alors de la description de X_L comme ouvert de \mathcal{X}^{an} donnée au 5.1.2.2 et de 3.6.21 que X_L est une L -couronne. \square

Sous-graphes analytiquement admissibles

(5.1.3) Soit X une courbe k -analytique et soit Γ un sous-graphe fermé de X . Nous dirons que Γ est *analytiquement admissible* si toute composante connexe de $X - \Gamma$ est un disque virtuel relativement compact dans X ; un sous-graphe analytiquement admissible de X est en particulier admissible, et partant convexe.

(5.1.4) Soit X une courbe k -analytique, soit Γ un sous-graphe analytiquement admissible de X , soit F une extension complète de k , et soit Γ_F l'image réciproque de Γ sur X_F .

(5.1.4.1) Si U est une composante connexe de $X - \Gamma$, son image réciproque sur X_F est une réunion finie disjointe de disques virtuels, relativement compacts puisque U est relativement compacte. On déduit alors de 1.3.15.2 que le fermé Γ_F de X_F en est un sous-graphe ; il est analytiquement admissible d'après ce qui précède.

(5.1.4.2) Supposons de plus que F est une extension presque algébrique de k et que Γ est tracé sur $X_{[0,2,3]}$. Dans ce cas Γ_F est tracé sur $X_{F,[0,2,3]}$; et si Γ est de plus localement fini, alors Γ_F est localement fini en vertu du corollaire 1.9.20.

(5.1.5) *Exemple.* Soit X un disque virtuel sur k , soit ω son unique bout et soit Γ un sous-arbre fermé de X aboutissant à ω ; nous allons montrer que Γ est un sous-graphe analytiquement admissible de X . Soit $\omega_{\widehat{k^a}}$ l'unique bout de $X_{\widehat{k^a}}$, et soit $\Gamma_{\widehat{k^a}}$ l'image réciproque de Γ sur $X_{\widehat{k^a}}$.

(5.1.5.1) *Montrons que $\Gamma_{\widehat{k^a}}$ est un sous-arbre admissible de $X_{\widehat{k^a}}$.* Comme Γ aboutit à ω , c'est un sous-arbre fermé et *non vide* de X ; par conséquent, $\Gamma_{\widehat{k^a}}$ est un fermé non vide de $X_{\widehat{k^a}}$.

Soit $x \in \Gamma_{\widehat{k^a}}$ et soit ξ son image sur X . L'application $X_{\widehat{k^a}} \rightarrow X$ induit un homéomorphisme de $[x; \omega_{\widehat{k^a}}[$ sur $[\xi; \omega[$ (1.9.16.1), lequel est contenu dans Γ puisque ce dernier aboutit à ω . Par conséquent, $[x; \omega_{\widehat{k^a}}[\subset \Gamma_{\widehat{k^a}}$.

Il s'ensuit que si x et y sont deux points de $\Gamma_{\widehat{k^a}}$ alors $[x; \omega_{\widehat{k^a}}[\cup [y; \omega_{\widehat{k^a}}[\subset \Gamma_{\widehat{k^a}}$; comme

$$[x; y] \subset X_{\widehat{k^a}} \cap ([x; \omega_{\widehat{k^a}}] \cup [y; \omega_{\widehat{k^a}}]) = [x; \omega_{\widehat{k^a}}] \cup [y; \omega_{\widehat{k^a}}],$$

il vient $[x; y] \subset \Gamma_{\widehat{k^a}}$. Ainsi, le fermé non vide $\Gamma_{\widehat{k^a}}$ de $X_{\widehat{k^a}}$ est convexe ; c'est donc un sous-arbre fermé et non vide de $X_{\widehat{k^a}}$.

Puisque $[x; \omega_{\widehat{k^a}}[$ est, d'après ce qui précède, contenu dans $\Gamma_{\widehat{k^a}}$ pour tout $x \in \Gamma_{\widehat{k^a}}$, le sous-arbre fermé et non vide $\Gamma_{\widehat{k^a}}$ de $X_{\widehat{k^a}}$ aboutit à $\omega_{\widehat{k^a}}$; c'est donc, en vertu de 1.5.2, un sous-graphe admissible de $X_{\widehat{k^a}}$.

(5.1.5.2) Soit U une composante connexe de $X_{\widehat{k^a}} - \Gamma_{\widehat{k^a}}$. Par ce qui précède, U est un arbre à un bout relativement compact dans $X_{\widehat{k^a}}$; soit x l'unique point de ∂U . Comme $X_{\widehat{k^a}}$ n'est pas compact, il existe une composante connexe de $X \setminus \{x\}$ qui n'est pas relativement compacte, et en particulier diffère de U ; le point x n'est dès lors pas unibranche, ce qui signifie qu'il est de type 2 ou 3.

Immergeons, au moyen d'une fonction coordonnée, le $\widehat{k^a}$ -disque $X_{\widehat{k^a}}$ dans $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$. Étant relativement compact dans $X_{\widehat{k^a}}$, l'ouvert U est une composante connexe de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}} \setminus \{x\}$; il s'ensuit, x étant de type 2 ou 3, que U est un disque.

(5.1.5.3) Ainsi toute composante connexe de $X_{\widehat{k^a}} - \Gamma_{\widehat{k^a}}$ est-elle un disque relativement compact; par conséquent, toute composante connexe de $X - \Gamma$ est un disque virtuel relativement compact; autrement dit, Γ est un sous-arbre analytiquement admissible de X .

(5.1.6) Soit X une courbe k -analytique et soit Γ un sous-graphe analytiquement admissible de X .

(5.1.6.1) Si V est une composante connexe de $X - \Gamma$ son bord est un singleton $\{x\}$, où $x \in \Gamma$. Il résulte de 3.6.39 que $x \in X_{[2,3]}$ et que X est quasi-lisse en x .

(5.1.6.2) Si Δ est un sous-graphe admissible de X contenant Γ , alors Δ est analytiquement admissible. En effet, soit V une composante connexe de $X - \Delta$; nous allons montrer que c'est un disque virtuel, ce qui permettra de conclure. Soit x l'unique point de ∂V .

Si $x \in \Gamma$ alors V est une composante connexe de $X - \Gamma$, et est donc un disque virtuel puisque Γ est analytiquement admissible.

Sinon, soit Y la composante connexe de $X - \Gamma$ contenant x ; elle contient V , qui apparaît donc comme une composante connexe de $Y - \Delta$; soit y l'unique point de ∂Y .

L'intersection $Y \cap \Delta$ est une partie fermée et convexe de Y , c'est-à-dire un sous-arbre fermé de Y , qui contient x . Par ailleurs, comme y appartient à Γ , il appartient à Δ ; par convexité de $\Delta \cap \overline{Y}$, l'intervalle $[x; y[$ est contenu dans $\Delta \cap Y$; ainsi, $\Delta \cap Y$ aboutit à l'unique bout de Y .

On déduit alors de l'exemple 5.1.5 que $\Delta \cap Y$ est un sous-arbre analytiquement admissible de Y ; en conséquence, l'ouvert relativement compact V est un disque virtuel, ce qui achève de montrer que Δ est analytiquement admissible.

(5.1.6.3) Soit Σ un sous-graphe fermé de X et soit X' la normalisée de X . Il existe un plus petit sous-graphe analytiquement admissible Δ de X contenant $\Gamma \cup \Sigma$, qui est localement fini si Γ et Σ sont eux-mêmes localement finis. De plus :

- si Γ et Σ sont tracés sur $X_{[0,2,3]}$ alors $\Delta \subset X_{[0,2,3]}$;
- si Γ et Σ sont tracés sur $X_{[2,3]}$ et si $X' \rightarrow X$ est un homéomorphisme alors $\Delta \subset X_{[2,3]}$.

En effet, la proposition 1.5.20 assure l'existence d'un plus petit sous-graphe *admissible* Δ de X contenant $\Gamma \cup \Sigma$, qui est localement fini si Γ et Σ le sont. Et

elle fournit par ailleurs une description explicite de Δ , d'où il découle : que si Γ et Σ sont tracés sur $X_{[0,2,3]}$ il en va de même de Δ par convexité de $X_{[0,2,3]}$; et que si Γ et Σ sont tracés sur $X_{[2,3]}$ et si $X' \rightarrow X$ est un homéomorphisme alors $\Delta \subset X_{[2,3]}$, l'hypothèse faite sur $X' \rightarrow X$ garantissant la convexité de $X_{[2,3]}$.

En vertu de 5.1.6.2, le sous-graphe Δ de X est analytiquement admissible ; comme tout sous-graphe analytiquement admissible de X est admissible, Δ est bien le plus petit sous-graphe analytiquement admissible de X contenant $\Gamma \cup \Sigma$.

(5.1.6.4) Soit V un ouvert de X qui est un disque virtuel relativement compact. Nous allons montrer que l'ouvert V est alors un disque *gentiment* virtuel. En effet, soit x l'unique point de ∂V ; en vertu de 3.6.39, le point x appartient à $X_{[2,3]}$ et au lieu quasi-lisse de X . Comme V est un arbre à un bout, il contient une unique branche b de X issue de x . Il existe une section Z de b contenue dans V qui est une couronne gentiment virtuelle. Par ailleurs, V possède un point rationnel sur une extension finie de $\mathfrak{s}(V)$, et même finie séparable si $|k^\times| \neq \{1\}$: si $|k^\times| = \{1\}$, cela est dû d'une part au fait que $V_{\widehat{\otimes}_{\mathfrak{s}(V)} \widehat{k}^a}$ est un \widehat{k}^a -disque, et donc possède un \widehat{k}^a -point, et d'autre part au fait que \widehat{k}^a est alors une clôture algébrique de k ; si $|k^\times| \neq \{1\}$, c'est une simple conséquence de la lissité de V .

Il découle dès lors du lemme 5.1.1 que $\mathfrak{s}(Z) = \mathfrak{s}(V)$ et que le disque virtuel V (qui est égal à $Z \cup V$) est déployé par une extension finie de $\mathfrak{s}(V)$, et même finie séparable si $|k^\times| \neq \{1\}$; autrement dit, c'est un disque gentiment virtuel.

Notons que ce qui précède s'applique en particulier aux composantes connexes de $X - \Gamma$; ce sont donc toutes des disques gentiment virtuels.

(5.1.7) Soit X une courbe k -analytique *génériquement* quasi-lisse et soit S le lieu singulier de X ; le sous-ensemble S de X est fermé, discret, et contenu dans $X_{[0]}$. Soit F le complété d'une extension radicielle de k , et soit X' la normalisée de X_F ; on note S' l'image réciproque de S sur X' ; c'est un sous-ensemble fermé et discret de X' contenu dans $X'_{[0]}$. La flèche $X' \rightarrow X$ identifie topologiquement X au quotient de X' par la relation d'équivalence \mathcal{R} qu'elle définit ; elle induit un homéomorphisme $X' \setminus S' \simeq X \setminus S$, et les fibres de $S' \rightarrow S$ sont finies.

(5.1.7.1) Soit Γ' un sous-graphe analytiquement admissible de X' contenu dans $X'_{[2,3]}$. Comme S' est un sous-graphe localement fini de X' , il existe un plus petit sous-graphe analytiquement admissible Δ' de X' qui contient $S' \cup \Gamma'$, et Δ' est localement fini dès que Γ' est localement fini (5.1.6.3). Les fermés Δ' et Γ' de X' sont saturés sous \mathcal{R} ; leurs images respectives Δ et Γ sur X sont donc fermées, et s'identifient respectivement aux quotients de Δ' et Γ' par la restriction de \mathcal{R} (notons que comme $\Gamma' \subset X'_{[2,3]}$, il évite S' , d'où il découle que $\Gamma' \simeq \Gamma$) ; ce sont dès lors deux sous-graphes fermés de X , qui sont localement finis si Γ' est localement fini ; nous allons montrer que Δ est analytiquement admissible, contenu dans $X_{[0,2,3]}$, et satisfait l'égalité $\Delta \cap X_{[0]} = S$.

Par définition, Γ' est un sous-graphe admissible de X' qui évite S' ; soit r la rétraction canonique de X' sur Γ' . Comme Δ' est le plus petit sous-graphe admissible de X' contenant $\Gamma' \cup S'$ (5.1.6.3), il coïncide en vertu de la proposition 1.5.20) avec $\Gamma' \cup \bigcup_{x \in S'} [x; r(x)[$.

Le graphe Δ est égal à la réunion des sous-ensembles suivants de X :

- le graphe Γ qui, en tant qu'image de Γ' , est contenu dans $X_{[2,3]}$;
- l'ensemble S , contenu dans $X_{[0]}$;
- la réunion Σ des images des intervalles $]x;r(x)[$, où x parcourt S' ;
comme X' est normale, chacun des $]x;r(x)[$ est contenu dans $X'_{[2,3]}$ en vertu de 4.5.11 ; par conséquent, $\Sigma \subset X_{[2,3]}$.

Il s'ensuit que $\Delta \subset X_{[0,2,3]}$, et que $\Delta \cap X_{[0]} = S$. Soit maintenant U une composante connexe de $X - \Delta$ et soit U' son image réciproque sur X' ; c'est une réunion de composantes connexes de $X' - \Delta'$. Comme $S \subset \Delta$, l'ouvert U est contenu dans $X \setminus S$; par conséquent, U' s'identifie à U_F , et est en particulier connexe. On déduit de ce dernier fait que U' est une composante connexe de $X' - \Delta'$; le sous-graphe Δ' de X' étant analytiquement admissible, U' est un disque virtuel relativement compact dans X' . La relative compacité de U' dans X' entraîne celle de U dans x ; et comme $U' \simeq U_F$, la composante U est elle-même un disque virtuel, ce qui achève de montrer que Δ est analytiquement admissible.

Le squelette analytique

(5.1.8) Si X est une courbe k -analytique, l'ensemble des points de X possédant un voisinage dans X qui est un disque virtuel est un ouvert de X ; son fermé complémentaire sera appelé le *squelette analytique* de X et sera noté $S^{\text{an}}(X)$; c'est en vertu de 1.3.15.2 un sous-graphe fermé et convexe de X .

Il résulte des définitions que $S^{\text{an}}(X) \supset S(X)$ et que $S^{\text{an}}(X)$ est contenu dans tout sous-graphe analytiquement admissible de X .

(5.1.9) Exemple. Soit X une couronne virtuelle sur k . Par ce qui précède, $S^{\text{an}}(X) \supset S(X)$; et l'on déduit de 3.6.35.8 que $S^{\text{an}}(X) \subset S(X)$; par conséquent, $S^{\text{an}}(X) = S(X)$.

(5.1.10) Soit X une courbe k -analytique *quasi-lisse* et soit $x \in S^{\text{an}}(X)$. On se donne un voisinage V de x de la forme (dépendant du type de x) décrite par le théorème 4.5.4.

(5.1.10.1) Si x est de type 1 ou 4 alors V est un disque virtuel, ce qui contredit l'appartenance de x à $S^{\text{an}}(X)$; par conséquent, x est de type 2 ou 3.

(5.1.10.2) Dans le cas du type 2 comme dans celui du type 3, l'adhérence de V dans X est un arbre compact, et $\pi_0(V \setminus \{x\})$ peut s'écrire $\mathcal{C} \coprod \mathcal{D}$, où \mathcal{C} est fini et constitué de couronnes gentiment virtuelles, et où \mathcal{D} est constitué de disques virtuels ; notons que si x est de type 2 (resp. 3) alors \mathcal{D} est infini (resp. vide). Soit $W \in \Pi_0(V \setminus \{x\})$.

Supposons que $W \in \mathcal{D}$. Dans ce cas, $W \cap S^{\text{an}}(X) = \emptyset$ par définition de $S^{\text{an}}(X)$.

Supposons que $W \in \mathcal{C}$. Les composantes connexes de $W - S(W)$ sont des disques virtuels ; ceci entraîne que $S^{\text{an}}(X) \cap W$ est contenu dans $S(W)$.

Nous allons montrer que $S^{\text{an}}(X) \cap W$ est ou bien égal à $S(W)$ tout entier, ou bien vide. Supposons donc que $S^{\text{an}}(X) \cap W$ est *strictement* contenu dans $S(W)$. Il existe alors un point w de $S(W)$ qui n'appartient pas à $S^{\text{an}}(X)$; cela signifie que w possède un voisinage W' dans X qui est un disque virtuel ; le point x étant situé sur $S^{\text{an}}(X)$, il n'appartient pas à W' . Il s'ensuit, en vertu du lemme 5.1.1,

que $W' \cup W$ est un disque virtuel, et une composante connexe de $X \setminus \{x\}$; c'est donc la composante connexe de $X \setminus \{x\}$ qui contient W ; celle-ci ne dépend ni du choix de w ni de celui de W' ; on la notera $\varpi(W)$. Comme W est contenu dans le disque virtuel $\varpi(W)$, on a $S^{\text{an}}(X) \cap W = \emptyset$, comme annoncé.

(5.1.10.3) Soit V' le voisinage ouvert de x défini comme la réunion de V et des $\varpi(W)$ où W parcourt l'ensemble des éléments de \mathcal{C} qui ne rencontrent pas Γ . De ce qui précède découlent les faits suivants :

- V' est un arbre, et son adhérence dans X est un arbre compact ;
- l'ensemble $\pi_0(V' \setminus \{x\})$ est la réunion disjointe de deux ensembles \mathcal{C}' et \mathcal{D}' , où \mathcal{C}' est fini et constitué de couronnes virtuelles, et où \mathcal{D}' est constitué de disques virtuels ;
- $S^{\text{an}}(X) \cap V' = \{x\} \cup \bigcup_{W \in \mathcal{C}'} S(W)$.
- toute composante connexe de $V' - \Gamma$ est un disque virtuel relativement compact dans V' ; c'est donc un disque virtuel relativement compact dans X dont l'unique point du bord est situé sur $S^{\text{an}}(X) \cap V'$.

(5.1.10.4) Soit U une composante connexe de $X - S^{\text{an}}(X)$ dont le bord contient x . Son intersection avec V' est alors non vide; comme elle est à la fois ouverte et fermée dans $V' - S^{\text{an}}(X)$, c'est une réunion non vide de composantes connexes de $V' - S^{\text{an}}(X)$. Il existe en conséquence au moins une composante connexe U' de $V' - S^{\text{an}}(X)$ qui est contenue dans U . D'après ce qui précède, $\partial_X U'$ est un singleton contenu dans $S^{\text{an}}(X)$; il s'ensuit que U' est fermée dans U , et donc égale à U par connexité de cette dernière. Ainsi, U est un disque virtuel relativement compact.

(5.1.11) Théorème. Soit X une courbe k -analytique génériquement quasi-lisse et soit S son lieu singulier.

- 1) Le bord analytique de X est contenu dans $S^{\text{an}}(X)$.
- 2) Le sous-graphe $S^{\text{an}}(X)$ de X est localement fini, contenu dans $X_{[0,2,3]}$, et $S^{\text{an}}(X) \cap X_{[0]} = S$; en particulier, $S^{\text{an}}(X) \subset X_{[2,3]}$ si et seulement si X est quasi-lisse.
- 3) Si X est quasi-lisse et si $S^{\text{an}}(X)$ rencontre chaque composante connexe de X , il est analytiquement admissible.
- 4) La courbe X possède un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible contenu dans $X_{[0,2,3]}$ et dont l'intersection avec $X_{[0]}$ est égale à S .

Démonstration. Si $x \in X - S^{\text{an}}(X)$ alors x est contenu dans un disque virtuel, qui est une courbe sans bord; par conséquent, $x \notin \partial^{\text{an}} X$, d'où 1).

(5.1.11.1) *Preuve de 2)* dans le cas où X est quasi-lisse. Il découle de 5.1.10.1 que $S^{\text{an}}(X) \subset X_{[2,3]}$; on déduit par ailleurs de 5.1.10.3 que $S^{\text{an}}(X)$ est localement fini.

(5.1.11.2) *Preuve de 3)* dans le cas où X est quasi-lisse. Supposons que $S^{\text{an}}(X)$ rencontre toutes les composantes connexes de X . Soit U une composante connexe de $X - S^{\text{an}}(X)$. En vertu de notre hypothèse, le bord de U est non vide; il s'ensuit, d'après 5.1.10.4, que U est un arbre virtuel relativement compact; par conséquent, $S^{\text{an}}(X)$ est admissible.

(5.1.11.3) *Preuve de 4)* dans le cas où X est quasi-lisse. On se ramène en raisonnant composante par composante au cas où X est connexe et non vide.

Si $S^{\text{an}}(X)$ est non vide, il répond au problème posé en vertu des assertions 2) et 3) déjà établies.

Supposons maintenant que $S^{\text{an}}(X) = \emptyset$. Tout point de X a alors un voisinage qui est un disque virtuel. Comme X est non vide, il existe un ouvert U de X qui est un disque virtuel, et l'on peut toujours, quitte à restreindre U , le supposer relativement compact (3.6.36.4); soit u l'unique point de ∂U . On sait (3.6.34 et 3.6.36.1-3.6.36.3) qu'il existe un intervalle ouvert I tracé sur $U_{[2,3]}$, aboutissant à u et qui possède la propriété suivante : si $x \in I$ et si V est une composante connexe de $U \setminus \{x\}$ qui ne contient pas $]x; u[$ (resp. qui contient $]x; u[$) alors V est un disque virtuel (resp. une couronne virtuelle).

Soit $x \in I$ et soit Π l'ensemble des composantes connexes de $U \setminus \{x\}$ ne contenant pas $]x; u[$; on appelle W la composante connexe de $U \setminus \{x\}$ contenant $]x; u[$; c'est une couronne virtuelle. Si $V \in \Pi$, son adhérence dans U est égale à $V \cup \{x\}$ et est compacte; cela implique que V est une composante connexe de $X \setminus \{x\}$. Par ailleurs, x adhère à toute composante connexe de $X \setminus \{x\}$ en vertu de la connexité de X . Il en résulte que les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$ sont d'une part les $V \in \Pi$ et d'autre part la composante connexe W' de $X \setminus \{x\}$ qui contient W . On distingue maintenant deux cas.

Supposons qu'il existe $y \in]x; u[$ possédant un voisinage V' dans W' qui soit un disque virtuel. Dans ce cas, le lemme 5.1.1 assure que $W \cup V'$ est un disque virtuel, et une composante connexe de $X \setminus \{x\}$, qui ne peut être que W' . Dès lors, toutes les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$ sont des disques virtuels, et $\{x\}$ est un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X , contenu dans $X_{[2,3]}$.

Supposons qu'aucun point y de $]x; u[$ ne possède un voisinage dans W' qui soit un disque virtuel. Dans ce cas, le squelette analytique Γ de W' contient $]x; u[$; comme $W' -]x; u[$ est réunion disjointe de disques virtuels, $\Gamma \cap W =]x; u[$. Posons $\Gamma' = \Gamma \cup \{x\}$; c'est un sous-graphe fermé et localement fini de X . Il est contenu dans $X_{[2,3]}$: cela résulte du fait que $x \in X_{[2,3]}$, et que Γ est, en tant que squelette analytique de l'ouvert quasi-lisse W' , tracé sur $X_{[2,3]}$ en vertu de l'assertion 2) déjà établie dans le cas quasi-lisse.

Les composantes connexes de $X - \Gamma'$ sont d'une part les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$ qui ne contiennent pas $]x; u[$, d'autre part les composantes connexes de $W' - \Gamma$; ce sont toutes des disques virtuels relativement compacts dans X . Par conséquent, Γ' est un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X , contenu dans $X_{[2,3]}$.

(5.1.11.4) Preuve de 2), 3) et 4) dans le cas général. Soit F le complété de la clôture parfaite de k et soit X' la normalisée de X_F ; soit S' l'image réciproque de S sur X' . Comme F est parfait, la courbe X' est quasi-lisse.

D'après l'assertion 3) déjà établie, la F -courbe quasi-lisse X' possède un sous-graphe analytiquement admissible et localement fini Γ' tracé sur $X'_{[2,3]}$. Soit Δ' le plus petit sous-graphe analytiquement admissible de X' contenant $\Gamma' \cup S'$, et soit Δ l'image de Γ' sur X . En vertu de 5.1.7.1, Δ est un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X , tracé sur $X_{[0,2,3]}$ et dont l'intersection avec $X_{[0]}$ est égale à S ; cela prouve 3).

Montrons maintenant 1). L'assertion 3) que l'on vient de prouver affirme l'existence d'un sous-graphe Δ de X , localement fini, analytiquement admissible,

tracé sur $X_{[0,2,3]}$ et tel que $\Delta \cap X_{[0]} = S$. Le sous-graphe $S^{\text{an}}(X)$ étant contenu dans Δ , il est localement fini, tracé sur $X_{[0,2,3]}$, et $S^{\text{an}}(X) \cap X_{[0]} \subset S$. Par ailleurs si $x \in S$ alors x est un point singulier de X , et ne peut donc être contenu sur aucun disque virtuel ; il s'ensuit que $x \in S^{\text{an}}(X)$, et l'on a finalement $S^{\text{an}}(X) \cap X_{[0]} = S$. \square

Les nœuds d'un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible

(5.1.12) Soit X une courbe k -analytique génériquement quasi-lisse et soit Γ un sous-graphe analytiquement admissible et localement fini de X , tracé sur $X_{[0,2,3]}$. Nous dirons qu'un point x de Γ en est un *nœud* s'il satisfait l'une au moins des conditions suivantes :

- 1) le point x est rigide ;
- 2) le point x appartient à $\partial^{\text{an}} X$;
- 3) le point x est un sommet topologique de Γ , c'est-à-dire, rappelons-le, que la valence de (Γ, x) est différente de 2 ;
- 4) il existe une branche β de Γ issue de x telle que $\mathfrak{s}(\beta)$ soit une extension stricte de $\mathfrak{s}(x)$ (autrement dit, les conditions équivalentes i), ii), iii) et iv) du 4.5.13.2 ci-dessus ne sont pas vérifiées) ;
- 5) le point x est de genre strictement positif.

(5.1.12.1) Remarquons que 4) et 5) impliquent que x est de type 2 ; c'est évident pour 5), justifions-le pour 4). Si x est de type 3, il possède un voisinage V que l'on peut immerger dans une couronne virtuelle U de sorte que $x \in S(U)$ et de sorte que $V \setminus \{x\}$ soit réunion de 0, 1 ou 2 composantes connexes de $U \setminus \{x\}$; comme $\text{br}(U, x)$ a pour cardinal 2, il existe un voisinage ouvert Γ_0 de x dans Γ tel que $\Gamma_0 \subset S(U)$; mais on a alors $\mathfrak{s}(y) \simeq \mathfrak{s}(U) \simeq \mathfrak{s}(x)$ pour tout $y \in \Gamma_0$, et 4) n'est pas satisfaite.

(5.1.12.2) Il résulte de 4.5.12 et 4.5.3 que l'ensemble des nœuds de Γ en est une partie fermée et discrète. Si Γ' est un sous-arbre localement fini et analytiquement admissible de X contenant Γ et si x est un nœud de Γ il découle aussitôt des définitions que x est un nœud de Γ' , sauf peut-être si les conditions suivantes sont satisfaites : $x \in X_{[2,3]} \setminus \partial^{\text{an}} X$, $g(x) = 0$ et x est un point isolé de Γ ou un point unibranche de Γ tel que $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(x)$ pour l'unique branche b de $\text{br}(\Gamma, x)$.

(5.1.12.3) Soit I un intervalle ouvert non vide tracé sur Γ , relativement compact dans ce dernier et n'en contenant aucun nœud ; il n'en contient en particulier aucun sommet topologique, et est donc un ouvert de Γ ; supposons de plus que $\partial I \subset X_{[2,3]}$. Nous allons montrer que I^b est une couronne gentiment virtuelle, évidemment relativement compacte.

On déduit des hypothèses faites sur I l'existence d'une suite finie

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

de points de I (arbitrairement orienté) telle que l'on ait, si l'on note x_0 et x_{n+1} les deux bouts de l'arbre I :

- pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ l'ouvert $]x_i; x_{i+1}[^b$ est une couronne gentiment virtuelle;
- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les plongements

$$\mathfrak{s}(x_i) \hookrightarrow \mathfrak{s}(]x_{i-1}; x_i[^b) \text{ et } \mathfrak{s}(x_i) \hookrightarrow \mathfrak{s}(]x_i; x_{i+1}[^b)$$

(4.5.14.1) sont des isomorphismes.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Les composantes connexes de $]x_{i-1}; x_{i+1}[^b \setminus \{x_i\}$ autres que $]x_{i-1}; x_i[^b$ et $]x_i; x_{i+1}[^b$ sont des disques virtuels; il en découle, en vertu de 4.5.14.3, que l'évaluation induit un isomorphisme entre $\mathfrak{s}(]x_{i-1}; x_{i+1}[^b)$ et $\mathfrak{s}(x_i)$. On a donc pour tout i compris 1 et n des isomorphismes naturels

$$\mathfrak{s}(]x_{i-1}, x_i[^b) \simeq \mathfrak{s}(]x_{i-1}; x_{i+1}[^b) \simeq \mathfrak{s}(]x_i; x_{i+1}[^b).$$

Il en résulte que pour tout élément i de $\{0, \dots, n\}$, toute fonction appartenant à $\mathfrak{s}(]x_i; x_{i+1}[^b)$ s'étend naturellement en une fonction appartenant à $\mathfrak{s}(I^b)$; autrement dit, si F désigne le corps $\mathfrak{s}(I^b)$ alors $\mathfrak{s}(]x_i; x_{i+1}[^b) \simeq F$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

La courbe F -analytique I^b est lisse (qu'elle soit sans bord résulte du fait que I ne contient aucun nœud de Γ); pour tout i compris entre 1 et n , les composantes connexes de $I^b \setminus \{x_i\}$ sont d'une part $]x_0; x_i[^b$ et $]x_i; x_{n+1}[^b$, et d'autre part des disques virtuels; par ailleurs, l'ouvert $]x_i; x_{i+1}[^b$ est pour tout i compris entre 0 et n une couronne gentiment virtuelle sur F .

Une application répétée du lemme 5.1.2 assure alors que I^b est une couronne gentiment virtuelle sur F .

Triangulations

(5.1.13) Si X est une courbe k -analytique quasi-lisse, nous appellerons *triangulation* de X la donnée d'un sous-ensemble S fermé et discret de X , contenu dans $X_{[2,3]}$, et tel que toute composante connexe de $X \setminus S$ soit un disque virtuel ou une couronne virtuelle et soit relativement compacte dans X ; on dira que l'ensemble S est l'ensemble des *sommets* de la triangulation en question. *Attention* : si U est une composante connexe de $X \setminus S$ qui est une couronne virtuelle, on ne demande pas que son adhérence soit un arbre : elle peut être homotope à un cercle si ∂U est un singleton.

Remarquons que si S est une triangulation de X , toute composante connexe de $X \setminus S$ a un bord non vide; cela implique que S rencontre toutes les composantes connexes de X .

(5.1.14) Théorème. *Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse.*

i) Si S est une triangulation de X , la réunion Γ de S et des squelettes des composantes connexes de $X \setminus S$ qui sont des couronnes virtuelles est un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X tracé sur $X_{[2,3]}$; tous les nœuds de Γ appartiennent à S , et $\Gamma \setminus S$ est réunion disjointe d'intervalles ouverts d'adhérence compacte dans Γ ; on dira que Γ est le squelette de la triangulation S .

ii) Réciproquement, soit Γ un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X tracé sur $X_{[2,3]}$ et soit S une partie fermée et discrète de Γ

contenant ses nœuds et telle que $\Gamma \setminus S$ soit réunion disjointe d'intervalles ouverts d'adhérence compacte dans Γ . L'ensemble S est alors une triangulation de X dont Γ est le squelette, et toute composante connexe de $X \setminus S$ est un disque ou une couronne gentiment virtuel(le).

iii) Si Σ est un sous-ensemble discret et fermé de X contenu dans $X_{[2,3]}$, il existe une triangulation de X contenant Σ ; en particulier, X possède au moins une triangulation; et si S est une triangulation de X alors toute composante connexe de $X \setminus S$ est un disque ou une couronne gentiment virtuel(le).

iv) Si X est strictement k -analytique, si $|k^\times| \neq \{1\}$ et si Σ est un sous-ensemble discret et fermé de X constitué de points de type 2 alors il existe une triangulation de X contenant Σ et dont tous les sommets sont de type 2; en particulier, X possède une triangulation dont tous les sommets sont de type 2.

Démonstration. Pour établir i), il suffit de vérifier que si $x \in S$, il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes de $X \setminus S$ aboutissant à x qui sont des couronnes virtuelles; or c'est une conséquence du théorème 4.5.4 et du fait que tout voisinage de x dans le graphe X contient presque toutes les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$.

L'assertion ii) est une reformulation du 5.1.6.4 et du 5.1.12.3; l'assertion iii) résulte de i), de ii), de l'existence d'un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X tracé sur $X_{[2,3]}$ et contenant Σ (th. 5.1.11 et 5.1.6.3), et de la métrisabilité d'un tel sous-graphe (prop. 4.5.7).

Prouvons maintenant iv); on suppose donc que la courbe X est strictement k -analytique; il existe un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible Γ de X tracé sur $X_{[2,3]}$ et contenant Σ (cf. *supra*). Soit x un point de type 3 de Γ . Comme X est strictement k -analytique, $x \notin \partial^{\text{an}} X$; par conséquent, il existe un voisinage ouvert V de x dans X qui est une couronne virtuelle telle que $x \in S(V)$.

Étant de type 3, le point x ne peut satisfaire les propriétés 3) et 4) du 5.1.12; l'on déduit de ce qui précède que x ne peut être un nœud de Γ que si le nombre de branches de Γ issues de x est inférieur ou égal à 1. Supposons que ce soit le cas; il existe alors un intervalle ouvert I tracé sur $S(V)$ aboutissant à x et qui ne rencontre pas Γ . Comme $|k^\times| \neq \{1\}$, les points de type 2 sont denses dans le squelette de V , et *a fortiori* dans I ; choisissons un point y de type 2 sur I ; la réunion de Γ et de $[y; x[$ est un sous-graphe localement fini admissible de X ; il est par conséquent analytiquement admissible (5.1.6.2). Ainsi, l'on peut prolonger Γ au niveau de chacun de ses nœuds de type 3 de manière à obtenir un sous-arbre localement fini et analytiquement admissible Δ de X contenant Σ et dont tous les nœuds sont de type 2.

Soit S_0 la réunion de Σ et de l'ensemble des nœuds de Δ . La métrisabilité de Δ (prop. 4.5.7) assure que le complémentaire de S_0 dans Δ est réunion disjointe de cercles et d'intervalles ouverts; si J est l'un d'eux et si J' est un intervalle ouvert tracé sur J dont l'adhérence est un segment, l'ouvert $(J')^{\text{an}}$ est une couronne virtuelle (5.1.12.3) et les points de type 2 sont denses dans son squelette J' puisque la valeur absolue de k n'est pas triviale; par conséquent, les points de type 2 sont denses dans $\Delta \setminus S_0$. En conséquence, il existe un sous-ensemble fermé et discret S de Δ contenant S_0 , constitué uniquement de points de type 2, et tel que $\Delta \setminus S$ soit réunion disjointe d'intervalles ouverts relativement

compacts dans Δ ; en vertu de ii) (déjà établi) S est une triangulation de X , dont tous les sommets sont par construction de type 2. \square

(5.1.15) Lemme. *Soit X une courbe k -analytique, soit U un ouvert de X et soit $x \in \partial U$; supposons que x est de type 2 ou 3.*

1) *Si U est un k -disque et si r désigne son rayon modulo $|k^\times|$, on a l'inclusion $|\mathcal{H}(x)^\times| \subset |k^\times|.r^{\mathbb{Z}}$, avec égalité si k est algébriquement clos. Le point x est de type 2 (resp. 3) si et seulement si $r \in \sqrt{|k^\times|}$ (resp. $r \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$).*

2) *Si U est une k -couronne, si ω est un bout de U convergeant vers x , et si r désigne le rayon extérieur de U modulo $|k^\times|$ en ω , on a l'inclusion $|\mathcal{H}(x)^\times| \subset |k^\times|.r^{\mathbb{Z}}$, avec égalité si k est algébriquement clos. Le point x est de type 2 (resp. 3) si et seulement si $r \in \sqrt{|k^\times|}$ (resp. $r \in \mathbb{R}_+^\times - \sqrt{|k^\times|}$).*

Démonstration. Si U est un disque, il existe une couronne Z contenue dans U et aboutissant à l'unique bout ω de U . Le point x appartient à \overline{Z} ; lorsqu'on voit ω comme bout de Z , il converge vers x et le rayon extérieur modulo $|k^\times|$ de Z en ω est égal au rayon de U modulo $|k^\times|$. Il suffit par conséquent de démontrer 2).

On se place donc sous les hypothèse de 2). L'inclusion $|\mathcal{H}(x)^\times| \subset |k^\times|.r^{\mathbb{Z}}$, la description du type de x en fonction de r , et la quasi-lissité de X en x découlent de 3.6.14 et sq..

Supposons maintenant que k soit algébriquement clos, et soit $b \in \text{br}(X, x)_{\subset U}$ la branche définie par ω . Il existe une section coronaire Z de b et une fonction analytique f définie et inversible sur un voisinage ouvert de x contenant Z et telle que $f|_Z$ soit une fonction coordonnée de Z ; quitte à remplacer f par f^{-1} , on peut supposer que $|f|$ croît dans la direction de x . On peut par ailleurs restreindre Z de sorte qu'elle soit une sous-couronne de U aboutissant à ω . Le rayon extérieur de U modulo $|k^\times|$ en ω est alors égal à celui de Z , qui coïncide avec la limite de $|f|$ dans la direction de ω . Or cette limite vaut précisément $|f(x)|$. Par conséquent $r = |f(x)|$ modulo $|k^\times|$, ce qui entraîne que $r \in |\mathcal{H}(x)^\times|$ et établit l'inclusion $|k^\times|.r^{\mathbb{Z}} \subset |\mathcal{H}(x)^\times|$, achevant ainsi la démonstration. \square

Ablation et adjonction de sommets

Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse et soit S une triangulation de X ; on note Γ le squelette de S .

(5.1.16) Soit $x \in S$; posons $\Sigma = S \setminus \{x\}$, notons Γ_0 la composante connexe de $\Gamma - \Sigma$ contenant x . Les composantes connexes de $X - \Sigma$ sont d'une part Γ_0^b , d'autre part les composantes connexes de $X \setminus S$ dont le bord ne contient pas x . Comme toute composante connexe de $\Gamma \setminus S$ est relativement compacte dans Γ , le graphe Γ_0 est relativement compact dans Γ , et Γ_0^b est par conséquent un ouvert relativement compact de X . Il s'ensuit que Σ est une triangulation de X si et seulement si Γ_0^b est un disque virtuel ou une couronne virtuelle.

Supposons que ce soit le cas. Cela implique que Γ_0 possède un ou deux bouts. Comme S contient tous les nœuds de Γ , il en contient tous les sommets, ce qui implique que Γ_0 ne possède aucun sommet à l'exception éventuelle de x . Il y a donc maintenant deux possibilités.

(5.1.16.1) *Le cas où Γ_0 possède deux bouts.* C'est alors un intervalle ouvert, dont l'adhérence dans Γ est ou bien un cercle se refermant sur un élément de S , ou bien un intervalle compact joignant deux éléments de S . Notons β_+ et β_- les deux branches de Γ_0 issues de x

Si Γ_0^b est une couronne virtuelle alors Γ_0 est son squelette; le point x appartient à l'intérieur analytique de X , est de genre 0, et vérifie les égalités

$$\mathfrak{s}(\beta_+) = \mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(\beta_-) = \mathfrak{s}(\Gamma_0^{\text{an}}).$$

Réciproquement, supposons que x appartienne à l'intérieur analytique de X , qu'il soit de genre 0, et que $\mathfrak{s}(\beta_+) = \mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(\beta_-)$; comme de plus le point x possède un voisinage dans Γ qui est un intervalle ouvert, ce n'est pas un nœud de Γ ; comme $\Gamma_0 \cap S = \{x\}$, l'intervalle Γ_0 ne contient aucun nœud de Γ . Par ailleurs, Γ_0 est d'adhérence compacte dans Γ ; le 5.1.12.3 assure alors que Γ_0^b est une couronne virtuelle.

(5.1.16.2) *Le cas où Γ_0 possède un bout.* C'est alors un intervalle semi-ouvert dont x est l'extrémité, et dont le bord dans Γ consiste en un point y de S qui diffère de x . Comme $\Gamma_0 \cap S = \{x\}$, l'intervalle $]y; x[$ ne contient aucun nœud de Γ ; par conséquent, $]y; x[^b$ est une couronne virtuelle (5.1.12.3). On note b (resp. β) la branche issue de y (resp. issue de x) et définie par $]y; x[$.

Supposons que Γ_0 soit un disque virtuel; le point x appartient alors à l'intérieur analytique de X et est de genre 0, et l'on a $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(]y; x[^b) = \mathfrak{s}(\Gamma_0^b)$ (4.5.14.2). L'on dispose par ailleurs de deux plongements naturels $\mathfrak{s}(\Gamma_0^b) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ et $\mathfrak{s}(x) \hookrightarrow \mathfrak{s}(\beta) = \mathfrak{s}(]y; x[^b)$; comme $\mathfrak{s}(\Gamma_0^b) = \mathfrak{s}(]y; x[^b)$, on a $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(\beta)$.

Réciproquement, supposons que x appartienne à l'intérieur analytique de x , soit de genre 0, et que $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(\beta)$. Nous allons montrer que Γ_0^b est un disque virtuel.

Les composantes connexes de $\Gamma_0^b \setminus \{x\}$ sont d'une part $]y; x[^b$, d'autre part des composantes connexes de $X - \Gamma$, et donc des disques virtuels. Il s'ensuit que $\mathfrak{s}(\Gamma_0^b) = \mathfrak{s}(x)$ (4.5.14.3); notons F ce corps et choisissons-en un k -plongement dans $\widehat{k^a}$. L'espace Γ_0^b est une courbe F -analytique; elle est sans bord, car le bord analytique de X est contenu dans $S \setminus \{x\}$ qui ne rencontre pas Γ_0^b .

La courbe $\widehat{k^a}$ -analytique $\Gamma_0^b \widehat{\otimes}_F \widehat{k^a}$ est connexe, et x a un et un seul antécédent $x_{\widehat{k^a}}$ sur celle-ci. Les composantes connexes de $\Gamma_0^b \widehat{\otimes}_F \widehat{k^a} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$ sont d'une part des $\widehat{k^a}$ -disques, d'autre part les composantes connexes de $]y; x[^b \widehat{\otimes}_F \widehat{k^a}$; comme $F = \mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(\beta) = \mathfrak{s}(]y; x[^b)$, l'espace $]y; x[^b \widehat{\otimes}_F \widehat{k^a}$ est en fait connexe, et est donc une $\widehat{k^a}$ -couronne. Prolongeons-la en un $\widehat{k^a}$ -disque; on obtient une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse, connexe, compacte et sans bord; elle s'identifie dès lors à \mathcal{X}^{an} pour une certaine $\widehat{k^a}$ -courbe projective, intègre et lisse \mathcal{X} . Le point $x_{\widehat{k^a}}$ est un point de genre 0 de \mathcal{X}^{an} , et $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$ est réunion disjointe de disques. Il résulte alors du lemme 4.4.24 que $\mathcal{X} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$; par construction, $\Gamma_0^b \widehat{\otimes}_F \widehat{k^a}$ s'identifie à une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{\eta\}$ pour un $\eta \in \mathcal{X}_{[2,3]}^{\text{an}}$; c'est donc un disque, et Γ_0^b est bien un disque virtuel.

(5.1.16.3) *Récapitulation.* Le sous-ensemble $S \setminus \{x\}$ est donc une triangulation si et seulement si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- $x \notin \partial X^{\text{an}}$ et est de genre 0;

- Γ_0 est un intervalle ouvert, ou bien un intervalle semi-ouvert d'extrémité x ;
- $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(\beta)$ pour toute branche β de Γ_0 issue de x .

Remarquons que la dernière condition est automatiquement vérifiée lorsque k est algébriquement clos.

(5.1.17) Soit maintenant x un point de $X_{[2,3]} \setminus S$; nous allons montrer qu'il existe une plus petite triangulation de X contenant $S \cup \{x\}$, et la décrire.

(5.1.17.1) *Le cas où $x \in \Gamma$.* Il est alors situé sur une composante connexe I de $\Gamma \setminus S$, qui est un intervalle ouvert d'adhérence compacte dans X . Soient I_+ et I_- les deux composantes connexes de $I \setminus \{x\}$. Les composantes connexes de $X - (S \cup \{x\})$ sont d'une part les composantes connexes de $X \setminus S$ ne contenant pas x , d'autre part les ouverts I_+^b et I_-^b de X . Chacun des intervalles I_- et I_+ est d'adhérence compacte dans Γ (puisque c'est le cas de I) et ne contient aucun nœud de Γ (puisque ceux-ci appartiennent tous à S). Il en résulte que I_+^b et I_-^b sont deux couronnes virtuelles (5.1.12.3) relativement compactes ; par conséquent, $S \cup \{x\}$ est une triangulation de X .

(5.1.17.2) *Le cas où $x \notin \Gamma$.* Soit y l'image de x sur Γ par la rétraction canonique ; la réunion Γ' de Γ et de $[x; y]$ est admissible, donc analytiquement admissible (5.1.6.2). Soit S' la réunion de S et de l'ensemble des nœuds de Γ' .

Le point y appartient à S' . En effet, c'est évident s'il appartient à S ; sinon, ce n'est pas un nœud, et *a fortiori* pas un sommet de Γ ; il y a donc deux branches de Γ , et partant trois branches de Γ' , issues de y , ce qui implique que y est un sommet, et *a fortiori* un nœud, de Γ' ; il appartient en conséquence à S' . Notons par ailleurs qu'un point de Γ différent de y est un nœud de Γ' si et seulement si c'est un nœud de Γ ; par conséquent, $S' \cap \Gamma = S \cup \{y\}$.

Le point x est un sommet, et donc un nœud, de Γ' ; il appartient de ce fait à S' . Si $z \in]x; y[$ alors $z \notin \Gamma$; par conséquent, z est situé sur un disque virtuel ; c'est donc un point de genre zéro appartenant à l'intérieur analytique de X ; de plus, ce n'est pas un sommet de Γ' . Il s'ensuit que z est un nœud de Γ' si et seulement si il vérifie la condition 3) du 5.1.12.

L'application $z \mapsto [\mathfrak{s}(z) : k]$ étant semi-continue inférieurement (5.1.12), l'ensemble de ses points de discontinuité sur $]x; y[$ est fini. Il s'ensuit, compte tenu de ce qui précède, qu'il existe une suite $y = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$ de points de $]y; x]$ tels que $S' = S \cup \{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$.

L'ensemble S' est une partie fermée et discrète de Γ' qui en contient tous les nœuds ; si J est une composante connexe de $\Gamma' \setminus S'$ alors J est ou bien un intervalle de la forme $]x_i; x_{i+1}[$ avec $0 \leq i \leq n - 1$, ou bien est contenue dans une composante connexe de $\Gamma \setminus S$; dans les deux cas, J est un intervalle ouvert d'adhérence compacte dans Γ' . On en conclut que S' est une triangulation de X , contenant par construction $S \cup \{x\}$.

Si Σ est une triangulation de X contenant $S \cup \{x\}$ alors le graphe de Σ contient Γ' ; par conséquent, Σ contient S' . Ainsi, S' apparaît comme la plus petite triangulation de X contenant $S \cup \{x\}$.

(5.1.17.3) On conserve les hypothèses et notations du 5.1.17.2 ; faisons quelques remarques.

Première remarque. Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Il découle de la construction ci-dessus si $j \geq 1$ et du 5.1.17.1 si $j = 0$ que $S \cup \{x_i\}_{0 \leq i \leq j}$ est la plus petite triangulation de X contenant $S \cup \{x_j\}$.

On en déduit aisément que si Σ est une triangulation quelconque contenant S telle que $\Sigma \setminus S$ soit fini, il existe une suite finie $S = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_m = \Sigma$ de triangulations de X telles que $S_{i+1} \setminus S_i$ soit un singleton pour tout entier $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Seconde remarque. Si k est algébriquement clos la fonction $z \mapsto [\mathfrak{s}(z) : k]$ est constante (et égale à 1) sur Γ' ; par conséquent, la suite (x_i) est réduite à deux termes, à savoir $x_0 = y$ et $x_1 = x$. Ainsi, S' coïncide dans ce cas avec $S \cup \{y, x\}$.

Description du squelette analytique dans le cas algébriquement clos

(5.1.18) Proposition. *Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique génériquement quasi-lisse et soit U un ouvert relativement compact de X dont le bord analytique est vide, dont le bord topologique est contenu dans $X_{[2,3]}$, et qui ne contient aucun point singulier. L'ouvert U est un disque (resp. une couronne) si et seulement si U est un arbre à un bout (resp. à deux bouts) ne contenant aucun point de genre strictement positif.*

Démonstration. Dans les deux cas, les implications directes sont évidentes; il reste à montrer les réciproques. On suppose donc que U est un arbre ayant un ou deux bouts, sans point de genre strictement positif et sans point singulier. Quitte à remplacer X par son lieu quasi-lisse (qui contient U par hypothèse, ainsi que ∂U car ce dernier est contenu dans $X_{[2,3]}$), on peut alors supposer que X elle-même est quasi-lisse.

Soit S le bord topologique de U dans X (il comprend un ou deux éléments). Fixons une triangulation T de X qui contient S , et soit Γ son squelette.

Supposons que $T \cap U$ soit non vide; dans ce cas $\Gamma \cap U$ est non vide. Si x est un point unibranche de $\Gamma \cap U$ alors $x \in T$. En vertu des hypothèses faites sur U le point x est de genre zéro, et n'appartient pas à $\partial^{\text{an}} X$. Il résulte alors de 5.1.16.3 que $T \setminus \{x\}$ est encore une triangulation de X , et elle contient S par construction; en recommençant l'opération autant de fois qu'il est nécessaire, on se ramène au cas où $\Gamma \cap U$ ne contient plus aucun point unibranche. On distingue maintenant deux cas.

(5.1.18.1) *Supposons que $\Gamma \cap U = \emptyset$. Dans ce cas U est une composante connexe de $X - \Gamma$; comme Γ est analytiquement admissible, U est disque.*

(5.1.18.2) *Supposons que $\Gamma \cap U \neq \emptyset$. Comme Γ contient S et rencontre U , l'adhérence de $\Gamma \cap U$ dans la compactification arboricole \widehat{U} (adhérence qui s'identifie à $(\widehat{\Gamma \cap U})$) n'est pas réduite à un singleton; comme $(\widehat{\Gamma \cap U})$ est par ailleurs un arbre compact et fini, il contient au moins deux points unibranches, dont aucun ne peut par hypothèse appartenir à U . Comme ∂U possède au plus deux éléments, on déduit de ce qui précède qu'il en possède exactement deux, qui sont les points unibranches de $(\widehat{\Gamma \cap U})$; autrement dit, U est un arbre à deux bouts et $\Gamma \cap U$ est l'intervalle ouvert qui les joint, c'est-à-dire encore $S(U)$.*

L'intersection $T \cap U$ est un ensemble fini. Si $x \in T \cap U$, les hypothèses faites sur U assurent que x est de genre zéro, et n'appartient pas à $\partial^{\text{an}} X$; il résulte alors de 5.1.16.3 que $T \setminus \{x\}$ est encore une triangulation de X , et elle contient S par construction. En recommençant l'opération autant de fois qu'il est nécessaire, on se ramène au cas où $T \cap U = \emptyset$. L'ouvert U apparaît alors comme une composante connexe de $X \setminus T$; par définition d'une triangulation, et compte-tenu du fait que U est un arbre à deux bouts, il s'ensuit que U est une couronne. \square

(5.1.19) Théorème. *Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique génériquement quasi-lisse connexe et non vide et soit Θ le sous-ensemble fermé et discret de X constitué des points x possédant l'une au moins des trois propriétés suivantes :*

- x est singulier ;
- $g(x) > 0$;
- $x \in \partial^{\text{an}} X$.

1) *Si $S(X)$ est non vide et si r désigne la rétraction canonique de X sur $S(X)$, alors $S^{\text{an}}(X)$ est la réunion de $S(X)$ et des segments $[x; r(x)]$ pour x parcourant Θ .*

2) *Si X est un arbre à un bout ω alors $S^{\text{an}}(X)$ est égal à la réunion des $[x; \omega[$ pour x parcourant Θ .*

3) *Si X est un arbre compact, $S^{\text{an}}(X)$ est la réunion des segments $[x; y]$ pour x et y parcourant Θ .*

Démonstration. Dans chacune des situations 1), 2), et 3), on souhaite montrer l'égalité entre $S^{\text{an}}(X)$ et un certain sous-ensemble \mathcal{E} de X (dont la définition dépend du cas considéré), qui possède les propriétés suivantes :

- il est convexe (cela découle des définitions) ;
- il est tracé sur $X_{[0,2,3]}$, en vertu de la convexité de ce dernier, du fait que $\Theta \subset X_{[0,2,3]}$, et du fait que $S(X) \subset X_{[0,2,3]}$ puisque tout point non rigide de type 1 ou 4 de X est unibranche.

De plus, l'ensemble \mathcal{E} est un sous-graphe fermé de X . En effet, cela résulte dans le cas 1) de 1.5.15.3, dans le cas 2) de la proposition 1.4.10, et dans le cas 3) du fait que \mathcal{E} est alors une réunion finie de segments. Ce sous-graphe est admissible dès qu'il est non vide : dans le cas 1), c'est parce que \mathcal{E} est un sous-graphe convexe et fermé de X contenant son sous-graphe admissible $S(X)$; dans les cas 2) et 3), c'est une conséquence de 1.5.2.

(5.1.19.1) *Le squelette analytique $S^{\text{an}}(X)$ contient \mathcal{E} . C'est dû au fait qu'il contient $S(X) \cup \Theta$, qu'il est convexe, et est admissible s'il est non vide (ce dernier point ne sert que dans le cas 2) – il garantit alors que si $S^{\text{an}}(X)$ est non vide il aboutit à ω d'après 1.5.2).*

(5.1.19.2) *Le sous-graphe convexe \mathcal{E} de X contient $S^{\text{an}}(X)$. Soit $x \in X \setminus \mathcal{E}$; nous allons montrer que x possède un voisinage ouvert dans X qui est un disque, ce qui assurera que $x \notin S^{\text{an}}(X)$ et achèvera la démonstration.*

Supposons tout d'abord que \mathcal{E} est non vide; il est dès lors admissible, et la composante connexe U de $X \setminus \mathcal{E}$ est en conséquence un arbre à un bout relativement compact; soit t l'unique point de son bord. Comme $\mathcal{E} \supset \Theta$, l'ouvert U ne contient aucun point de $\partial^{\text{an}} X$ ni aucun point de genre strictement positif. Soit $b \in \text{br}(X, t)$ la branche définie par $[x; t]$. Il existe $s \in]x; t[$ tel

que $]s, t[^b$ soit une section coronaire de b ; soit $s' \in]s; t[$ et soit U' la composante connexe de $X \setminus \{s'\}$ contenant s . Par construction, U' est un arbre à un bout relativement compact de bord $\{s'\}$, qui ne contient aucun point de $\partial^{\text{an}} X$ ni aucun point de genre strictement positif. Comme s' est situé sur le squelette d'une couronne, il est de type 2 ou 3, et la proposition 5.1.18 ci-dessus assure que U' est un disque (si $t \in X_{[2,3]}$ on peut montrer directement par un argument analogue que U est un disque).

Supposons maintenant que \mathcal{E} est vide. La courbe X est alors un arbre ou bien compact, ou bien à un bout. Si elle est compacte, elle ne peut être réduite à $\{x\}$ (sinon x serait de type 3 et appartiendrait à $\partial^{\text{an}} X$, et donc à \mathcal{E}) et possède donc au moins un point y différent de x et non unibranche, donc de type 2 ou 3.

Si X est un arbre à un bout ω , on choisit un point y sur $]x; \omega[$; comme y est non unibranche, il est de type 2 ou 3.

Dans les deux cas, la composante connexe U de $X \setminus \{y\}$ contenant x est un arbre à un bout relativement compact. Comme \mathcal{E} est vide, U ne contient aucun point appartenant à $\partial^{\text{an}} X$, aucun point de genre strictement positif, ni aucun potin singulier; la proposition 5.1.18 ci-dessus assure alors que U est un disque. \square

(5.1.20) Corollaire. *Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique génériquement quasi-lisse. Si x est un point unibranche de $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ alors ou bien x est de genre strictement positif, ou bien il est singulier, ou bien il appartient à $\partial^{\text{an}} X$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème 5.1.19 ci-dessus, et du fait que $\mathbf{S}(X)$ n'a pas de points unibranches. \square

5.2 Triangulations et cohomologie étale

Une suite exacte

(5.2.1) Soit X une courbe k -analytique, et soit π le morphisme du site étale $X_{\text{ét}}$ vers le site topologique X_{top} .

(5.2.1.1) Pour tout q , le foncteur $\mathbf{R}^q \pi_*$ admet la description explicite suivante : il associe à un faisceau \mathcal{F} sur $X_{\text{ét}}$ le faisceau sur X_{top} associé au préfaisceau $U \mapsto \mathbf{H}^q(U_{\text{ét}}, \mathcal{F})$.

(5.2.1.2) Soit \mathcal{F} un faisceau sur $X_{\text{ét}}$. La dimension topologique de X étant égale à 1 (prop. 1.5.24), la suite spectrale

$$\mathbf{H}^p(X_{\text{top}}, \mathbf{R}^q \pi_* \mathcal{F}) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$$

induit pour tout entier p une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^1(X_{\text{top}}, \mathbf{R}^{p-1} \pi_* \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}^p(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}^0(X_{\text{top}}, \mathbf{R}^p \pi_* \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

(5.2.1.3) En prenant $p = 1$, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^1(X_{\text{top}}, \pi_* \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}^1(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}^0(X_{\text{top}}, \mathbf{R}^1 \pi_* \mathcal{F}) \rightarrow 0,$$

qui est la seule que nous aurons à considérer ici. Nous allons maintenant expliquer comment l'on peut, grâce à l'interprétation explicite des trois groupes en jeu et des flèches entre iceux, en démontrer l'existence directement, sans référence à la machinerie cohomologique générale.

(5.2.1.4) Un élément de $H^1(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$ peut s'interpréter comme une classe d'isomorphie de \mathcal{F} -torseurs (sur $X_{\text{ét}}$).

Un élément de $H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mathcal{F})$ peut s'interpréter comme une classe de familles $(\mathcal{T}_x)_{x \in X}$, où \mathcal{T}_x est pour tout x un germe de \mathcal{F} -torseur en x , et où il existe pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert U de x et un \mathcal{F} -torseur \mathcal{S} sur U tel que $\mathcal{T}_y = \mathcal{S} \times_U (X, y)$ pour tout $y \in U$; le terme «classe» fait référence à la relation suivante : on identifie $(\mathcal{T}_x)_x$ et $(\mathcal{S}_x)_x$ si les germes \mathcal{T}_x et \mathcal{S}_x sont isomorphes pour tout x .

Un élément de $H^1(X_{\text{top}}, \pi_*\mathcal{F})$ peut s'interpréter comme une classe d'isomorphie de $\pi_*\mathcal{F}$ -torseurs (sur X_{top}); notons que $\pi_*\mathcal{F}$ n'est autre que la restriction de \mathcal{F} à X_{top} .

(5.2.1.5) Soit \mathcal{T} un $\pi_*\mathcal{F}$ -torseur. Le produit contracté $\mathcal{T}' := \pi^*\mathcal{T} \times^{\pi^*\pi_*\mathcal{F}}\mathcal{F}$ est un \mathcal{F} -torseur; cette construction induit un morphisme de $H^1(X_{\text{top}}, \pi_*\mathcal{F})$ dans $H^1(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$ qui est celui de 5.2.1.3.

Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X , muni d'une famille

$$(\sigma_i : \mathcal{T}|_{U_i} \simeq \pi_*\mathcal{F}|_{U_i})_i$$

de trivialisations. À cette donnée est associée un cocycle (h_{ij}) à coefficients dans $\pi_*\mathcal{F}$. La famille $(\sigma_i : \mathcal{T}|_{U_i} \simeq \pi_*\mathcal{F}|_{U_i})_i$ induit une famille de trivialisations $(\sigma'_i : \mathcal{T}'|_{U_i} \simeq \mathcal{F}|_{U_i})_i$, et le cocycle correspondant est «égal» à (h_{ij}) (rappelons que $\pi_*\mathcal{F}(U_i \cap U_j) = \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ pour tout (i, j)). On en déduit que pour tout ouvert U de X , la flèche naturelle $\mathcal{T}(U) \rightarrow \mathcal{T}'(U)$ est un isomorphisme (les deux ensembles admettent en effet la même description au moyen du cocycle (h_{ij}) et des groupes $\pi_*\mathcal{F}(U_i \cap U) = \mathcal{F}(U_i \cap U)$). On a en particulier $\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}'(X)$; par conséquent, $\mathcal{T}(X) \neq \emptyset \iff \mathcal{T}'(X) \neq \emptyset$, ce qui signifie que $H^1(X_{\text{top}}, \pi_*\mathcal{F}) \rightarrow H^1(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$ est injective.

(5.2.1.6) Soit \mathcal{S} un \mathcal{F} -torseur. La famille $(\mathcal{S} \times_X (X, x))_x$ satisfait les conditions énoncées au 5.2.1.4; cette construction induit un morphisme de $H^1(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$ dans $H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mathcal{F})$, qui est celui de 5.2.1.3.

Soit \mathcal{T} un $\pi_*\mathcal{F}$ -torseur; on a vu au 5.2.1.5 ci-dessus que le \mathcal{F} -torseur $\mathcal{T}' := \pi^*\mathcal{T} \times^{\pi^*\pi_*\mathcal{F}}\mathcal{F}$ est trivialisé par un recouvrement ouvert de X (il suffit de prendre un recouvrement ouvert trivialisant \mathcal{T}); en conséquence, le germe $\mathcal{T}' \times_X (X, x)$ est trivial pour tout $x \in X$.

Réciproquement, soit \mathcal{S} un \mathcal{F} -torseur tel que $\mathcal{S} \times_X (X, x)$ soit trivial pour tout $x \in X$. Il existe alors un recouvrement ouvert (U_i) de X , et pour tout i une trivialisations $\sigma_i : \mathcal{T}|_{U_i} \simeq \mathcal{F}|_{U_i}$. Celle-ci induit un cocycle (h_{ij}) subordonné à (U_i) et à coefficients dans \mathcal{F} , que l'on peut voir comme à coefficients dans $\pi_*\mathcal{F}$ puisque $\pi_*\mathcal{F}(U_i \cap U_j) = \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ pour tout (i, j) . Ce cocycle (h_{ij}) définit donc un $\pi_*\mathcal{F}$ -torseur \mathcal{T} , et l'on a $\mathcal{S} \simeq \pi^*\mathcal{T} \times^{\pi^*\pi_*\mathcal{F}}\mathcal{F}$ (cf. 5.2.1.5).

En conséquence, la suite de 5.2.1.3 est exacte en $H^1(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$.

(5.2.1.7) Soit $(\mathcal{F}_x)_x$ une famille de germes de \mathcal{F} -torseurs, comme au 5.2.1.4. Choisissons un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X et pour tout i un \mathcal{F} -torseur \mathcal{F}_i sur U_i tel que $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}_i \times_X (X, x)$ pour tout $x \in U_i$.

Comme X est paracompact de dimension topologique ≤ 1 , on peut quitte à raffiner (U_i) supposer qu'il est localement fini, puis que les intersections trois à trois des U_i sont vides. Par ailleurs, étant paracompact, l'espace X est normal; il existe donc un recouvrement ouvert (V_i) de X tel que $\bar{V}_i \subset U_i$ pour tout i . On choisit un ordre total sur l'ensemble I des indices.

Soit $x \in X$. Il y a au moins un, et au plus deux, éléments $i \in I$ tels que $x \in U_i$. Choisissons un voisinage ouvert W_x de x dans X ayant les propriétés suivantes.

- On a $W_x \subset V_i$ pour tout i tel que $x \in V_i$, et $W_x \subset U_i$ pour tout i tel que $x \in U_i$.
- Pour tout i tel que $x \notin U_i$ l'intersection de W_x et \bar{V}_i est vide.
- Si $x \in U_i \cap U_j$ avec $i < j$, il existe un isomorphisme $\sigma_x : \mathcal{F}_i|_{W_x} \simeq \mathcal{F}_j|_{W_x}$.

Pour tout $x \in X$ on choisit un indice $i(x)$ tel que $x \in V_{i(x)}$. Le but de ce qui suit est de montrer l'existence d'un système compatible (ι_{xy}) d'isomorphismes autorisant le recollement des toseurs $\mathcal{F}_{i(x)}|_{W_x}$ lorsque x parcourt X .

Soient x et y deux points de X tels que $W_x \cap W_y \neq \emptyset$. On distingue deux cas.

- Si $i(x) = i(y)$ on pose $\iota_{xy} = \text{Id}_{\mathcal{F}_{i(x)}|_{W_x \cap W_y}}$.
- Supposons maintenant $i(x) \neq i(y)$. Comme W_y rencontre $W_x \subset V_{i(x)}$, on a $y \in U_{i(x)}$, et de même $x \in U_{i(y)}$. En conséquence, les points x et y appartiennent tous deux à $U_{i(x)} \cap U_{i(y)}$. On pose alors $\iota_{xy} = \sigma_x|_{W_x \cap W_y}$ si $i(x) < i(y)$, et $\iota_{xy} = \sigma_y^{-1}|_{W_x \cap W_y}$ sinon.

Il reste à s'assurer que le système (ι_{xy}) ainsi construit satisfait les relations dites de cocycle. Soient donc x, y et z trois points de X tels que $W_x \cap W_y \cap W_z \neq \emptyset$. Par ce qui précède, $x \in U_{i(x)} \cap U_{i(y)} \cap U_{i(z)}$; il s'ensuit que deux au moins des trois indices $i(x), i(y)$ et $i(z)$ sont égaux. La relation souhaitée découle alors immédiatement de la définition de ι_{xy}, ι_{yz} et ι_{xz} .

Soit \mathcal{S} le \mathcal{F} -torseur obtenu par recollement des $\mathcal{F}_{i(x)}|_{W(x)}$ le long du système (ι_{xy}) . On a par construction $\mathcal{S} \times_X (X, x) = \mathcal{F}_{i(x)} \times_{U_{i(x)}} (X, x) \simeq \mathcal{F}_x$ pour tout $x \in X$.

On en déduit que $H^1(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mathcal{F})$ est surjective, ce qui achève la preuve «concrète» de l'exactitude de la suite de 5.2.1.3.

Calcul de $H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ *via* une triangulation lorsque le corps de base est algébriquement clos

On fixe un entier ℓ premier à p .

(5.2.2) Soit X une courbe \widehat{k}^a -analytique. On a d'après 5.2.1.3 une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow H^1(X_{\text{top}}, \mu_\ell) \rightarrow H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell) \rightarrow H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mu_\ell) \rightarrow 0.$$

On en déduit que si $H^1(X_{\text{top}}, \mu_\ell) = 0$ (ce qui équivaut à demander que l'entier ℓ soit égal à 1 ou que toute composante connexe de X soit un arbre),

la flèche naturelle de $H^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ vers $H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mu_\ell)$ est un isomorphisme. C'est notamment le cas lorsque X est un disque ou une couronne.

(5.2.3) Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique lisse, soit S une triangulation de x et soit Γ le squelette de S .

Pour tout $x \in S$, on note $g(x)$ le genre de x , et l'on définit le groupe $\mathbb{J}(x)$ comme suit :

- si x est de type 3 alors $\mathbb{J}(x)$ est trivial ;
- si x est de type 2 alors $\mathbb{J}(x) =_\ell \mathcal{J}(\widehat{k_1^a})$, où \mathcal{J} est la jacobienne de la courbe résiduelle en x .

Dans tous les cas, $\mathbb{J}(x)$ est isomorphe (non canoniquement en général) à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g(x)}$.

(5.2.4) Théorème. On conserve les notations du 5.2.3 ci-dessus. On dispose d'une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow \prod_{x \in S} \mathbb{J}(x) \rightarrow H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mu_\ell) \rightarrow \text{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Avant d'entamer la preuve proprement dite, nous allons fixer quelques notations.

(5.2.4.1) Soit U un ouvert de X qui est un arbre, et soit h une section de $R^1\pi_*\mu_\ell$ définie sur un ouvert de X contenant U . Il résulte de 5.2.2 que $h|_U$ peut être vue comme une «vraie» classe de cohomologie appartenant à $H^1(U_{\text{ét}}, \mu_\ell)$. Considérons maintenant deux cas particuliers importants.

- Si U est un disque, $H^1(U_{\text{ét}}, \mu_\ell) = 0$ (prop. 4.4.20 et remarque 4.4.21) ; en conséquence, $h|_U = 0$.
- Si U est une couronne, $H^1(U_{\text{ét}}, \mu_\ell) = \text{Kum}_\ell(X)$ (th. 4.4.23). Fixons une orientation o sur U ; ce choix induit un isomorphisme

$$\sigma_{(U,o)} : H^1(U_{\text{ét}}, \mu_\ell) = \text{Kum}_\ell(X) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}.$$

On écrira par abus $\sigma_{(U,o)}(h)$ au lieu de $\sigma_{(U,o)}(h|_U)$.

(5.2.4.2) Soit $x \in X_{[2,3]}$ et soit $a \in \text{br}(X, x)$. La fibre de $R^1\pi_*\mu_\ell$ en x s'identifie à $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$.

Si h est une section de $R^1\pi_*\mu_\ell$ de germe h_x en x , l'élément $\theta_a(h_x) \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ qui a été défini au 4.4.8.1 sera simplement noté $\theta_a(h)$.

Si Z est une section coronaire de a contenue dans l'ouvert de définition de h , et si o désigne l'orientation de Z vers x on déduit de la définition de l'invariant θ_a , et du fait que $\text{Kum}_\ell(Z) \simeq \text{Kum}_\ell(Z')$ pour toute sous-couronne Z' de Z , que $\theta_a(h) = \sigma_{(Z,o)}(h)$.

(5.2.4.3) Soit $x \in X_{[2,3]}$ et soit U un voisinage ouvert de x . On note $G(x)$ le sous-groupe de $H^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ formé des germes de classes qui admettent un représentant supporté par $\{x\}$.

Notons que si $\alpha \in G(x)$ et si U est un voisinage ouvert de x alors α admet un représentant *sur* U qui est supporté par $\{x\}$: il suffit de choisir un représentant de α sur un voisinage ouvert U_0 de $\{x\}$ qui est supporté par $\{x\}$, et de le prolonger par zéro.

(5.2.4.4) Soit $x \in S$. Notons Π_x l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus \Gamma$ dont le bord est égal à $\{x\}$. Pour toute branche $a \in \text{br}(X, x)_{\subset \Gamma}$ on choisit un intervalle ouvert I_a contenu dans Γ , aboutissant proprement à x et définissant a ; quitte à restreindre les I_a , on peut les supposer deux à deux disjoints. La réunion

$$U_x := \{x\} \amalg \left(\prod_{V \in \Pi_x} V \right) \amalg \left(\prod_{a \in \text{br}(X, x)_{\subset \Gamma}} I_a^b \right)$$

est un voisinage ouvert connexe de x .

(5.2.4.5) *Construction d'un morphisme de $H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mu_\ell)$ vers $\text{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.* Soit $h \in H^1(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mu_\ell)$, et soit (I, o) un intervalle ouvert non vide et orienté contenu dans $\Gamma \setminus S$. Notons $c_h(I, o)$ l'élément $\sigma_{(I^b, o)}(h)$ de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Par construction, c_h est une $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -cochaîne sur (Γ, S)

Montrons que c est harmonique. Soit $x \in S$ et soit $a \in \text{br}(X, x)$ une branche qui n'est pas contenue dans Γ . Elle est dans ce cas contenue dans une composante connexe V de $X \setminus \Gamma$, qui est un disque. Choisissons une section coronaire Z de a contenue dans V . On a $h|_V = 0$ (5.2.4.1), et *a fortiori* $h|_Z = 0$. En conséquence, $\theta_a(h) = 0$ (5.2.4.2).

Comme $x \notin \partial X$ (la courbe X est lisse, et en particulier sans bord), il résulte de ce qui précède et de la proposition 4.4.10, et plus précisément de l'implication ii) \Rightarrow iii) qui figure dans son énoncé, que

$$\sum_{a \in \text{br}(X, x)} \theta_a(h) = 0.$$

Mais puisqu'on a vu que $\theta_a(h) = 0$ dès que a n'est pas contenue dans Γ , il vient $\sum_{a \in \text{br}(X, x)_{\subset \Gamma}} \theta_a(h) = 0$. On déduit alors de la définition de c_h et de 5.2.4.2 que c_h est harmonique.

(5.2.4.6) *Surjectivité de la flèche $H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mu_\ell) \rightarrow \text{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.* Soit c une cochaîne harmonique sur Γ à coefficients dans $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

Soit I un intervalle ouvert non vide contenu dans $\Gamma \setminus S$. La classe $\sigma_{(I^b, o)}^{-1}(c(I, o))$ ne dépend pas de l'orientation o ; notons-la h_I . Si J est un intervalle ouvert non vide contenu dans I alors $h_{I|J} = h_J$.

Comme la cochaîne c est harmonique, il résulte de la proposition 4.4.10, et plus précisément de l'implication iii) \Rightarrow i) de son énoncé, qu'il existe une classe h^x appartenant à $H^1(U_{x, \text{ét}}, \mu_\ell)$ ayant les propriétés suivantes :

- pour tout $V \in \Pi$, on a $h^x|_V = 0$;
- pour tout $a \in \text{br}(X, x)_{\subset \Gamma}$, la restriction de h^x à I_a^b est égale à h_{I_a} .

Par construction, les classes h^x (pour x parcourant S) et h_{I^b} (pour I parcourant $\pi_0(\Gamma \setminus S)$) se recollent en une section h de $R^1\pi_*\mu_\ell$ sur X , dont l'image dans $\text{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est égale à c .

(5.2.4.7) *Noyau de la flèche $H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mu_\ell) \rightarrow \text{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.* Soit h une classe appartenant à $H^0(X_{\text{top}}, R^1\pi_*\mu_\ell)$ telle que $c_h = 0$ et soit V une composante connexe de $\Gamma \setminus S$. On a $h|_V = 0$: si V est un disque cela résulte de 5.2.4.1, et si V est une couronne c'est une conséquence de la nullité de c_h . Il s'ensuit :

- que la classe h est uniquement déterminée par la famille de germes $(h_x)_{x \in S}$;
- que chacun des h_x appartient au groupe $G(x)$ des classes gratte-ciel.

On a ainsi construit une injection

$$\text{Ker} [\mathbb{H}^0(X_{\text{top}}, \mathbb{R}^1 \pi_* \mu_\ell) \rightarrow \text{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})] \hookrightarrow \prod_{x \in S} G(x).$$

Montrons qu'elle est surjective. Soit $(\alpha_x) \in \prod_{x \in S} G(x)$. Il existe pour tout $x \in S$ une section \bar{h}^x de $\mathbb{R}^1 \pi_* \mu_\ell$ sur l'ouvert $(X \setminus S) \cup \{x\}$ de X de support contenu dans $\{x\}$. Les classes \bar{h}^x pour x parcourant S se recollent en une section globale $h \in \mathbb{H}^0(X_{\text{top}}, \mathbb{R}^1 \pi_* \mu_\ell)$. On a par construction d'une part $h|_{(X \setminus S)} = 0$, ce qui implique immédiatement que $c_h = 0$; et d'autre part $h_x = \alpha_x$ pour tout x . Ainsi,

$$\text{Ker} [\mathbb{H}^0(X_{\text{top}}, \mathbb{R}^1 \pi_* \mu_\ell) \rightarrow \text{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})] \simeq \prod_{x \in S} G(x).$$

Soit $x \in S$ et soit $h \in \mathbb{H}^1((X, x)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$. Il résulte de 4.4.9 que $h \in G(x)$ si et seulement si $\theta_a(h) = 0$ pour tout $a \in \text{br}(X, x)$. On en déduit, en vertu de l'assertion 2) de la proposition 4.4.10, que le groupe $G(x)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{J}(x)$, ce qui achève la démonstration. \square

(5.2.5) On en déduit, compte-tenu de la suite exacte de 5.2.2 et du fait que l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow X$ est une équivalence homotopique, l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathbb{H}^1(X_{\text{top}}, \mu_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{H}^1(\Gamma, \mu_\ell) & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathbb{H}^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \prod_{x \in S} \mathbb{J}(x) & \longrightarrow & \mathbb{H}^0(X_{\text{top}}, \mathbb{R}^1 \pi_* \mu_\ell) & \longrightarrow & \text{Harm}(\Gamma, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

dont la ligne du bas et la colonne sont exactes.

(5.2.6) Supposons maintenant que X est non vide, propre et connexe. Elle s'identifie alors à l'analytifiée \mathcal{X}^{an} d'une $\widehat{k^a}$ -courbe algébrique projective, irréductible et lisse \mathcal{X} ; soit g son genre.

Soit β le premier nombre de Betti du graphe Γ , qui est aussi celui de l'espace topologique X . On déduit du 5.2.5 ci-dessus que le groupe de ℓ -torsion $\mathbb{H}^1(X_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ est (non canoniquement en général) isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2\beta+2\sum_{x \in S} g(x)}$. On sait par ailleurs en vertu de GAGA qu'il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$.

Ceci vaut pour tout entier ℓ premier à p (et donc en particulier pour au moins un entier $\ell \neq 1$). Compte-tenu du fait que tout point de $X_{[2,3]} \setminus S$ est de genre 0, il vient

$$g = \beta + \sum_{x \in S} g(x) = \beta + \sum_{x \in X_{[2]}} g(x).$$

5.3 Extension des scalaires

Premières propriétés

(5.3.1) Soit X une courbe k -analytique, soit S un sous-ensemble de $X_{[0,2,3]}$ et soit L une extension complète de k . Nous noterons $S_{[L]}$ le sous-ensemble de X_L égal à la réunion des ensembles finis $x_{[L]}$ pour $x \in S$ (pour une définition de $x_{[L]}$, cf. 3.2.14); l'image de $S_{[L]}$ sur X est égale à S . Nous allons énoncer quelques propriétés élémentaires de la formation de $S_{[L]}$ que nous utiliserons librement par la suite.

(5.3.1.1) Si L est presque algébrique sur k , l'ensemble $S_{[L]}$ est simplement l'image réciproque de S sur X_L (3.2.15.3).

(5.3.1.2) Si L' est une extension complète de L alors $S_{[L']} = (S_{[L]})_{[L']}$ (3.2.15.2).

(5.3.1.3) Écrivons $L \otimes_k \mathfrak{s}(X)$ comme un produit fini $\prod L_i$ d'extensions finies séparables de L . On a alors $X_L = \coprod X \times_{\mathfrak{s}(X)} L_i$, et il résulte de 3.2.15.5 que $S_{[L]}$ est la réunion disjointe des $S_{[L_i]}$ (où $S_{[L_i]} \subset X \times_{\mathfrak{s}(X)} L_i$ est défini pour tout i en voyant X comme espace $\mathfrak{s}(X)$ -analytique).

(5.3.1.4) Soit $x \in X$. L'ensemble $x_{[L]}$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des idéaux maximaux de $L \otimes_k \mathfrak{s}(x)$ (corollaire 4.3.16).

(5.3.2) Soit X une k -couronne virtuelle. Le sous-ensemble $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)_{[L]}$ de X_L est égal à $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_L)$.

En effet, soit F une extension complète de k composée de L et $\widehat{k^a}$. Comme $\widehat{k^a}$ est une extension presque algébrique de k , le sous-ensemble $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)_{[\widehat{k^a}]}$ de $X_{\widehat{k^a}}$ coïncide avec l'image réciproque de $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ sur $X_{\widehat{k^a}}$, à savoir $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}})$.

Puisque la courbe $X_{\widehat{k^a}}$ est une $\widehat{k^a}$ -couronne, il résulte de 3.2.15.1 que $(\mathbf{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}}))_{[F]}$ est égal à $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_F)$; son image sur X_L est donc égale à $\mathbf{S}^{\text{an}}(X_L)$. Par ailleurs,

$$(\mathbf{S}^{\text{an}}(X_{\widehat{k^a}}))_{[F]} = (\mathbf{S}^{\text{an}}(X)_{[\widehat{k^a}]})_{[F]} = \mathbf{S}^{\text{an}}(X)_{[F]} = (\mathbf{S}^{\text{an}}(X)_{[L]})_{[F]},$$

et son image sur X_L est donc égale à $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)_{[L]}$; il vient $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)_{[L]} = \mathbf{S}^{\text{an}}(X_L)$, comme annoncé.

(5.3.3) Soit $x \in X_{[23]}$; on a alors $g(y) = g(x)$ pour tout $y \in x_{[L]}$. En effet, soit F le complété d'une clôture algébrique d'une extension complète composée de L et $\widehat{k^a}$, soit $y \in x_{[L]}$, soit $z \in y_{[F]}$, et soit t l'image de z sur $X_{\widehat{k^a}}$; le point t appartient à $x_{[\widehat{k^a}]}$.

Par définition, $g(t) = g(x)$. D'après le corollaire 4.3.15, le point z est l'unique antécédent de t sur X_F , et le corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}}(z)$ s'identifie au corpoïde des fractions de $\widetilde{\mathcal{H}}(t) \otimes_{\widetilde{k}^a} \widetilde{F}$. On distingue maintenant deux cas.

(5.3.3.1) *Supposons que x est de type 2.* Dans ce cas t est de type 2 aussi, et il résulte de ce qui précède que $\widetilde{\mathcal{H}}(z)$ est le corps des fractions de $\widetilde{\mathcal{H}}(t)_1 \otimes_{\widetilde{k}_1^a} \widetilde{F}_1$; en conséquence, on a $g(z) = g(t) = g(x)$.

(5.3.3.2) *Supposons que x est de type 3.* Dans ce cas $g(x) = 0$, le point t est également de type 3, et $\widetilde{\mathcal{H}}(t)$ est de la forme $\widetilde{k}^a(\tau)$ pour un certain élément τ transcendant sur \widetilde{k}^a , dont le degré n'appartient pas à $|\widehat{k}^{a^\times}|$. Le corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}}(t)$ est alors égal à $\widetilde{F}(\tau)$, l'élément τ restant transcendant sur \widetilde{F} . Si le degré de τ appartient à $|F^\times|$, le point t est de type 2 et $\widetilde{\mathcal{H}}(t)_1 = (\widetilde{F}(\tau))_1$ est transcendant pur sur \widetilde{F}_1 , ce qui implique que $g(t) = 0$; si le degré de τ n'appartient pas à $|F^\times|$, le point t est de type 3 et $g(t) = 0$ par définition.

(5.3.3.3) Dans tous les cas, on a $g(t) = g(x)$; comme F est le complété d'une clôture algébrique de L et comme y est un antécédent de $x_{[L]}$ sur X_F , il vient $g(x_{[L]}) = g(t) = g(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

(5.3.4) Proposition. *Soit X une courbe k -analytique et soit $x \in X_{[0,2,3]}$. Soit U une composante connexe de $X \setminus \{x\}$. Le bord de U_L dans X_L est alors contenu dans $x_{[L]}$.*

Démonstration. Soit $\pi: X_L \rightarrow X$ la flèche canonique. Nous allons commencer par un certain nombre de réductions.

(5.3.4.1) Soit k^{parf} le complété d'une clôture parfaite de k , et soit L' une extension complète de k composée de L et k^{parf} . Les applications continues naturelles $X_{k^{\text{parf}}} \rightarrow X$ et $X_{L'} \rightarrow X_L$ sont des homéomorphismes, et l'on a

$$x_{[L']} = (x_{[k^{\text{parf}}]})_{[L']} = (x_{[L]})_{[L']}.$$

On peut donc, en remplaçant k par k^{parf} , x par $x_{[k^{\text{parf}}]}$ et L par L' , se ramener ainsi au cas où k est parfait.

L'assertion requise étant insensible aux phénomènes de nilpotence, on peut alors remplacer X par X_{red} , et donc la supposer réduite; elle est dès lors génériquement quasi-lisse.

(5.3.4.2) Choisissons une famille $(Z_b)_{b \in \text{br}(X,x) \subset U}$ où chaque Z_b est une section coronaire de b contenue dans U . Le fermé $V := \overline{U} \setminus \coprod Z_b$ de U est fermé dans X . Il s'ensuit que le bord de U_L dans X_L est contenu dans $\bigcup_b \partial Z_{b,L} \cap \pi^{-1}(x)$. Fixons b et écrivons Z au lieu de Z_b . Par ce qui précède, il suffit pour conclure de prouver que $\partial Z_L \cap \pi^{-1}(x) \subset x_{[L]}$.

(5.3.4.3) *Supposons que x est un point rigide.* Dans ce cas $x_{[L]} = \pi^{-1}(x)$ et il n'y a rien à démontrer.

(5.3.4.4) *Supposons que $x \in X_{[23]}$.* Choisissons un voisinage affinoïde V de x dans X et une fonction analytique f sur V telle que $|f(x)| \neq 0$ et telle que $\langle f(x) \rangle_b < 1$. Le morphisme $\varphi: V \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ définit une présentation d'Abhyankar de x ; on a $\varphi(x) = \eta_r$, où $r = |f(x)|$. Par construction, $\varphi(b)$

est la branche issue de η_r et contenue dans l'ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par la condition $|T| < r$.

D'après la proposition 4.3.11, il existe une section coronaire Z' de b et une section coronaire Z'' de $\varphi(b)$ telles que φ induise un morphisme fini et plat de Z' sur Z'' ; quitte à restreindre Z' et Z'' , on peut supposer que Z'' est décrite par une inégalité de la forme $s < |T| < r$ pour un certain $s \in]0; r[$, et que Z' est une sous-couronne virtuelle de Z .

Soit y un point de $\overline{Z_L}$ situé au-dessus de x ; son image t sur $\mathbb{A}_L^{1,\text{an}}$ est située au-dessus de η_r .

Le point y appartient à l'adhérence d'une composante connexe Y de Z_L , et partant à $\mathbb{S}^{\text{an}}(Y)$. Soit Y' la sous-couronne virtuelle $Y \times_Z Z'$ de Y . Comme le point x n'est pas adhérent à $\mathbb{S}^{\text{an}}(Z) \setminus \mathbb{S}^{\text{an}}(Z')$, le point y n'est pas adhérent à $\mathbb{S}^{\text{an}}(Y) \setminus \mathbb{S}^{\text{an}}(Y')$, et il appartient en conséquence à $\mathbb{S}^{\text{an}}(Y')$. On en déduit que $t \in \mathbb{S}^{\text{an}}(Z'_L) = [\eta_{s,L}; \eta_{r,L}]$. Mais puisque t est situé au-dessus de η_r , il vient $t = \eta_{r,L}$, et y appartient de ce fait à $x_{[L]}$. \square

Les composantes qui apparaissent sont des disques virtuels

(5.3.5) Théorème. *Soit X une courbe k -analytique génériquement quasi-lisse et soit $x \in X_{[0,2,3]}$. Soit L une extension complète de k , et soit $\pi: X_L \rightarrow X$ la flèche canonique. L'ouvert $X_L \setminus x_{[L]}$ de X_L est réunion disjointe d'une part des composantes connexes de $(X \setminus \{x\})_L$, d'autre part de disques virtuels relativement compacts tous contenus dans $\pi^{-1}(x)$.*

Démonstration. Si x est un point rigide $x_{[L]} = \pi^{-1}(x)$ et l'assertion est évidente. Supposons maintenant que $x \in X_{[2,3]}$. Soit U une composante connexe de $X \setminus \{x\}$. Il résulte de la proposition 5.3.4 que le bord de U_L est contenu dans $x_{[L]}$; par conséquent, U_L est une réunion de composantes connexes de $X_L \setminus x_{[L]}$.

On en déduit que $X_L \setminus x_{[L]}$ est réunion disjointe des composantes connexes de $(X \setminus \{x\})_L$, et de ses composantes connexes contenues dans $\pi^{-1}(x)$. Il s'agit maintenant de montrer que ces dernières sont toutes des disques virtuels relativement compacts. Soit donc V une telle composante.

(5.3.5.1) Réduction à un cas particulier plus simple. Choisissons un voisinage affinoïde W de x dans X tel que $\mathfrak{s}(W) = \mathfrak{s}(x)$. Écrivons $L \otimes_k \mathfrak{s}(W) = \coprod L_i$, où les L_i sont des extensions finies séparables de L ; on a alors $W_L = \coprod W \times_{\mathfrak{s}(W)} L_i$, et $x_{[L]}$ possède un et un seul élément sur chaque $W \times_{\mathfrak{s}(W)} L_i$. La composante connexe V étant contenue dans $\pi^{-1}(x)$, elle est nécessairement incluse dans $W \times_{\mathfrak{s}(W)} L_i$ pour un certain i . En remplaçant X par W , en considérant ce dernier comme un espace $\mathfrak{s}(W)$ -analytique et en remplaçant k par $\mathfrak{s}(W)$ et L par L_i , on se ramène au cas où $\mathfrak{s}(X) = \mathfrak{s}(x) = k$. Cette dernière condition assure que $x_{[F]}$ est un singleton pour toute extension complète F de k . Par abus, son unique élément sera encore noté $x_{[F]}$.

Soit L' le complété d'une clôture algébrique de L ; on fixe un k -plongement isométrique $\widehat{k^a} \hookrightarrow L'$. Le point $x_{[L']}$ est l'unique antécédent de $x_{[L]}$ sur $X_{L'}$, et $V_{L'}$ est donc une union de composantes connexes de $X_{L'} \setminus x_{[L']}$. Elle est contenue dans l'image réciproque de x par la flèche $X_{L'} \rightarrow X$, et donc dans l'image réciproque de $x_{[\widehat{k^a}]}$ par la flèche $X_{L'} \rightarrow X_{\widehat{k^a}}$, car $x_{[\widehat{k^a}]}$ est l'unique

antécédent de x sur $X_{\widehat{k^a}}$. Il suffit pour conclure de montrer que $V_{L'}$ est une union disjointe de disques relativement compacts de $X_{L'}$.

En vertu de ce qui précède on peut, en remplaçant k par $\widehat{k^a}$, x par $x_{[\widehat{k^a}]}$, L par L' et V par une composante connexe de $V_{L'}$, se ramener au cas où k et L sont algébriquement clos.

Comme V est contenue dans $\pi^{-1}(x)$, on peut si besoin restreindre ou agrandir X autour de x . Puisque X est génériquement quasi-lisse, elle est quasi-lisse au voisinage de x , ce qui autorise à la restreindre de sorte que $X \setminus \{x\}$ soit une union disjointe de disques ouverts relativement compacts et d'un nombre fini de couronnes ouverte de bord $\{x\}$.

En prolongeant chacune de ces dernières en un disque, on obtient une courbe analytique propre, lisse, connexe et non vide; on peut ainsi finalement supposer qu'il existe une k -courbe projective, irréductible et lisse \mathcal{X} telle que $X = X^{\text{an}}$ et telle que $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus x$ soit réunion disjointe de disques.

(5.3.5.2) Soit g le genre de \mathcal{X} . Par construction, $\{x\}$ est une triangulation de \mathcal{X}^{an} . On déduit de 5.2.6 que $g(x) = g$.

D'après 5.3.3, on a $g(x_{[L]}) = g(x) = g$. Comme le genre de \mathcal{X}_L est égal à g , il résulte de 5.2.6 que $\mathcal{X}_L^{\text{an}}$ ne possède aucune boucle (comme $\mathcal{X}_L^{\text{an}}$ est par ailleurs compacte, connexe et non vide puisque \mathcal{X}_L est projective et irréductible, $\mathcal{X}_L^{\text{an}}$ est un arbre compact), et que $g(y) = 0$ pour tout $y \in (\mathcal{X}_L^{\text{an}})_{[23]} \setminus x_{[L]}$.

Puisque $\mathcal{X}_L^{\text{an}}$ est un arbre compact, V est un arbre à un bout relativement compact; puisque $x_{[L]} \notin V$, la composante V ne contient aucun point de genre > 0 . L'unique point $x_{[L]}$ de ∂V étant de type 2 ou 3, il résulte de la proposition 5.1.18 que V est un disque, ce qui achève la démonstration. \square

(5.3.6) Corollaire. Soit X une courbe k -analytique et soit $x \in X_{[0,2,3]}$. Soit L une extension complète de k , et soit $\pi: X_L \rightarrow X$ la flèche canonique. L'ouvert $X_L \setminus x_{[L]}$ de X_L est réunion disjointe d'une part des composantes connexes de $(X \setminus \{x\})_L$, d'autre part d'arbres à un bout relativement compacts tous contenus dans $\pi^{-1}(x)$.

Démonstration. Soit k^{parf} le composé d'une clôture parfaite de k , et soit L' une extension complète de k composée de L et k^{parf} . Les flèches naturelles $X_{k^{\text{parf}}} \rightarrow X$ et $X_{L'} \rightarrow X_L$ sont des homéomorphismes de réciproques respectives $x \mapsto x_{[k^{\text{parf}}]}$ et $x \mapsto x_{[L']}$, et l'on a $x_{[L']} = (x_{[k^{\text{parf}}]})_{[L']} = (x_{[L]})_{[L']}$ pour tout $x \in X$. On peut dès lors, en remplaçant k par k^{parf} , x par son unique antécédent sur $X_{k^{\text{parf}}}$, et L par L' , se ramener au cas où k est parfait. L'assertion requise étant insensible aux phénomènes de nilpotence, on peut remplacer X par X_{red} , et donc la supposer réduite, et partant génériquement quasi-lisse. Le corollaire est alors une conséquence immédiate du théorème 5.3.5. \square

Effets sur les sous-graphes et sur les triangulations

(5.3.7) Théorème. Soit X une courbe k -analytique, soit Γ un fermé de $X_{[0,2,3]}$ et soit L une extension complète de k . Soit $\pi: X_L \rightarrow X$ la flèche canonique.

- i) Le sous-ensemble $\Gamma_{[L]}$ de X_L est fermé.

- ii) Les composantes connexes de $X_L \setminus \Gamma_{[L]}$ sont exactement les ouverts U de X satisfaisant l'une des deux assertions suivantes, exclusives l'une de l'autre.
- a) L'ouvert U est une composante connexe de $(X \setminus \Gamma)_L$.
 - b) L'ouvert U est contenu dans $\pi^{-1}(x)$ pour un certain $x \in \Gamma_{[23]}$ et est une composante connexe de $X_L \setminus x_{[L]}$; c'est alors un arbre à un bout relativement compact, et un disque virtuel si X est génériquement quasi-lisse.
- iii) Si Γ est un sous-graphe (resp. un sous-graphe localement fini) de X alors $\Gamma_{[L]}$ est un sous-graphe (resp. un sous-graphe localement fini) de X_L ; la surjection $\Gamma_{[L]} \rightarrow \Gamma$ est ouverte, et est un homéomorphisme si k est algébriquement clos.
- iv) Si Γ est un sous-graphe localement fini de X , l'application continue $\Gamma_{[L]} \rightarrow \Gamma$ est une isométrie par morceaux.
- v) Si X est génériquement quasi-lisse et si Γ est un sous-graphe de X , il est analytiquement admissible si et seulement si le sous-graphe $\Gamma_{[L]}$ de X_L est analytiquement admissible.

Démonstration. Nous allons commencer par démontrer à la fois les assertions i) et ii).

(5.3.7.1) *Preuve de i) et ii).* Par définition, l'ensemble $X_L \setminus \Gamma_{[L]}$ est la réunion disjointe de l'ouvert $(X \setminus \Gamma)_L$ et des $\pi^{-1}(x) \setminus x_{[L]}$ pour x parcourant Γ . Or il résulte du théorème 5.3.5 et de son corollaire 5.3.6 que pour tout $x \in X_{[0,2,3]}$, l'ensemble $\pi^{-1}(x) \setminus x_{[L]}$ est la réunion disjointe de composantes connexes de $X_L \setminus x_{[L]}$, chacune d'elle étant un arbre à un bout relativement compact, et un disque virtuel si X est génériquement quasi-lisse.

On déduit de ce qui précède que $X_L \setminus \Gamma_{[L]}$ est un ouvert de X_L , dont les composantes connexes sont précisément les ouverts décrits en ii); on a ainsi démontré i) et ii).

(5.3.7.2) *Preuve de iii).* Commençons par une remarque. Si k est algébriquement clos, $x_{[L]}$ est un singleton pour tout $x \in X_{[0,2,3]}$, et la surjection continue $\Gamma_{[L]} \rightarrow \Gamma$ est dès lors injective.

L'assertion iii) étant locale sur X , on peut supposer ce dernier compact. Soit L' le complété d'une clôture algébrique de L ; fixons un k -plongement isométrique de $\widehat{k^a}$ dans L' . Supposons que Γ soit un sous-graphe (resp. un sous-graphe fini-) de X . Le compact $\Gamma_{[\widehat{k^a}]}$ de $X_{\widehat{k^a}}$ est l'image réciproque de Γ sur $X_{\widehat{k^a}}$, et est donc en vertu du corollaire 1.9.20 un sous-graphe (resp. un sous-graphe fini) de $X_{\widehat{k^a}}$.

D'après l'assertion i) déjà établie, $(\Gamma_{[\widehat{k^a}]})_{[L']}$ est un compact de $X_{L'}$. Puisque $\widehat{k^a}$ est algébriquement clos, la surjection continue de $\Gamma_{[L']} = (\Gamma_{[\widehat{k^a}]})_{[L']}$ vers $\Gamma_{[\widehat{k^a}]}$ est bijective par la remarque ci-dessus, et elle induit donc par compacité un homéomorphisme entre ses source et but; le compact $\Gamma_{[L']}$ est en conséquence un sous-graphe (resp. un sous-graphe fini) de $X_{L'}$. Comme L' est une extension presque algébrique de L , le compact $\Gamma_{[L']} = (\Gamma_{[L]})_{[L']}$ est l'image réciproque de $\Gamma_{[L]}$ sur $X_{L'}$, et $\Gamma_{[L]}$ s'identifie au quotient de $\Gamma_{[L']}$ par l'action de

Galois. On déduit alors du théorème 1.9.11 que $\Gamma_{[L]}$ est un sous-graphe (resp. un sous-graphe fini) de X_L .

Soit Δ un ouvert de $\Gamma_{[L]}$. Son image réciproque $\Delta_{[L']}$ sur $\Gamma_{[L']}$ est un ouvert de ce dernier; comme la flèche $\Gamma_{[L']} \rightarrow \Gamma_{[\widehat{k^a}]}$ est un homéomorphisme, elle identifie $\Delta_{[L']}$ à un ouvert Ω de $\Gamma_{[\widehat{k^a}]}$; l'application $\Gamma_{[\widehat{k^a}]} \rightarrow \Gamma$ étant un quotient, elle induit une surjection de Ω sur un ouvert Ω' de Γ . Par surjectivité de $\Gamma_{[L']} \rightarrow \Gamma_{[L]}$, l'image de Δ sur Γ est égale à Ω' .

Ainsi, la surjection $\Gamma_{[L]} \rightarrow \Gamma$ est ouverte. Si k est algébriquement clos, on a signalé plus haut qu'elle est bijective, et c'est donc un homéomorphisme (soit parce qu'elle est ouverte comme on vient de le voir, soit par compacité).

(5.3.7.3) Preuve de iv). Soit F l'extension complète de k composée de L et k^{parf} . Les flèches naturelles $X_{k^{\text{parf}}} \rightarrow X$ et $X_F \rightarrow X_L$ sont des homéomorphismes de réciproques respectives $x \mapsto x_{[k^{\text{parf}]}}$ et $x \mapsto x_{[L]}$ qui préservent les toises canoniques, et l'on a $x_{[L']} = (x_{[k^{\text{parf}]})_{[L']} = (x_{[L]})_{[L']}$ pour tout $x \in X$. On peut dès lors, en remplaçant k par k^{parf} , Γ par $\Gamma_{[k^{\text{parf}]}$ et L par F , se ramener au cas où k est parfait. L'assertion requise étant insensible aux phénomènes de nilpotence, on peut remplacer X par X_{red} , et donc la supposer réduite, et partant génériquement quasi-lisse.

Choisissons un ensemble fermé et discret S de points de Γ tel que $\Gamma \setminus S$ soit réunion disjointe d'intervalles ouverts, et soit S' une triangulation de X contenant S . Soit Γ' le squelette de S . Il contient Γ , et il suffit pour conclure de montrer que $\Gamma'_{[L]} \rightarrow \Gamma'$ est une isométrie par morceaux. Soit I une composante connexe de $\Gamma' \setminus S$; c'est un intervalle ouvert et I^b est une couronne virtuelle. On peut alors écrire I^b_L comme une union disjointe finie $\coprod Y_i$ de couronnes virtuelles. On a $I_{[L]} = \coprod \mathbf{S}^{\text{an}}(Y_i)$, et l'invariance du module des couronnes virtuelles entraîne que $\mathbf{S}^{\text{an}}(Y_i) \rightarrow \mathbf{S}^{\text{an}}(I^b) = I$ est une isométrie pour tout i , ce qui achève de montrer iv).

(5.3.7.4) Preuve de v). Supposons Γ analytiquement admissible et soit U une composante connexe de $X \setminus \Gamma_{[L]}$. D'après l'assertion ii) déjà établie, on est dans l'un des deux cas suivants.

- *Premier cas.* L'ouvert U est une composante connexe de $(X \setminus \Gamma)_L$. C'est alors une composante connexe de V_L pour une certaine composante connexe V de $X \setminus \Gamma$; comme Γ est analytiquement admissible, V est un disque virtuel relativement compact, et U est donc également un disque virtuel relativement compact.

- *Second cas.* L'ouvert U est contenu dans l'image réciproque de x pour un certain $x \in \Gamma$, et est un disque virtuel relativement compact.

Ainsi, U est dans tous les cas un disque virtuel relativement compact, et $\Gamma_{[L]}$ est analytiquement admissible.

Réciproquement, supposons que $\Gamma_{[L]}$ est analytiquement admissible, et soit V une composante connexe de $X \setminus \Gamma$. Toujours d'après ii), V_L est une union disjointe de composantes connexes de $X_L \setminus \Gamma_{[L]}$, qui sont des disques virtuels relativement compacts puisque $\Gamma_{[L]}$ est analytiquement admissible. On en déduit que V est un disque virtuel relativement compact, et Γ est dès lors analytiquement admissible. \square

(5.3.8) Théorème. *Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique et soit L une extension complète de K . L'application continue compacte canonique $X_L \rightarrow X$ est une équivalence homotopique, et $H_c^i(X_{top}, \Lambda) \rightarrow H_c^i(X_{L,top}, \Lambda)$ est un isomorphisme pour tout $i \in \{0, 1\}$ et tout groupe abélien Λ .*

Démonstration. Fixons un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible Γ de X . Le théorème 5.3.7 assure que $\Gamma_{[L]}$ est un sous-graphe analytiquement admissible de X_L et que $\Gamma_{[L]} \rightarrow \Gamma$ est un homéomorphisme. Le théorème provient alors du fait que X se rétracte par déformation sur Γ , que X_L se rétracte par déformation sur $\Gamma_{[L]}$, et que les rétractions $X \rightarrow \Gamma$ et $X_L \rightarrow \Gamma_{[L]}$ sont compactes. \square

(5.3.9) Théorème. *Soit X une courbe k -analytique génériquement quasi-lisse, soit S une partie fermée et discrète de $X_{[0,2,3]}$, et soit L une extension complète de k . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) S est une triangulation de X .

ii) $S_{[L]}$ est une triangulation de X_L , et pour toute composante connexe U de $X_L \setminus S_{[L]}$ qui est une couronne virtuelle, la restriction de $X_L \rightarrow X$ à $S^{\text{an}}(U)$ est injective.

Démonstration. Soit $\pi: X_L \rightarrow X$ la flèche canonique. On procède par double implication.

(5.3.9.1) Prouvons que $i) \Rightarrow ii)$. On suppose donc que S est une triangulation de X . Il est immédiat que $S_{[L]}$ est fermé et discret dans X_L (les fibres de $S_{[L]} \rightarrow S$ étant finies). Soit U une composante connexe de $X_L \setminus S_{[L]}$. D'après le théorème 5.3.7, on est dans l'un des deux cas suivants :

- U est contenu dans $\pi^{-1}(S)$, et U est un disque virtuel relativement compact ;
- U est une composante connexe de $(X \setminus S)_L$.

Supposons qu'on soit dans le second cas. Dans ce cas, U est une composante connexe de V_L pour une certaine composante connexe V de $X \setminus S$. Comme S est une triangulation, on distingue à nouveau deux cas :

- V est un disque virtuel relativement compact, auquel cas U est un disque virtuel relativement compact ;
- V est une couronne virtuelle relativement compacte ; dans ce cas, U est une couronne virtuelle relativement compacte, et $S^{\text{an}}(U) \rightarrow S^{\text{an}}(V)$ est un homéomorphisme.

Ainsi, $ii)$ est vérifiée.

(5.3.9.2) Prouvons que $ii) \Rightarrow i)$. On suppose donc que $S_{[L]}$ est une triangulation de X_L . Soit F le complété d'une clôture algébrique de L ; fixons un k -plongement isométrique de $\widehat{k^a}$ dans L .

Soit V une composante connexe de $X \setminus S$, et soit U une composante connexe de $V_{\widehat{k^a}}$. D'après l'implication $i) \Rightarrow ii)$ déjà établie, $S_{[F]}$ est une triangulation de X_F . Le théorème 5.3.7 assure que V_F est une union disjointe de composantes connexes de $X_F \setminus S_{[F]}$. Par conséquent, l'ouvert U_F est une composante connexe de $X_F \setminus S_{[F]}$, et il y a deux cas à distinguer.

Premier cas : U_F est un disque virtuel relativement compact dans X_F . Dans ce cas, U est relativement compact dans $X_{\widehat{k^a}}$, et le théorème 5.3.8 assure que U est un arbre à un bout. Soit x l'unique point de ∂U_F . Son image y sur X_F est l'unique point de ∂U , et on a nécessairement $x = y_{[F]}$. Comme U_F est un disque, x est de type 2 ou 3 ; puisque $t \mapsto t_{[F]}$ préserve le rang des points d'Abhyankar, y est de rang 1, donc de type 2 ou 3. Enfin, puisque U_F est un disque virtuel, il ne contient aucun potin de genre > 0 ; par conséquent, U ne contient aucun point de genre > 0 . Il résulte alors de la proposition 5.1.18 que U est un disque. Par conséquent, V est un disque virtuel, relativement compact dans X puisque U est relativement compact dans $X_{\widehat{k^a}}$.

Second cas : U_F est une couronne virtuelle relativement compacte dans X_F . Il existe une composante connexe U' de V_L telle que U_F soit une composante connexe de U'_F ; d'après le théorème 5.3.7, U' est une composante connexe de $X_L \setminus S_{[L]}$. Comme U_F est une couronne virtuelle, U' est une couronne virtuelle.

Comme U_F est une couronne virtuelle, c'est un arbre à deux bouts relativement compact dans X_F , dont tout point du bord (qui en comprend au plus deux) est de type 2 ou 3, et qui ne contient aucun point de genre > 0 . Par un raisonnement analogue à celui suivi dans le premier cas, U est un arbre à deux bouts relativement compact dans $X_{\widehat{k^a}}$, dont tout point du bord est de type 2 ou 3, et qui ne contient aucun point de genre > 0 . Il résulte alors de la proposition 5.1.18 que U est une couronne. Pour montrer que V est une couronne virtuelle relativement compacte dans X , il suffit de vérifier que $S^{\text{an}}(U) \rightarrow V$ est injective.

D'après l'hypothèse ii), $S^{\text{an}}(U') \rightarrow V$ est injective ; par ailleurs, la flèche $S^{\text{an}}(U_F) \rightarrow S^{\text{an}}(U')$ est un homéomorphisme puisque U' est une couronne virtuelle, et $S^{\text{an}}(U_F) \rightarrow S^{\text{an}}(U)$ est un homéomorphisme car U est une couronne. On en déduit que $S^{\text{an}}(U) \rightarrow V$ est injective. \square

5.4 Triangulations minimales d'une courbe analytique quasi-lisse compacte

Triangulations des courbes de genre zéro

(5.4.1) Soit \mathcal{X} une k -courbe algébrique projective, lisse, géométriquement intègre de genre zéro. Comme $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ la courbe analytique $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ est un arbre, et \mathcal{X}^{an} est par conséquent un arbre.

(5.4.1.1) Soit $x \in \mathcal{X}_{[2,3]}^{\text{an}}$ tel que $\mathfrak{s}(x) = k$; le point x possède alors un unique antécédent $x_{\widehat{k^a}}$ sur $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$. La $\widehat{k^a}$ -courbe $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ étant isomorphe à $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$, son ouvert $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$ est réunion disjointe de disques ; par conséquent, $\{x_{\widehat{k^a}}\}$ est une triangulation de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$; il s'ensuit que $\{x\}$ est une triangulation de \mathcal{X}^{an} , évidemment minimale.

(5.4.1.2) Soit S une triangulation de \mathcal{X}^{an} , et soit Γ le squelette de la triangulation $S_{\widehat{k^a}}$ de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$; c'est un sous-graphe compact de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ qui est admissible ; c'est donc un arbre non vide. Si I est une arête de Γ , l'action de G n'échange pas les deux orientations de I (théorème 5.3.9) ; il en découle qu'il y a au moins un sommet de Γ (et donc au moins un point de $S_{\widehat{k^a}}$) qui est fixé par G

(1.9.8). De ce fait, il existe $x \in S$ tel que $\mathfrak{s}(x) = k$. Ainsi, les triangulations minimales de \mathcal{X}^{an} sont exactement les triangulations de la forme $\{x\}$, où x est un point de type 2 ou 3 tel que $\mathfrak{s}(x) = k$.

(5.4.1.3) Supposons qu'il existe ouvert V de X qui est un disque virtuel sur k (autrement dit, un disque virtuel géométriquement connexe). Il existe alors un ouvert W de V qui est une couronne virtuelle sur k (3.6.36.3). Si $y \in S(W)$ le point y appartient à $\mathcal{X}_{[2,3]}^{\text{an}}$ et $\mathfrak{s}(y) = k$; par conséquent, \mathcal{X}^{an} possède une infinité de triangulations minimales dont l'unique sommet est situé sur V ; si $|k^\times| \neq \{1\}$, elle en possède même une infinité dont l'unique sommet est situé sur V et est de type 2.

(5.4.2) Supposons que \mathcal{X}^{an} possède au moins deux triangulations minimales; sous cette hypothèse, il existe deux points x et x' distincts sur $\mathcal{X}_{[2,3]}^{\text{an}}$ et tels que $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(x') = k$. Le squelette de toute triangulation de \mathcal{X}^{an} contenant le squelette analytique de \mathcal{X}^{an} , celui-ci est inclus dans $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$ et est donc vide.

Réciproquement, supposons que le squelette analytique de \mathcal{X}^{an} soit vide. Choisissons une triangulation minimale de \mathcal{X}^{an} , c'est-à-dire un point x de \mathcal{X}^{an} de type 2 ou 3 de \mathcal{X}^{an} tel que $\mathfrak{s}(x) = k$. Le squelette analytique de \mathcal{X}^{an} étant vide, x a un voisinage V qui est un disque virtuel. Comme $\mathfrak{s}(x) = k$, on a nécessairement $\mathfrak{s}(V) = k$; il résulte alors de 5.4.1.3 que \mathcal{X}^{an} possède une infinité de triangulations minimales, et même, si $|k^\times| \neq \{1\}$, une infinité de triangulations minimales dont l'unique sommet est de type 2.

(5.4.3) Supposons maintenant que \mathcal{X}^{an} possède une unique triangulation minimale (ou encore une plus petite triangulation), c'est-à-dire un unique point x de type 2 ou 3 tel que $\mathfrak{s}(x) = k$. En vertu du 5.4.2 ci-dessus, le squelette analytique de \mathcal{X}^{an} est non vide; étant contenu dans le squelette de la triangulation $\{x\}$, il est égal à $\{x\}$.

Le point x est de type 2 : en effet s'il était de type 3 il posséderait un voisinage Z qui serait une couronne virtuelle telle que $x \in S(Z)$; comme $\mathfrak{s}(x) = k$ on aurait $\mathfrak{s}(Z) = k$ et donc $\mathfrak{s}(y) = k$ pour tout $y \in S(Z)$, ce qui fournirait une infinité de triangulations minimales de \mathcal{X}^{an} , contrairement à notre hypothèse.

Si V est une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$, c'est un arbre à un bout (puisque \mathcal{X}^{an} est un arbre) et donc un disque virtuel; comme \mathcal{X}^{an} ne possède qu'une triangulation minimale, V n'est pas géométriquement connexe (5.4.1.3).

(5.4.4) Inversement, soit x un point de \mathcal{X}^{an} de type 2 ou 3 tel que $\mathfrak{s}(x) = k$ et tel qu'aucune composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ ne soit géométriquement connexe; dans ce cas, tout point y de \mathcal{X}^{an} distinct de x appartient à un ouvert connexe de corps des constantes non trivial, ce qui entraîne que $\mathfrak{s}(y) \neq k$; il en résulte que $\{x\}$ est l'unique triangulation minimale de \mathcal{X}^{an} .

(5.4.5) Quelques exemples.

(5.4.5.1) La courbe $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ possède une infinité de triangulations minimales; par exemple si $a \in k$ et si $r > 0$ alors $\{\eta_{a,r}\}$ est une triangulation minimale de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$.

(5.4.5.2) Supposons que $p \neq 2$ et que \tilde{k} est parfait. Soit \mathcal{X} une k -conique non déployée. Il existe $\lambda \in k^\times$, $a \in k$ et un morphisme fini et plat $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, dont on

notera φ l'analytifié, tel que $\mathcal{X} \times_{\mathbb{P}_k^1} \mathbb{A}_k^1$ s'identifie à $\text{Spec } k[T, X]/(X^2 - \lambda(T^2 - a))$. Comme $\mathcal{X}(k) = \emptyset$, l'élément a de k n'est pas un carré. Posons $r = \sqrt{|a|}$.

Le point $\eta_{r, \widehat{k^a}}$ de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$ a un et un seul antécédent sur $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$. En effet, posons $\tau = T(\eta_{r, \widehat{k^a}})$ et $\alpha = \lambda(\tau^2 - a)$. On a $|\tau^2 - a| = |\tau^2| = |a| = r^2$. Par conséquent,

$$\widetilde{\alpha}_{\text{gr}} = \widetilde{\lambda}_{\text{gr}}((\widetilde{\tau}^r)^2 - \widetilde{a}^{r^2}).$$

Comme $\widetilde{\tau}^r$ est transcendant sur $\widetilde{k^a}_{\text{gr}}$ et engendre $\widetilde{\mathcal{H}}(\eta_{r, \widehat{k^a}})_{\text{gr}}$ (en tant qu'extension de $\widetilde{k^a}_{\text{gr}}$), comme $\widetilde{a}^{r^2} \neq 0$ et comme p est impair, $\widetilde{\alpha}_{\text{gr}}$ n'est pas un carré dans $\widetilde{\mathcal{H}}(\eta_{r, \widehat{k^a}})_{\text{gr}}$; par conséquent, α n'est pas un carré dans $\mathcal{H}(\eta_{r, \widehat{k^a}})$, d'où notre assertion.

Il s'ensuit que le point η_r de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ a un et un seul antécédent x sur \mathcal{X}^{an} , et que $\mathfrak{s}(x) = k$.

Aucune composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ n'est géométriquement connexe. En effet, soit V une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$; nous allons montrer qu'elle n'est pas géométriquement connexe. Comme x est le seul antécédent de η_r par φ , l'ouvert V est une composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$ pour une certaine composante connexe U de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}} \setminus \{\eta_r\}$. Si U n'est pas géométriquement connexe, l'assertion est claire.

Supposons que U soit géométriquement connexe, et montrons que U est un k -disque. Soit $\psi : \mathbb{P}_k^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ la flèche induite par la fonction T^2/a . Soit S la fonction coordonnée sur le but de ψ ; posons $\omega = \psi(\eta_r)$ et $\sigma = S(\omega)$. On a $|\sigma| = 1$ et $\widetilde{\sigma}_{\text{gr}} = (\widetilde{\tau}_{\text{gr}})^2/\widetilde{a}_{\text{gr}}$. Il en résulte : d'une part que $\widetilde{\sigma}_{\text{gr}}$ est transcendant sur $\widetilde{k}_{\text{gr}}$, et donc que $\omega = \eta_1$; d'autre part que $[\widetilde{\mathcal{H}}(\eta_r)_{\text{gr}} : \widetilde{\mathcal{H}}(\omega)_{\text{gr}}] \geq 2$. Comme ψ est lui-même de degré 2, on a en réalité $[\widetilde{\mathcal{H}}(\eta_r)_{\text{gr}} : \widetilde{\mathcal{H}}(\omega)_{\text{gr}}] = 2$ et donc $[\mathcal{H}(\eta_r) : \mathcal{H}(\omega)] = 2$.

Par conséquent, η_r est le seul antécédent de η_1 par ψ , et U est donc une composante connexe de $\psi^{-1}(U')$ pour une certaine composante connexe U' de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}} \setminus \{\eta_1\}$. Comme U est géométriquement connexe, U' est géométriquement connexe.

En tant que composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}} \setminus \{\eta_1\}$, l'ouvert U' est l'image réciproque d'un point fermé \mathbf{u} de \mathbb{P}_k^1 par la flèche de réduction. Le corps \widetilde{k} étant parfait, $\kappa(\mathbf{u})$ est une extension finie séparable de \widetilde{k} ; si L désigne l'extension non ramifiée de \widetilde{k} correspondant à une clôture galoisienne de $\kappa(\mathbf{u})$ alors la courbe $U' \times_k L$ possède $[\kappa(\mathbf{u}) : \widetilde{k}]$ composantes connexes. Comme U' est géométriquement connexe, il s'ensuit que $\kappa(\mathbf{u}) = \widetilde{k}$, et U' est de ce fait un k -disque.

Si U contient 0 ou ∞ alors U est un k -disque. Sinon, ψ est non ramifiée sur U et $U \rightarrow U'$ est donc un revêtement fini étale, de degré 1 ou 2. S'il est de degré 2 alors $U_{\widehat{k^a}} \rightarrow U'_{\widehat{k^a}}$ est un revêtement fini étale de degré 2; d'après la remarque 4.4.21), il est trivial, ce qui contredit la connexité géométrique de U ; par conséquent $U \rightarrow U'$ est de degré 1, et U est un k -disque.

Le seul point au-dessus duquel φ est ramifié est le point rigide de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ d'équation $T^2 - a = 0$. S'il appartenait à U alors U serait égal à l'ouvert de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$

défini par la condition $|T^2 - a| < r$, sur lequel a est un carré en vertu du lemme de Hensel, ce qui contredirait le caractère géométriquement connexe de U . Par conséquent, $V \rightarrow U$ est fini étale de degré 1 ou 2. Si ce degré valait 1 alors V serait un disque, et posséderait en particulier un k -point, ce qui est impossible puisque $\mathcal{X}(k) = \emptyset$. Le degré de $V \rightarrow U$ vaut donc 2; comme U est un disque, le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -torseur étale $V_{\widehat{k^a}} \rightarrow U_{\widehat{k^a}}$ est trivial (rem. 4.4.21), ce qui montre que V n'est pas géométriquement connexe.

Conclusion. On déduit de ce qui précède et du 5.4.4 que $\{x\}$ est l'unique triangulation minimale, ou encore la plus petite triangulation, de la courbe \mathcal{X}^{an} .

(5.4.5.3) Soit \mathcal{X} la \mathbb{Q}_2 -conique non triviale; il existe un morphisme fini et plat $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_2}^1$ tel que $\mathcal{X} \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_2}^1} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_2}^1$ s'identifie à $\text{Spec } \mathbb{Q}_2[T, X]/(X^2 + T^2 + 1)$. Pour tout $r > 0$ notons \mathbb{D}_r le \mathbb{C}_2 -disque centré en l'origine et de rayon r . Le rayon 2-adique de la série $\sqrt{1 + T^2}$ coïncide avec $\varepsilon := |2|$; par conséquent, si $r \in]\varepsilon; 1[$, le revêtement étale de \mathbb{D}_r obtenu par extraction d'une racine carrée de $1 + T^2$ est connexe; il en va de même de celui obtenu par extraction d'une racine carrée de $-1 \setminus T^2$, puisque (-1) est un carré dans \mathbb{C}_2 ; autrement dit, $\mathcal{X}_{\mathbb{C}_2}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}_2}^1} \mathbb{D}_r$ est connexe.

Soit $r \in]\varepsilon; 1[$; l'image réciproque du point η_{r, \mathbb{C}_2} de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_2}^{1, \text{an}}$ sur $\mathcal{X}_{\mathbb{C}_2}^{\text{an}}$ est alors un singleton, par un argument dû à de Jong. Supposons en effet que ce ne soit pas le cas; le revêtement $\mathcal{X}_{\mathbb{C}_2}^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}_2}^{1, \text{an}}$ serait dès lors trivial au-dessus de η_{r, \mathbb{C}_2} , donc au voisinage de η_{r, \mathbb{C}_2} , et *a fortiori* au-dessus d'une couronne décrite par une inégalité de la forme $r < |T| < s$ pour un certain $s > r$.

En recollant $\mathcal{X}_{\mathbb{C}_2}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}_2}^1} \mathbb{D}_s$ avec le revêtement trivial de l'ouvert de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_2}^{1, \text{an}}$ décrit par l'inégalité $|T| > r$, on obtiendrait un revêtement fini étale de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_2}^{2, \text{an}}$, nécessairement trivial en vertu de GAGA; mais l'image réciproque de \mathbb{D}_r sur ce revêtement s'identifierait à $\mathcal{X}_{\mathbb{C}_2}^{\text{an}} \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}_2}^1} \mathbb{D}_r$ qui est connexe, d'où une contradiction.

Par conséquent, si $r \in]\varepsilon; 1[$, le point η_r de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_2}^{1, \text{an}}$ a un et un seul antécédent x_r sur \mathcal{X}^{an} , et $\mathfrak{s}(x_r) = k$; ainsi \mathcal{X}^{an} possède-t-elle une infinité de triangulations minimales.

Courbes compactes de squelette analytique vide

(5.4.6) Soit X une courbe k -analytique compacte, non vide et géométriquement connexe; on fait de plus l'hypothèse que le squelette analytique de X est vide. On déduit des assertions i) et ii) du théorème 5.1.11 que X est lisse; étant par ailleurs compacte, X est propre et lisse et s'identifie donc à \mathcal{X}^{an} pour une certaine k -courbe algébrique projective, lisse et géométriquement intègre \mathcal{X} .

(5.4.7) *Étude de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$.* Comme tout point de \mathcal{X}^{an} a un voisinage qui est un disque virtuel, tout point de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ a un voisinage qui est un disque, et en particulier un arbre à un bout; il en résulte que $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ est un arbre compact. Soit ℓ un entier premier à p et soit $Y \rightarrow \mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur étale. Si $x \in \mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$, il possède un voisinage qui est un disque, et par conséquent déploie Y (rem. 4.4.21); étant déployé au voisinage de tout point de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$, le $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur étale Y est en réalité un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur *topologique*; comme $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ est un arbre, Y

est trivial. Combiné à GAGA, cela implique que $H^1(\mathcal{X}_{\widehat{k^a}, \text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$; par conséquent, $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$ et \mathcal{X} est de genre 0.

(5.4.8) Il en résulte, compte-tenu de 5.4.1, 5.4.1.1-5.4.1.3, 5.4.2 et 5.4.5.2, que si X est une courbe k -analytique compacte, non vide et géométriquement connexe les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) le squelette analytique de X est vide;
- ii) la courbe X est isomorphe à l'analytification d'une courbe algébrique projective, lisse et géométriquement intègre de genre 0, et il existe deux points distincts x et x' sur $X_{[2,3]}$ tels que $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(x') = k$;
- iii) la courbe X est isomorphe à l'analytification d'une courbe algébrique projective, lisse et géométriquement intègre de genre 0 et possède un ouvert qui est un disque virtuel géométriquement connexe.

(5.4.8.1) Si ces propriétés sont satisfaites, on déduit de 5.4.1.2 et 5.4.1.3 : que les triangulations minimales de X sont exactement les singletons de la forme $\{x\}$, où x est de type 2 ou 3 et vérifie l'égalité $\mathfrak{s}(x) = k$; et qu'il existe une infinité de telles triangulations et même, si $|k^\times| \neq \{1\}$, une infinité de telles triangulations dont l'unique sommet est de type 2.

(5.4.8.2) Lorsque \widetilde{k} est parfait et de caractéristique différente de 2, il découle de l'exemple traité au 5.4.5.2 que les trois propriétés équivalentes ci-dessus sont satisfaites si et seulement si $X \simeq \mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$; c'est également le cas, de façon évidente, lorsque que k est algébriquement clos.

(5.4.8.3) L'exemple 5.4.5.3 assure que si $k = \mathbb{Q}_2$ et si X est l'analytifiée de la k -conique projective non triviale (d'équation homogène $T_0^2 + T_1^2 + T_2^2 = 0$) alors X satisfait les trois propriétés équivalentes ci-dessus.

(5.4.9) Remarque. Si Γ est un sous-graphe de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$ alors Γ est analytiquement admissible si et seulement si Γ est un sous-arbre non vide ou bien non réduit à un point, ou bien de la forme $\{x\}$ avec x de type 2 ou 3.

En effet, supposons Γ analytiquement admissible; il est alors admissible et est donc un sous-arbre non vide de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$; et s'il est réduit à un point x , il résulte de 3.6.39 *et sq.* que x est de type 2 ou 3.

Réciproquement, si Γ est du type requis, alors il est admissible et contient au moins un point x de type 2 ou 3 (lorsque Γ n'est pas réduit à un point, il suffit de prendre pour x n'importe quel point pluribranche de Γ). Mais $\{x\}$ est un sous-arbre analytiquement admissible de $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$, ce qui implique que Γ lui-même est analytiquement admissible.

Les nœuds du squelette analytique

(5.4.10) Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse, soit x un point unibranche de $S^{\text{an}}(X)$ et soit b l'unique élément de $\text{br}(\Gamma, x)$. Supposons que x appartient à l'intérieur analytique de X et qu'il est de genre zéro; nous allons montrer que $\mathfrak{s}(b)$ contient *strictement* $\mathfrak{s}(x)$. Pour le voir, on choisit une triangulation S de X de squelette $S^{\text{an}}(X)$ et telle que S contienne strictement x . La composante connexe Γ_0 de x dans $\Gamma - (S \setminus \{x\})$ est alors une demi-droite issue de x . Si

l'on avait $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(x)$, alors Γ_0^b serait un disque virtuel en vertu de 5.1.16.2, contredisant ainsi l'appartenance de x à $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$.

(5.4.11) Soit X une courbe k -analytique génériquement quasi-lisse et soit Σ l'ensemble des nœuds de $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$; soit Γ un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X , tracé sur $X_{[0,2,3]}$. Nous allons montrer que Σ est contenu dans l'ensemble des nœuds de Γ . Pour le voir, on peut supposer X connexe, auquel cas Γ et $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ le sont aussi, ce qui entraîne que $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ n'a aucun point isolé sauf si lui-même est un singleton. On déduit alors de 5.1.12.2 et du 5.4.10 ci-dessus que l'assertion à démontrer est évidente sauf le cas où le graphe $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ est un singleton $\{x\}$ avec x appartenant à $X_{[2,3]} \setminus \partial X^{\text{an}}$ et de genre zéro (notons que x est alors l'unique nœud de $\mathbf{S}^{\text{an}}(X)$); nous nous plaçons donc sous cette hypothèse. La notion de nœud ne dépendant pas du fait que l'on voie X comme une courbe sur k ou sur $\mathfrak{s}(x)$, on peut remplacer k par $\mathfrak{s}(x)$, c'est-à-dire faire l'hypothèse que X est *géométriquement* connexe.

Comme X est connexe et comme $\mathbf{S}^{\text{an}}(X) \neq \emptyset$, ce dernier est un sous-graphe analytiquement admissible de X ; sa compacité entraîne alors celle de X . Comme $\mathbf{S}^{\text{an}}(X) \subset X_{[2,3]} \setminus \partial^{\text{an}} X$, il résulte des assertions 1) et 2) du théorème 5.1.11 que $\partial^{\text{an}} X = \emptyset$ et que X est quasi-lisse; la courbe compacte X est dès lors propre et lisse, et s'identifie donc à l'analytification \mathcal{X}^{an} d'une k -courbe algébrique projective, lisse et géométriquement intègre \mathcal{X} .

L'image réciproque de x sur $\mathcal{X}_{k^a}^{\text{an}}$ est un sous-graphe analytiquement admissible de $\mathcal{X}_{k^a}^{\text{an}}$, et est en particulier connexe puisque $\mathcal{X}_{k^a}^{\text{an}}$ est connexe. Cela signifie que $\mathfrak{s}(x) = k$, et que l'ensemble des antécédents de x sur $\mathcal{X}_{k^a}^{\text{an}}$ est un singleton $x_{\widehat{k^a}}$; le sous-graphe $\{x_{\widehat{k^a}}\}$ de $\mathcal{X}_{k^a}^{\text{an}}$ étant analytiquement admissible, toutes les composantes connexes de $\mathcal{X}_{k^a}^{\text{an}} \setminus \{x_{\widehat{k^a}}\}$ sont des disques. Par ailleurs, x est par hypothèse de genre 0, ce qui signifie *par définition* que $x_{\widehat{k^a}}$ est de genre 0. Il s'ensuit (lemme 4.4.16) que $\mathcal{X}_{k^a}^{\text{an}} \simeq \mathbb{P}_{k^a}^1$, c'est-à-dire que \mathcal{X} est de genre 0.

Le squelette de \mathcal{X}^{an} étant le singleton $\{x\}$, il résulte de 5.4.2 et 5.4.3 que toute composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ est un disque virtuel *qui n'est pas géométriquement connexe*.

Soit $b \in \text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)$ et soit V la composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ qui contient b . Par ce qui précède, V n'est pas géométriquement connexe. En vertu de 4.5.14.2, on a $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(V)$; par conséquent, $\mathfrak{s}(b)$ contient strictement $\mathfrak{s}(x) = k$.

Si $\Gamma = \{x\}$ alors x est un nœud de Γ . Sinon, il existe $b \in \text{br}(\Gamma, x)$ (par connexité de Γ). Par ce qui précède $\mathfrak{s}(b)$ contient strictement $\mathfrak{s}(x)$ et x est là encore un nœud de Γ , ce qui achève la démonstration.

Courbes compactes de squelette analytique non vide

(5.4.12) Soit X une courbe k -analytique que l'on suppose compacte, non vide, quasi-lisse et géométriquement connexe; on fait de plus l'hypothèse que le squelette analytique Γ de X est non vide; soit Σ l'ensemble des nœuds de Γ .

(5.4.12.1) *Supposons que $\Sigma \neq \emptyset$.* Le graphe Γ est connexe, fini et compact, et l'ensemble Σ est non vide et contient tous les sommets de Γ ; le complémentaire de Σ dans Γ est donc réunion disjointe d'intervalles ouverts; par conséquent, Σ est une triangulation de X . Comme Σ est contenu d'après le 5.4.11 ci-dessus

dans l'ensemble des nœuds de n'importe quel sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X tracé sur $X_{[0,2,3]}$, il est contenu dans toute triangulation de X et est donc la plus petite triangulation de X . Remarquons que si $|k^\times| \neq \{1\}$ et si X est strictement k -analytique alors Σ est constitué uniquement de points de type 2.

(5.4.12.2) *Supposons que $\Sigma = \emptyset$. Compte-tenu de la définition des nœuds de Γ , cela équivaut à la conjonction des propriétés suivantes :*

- X est sans bord, ce qui revient à demander qu'elle soit isomorphe à l'analytification d'une k -courbe algébrique projective, lisse et géométriquement intègre \mathcal{X} ;
- Γ est sans sommet, ce qui revient à demander qu'il soit un cercle (et implique qu'il coïncide avec le squelette de X) ;
- tous les points de Γ sont de genre 0 ;
- si $x \in \Gamma$ et si b_0 et b_1 sont les deux branches de Γ issues de x alors $\mathfrak{s}(b_0) = \mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(b_1)$; il revient au même de demander que $x \mapsto [\mathfrak{s}(x) : k]$ soit constante sur Γ , ou que $\mathfrak{s}(x) \simeq \mathfrak{s}(y)$ pour tout $(x, y) \in \Gamma^2$ (cf. 5.1.12).

Notons maintenant quelques conséquences de ces hypothèses.

La valeur absolue de k est non triviale. En effet si elle l'était le squelette analytique de \mathcal{X}^{an} serait, en vertu de la description explicite de cette dernière, réduit à un singleton.

Les triangulations minimales de X sont exactement les singletons $\{x\}$ avec $x \in \Gamma$. En effet si $x \in \Gamma$ alors $\{x\}$ contient l'ensemble des nœuds de Γ (lequel est vide!), et $\Gamma \setminus \{x\}$ est un intervalle ouvert relativement compact dans Γ ; par conséquent, $\{x\}$ est une triangulation de X , évidemment minimale.

Réciproquement, soit S une triangulation de X . Toute composante connexe de $X \setminus S$ est alors un arbre, ce qui exclut qu'une telle composante puisse contenir Γ ; par conséquent, S rencontre Γ , d'où notre assertion.

Remarquons que comme $|k^\times| \neq \{1\}$ il y a une infinité de points de type 2 sur Γ , et donc une infinité de triangulations minimales de X dont l'unique sommet est de type 2.

Si I est un intervalle ouvert non vide tracé sur Γ alors I^{an} est une couronne gentiment virtuelle. Cela résulte simplement du 5.1.12.3.

Si x et y sont deux points distincts de Γ le choix d'une orientation sur Γ induit un k -isomorphisme $\mathfrak{s}(x) \simeq \mathfrak{s}(y)$. En effet, choisissons un intervalle ouvert I de Γ contenant x et y et tel que le sous-intervalle $[x; y]$ de I soit orienté dans le sens direct. Le corps $\mathfrak{s}(I^{\text{an}})$ est indépendant du choix de I à isomorphisme canonique près, et comme I est le squelette de la couronne virtuelle I^{an} les flèches $\mathfrak{s}(I^{\text{an}}) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ et $\mathfrak{s}(I^{\text{an}}) \hookrightarrow \mathfrak{s}(y)$ sont des isomorphismes.

Extensions des scalaires. Soit F une extension presque algébrique de k . Comme Γ est le squelette analytique de X , il est tracé sur $X_{[2,3]}$ et chacun de ses points a un nombre fini d'antécédents sur $X_{\widehat{k^a}}$. Il en découle (corollaire 1.9.20) que si Γ_F désigne l'image réciproque de Γ sur X_F alors Γ_F est un sous-graphe compact et fini de X_F , et que $\Gamma_F \rightarrow \Gamma$ est injective par morceaux.

Si $x \in \Gamma$, le nombre N d'idéaux maximaux de $F \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ est égal au nombre d'idéaux maximaux de $F \widehat{\otimes}_k \mathfrak{s}(x)$ et ne dépend donc pas de x . Il s'ensuit que $\Gamma_F \rightarrow \Gamma$ est un revêtement topologique à N feuillets, ce qui entraîne

que Γ_F est une réunion disjointe de cercles. Comme toutes les composantes connexes de $X - \Gamma$ sont des disques virtuels, toutes les composantes connexes de $X_F - \Gamma_F$ sont des disques virtuels, ce qui montre que Γ_F est un sous-graphe analytiquement admissible de X_F . Il est en particulier admissible; par conséquent X_F se rétracte sur Γ_F et celui-ci est donc connexe, et partant homéomorphe à un cercle; le graphe Γ_F est dès lors le squelette de X_F , et même son squelette analytique puisqu'il est analytiquement admissible.

Soit maintenant H le noyau de l'opération naturelle de G sur $\Gamma_{\widehat{k^a}}$, qui est *a priori* un sous-groupe fermé de G . Soit C le quotient G/H , quotient que l'on voit comme un groupe de Γ -homéomorphismes de $\Gamma_{\widehat{k^a}}$. Comme $\Gamma_{\widehat{k^a}} \rightarrow \Gamma$ est un revêtement fini entre cercles, C est un groupe fini de «rotations» (et H est ouvert); comme C agit transitivement sur les fibres de $\Gamma_{\widehat{k^a}} \rightarrow \Gamma$, et comme $\text{Aut } \Gamma_{\widehat{k^a}}/\Gamma$ est cyclique, $C = \text{Aut } \Gamma_{\widehat{k^a}}/\Gamma$. Si $y \in \Gamma_{\widehat{k^a}}$ son stabilisateur dans C est trivial; son stabilisateur dans G est donc H .

Soit L la sous-extension finie de k^s correspondant à H . Il résulte de ce qui précède : que pour tout $x \in \Gamma$ la k -extension $\mathfrak{s}(x)$ est (non canoniquement) isomorphe à L ; que son groupe de Galois est canoniquement isomorphe à $\text{Gal}(L/k)$; que $\Gamma_{\widehat{k^a}} \rightarrow \Gamma_L$ est un homéomorphisme et que $\Gamma_L \rightarrow \Gamma$ est un revêtement topologique dont $\text{Gal } L/k$ s'identifie naturellement au groupe d'automorphismes. Notons que de ce fait, $\text{Gal } L/k$ possède une paire de générateurs distingués (qui correspondent aux deux rotations d'angle minimal sur Γ_L) et même un générateur distingué si Γ a été préalablement orienté; il en va de même de $\text{Gal}(\mathfrak{s}(x)/k)$ pour tout $x \in \Gamma$, en vertu de l'isomorphisme canonique $\text{Gal}(\mathfrak{s}(x)/k) \simeq \text{Gal } L/k$.

Comme $\Gamma_{\widehat{k^a}}$ ne comporte que des points de genre 0 (puisque c'est le cas de Γ), il ne possède aucun nœud. Recouvrons-le par deux intervalles ouverts I et I' dont l'intersection est réunion disjointe de deux intervalles ouverts J et J' . Les ouverts I^{an} , $(I')^{\text{an}}$, J^{an} et $(J')^{\text{an}}$ de $X_{\widehat{k^a}}$ sont des $\widehat{k^a}$ -couronnes (5.1.12.3); et J^{an} et $(J')^{\text{an}}$ apparaissent tous deux comme des sous-couronnes de I^{an} aussi bien que de $(I')^{\text{an}}$. La suite exacte de Mayer-Vietoris combinée à la proposition 4.4.23 assure alors que $H^1(X_{\widehat{k^a}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^2$ pour n'importe quel entier ℓ premier à p .

Par conséquent, et en vertu de GAGA, \mathcal{X} est de genre 1 et est donc un espace principal homogène sous sa jacobienne \mathcal{Y} , laquelle est une courbe elliptique. Le squelette de $X_{\widehat{k^a}}$ étant un cercle, $\mathcal{Y}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ est une courbe de Tate, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe, comme groupe $\widehat{k^a}$ -analytique, à un quotient de la forme $\mathbb{G}_{m, \widehat{k^a}}^{\text{an}}/q^{\mathbb{Z}}$ pour un certain q non nul de $\widehat{k^a}$ tel que $|q| < 1$; cela revient à dire que le j -invariant de \mathcal{Y} n'est pas entier.

Remarque. Soit V une composante connexe de $X - \Gamma$; c'est un disque virtuel dont le bord $\{x\}$ est situé sur Γ . Comme $\mathfrak{s}(x)$ se plonge dans $\mathfrak{s}(V)$ (4.5.14.2), l'extension L se plonge dans $\mathfrak{s}(V)$. Par conséquent, pour tout $y \in X$ l'extension L se plonge dans $\mathfrak{s}(y)$. Il s'ensuit notamment que si $L \neq k$, alors $X(k)$ est vide; le \mathcal{Y} -torseur \mathcal{X} est dans ce cas non trivial. Il s'ensuit aussi que $X_L \rightarrow X$ est un revêtement topologique; comme $\Gamma \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie, ce revêtement est cyclique, et son groupe d'automorphismes s'identifie à $\text{Gal } L/k$.

(5.4.13) Réciproquement, soit \mathcal{X} une k -courbe algébrique projective, lisse et géométriquement intègre de genre 1, dont le j -invariant de la jacobienne \mathcal{Y}

n'est pas entier. Dans ce cas le squelette analytique de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ coïncide avec son squelette, et est un cercle dont tous les points sont de genre 0 ; si \mathbf{G} opère sur le cercle en question par rotations, on vérifie immédiatement que la courbe $X := \mathcal{X}^{\text{an}}$ vérifie les conditions décrites au 5.4.12.2.

Deux exemples en genre 1

(5.4.14) Soit n un entier impair et premier à p ; supposons que k contient toutes les racines n -ièmes de l'unité, et qu'il existe un élément q de k^\times tel que $|q| < 1$ et tel que $T^n - q$ soit irréductible dans $k[X]$ (e.g. $k = \mathbb{Q}_7, n = 3, q = 7$). Soit L l'extension cyclique de degré n de k contenue dans $\widehat{k^a}$ et engendrée par une racine n -ième λ de q . Soit Y le quotient de $\mathbb{G}_{m,k}^{\text{an}}$ par $q^{\mathbb{Z}}$; la courbe Y est isomorphe à l'analytification d'une k -courbe elliptique \mathcal{Y} ; le j -invariant de \mathcal{Y} n'est pas entier.

La classe $\bar{\lambda}$ de λ dans $Y(L) \simeq L^\times / q^{\mathbb{Z}}$ est de n -torsion ; comme n est impair, le produit de toutes les racines n -ièmes de l'unité de L est égal à 1 ; il s'ensuit que $\bar{\lambda}$ est de norme 1. Donnons-nous un générateur g du groupe de Galois de L/k ; il existe alors un unique 1-cocycle \mathbf{c} de $\text{Gal}(L/k)$ à valeurs dans $Y(L) = \mathcal{Y}(L)$ qui envoie g sur $\bar{\lambda}$. La classe de $H^1(k, \mathcal{Y})$ définie par \mathbf{c} est celle d'un \mathcal{Y} -torseur \mathcal{X} qui est déployé par L .

L'espace analytique \mathcal{X}^{an} s'identifie au quotient de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ sous l'action de \mathbf{G} , c'est-à-dire encore au quotient de $\mathcal{Y}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}} \simeq \mathbb{G}_{m,\widehat{k^a}}^{\text{an}} / q^{\mathbb{Z}}$ sous l'action de Galois tordue par la restriction de \mathbf{c} à \mathbf{G} . Soit $g' \in \mathbf{G}$ et soit N tel que la restriction de g' à L coïncide avec g^N . On déduit de la description explicite de \mathbf{c} que la restriction au squelette de \mathcal{Y}^{an} , identifié à $\mathbb{R}_+^\times / |q|^{\mathbb{Z}}$, de l'action tordue de g' , est la translation par $\sqrt[n]{|q|^N}$ (qui est triviale si et seulement si $n|N$, c'est-à-dire si et seulement si g' agit trivialement sur L). Par conséquent, \mathcal{X} est de la forme décrite au 5.4.13, et les résultats du 5.4.12.2 s'appliquent ; on en déduit les faits qui suivent.

Le squelette de \mathcal{X}^{an} coïncide avec son squelette analytique, et est un cercle Γ . Si $y \in X$ il existe un k -plongement (non canonique) $L \hookrightarrow \mathfrak{s}(y)$ qui est un isomorphisme si $y \in \Gamma$.

Si F est une extension presque algébrique de k l'image réciproque Γ_F de Γ sur $\mathcal{X}_F^{\text{an}}$ est un cercle, qui n'est autre que le squelette, et même le squelette analytique, de $\mathcal{X}_F^{\text{an}}$; et la flèche $\Gamma_F \rightarrow \Gamma$ est un revêtement topologique.

Le groupe $\text{Gal}(L/k)$ s'identifie naturellement au groupe d'automorphismes du revêtement $\Gamma_L \rightarrow \Gamma$, et $X_L \rightarrow X$ est lui-même un revêtement topologique cyclique de groupe $\text{Gal}(L/k)$; par ailleurs, $\Gamma_{\widehat{k^a}} \rightarrow \Gamma_L$ est un homéomorphisme.

(5.4.15) Supposons que $p \neq 2$, que $|k^\times| \neq \{1\}$ et qu'il existe un élément a de k^0 tel que \tilde{a} ne soit pas un carré dans \tilde{k} ; soit $q \in k^\times$ tel que $|q| < 1$ (e.g. $k = \mathbb{Q}_3, a = -1, q = 3$). Soit \mathcal{X} la k -courbe elliptique donnée par l'équation affine $T_1^2 = T_0(T_0 - q)(T_0 + a)$; la fonction T_0 définit un morphisme fini et plat de degré 2 de \mathcal{X} vers \mathbb{P}_k^1 . Soit \mathbf{H} le sous-groupe de \mathbf{G} fixant les racines carrées de a .

Le j -invariant de \mathcal{X} n'est pas entier ; la courbe $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ est donc une courbe de Tate. On vérifie aisément que si $|q| < r < 1$ alors $\eta_{r,\widehat{k^a}}$ a deux antécédents

sur $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ qui sont fixés par H , et que si $r = |q|$ ou $r = |1|$ alors $\eta_{r, \widehat{k^a}}$ a un unique antécédent sur $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$, nécessairement invariant par G . Il en résulte que l'image réciproque Γ de l'intervalle $[\eta_{|q|, \widehat{k^a}}; \eta_{1, \widehat{k^a}}]$ sur $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ est un cercle; c'est le squelette, et même le squelette analytique, de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$. Notons x et y les antécédents respectifs de $\eta_{|q|, \widehat{k^a}}$ et $\eta_{1, \widehat{k^a}}$ sur Γ , et ξ et η les images respectives de x et y sur \mathcal{X}^{an} . On peut également définir ξ (resp. η) comme l'unique antécédent du point $\eta_{|q|}$ sur \mathcal{X}^{an} .

Comme l'ensemble des nœuds de Γ est vide, $\{x, y\}$ est une triangulation de $\mathcal{X}_{\widehat{k^a}}^{\text{an}}$ de squelette Γ . Le groupe G agit sur Γ via son quotient G/H en permutant les deux composantes connexes de $\Gamma \setminus \{x, y\}$ et en fixant x et y . Il s'ensuit que \mathcal{X}^{an} est un arbre, et l'on déduit du théorème 5.3.9 que $\{\xi, \eta\}$ est une triangulation de \mathcal{X}^{an} de squelette $[\xi; \eta]$. La considération de l'action de Galois sur Γ montre que $\mathfrak{s}(\xi) = \mathfrak{s}(\eta) = k$ et que $\mathfrak{s}(\zeta) \simeq k[\tau]/(\tau^2 - a)$ pour tout $\zeta \in]\xi; \eta[$.

Il découle alors de 5.1.16.3 que ni $\{\xi\}$, ni $\{\eta\}$ ne sont des triangulations de \mathcal{X}^{an} ; par conséquent, $\{\xi, \eta\}$ est une triangulation minimale de \mathcal{X}^{an} . Comme celle-ci comprend deux sommets, on est dans le cas traité au 5.4.12.1 : l'ensemble $\{\xi, \eta\}$ est la plus petite triangulation de \mathcal{X}^{an} ; son squelette $[\xi; \eta]$ est le squelette analytique de \mathcal{X}^{an} ; et $\{\xi, \eta\}$ est exactement l'ensemble des nœuds de $[\xi; \eta]$.

Récapitulation

(5.4.16) On se donne une courbe k -analytique géométriquement connexe, non vide, quasi-lisse et compacte X . Soit Σ l'ensemble des nœuds de $S^{\text{an}}(X)$. On est dans l'un des trois cas suivants, exclusifs l'un de l'autre.

(5.4.16.1) *Le cas où Σ est non vide.* Remarquons que comme tout point de $\partial^{\text{an}} X$ appartient à $S^{\text{an}}(X)$, et en est dès lors un nœud par définition, Σ est notamment non vide dès que $\partial^{\text{an}} X \neq \emptyset$.

(5.4.16.2) *Le cas où $S^{\text{an}}(X)$ est non vide mais où Σ est vide.* En vertu de 5.4.12.2, il se produit si et seulement si X est isomorphe à l'analytification d'une k -courbe algébrique, projective et lisse de genre 1 et possède la propriété suivante : $S^{\text{an}}(X)$ est un cercle (qui coïncide forcément avec $S(X)$), et il existe une extension finie cyclique L de k telle que $\mathfrak{s}(x) \simeq L$ pour tout $x \in S^{\text{an}}(X)$. Notons que si k est algébriquement clos cela signifie simplement que X est une courbe de Tate; pour un exemple non trivial sur un corps non algébriquement clos, cf. 5.4.14.

(5.4.16.3) *Le cas où $S^{\text{an}}(X)$ est lui-même vide.* En vertu de 5.4.8, il se produit si et seulement si X est isomorphe à l'analytification d'une k -courbe algébrique, projective et lisse de genre 0 et possède la propriété suivante : il existe deux points distincts x et x' de $X_{[23]}$ tels que $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(x') = k$. Si k est algébriquement clos ou si \widehat{k} est parfait de caractéristique différente de 2 cela signifie simplement que $X \simeq \mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ (5.4.8.2); mais mentionnons que la conique non triviale sur \mathbb{Q}_2 satisfait également ces hypothèses (5.4.5.3).

(5.4.17) Toute triangulation de X ayant un nombre fini de sommets, il est évident *a priori* que X possède des triangulations minimales.

Sous l'hypothèse de 5.4.16.1, elle possède une plus petite triangulation, à savoir Σ (5.4.12.1).

Sous l'hypothèse de 5.4.16.2, qui ne peut être satisfaite que si $|k^\times| \neq \{1\}$, les triangulations minimales de X sont les singletons $\{x\}$ avec $x \in \mathbf{S}^{\text{an}}(X)$ (5.4.12.2); elle en possède donc une infinité, et même une infinité dont l'unique sommet est de type 2. Elle ne possède donc pas de plus petite triangulation.

Sous l'hypothèse de 5.4.16.3, les triangulations minimales de X sont les singletons $\{x\}$ où x est un point de $X_{[2,3]}$ tel que $\mathfrak{s}(x) = k$; la courbe X en possède une infinité, et même une infinité dont l'unique sommet est de type 2 si $|k^\times| \neq \{1\}$. Elle ne possède donc pas de plus petite triangulation.

(5.4.18) Il découle de ce qui précède que X possède une plus petite triangulation *si et seulement si* Σ est non vide, et dans ce cas cette plus petite triangulation coïncide avec Σ .

5.5 Raffinement : le cas des courbes marquées

Triangulations adaptées

(5.5.1) Soit X une courbe k -analytique *quasi-lisse, connexe et compacte*. Soit Γ un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X tracé sur $X_{[0,2,3]}$, soit Σ l'ensemble des nœuds de Γ et soit $\Sigma_{[2,3]}$ le sous-ensemble de Σ formé des points de type 2 ou 3. *On suppose que $\Sigma_{[2,3]}$ est non vide*. Nous allons montrer que sous cette hypothèse, $\Sigma_{[2,3]}$ est une triangulation de X , et que pour tout $x \in \Sigma - \Sigma_{[2,3]}$, la composante connexe de $X - \Sigma_{[2,3]}$ qui contient x est un disque virtuel.

Pour ce faire, on fixe une composante connexe U de $X - \Sigma_{[2,3]}$, dont nous allons établir qu'elle est un disque virtuel ou une couronne virtuelle (la relative compacité sera ici automatique, X étant compact), et que si elle rencontre Σ c'est obligatoirement un disque virtuel. Deux cas sont à distinguer.

(5.5.1.1) *Le cas où U ne rencontre pas Γ* . C'est alors une composante connexe de $X - \Gamma$, et partant un disque virtuel.

(5.5.1.2) *Le cas où U rencontre Γ* . La composante U est alors de la forme I^b , où I est une composante connexe de $\Gamma - \Sigma_{[2,3]}$. Comme X est compacte, I est relativement compacte; comme X est connexe, Γ est connexe; il s'ensuit, $\Sigma_{[2,3]}$ étant non vide, que ∂I est lui-même une partie non vide de $\Sigma_{[2,3]}$. Comme $U \cap \Gamma = I$, la composante U rencontre Σ si et seulement si I rencontre Σ . On doit maintenant distinguer deux sous-cas.

Supposons que I , et donc U , ne rencontrent pas Σ . Dans ce cas, I ne contient en particulier aucun sommet (topologique) de Γ , et est donc de valence 2 en chacun de ses points; puisque ∂I est non vide, I est un intervalle ouvert. En vertu de 5.1.12.3, l'ouvert $U = I^b$ est alors une couronne virtuelle.

Supposons que I , et donc U , rencontrent Σ . La courbe X étant quasi-lisse, elle est normale et chacun de ses points rigides est donc unibranche.

Puisque I ne rencontre pas $\Sigma_{[2,3]}$, les seuls sommets de Γ éventuellement situés sur I sont rigides, et sont par conséquent des points unibranches de I ; il en découle que la valence de I en chacun de ses points vaut 1 ou 2, ce qui

implique, ∂I étant non vide, que le graphe connexe I est un intervalle ouvert ou semi-ouvert. Or I rencontre par hypothèse $\Sigma - \Sigma_{[2,3]}$, et possède de ce fait un point x qui est rigide, et dès lors unibranche; par conséquent, I est un intervalle semi-ouvert issu de x et ∂I est un singleton $\{y\}$. On a $\partial U = \{y\}$ et U est de ce fait une composante connexe de $X \setminus \{y\}$.

En tant que point rigide d'une courbe quasi-lisse, le point x possède un voisinage ouvert V dans I^b qui est un disque virtuel; l'intersection $V \cap I$ est un voisinage de x dans I et n'est donc pas réduite à $\{x\}$; choisissons x' sur $(V \cap I) \setminus \{x\}$, et x'' sur $]x; x'[_$.

Comme x est le seul point unibranche de I , c'en est le seul point rigide, ce qui signifie que $I \cap \Sigma = \{x\}$ puisque $I \cap \Sigma_{[2,3]} = \emptyset$. Par conséquent, $]x''; y[_$ ne rencontre pas Σ . Par ailleurs, les points x'' et y de Γ appartiennent tous deux à $X_{[2,3]}$: pour x'' cela résulte par exemple de l'égalité $I \cap \Sigma = \{x\}$; et pour y , de l'inclusion $\partial I \subset \Sigma_{[2,3]}$.

En vertu de 5.1.12.3, l'ouvert $]x''; y[_^b$ de X est une couronne virtuelle; et le voisinage ouvert V du point x' de $]x''; y[_$ est un disque virtuel, qui ne contient pas y (il est inclus dans I^b). On déduit alors du lemme 5.1.1 que la réunion de V et $]x''; y[_^b$ est un disque virtuel, et est par ailleurs une composante connexe de $X \setminus \{y\}$; mais comme $V \cup]x''; y[_^b \subset I^b = U$, lequel est lui-même une composante connexe de $X \setminus \{y\}$, on a nécessairement $V \cup]x''; y[_^b = U$. Ainsi, U est-il un disque virtuel, ce qu'on souhaitait démontrer.

(5.5.2) Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse et soit E un sous-ensemble fermé et discret de X contenu dans $X_{[0]}$. Soit S une triangulation de X . On dira que S est *adaptée* à E si pour tout $x \in E$, la composante connexe V de $X \setminus S$ contenant x est un disque virtuel tel que $V \cap E = \{x\}$ et tel que $\mathfrak{s}(V) = \mathfrak{s}(x)$.

(5.5.2.1) Soit F une extension presque algébrique de k et soit S une triangulation de X adaptée à E ; la triangulation S_F de X_F est adaptée à l'image réciproque E_F de E sur X_F si et seulement si S est adaptée à E . En effet, il suffit de le démontrer lorsque $F = \widehat{k^a}$ (et d'appliquer ensuite le résultat établi à l'extension $F \hookrightarrow \widehat{k^a}$). Or c'est alors immédiat, en remarquant que l'égalité $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(V)$ équivaut à demander que x ait un et un seul antécédent sur chacune des composantes connexes de $V_{\widehat{k^a}}$.

(5.5.2.2) Soit S une triangulation de X adaptée à E , soit Γ son squelette et soit r la rétraction canonique de X sur Γ . Il résulte aisément de la définition d'une triangulation adaptée à E que $r(x) \in S$ pour tout $x \in E$, que $]x; r(x)[\cap]x'; r(x')[= \emptyset$ pour tout couple (x, x') de points *distincts* de E et que si $x \in E$ alors $\mathfrak{s}(y)$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{s}(x)$ pour tout $y \in]x; r(x)[$.

Seul ce dernier point mérite peut-être une explication: si V désigne la composante connexe de $X \setminus \{r(x)\}$ contenant x alors V est un disque virtuel, et contient donc une unique branche b issue de x . On a $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(V)$ (d'après 4.5.14.2), qui est lui-même égal à $\mathfrak{s}(x)$ par hypothèse. Soit d l'application de $]x; r(x)[$ dans \mathbb{N} qui envoie z sur $[\mathfrak{s}(z) : k]$. Cette application est constante par morceaux sur $]x; r(x)[$ et égale à $[\mathfrak{s}(b) : k]$ au voisinage de $r(x)$ (4.5.12); elle est par ailleurs croissante lorsqu'on se dirige vers x (4.5.14.2). Il s'ensuit que $d(x) = d(y)$ pour tout $y \in]x; r(x)[$ et l'assertion requise (plus précise) s'en déduit aussitôt grâce aux équivalences énoncées au 4.5.13.2.

(5.5.2.3) Réciproquement, soit Γ un sous-graphe localement fini et analytiquement admissible de X tracé sur $X_{[2,3]}$ et soit r la rétraction canonique

de X sur Γ . Supposons que pour tout couple (x, x') d'éléments distincts de E l'on ait $]x; r(x)[\cap]x'; r(x')[= \emptyset$, et que pour tout $x \in E$ la fonction $y \mapsto [\mathfrak{s}(y) : k]$ soit constante sur $]x; r(x)[$; si S est une triangulation de X de squelette Γ et contenant l'ensemble des $r(x)$ pour x parcourant E , alors S est adaptée à E .

Là encore, seul un point mérite une vérification : le fait que si $x \in E$ et si V désigne la composante connexe de $X \setminus \{r(x)\}$ contenant x , alors $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(V)$. Reprenons les notations b et d du 5.5.2 ci-dessus, et soit δ la valeur constante de d sur $]x; r(x)[$; par semi-continuité inférieure de d , on a $d(x) \leq \delta$. Comme $d(y) = \delta$ pour tout $y \in]x; r(x)[$, c'est en particulier le cas au voisinage de $r(x)$ et l'on a donc $[\mathfrak{s}(b) : k] = \delta$; par ailleurs $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(V)$ qui se plonge dans $\mathfrak{s}(x)$, d'où l'inégalité $d(x) \geq \delta$, et finalement $d(x) = \delta$, ce qui entraîne que $\mathfrak{s}(V) \hookrightarrow \mathfrak{s}(x)$ est un isomorphisme.

(5.5.3) Soit X une courbe k -analytique quasi-lisse compacte et connexe; on suppose que $S^{\text{an}}(X)$ est non vide; c'est donc un sous-graphe analytiquement admissible de X , et l'on note r la rétraction canonique de X sur $S^{\text{an}}(X)$. Soit E un sous-ensemble fini de X contenu dans $X_{[0]}$ et soit S une triangulation de X adaptée à E .

Posons $\Gamma = S^{\text{an}}(X) \cup \bigcup_{x \in E}]x; r(x)[$. C'est un sous-graphe fermé localement fini de X tracé sur $X_{[0,2,3]}$, qui est le plus petit sous-graphe analytiquement admissible de X contenant $S^{\text{an}}(X)$ et E . Soit Σ l'ensemble des nœuds non rigides de Γ ; on suppose qu'il est *non vide*. C'est alors d'après 5.5.1 une triangulation de X , dont nous allons montrer qu'elle est adaptée à E et contenue dans S .

(5.5.3.1) La triangulation Σ est adaptée à E . Soit $x \in E$ et soit V la composante connexe de $X - \Sigma$ contenant x . Il résulte de 5.5.1 que V est un disque virtuel; soit y l'unique point de son bord; il appartient à Σ . L'intervalle $]x; y[$ tracé sur V est contenu dans Γ et n'est constitué que de points pluribranches, donc de type 2 ou 3. Il ne contient par hypothèse aucun nœud de Γ , ce qui implique en particulier que $z \mapsto [\mathfrak{s}(z) : k]$ est constante sur $]x; y[$.

Pour montrer que Σ est adaptée à E , il suffit maintenant de vérifier que $V \cap E = \{x\}$. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un point x' sur $V \cap E$ qui diffère de x . L'intersection $]x; y[\cap]x'; y[$ est alors de la forme $]t; y[$, et la valence de (Γ, t) vaut au moins 3. Ainsi, t est un sommet topologique pluribranche de Γ , et en particulier un nœud de ce dernier situé sur $X_{[2,3]}$; il appartient donc à Σ , ce qui est contradictoire.

(5.5.3.2) On a $\Sigma \subset S$. Désignons par Δ le squelette de la triangulation S . Soit $y \in \Sigma$.

Si y est un nœud de $S^{\text{an}}(X)$, il résulte de 5.4.11 que y est un nœud de Δ , et donc un élément de S .

Supposons maintenant que y n'est pas un nœud de $S^{\text{an}}(X)$. Comme c'est un nœud de $\Gamma = S^{\text{an}}(X) \cup \bigcup_{x \in E}]x; r(x)[$ et comme $\bigcup_{x \in E}]x; r(x)[$ est un sous-graphe compact de Γ , le point y appartient nécessairement à $\bigcup]x; r(x)[$.

Si $x \in E$, il résulte du 5.5.3.1 ci-dessus :

- que $]x; r(x)[$ ne rencontre aucun des $]x'; r(x')[$ pour $x' \neq x$, et partant ne contient aucun sommet topologique de Γ ;
- que $z \mapsto [\mathfrak{s}(z) : k]$ est constante sur $]x; r(x)[$.

Compte-tenu du fait que $]x; r(x)[$ est tracé sur un disque virtuel, qui est sans bord, et que chacun de ses points est pluribranche, donc non rigide, il s'ensuit que $]x; r(x)[$ ne contient aucun nœud de Γ .

On déduit de ce qui précède que $\bigcup]x; r(x)[$ ne contient aucun nœud non rigide de Γ ; dès lors, y est nécessairement de la forme $r(x)$ pour un certain $x \in E$; on note V la composante connexe de $X - S^{\text{an}}(X)$ qui contient x ; c'est une composante connexe de $X \setminus \{y\}$. Comme on a fait l'hypothèse que y n'est pas un nœud de $S^{\text{an}}(X)$, la valence de $(S^{\text{an}}(X), y)$ est 2. Comme $\Delta \supset S^{\text{an}}(X)$, la valence de (Δ, y) est supérieure ou égale à 2.

Supposons que la valence de (Δ, y) est au moins égale à 3. Dans ce cas y est un sommet topologique, et *a fortiori* un nœud, de Δ ; c'est donc un élément de S .

Supposons que la valence de (Δ, y) est égale à 2. Dans ce cas les germes (Γ, y) et (Δ, y) sont égaux. Par conséquent, Δ ne contient aucun intervalle ouvert tracé sur V et aboutissant à y ; étant convexe, Δ ne rencontre donc pas V , qui apparaît ainsi comme la composante connexe de x dans $X - \Delta$. Mais comme S est une triangulation adaptée à E , ceci entraîne que l'unique point du bord de V , qui n'est autre que y , appartient à S .

Triangulations des courbes marquées

(5.5.4) On appellera *courbe k -analytique marquée* un couple (X, E) où X est une courbe k -analytique et où E est un sous-ensemble fermé et discret de X contenu dans $X_{[0]}$. Une *triangulation* d'une courbe marquée (X, E) sera par définition une triangulation de X adaptée à E .

(5.5.5) Soit (X, E) une courbe k -analytique marquée. On suppose que X est non vide, géométriquement connexe, quasi-lisse et compacte (cette dernière condition entraîne la finitude de E). Le but de ce qui suit est de déterminer sous quelles hypothèses supplémentaires il existe une plus petite triangulation de (X, E) ; on note Θ l'ensemble des nœuds de $S^{\text{an}}(X)$ et l'on distingue trois cas.

(5.5.5.1) *Le cas où $S^{\text{an}}(X)$ et Θ sont non vides.* On sait alors que $S^{\text{an}}(X)$ est un sous-graphe analytiquement admissible de X , contenu dans $X_{[2,3]}$. Soit Γ le plus petit sous-graphe analytiquement admissible de X contenant $S^{\text{an}}(X)$ et E . L'ensemble Σ des nœuds non rigides de Γ contient Θ en vertu de 5.4.11, et est en particulier non vide; il découle alors de 5.5.3, 5.5.3.1 et 5.5.3.2 que Σ est la plus petite triangulation de (X, E) .

(5.5.5.2) *Le cas où $S^{\text{an}}(X)$ est non vide et où Θ est vide.* La courbe X est alors isomorphe à l'analytifiée d'une courbe projective, lisse et géométriquement intègre de genre 1, du type décrit au 5.4.12.2; son squelette analytique $S^{\text{an}}(X)$ coïncide avec son squelette, et est un cercle.

Si E est vide, on a vu au 5.4.12.2 que X n'admet pas de plus petite triangulation, mais admet une infinité de triangulations minimales, à savoir les triangulations de la forme $\{x\}$ avec $x \in S^{\text{an}}(X)$.

Si E est non vide, appelons Γ le plus petit sous-graphe analytiquement admissible de X contenant E et $S^{\text{an}}(X)$. Comme $S^{\text{an}}(X)$ est un cercle et comme E est non vide, Γ possède au moins un sommet topologique pluribranche, et

l'ensemble Σ de ses nœuds non rigides est dès lors non vide. Il découle alors de 5.5.3, 5.5.3.1 et 5.5.3.2 que Σ est la plus petite triangulation de (X, E) .

(5.5.5.3) *Le cas où $S^{\text{an}}(X)$ est vide.* La courbe X est alors isomorphe à l'analytification d'une courbe projective, lisse et géométriquement intègre de genre zéro du type décrit au 5.4.8.

Soit $E_{\widehat{k^a}}$ l'image réciproque de E sur $X_{\widehat{k^a}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$. Le but de ce qui suit est de montrer que (X, E) admet une plus petite triangulation si et seulement si la condition suivante est satisfaite : $E_{\widehat{k^a}}$ compte au moins trois éléments, ou en compte exactement deux qui sont permutés par l'action de Galois. Elle peut se retraduire comme suit : $\sum_{x \in E} [\mathfrak{s}(x) : k] \geq 3$ ou E est un singleton $\{x\}$ tel que $[\mathfrak{s}(x) : k] = 2$.

Pour établir cette assertion, l'on distingue quatre cas.

Premier cas : $E_{\widehat{k^a}}$ compte au moins trois éléments. Soit Γ l'enveloppe convexe de $E_{\widehat{k^a}}$ et soit S l'ensemble des sommets pluribranches de Γ . Comme $E_{\widehat{k^a}}$ compte au moins trois éléments, S est non vide, et il coïncide avec l'ensemble des nœuds non rigides de Γ . Le sous-arbre Γ de $X_{\widehat{k^a}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ est analytiquement admissible (remarque 5.4.9) ; on déduit alors de 5.5.1 que S est une triangulation de $X_{\widehat{k^a}}$ adaptée à $E_{\widehat{k^a}}$.

L'arbre Γ et l'ensemble S sont stables sous G . Si I est une arête de Γ joignant deux points de S et dont G renverse les orientations, il existe un unique point $\xi(I)$ de I qui est fixé par le stabilisateur de I ; on note S' la réunion de S et des $\xi(I)$, où I parcourt l'ensemble des arêtes de Γ joignant deux points de S dont G renverse les orientations. L'ensemble S' est stable sous G ; il constitue d'après 5.1.17.1 une triangulation de $X_{\widehat{k^a}}$.

De plus, si un élément de S' est de la forme $\xi(I)$, alors il appartient à la composante connexe I^b de $X_{\widehat{k^a}} \setminus S$, qui est une couronne et qui ne contient donc aucun point de E , puisque S est adaptée à E ; il s'ensuit que S' est encore adaptée à E . Par ailleurs, l'appartenance de chacun des $\xi(I)$ à S' garantit que si J est un intervalle ouvert joignant deux points de S' alors G ne permute pas les orientations de J .

On déduit de ce qui précède, à l'aide du théorème 5.3.9 et de 5.5.2.1, que S' est l'image réciproque sur $X_{\widehat{k^a}}$ d'une triangulation T de X qui est adaptée à E .

Nous allons montrer que T est la plus petite triangulation de (X, E) . Soit donc Θ une triangulation de (X, E) ; il suffit de vérifier que l'image réciproque $\Theta_{\widehat{k^a}}$ de Θ sur $X_{\widehat{k^a}}$ contient S' ; notons que $\Theta_{\widehat{k^a}}$ est adaptée à $E_{\widehat{k^a}}$ (5.5.2.1).

Soit Δ le squelette de $\Theta_{\widehat{k^a}}$, soit r la rétraction canonique de $X_{\widehat{k^a}}$ sur Δ , et soit $t \in S$. Par définition de S il existe trois points deux à deux distincts x, y , et z de $E_{\widehat{k^a}}$ tels que $[x; z] \cap [y; z] = [t; z]$. On a $[x; z] = [x; r(x)] \cup I \cup [r(z); z]$ et $[y; z] = [y; r(y)] \cup I' \cup [r(z); z]$ où I et I' sont deux segments tracés sur Δ . Comme $\Theta_{\widehat{k^a}}$ est adaptée à $E_{\widehat{k^a}}$, le point t ne peut appartenir à $[x; r(x)] \cup [y; r(y)] \cup [z; r(z)]$.

Si t est égal à $r(x), r(y)$ ou $r(z)$ alors il appartient à $\Theta_{\widehat{k^a}}$, là encore parce que $\Theta_{\widehat{k^a}}$ est adaptée à $E_{\widehat{k^a}}$.

Si t appartient à $[x; z] \cup [y; z] - ([x; r(x)] \cup [y; r(y)] \cup [z; r(z)])$, qui est un ouvert de $[x; z] \cup [y; z]$ et un sous-graphe de Δ . Comme la valence de $[x; z] \cup [y; z]$

en t vaut 3, la valence de Δ en t vaut au moins 3; par conséquent, t est un nœud de Δ et appartient de ce fait à $\Theta_{\widehat{k^a}}$.

Ainsi, $\Theta_{\widehat{k^a}}$ contient S . Par ailleurs, soit I un intervalle ouvert joignant deux points de S et dont G permute les orientations; nous allons montrer par l'absurde que $\Theta_{\widehat{k^a}}$ contient $\xi(I)$. Supposons que ce ne soit pas le cas et soit I_0 la composante connexe de $\xi(I)$ dans $I - \Theta_{\widehat{k^a}}$. Par hypothèse, il existe $g \in G$ stabilisant I et induisant sur ce dernier une symétrie de centre $\xi(I)$; il s'ensuit que g stabilise I_0 et induit sur celui-ci une symétrie de centre $\xi(I)$, ce qui contredit le fait que G ne permute pas les orientations des composantes connexes de $\Delta - \Theta_{\widehat{k^a}}$ (théorème 5.3.9).

On en conclut que $\Theta_{\widehat{k^a}}$ contient S' , ce qu'on souhaitait établir.

Second cas : $E_{\widehat{k^a}}$ compte deux points échangés par l'action de G . Soient x et y les deux points en question. Comme G échange x et y , il stabilise $[x; y]$ et son action sur ce dernier se factorise par une surjection $G \rightarrow \{\text{Id}, g\}$ où g est une symétrie ayant pour centre un certain $z \in]x; y[$. Le point z est stable sous G , c'est donc l'unique antécédent d'un point t de X . Le singleton $\{z\}$ est une triangulation de $X_{\widehat{k^a}}$ (le point z est pluribranche, donc de type 2 ou 3, et $X_{\widehat{k^a}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$) visiblement adaptée à $E_{\widehat{k^a}} = \{x, y\}$; on déduit alors du théorème 5.3.9 et du 5.5.2.1 que $\{t\}$ est une triangulation de X adaptée à E .

Nous allons montrer que $\{t\}$ est la plus petite triangulation de (X, E) . Soit donc Θ une triangulation de (X, E) ; il suffit de vérifier que l'image réciproque $\Theta_{\widehat{k^a}}$ de Θ sur $X_{\widehat{k^a}}$ contient z .

Soit Δ le squelette de $\Theta_{\widehat{k^a}}$ et soit r la rétraction canonique de $X_{\widehat{k^a}}$ sur Δ . Comme $\Theta_{\widehat{k^a}}$ est adaptée à $E_{\widehat{k^a}} = \{x, y\}$ (5.5.2.1), les points $r(x)$ et $r(y)$ appartiennent à $\Theta_{\widehat{k^a}}$. Par convexité, $\Delta \cap [x; y] = [r(x); r(y)]$. Comme g stabilise Δ , il échange $r(x)$ et $r(y)$ et z appartient dès lors à $[r(x); r(y)]$.

Supposons que z n'appartienne pas à $\Theta_{\widehat{k^a}}$. La composante connexe de z dans $\Delta - \Theta_{\widehat{k^a}}$ serait alors un intervalle ouvert stable sous g et contenu dans $]r(x); r(y)[$, contredisant ainsi le fait que G agit sans permuter les orientations des composantes connexes de $\Delta - \Theta_{\widehat{k^a}}$ (théorème 5.3.9).

Troisième cas : $E_{\widehat{k^a}}$ compte deux points distincts, fixes sous G . Soient x et x' les deux points en question; l'ensemble E consiste alors lui-même en deux points y et y' , qui sont les images respectives de x et x' sur X , et G fixe point par point l'intervalle $[x; x']$; celui-ci s'envoie donc homéomorphiquement sur son image qui est de ce fait égale à $[y; y']$.

Soit $z \in]x; x'[$ et soit t son image sur X . Le singleton $\{z\}$ est une triangulation de $X_{\widehat{k^a}}$ (le point z est pluribranche, donc de type 2 ou 3, et $X_{\widehat{k^a}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^{1, \text{an}}$), visiblement adaptée à $E_{\widehat{k^a}} = \{x, x'\}$; on déduit alors du théorème 5.3.9 et du 5.5.2.1 que $\{t\}$ est une triangulation de X adaptée à E . Elle est évidemment minimale; ainsi, (X, E) possède une infinité de triangulations minimales, à savoir toutes celles de la forme $\{t\}$ avec $t \in]y; y'[$; il s'ensuit que (X, E) ne possède pas de plus petite triangulation.

Faisons une remarque : si Θ est une triangulation de (X, E) alors son image réciproque $\Theta_{\widehat{k^a}}$ sur $X_{\widehat{k^a}}$ est une triangulation adaptée à $E_{\widehat{k^a}} = \{x, x'\}$. Par conséquent, il y a au moins un sommet de $\Theta_{\widehat{k^a}}$ qui est situé sur $]x; x'[$. Autrement dit, Θ contient une triangulation de la forme $\{t\}$ pour un certain $t \in]y; y'[$. Ainsi

les triangulations minimales de (X, E) sont-elles exactement les triangulations de la forme $\{t\}$ avec $t \in]y; y'[_.$

Quatrième cas : $E_{\widehat{k^a}}$ compte au plus un point. On sait que X possède une infinité de triangulations minimales, et que les triangulations minimales de X sont les triangulations de la forme $\{x\}$ où $x \in X_{[2,3]}$ et où $\mathfrak{s}(x) = k$. Nous allons montrer que cette assertion reste vraie si l'on remplace X par (X, E) (en particulier, (X, E) n'a pas de plus petite triangulation). Pour le voir, on peut supposer E non vide, et donc constitué d'un point y tel que $\mathfrak{s}(y) = k$. Il suffit de vérifier que si x est un point de $X_{[2,3]}$ tel que $\mathfrak{s}(x) = k$, alors $\{x\}$ est adaptée à E . Soit V la composante connexe de $X \setminus \{x\}$ contenant y ; comme toute composante connexe de $X \setminus \{x\}$, c'est un disque virtuel; et comme $\mathfrak{s}(V) \hookrightarrow \mathfrak{s}(y) = k$, on a $\mathfrak{s}(V) = \mathfrak{s}(Y) (= k)$, ce qui termine la preuve.

Exemples

(5.5.6) *Le cas d'une courbe elliptique.* Soit \mathcal{X} une courbe elliptique sur k et soit $e \in \mathcal{X}(k)$ son élément neutre. Soit Γ le sous-graphe de \mathcal{X}^{an} égal à l'enveloppe convexe de $\{e\} \cup S^{\text{an}}(\mathcal{X}^{\text{an}})$ et soit Σ l'ensemble des nœuds non rigides de Γ . Il résulte de 5.5.5.1 et 5.5.5.2 que Σ est une triangulation de \mathcal{X}^{an} , et que c'est plus précisément la plus petite triangulation de la courbe marquée $(\mathcal{X}^{\text{an}}, e)$; ainsi, l'analytifiée d'une courbe elliptique possède une triangulation canonique.

(5.5.7) *Le cas de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ muni d'un point rigide quadratique.* Supposons que k est de caractéristique différente de 2, soit a un élément de k qui n'est pas un carré, et soit x le point rigide de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par l'équation $T^2 = a$. Soit α une racine carrée de a dans $\widehat{k^a}$ et soit η l'unique point du bord de Shilov du disque fermé V de $\mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ centré en α et de rayon $|2\alpha|$; le point η est invariant sous l'action de Galois (car c'est le cas de V , qui est le plus petit disque fermé de $\mathbb{A}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ contenant α et $-\alpha$); soit ξ son image sur $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$. Il résulte alors du second cas examiné au 5.5.5.3 que $\{\xi\}$ est la plus petite triangulation de $(\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}, x)$.

Nous allons maintenant décrire un peu plus précisément le point ξ en distinguant deux cas.

(5.5.7.1) *Supposons que la caractéristique de \widetilde{k} soit différente de 2.* Dans ce cas $|2\alpha| = |\alpha|$ et $\eta = \eta_{|\alpha|, \widehat{k^a}}$; par conséquent, $\xi = \eta_{|\alpha|} = \eta_{\sqrt{|a|}}$.

(5.5.7.2) *Supposons que la caractéristique de \widetilde{k} soit égale à 2.* On a alors pour toute extension complète L de $\widehat{k^a}$ et pour tout $\lambda \in L$ équivalence entre les inégalités $|\lambda - \alpha| \leq |2\alpha|$ et $|\lambda^2 - a| \leq |4\alpha^2| = |4| \cdot |a|$. Il s'ensuit que $V = U_{\widehat{k^a}}$, où U désigne le domaine analytique de $\mathbb{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par l'inégalité $|T^2 - a| \leq |4| \cdot |a|$; par conséquent, ξ peut être caractérisé comme l'unique point du bord de Shilov de U .

Chapitre 6

Modèles formels d'une courbe analytique en théorie de Berkovich

6.1 Une alternative pour les courbes irréductibles compactes

(6.1.1) Lemme. *Soit \mathcal{X} une courbe algébrique projective irréductible, munie d'un morphisme fini et dominant sur \mathbb{P}_k^1 dont on note φ l'analytifié. Soit x un point de \mathcal{X}^{an} dont l'image par φ est égale à η_r pour un certain $r > 0$, et soit Ω une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ telle que $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x)_{\subset \Omega}$ soit un singleton et telle que $\varphi^{-1}(\infty) \subset \Omega$; soit \mathbb{D} le disque fermé de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ de centre 0 et de rayon r . Le compact $\mathcal{X}^{\text{an}} - \Omega$ est alors une composante connexe de $\varphi^{-1}(\mathbb{D})$.*

Démonstration. La question étant purement topologique, on peut remplacer \mathcal{X} par \mathcal{X}_{red} , auquel cas le morphisme φ est plat. Si V est une composante connexe de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus \{x\}$ qui n'est pas égale à Ω , il résulte de nos hypothèses que $\infty \notin \varphi(V)$; on déduit alors du lemme 4.2.1 que $\varphi(V)$ est une composante connexe de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}} \setminus \{\eta_r\}$; comme elle ne contient pas ∞ , cette composante est incluse dans \mathbb{D} . Il s'ensuit, compte-tenu du fait que $\varphi(x) = \eta_r \in \mathbb{D}$, que le compact $\mathcal{X}^{\text{an}} - \Omega$ est contenu dans $\varphi^{-1}(\mathbb{D})$.

Posons $U = \mathbb{P}_k^{1, \text{an}} - \mathbb{D}$. Par ce qui précède, $\varphi^{-1}(U) \subset \Omega$; si b désigne l'unique branche de $\mathbb{P}_k^{1, \text{an}}$ issue de η_r et contenue dans U , chacune des branches de \mathcal{X}^{an} située au-dessus de b est contenue dans Ω ; comme il existe par ailleurs au moins une branche de \mathcal{X}^{an} issue de x et située au-dessus de b , on en déduit que l'unique branche β de \mathcal{X}^{an} issue de x et contenue dans Ω vérifie l'égalité $\varphi(\beta) = b$. Par conséquent, il existe une section V de β telle que $\varphi(V)$ soit une section de b ; on a en particulier $\varphi(V) \subset U$.

Puisque β est la seule branche de \mathcal{X}^{an} qui soit issue de x et contenue dans Ω , le fermé $\Omega - V$ de Ω est également fermé dans \mathcal{X}^{an} ; on en déduit que le compact connexe $\mathcal{X}^{\text{an}} - \Omega$ est ouvert dans $\mathcal{X}^{\text{an}} - V$; comme $\varphi(V) \subset U$, l'on a $\varphi^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{X}^{\text{an}} - V$; par conséquent, $\mathcal{X}^{\text{an}} - \Omega$ est ouvert et fermé dans $\varphi^{-1}(\mathbb{D})$; étant de surcroît connexe et non vide, $\mathcal{X}^{\text{an}} - \Omega$ est une composante connexe de $\varphi^{-1}(\mathbb{D})$. \square

(6.1.2) Proposition. Soit \mathcal{X} une k -courbe algébrique projective et soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts deux à deux disjoints de \mathcal{X}^{an} possédant les propriétés suivantes :

- i) chacun des Ω_i est connexe, normal et non vide ;
- ii) pour tout i , le bord topologique de Ω_i dans \mathcal{X}^{an} est un singleton $\{x_i\}$, où le point x_i est de type 2 ou 3, et $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, x_i)_{\subset \Omega_i}$ est également un singleton ;
- iii) pour toute composante irréductible \mathcal{Y} de \mathcal{X} , il existe un indice i tel que $\Omega_i \cap \mathcal{Y}^{\text{an}} \neq \emptyset$.

Sous ces hypothèses $\mathcal{X}^{\text{an}} - \coprod \Omega_i$ est un domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} .

Démonstration. Commençons par quelques remarques. Pour tout i , l'ouvert Ω_i est normal, et chacun de ses points appartient donc à l'analytification d'une unique composante irréductible de \mathcal{X} ; comme Ω_i est par ailleurs connexe, il s'ensuit qu'il existe une composante irréductible \mathcal{Y} de \mathcal{X} telle que $\Omega_i \subset \mathcal{Y}^{\text{an}}$, et telle que Ω_i ne rencontre l'analytification d'aucune autre composante irréductible de \mathcal{X} .

Il en résulte notamment que dans l'énoncé de la condition iii), l'on peut remplacer « $\Omega_i \cap \mathcal{Y}^{\text{an}} \neq \emptyset$ » par « $\Omega_i \subset \mathcal{Y}^{\text{an}}$ ».

Par ailleurs, $\mathcal{X}^{\text{an}} - \coprod \Omega_i$ est, d'après la proposition 4.2.14, un domaine analytique de \mathcal{X}^{an} ; il reste à s'assurer qu'il est affinoïde.

(6.1.2.1) Réduction au cas où la valeur absolue de k n'est pas triviale. Soit \mathbf{r} un polyrayon k -libre ; après extension des scalaires à $k_{\mathbf{r}}$, toute composante irréductible de \mathcal{X} reste irréductible et \mathcal{X} reste réduite. Fixons un indice i . L'ouvert $\Omega_{i,\mathbf{r}}$ de $\mathcal{X}_{\mathbf{r}}^{\text{an}}$ est connexe et normal ; par ailleurs, l'hypothèse ii) assure l'existence d'un ensemble cofinal \mathcal{H} de compacts de Ω_i tels que $\Omega_i - \mathcal{K}$ soit connexe pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{H}$. Si $\mathcal{K} \in \mathcal{H}$, son image réciproque $\mathcal{K}_{\mathbf{r}}$ sur $\Omega_{i,\mathbf{r}}$ est un compact, et $\{\mathcal{K}_{\mathbf{r}}\}_{\mathcal{K} \in \mathcal{H}}$ est un ensemble cofinal de compacts de $\Omega_{i,\mathbf{r}}$; pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{H}$ l'ouvert $\Omega_{i,\mathbf{r}} - \mathcal{K}_{\mathbf{r}}$ est égal à $(\Omega_i - \mathcal{K})_{\mathbf{r}}$ et est de ce fait connexe ; il s'ensuit que le bord de $\Omega_{i,\mathbf{r}}$ dans le graphe compact $\mathcal{X}_{\mathbf{r}}^{\text{an}}$ est un singleton $\{y_i\}$, et que $\Omega_{i,\mathbf{r}}$ contient une et une seule branche issue de y_i .

Soit σ la section de Shilov de $\mathcal{X}_{\mathbf{r}}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$; le point x_i adhère à Ω_i ; il en résulte que $\sigma(x_i)$ adhère à $\Omega_{i,\mathbf{r}}$, et appartient de ce fait à son bord (puisque $x_i \notin \Omega_i$). Par conséquent, $y_i = x_i$, et le point y_i est donc de type 2 ou 3.

Par ailleurs, en vertu de la proposition 3.2.25, $\mathcal{X}^{\text{an}} - \coprod \Omega_i$ est un domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} si et seulement si $\mathcal{X}_{\mathbf{r}}^{\text{an}} - \coprod \Omega_{i,\mathbf{r}}$ est un domaine affinoïde de $\mathcal{X}_{\mathbf{r}}^{\text{an}}$.

Les faits qui précèdent autorisent, quitte à étendre les scalaires à $k_{\mathbf{r}}$ pour n'importe quel polyrayon k -libre non vide \mathbf{r} , à supposer que $|k^{\times}| \neq \{1\}$.

(6.1.2.2) Soit \mathcal{J} l'ensemble des parties J de I satisfaisant la condition suivante : pour toute composante irréductible \mathcal{Y} de \mathcal{X} il existe un et un seul $j \in J$ tel que $\Omega_j \subset \mathcal{Y}^{\text{an}}$; on a

$$\mathcal{X}^{\text{an}} - \prod_{i \in I} \Omega_i = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \left(\mathcal{X}^{\text{an}} - \prod_{j \in J} \Omega_j \right).$$

Comme l'intersection d'une famille finie de domaines affinoïdes de l'espace séparé \mathcal{X}^{an} est encore un domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} , on se ramène à traiter le

cas où pour toute composante irréductible \mathcal{Y} de \mathcal{X} il existe un *et un seul* $i \in I$ tel que $\Omega_i \subset \mathcal{Y}^{\text{an}}$.

Si $i \in I$ on désignera désormais par \mathcal{X}_i la composante irréductible de \mathcal{X} dont l'analytification contient Ω_i ; les \mathcal{X}_i sont deux à deux distinctes et toute composante irréductible de \mathcal{X} est l'une d'entre elles.

(6.1.2.3) Pour tout i , il existe, en vertu du *Nullstellensatz*, un point rigide P_i sur Ω_i . Chaque P_i définit (par normalité de Ω_i) un diviseur de Cartier, et donc un fibré en droites $\mathcal{O}(P_i)$, sur \mathcal{X} . Si \mathcal{L} désigne le fibré $\bigotimes \mathcal{O}(P_i)$ l'on a pour tout entier n une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n-1} \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n} \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{L}|_{P_i} \rightarrow 0.$$

Comme $\{P_i\}$ rencontre toutes les composantes irréductibles de \mathcal{X} , le fibré \mathcal{L} est ample, et $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n-1})$ est donc nul pour n suffisamment grand; il s'ensuit que si n est suffisamment grand, il existe une section globale de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ qui ne s'annule en aucun des P_i ; celle-ci peut s'interpréter comme une fonction f sur le schéma affine $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \setminus \{P_i\}_i$ qui possède un pôle en chacun des P_i ; pour tout i , l'on pose $\mathcal{X}'_i = \mathcal{X}' \cap \mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i \setminus \{P_i\}$.

Fixons $j \in I$; soit g une fonction sur \mathcal{X}' nulle sur chacune des \mathcal{X}'_i pour $i \neq j$ et dont la restriction à \mathcal{X}'_j est génériquement inversible. Cette dernière condition implique, x_j étant de type 2 ou 3, que $g(x_j) \neq 0$. Comme $|k^\times| \neq \{1\}$, il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $|\lambda| < |g(x_j)|$; si N est un entier suffisamment grand alors $|f(x_i)| \cdot |\lambda|^N < |f(x_j)| \cdot |g(x_j)|^N$ pour tout $i \neq j$; choisissons un tel N et posons $h = f(g + \lambda)^N$. Par construction, h est une fonction sur \mathcal{X}' qui possède un pôle en chacun des P_i et qui est telle que $|h(x_i)| < |h(x_j)|$ pour tout $j \neq i$.

La fonction h induit un morphisme fini de \mathcal{X} vers \mathbb{P}_k^1 dont la restriction à chacune des \mathcal{X}_i est dominante, et dont on note φ l'analytification; on a $\varphi^{-1}(\infty) = \{P_i\}_{i \in I}$. Soit T la fonction coordonnée sur \mathbb{P}_k^1 ; par choix de h , l'on a $|T(\varphi(x_i))| < |T(\varphi(x_j))|$ pour tout $i \neq j$. Choisissons un ensemble fini \mathcal{E} de points rigides de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ tel que $\{0, \infty\} \subset \mathcal{E}$ et tel que l'enveloppe convexe Γ de \mathcal{E} contienne chacun des $\varphi(x_i)$, et soit \mathfrak{m} un polynôme de $k[T]$ dont \mathcal{E} est le lieu ensembliste des zéros. Le polynôme \mathfrak{m} induit un morphisme fini et plat $\mu : \mathbb{P}_k^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ tel que $\mu^{-1}(\infty) = \{\infty\}$; comme $|\mathfrak{m}|$ est localement constante en dehors de Γ et strictement croissante sur Γ lorsqu'on oriente celui-ci vers ∞ , l'image par μ de Γ est l'intervalle $[0; \infty]$. Dès lors, $\mu(\varphi(x_i))$ est pour tout i de la forme η_{r_i} pour un certain $r_i > 0$; de plus, l'inégalité $|T(\varphi(x_i))| < |T(\varphi(x_j))|$, valable pour tout $i \neq j$, garantit que quitte à augmenter suffisamment l'exposant de T dans le polynôme \mathfrak{m} (sans toucher à ses autres facteurs irréductibles), on peut faire en sorte que $|\mathfrak{m}(\varphi(x_i))| < |\mathfrak{m}(\varphi(x_j))|$ pour tout $i \neq j$, c'est-à-dire que $r_i < r_j$ pour tout $i \neq j$.

La considération du morphisme composé $\mu \circ \varphi$ conduit à l'énoncé suivant, dans lequel on réintroduit l'indice j dans les notations – comme nous l'avions fixé, nous l'en avons provisoirement banni : *pour tout indice j il existe une application $r_j : I \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ dont le maximum est atteint en j et un morphisme fini $\psi_j : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$, dont la restriction à chaque \mathcal{X}_i est dominante, et qui possède les deux propriétés suivantes :*

i) $\psi_j^{-1}(\infty) = \{P_i\}_{i \in I}$;

ii) $\psi_j(x_i) = \eta_{r_j(i)}$ pour tout i .

Pour tout réel strictement positif r , on note \mathbb{D}_r le disque fermé de centre 0 et de rayon r .

(6.1.2.4) Fixons j . En vertu du corollaire 6.1.1, le compact $\mathcal{X}_i^{\text{an}} - \Omega_i$ est pour tout i une composante connexe de $\psi_j^{-1}|_{\mathcal{X}_i^{\text{an}}}(\mathbb{D}_{r_j(i)})$; comme $r_j(i) \leq r_j(j)$, cela implique que $\mathcal{X}_i^{\text{an}} - \Omega_i \subset \psi_j^{-1}|_{\mathcal{X}_i^{\text{an}}}(\mathbb{D}_{r_j(j)})$.

Si $i \in I$, l'on désigne par $V_{i,j}$ la composante connexe de $\psi_j^{-1}(\mathbb{D}_{r_j(j)})$ qui contient $\mathcal{X}_i^{\text{an}} - \Omega_i$. On a vu ci-dessus que $\mathcal{X}_j^{\text{an}} - \Omega_j$ est une composante connexe de $\psi_j^{-1}|_{\mathcal{X}_j^{\text{an}}}(\mathbb{D}_{r_j(j)})$; les composantes connexes de $\psi_j^{-1}(\mathbb{D}_{r_j(j)})$ qui rencontrent $\mathcal{X}_j^{\text{an}}$ sont donc d'une part $V_{j,j}$, et d'autre part les composantes connexes de $\psi_j^{-1}|_{\mathcal{X}_j^{\text{an}}}(\mathbb{D}_{r_j(j)})$ qui sont contenues dans Ω_j , et qui à ce titre ne peuvent coïncider avec l'une des $V_{i,j}$.

Par conséquent, si l'on appelle W_j la réunion des $V_{i,j}$ pour i dans I , alors W_j est un domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} qui vérifie les propriétés suivantes :

- $W_j \cap \mathcal{X}_i^{\text{an}} \supset \mathcal{X}_i^{\text{an}} - \Omega_i$ pour tout i ;
- $W_j \cap \mathcal{X}_j^{\text{an}} = \mathcal{X}_j^{\text{an}} - \Omega_j$.

On en déduit que $\bigcap_{j \in I} W_j = \mathcal{X}^{\text{an}} - \prod_{j \in I} \Omega_j$; comme chaque W_j est un domaine affinoïde de l'espace séparé \mathcal{X}^{an} , le compact $\mathcal{X} - \prod_{j \in I} \Omega_j$ est un domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} . \square

(6.1.3) Théorème. Soit X une courbe k -analytique compacte et soit S son bord analytique.

A) Si X est génériquement quasi-lisse, il existe une k -courbe algébrique projective \mathcal{X} et un isomorphisme entre X et un domaine analytique de \mathcal{X}^{an} .

B) Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) X est affinoïde;
- 2) S rencontre toutes les composantes irréductibles de X .

Démonstration. L'implication 1) \Rightarrow 2) de l'assertion B) est triviale; il suffit donc de démontrer A) et l'implication 2) \Rightarrow 1).

(6.1.3.1) Preuve de A). On suppose donc X génériquement quasi-lisse. Soit $x \in S$. Comme X est quasi-lisse en x , il existe une courbe k -analytique lisse Y_x et un voisinage V_x de x dans X tel que V_x s'identifie à un domaine analytique fermé de Y_x ; fixons un voisinage affinoïde Z_x de x dans Y_x ; l'intersection $W_x := V_x \cap Z_x$ s'identifie à un voisinage analytique compact de x dans X .

Comme S est fini l'on peut, en restreignant suffisamment chacun des Z_x , supposer que les W_x (vus comme domaines analytiques de X) sont deux à deux disjoints. Soit X' la courbe obtenue en recollant $\prod Z_x$ et X le long de $\prod W_x$; c'est une courbe k -analytique dont X est naturellement un domaine analytique fermé, et dont le bord analytique ne rencontre pas X .

Comme le bord analytique de X' ne rencontre pas X , le bord topologique de X dans X' coïncide avec le bord analytique de X , c'est-à-dire avec S . On

peut restreindre X' de manière à ce que son bord analytique soit vide, à ce que toutes ses composantes connexes rencontrent S , et, en vertu de l'assertion iii) de la proposition 4.2.4, à ce que l'ouvert $X' - X$ ait un nombre fini de composantes connexes (qui sont alors nécessairement des composantes connexes de $X' \setminus S$). Sous ces hypothèses, le théorème 4.1.2 fournit une identification entre X et une partie compacte de l'analytification \mathcal{X}^{an} d'une k -courbe projective et génériquement lisse \mathcal{X} , modulo laquelle sont satisfaites les conditions suivantes :

- il existe un sous-ensemble fini et non vide \mathcal{B} de $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, S)$ tel que l'ouvert $\mathcal{X}^{\text{an}} - X$ s'écrive comme une réunion finie disjointe $\coprod_{b \in \mathcal{B}} \Omega_b$, où chaque Ω_b est une composante connexe normale de $\mathcal{X}^{\text{an}} \setminus S$;
- pour tout b l'ensemble $\text{br}(\mathcal{X}^{\text{an}}, S)_{\subset \Omega_b}$ est le singleton $\{b\}$;
- il existe un voisinage ouvert de X dans \mathcal{X}^{an} qui est isomorphe à un voisinage ouvert de X dans X' (ce qui entraîne que le bord topologique de X dans \mathcal{X}^{an} est égal à S .)

Il découle alors de la proposition 4.2.14 que X est un domaine analytique compact de \mathcal{X}^{an} , ce qui achève de montrer A).

(6.1.3.2) *Preuve de 2) \Rightarrow 1) dans le cas génériquement quasi-lisse.* On suppose toujours que X est génériquement quasi-lisse, on conserve les notations \mathcal{X} et Ω_b du 6.1.3.1 ci-dessus, et l'on suppose de plus que 2) est satisfaite; nous allons montrer que sous cette dernière hypothèse, X est un domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} .

Soit \mathcal{Y} une composante irréductible de \mathcal{X} ; vérifions qu'il existe au moins une branche b dans \mathcal{B} telle que $\Omega_b \cap \mathcal{Y}^{\text{an}} \neq \emptyset$. On suppose que ce n'est pas le cas. Le compact \mathcal{Y}^{an} ne rencontrant alors aucun des Ω_b , il est contenu dans X ; c'en est un fermé de Zariski irréductible et de dimension 1, et partant une composante irréductible; mais ceci implique, en vertu de l'hypothèse 2), que $S \cap \mathcal{Y}^{\text{an}} \neq \emptyset$. Choisissons $x \in \mathcal{Y}^{\text{an}} \cap S$. Appartenant à S , le point x est un point lisse de \mathcal{X}^{an} ; par conséquent, \mathcal{Y}^{an} est un voisinage de x dans \mathcal{X}^{an} . Comme S est exactement le bord topologique de X dans \mathcal{X}^{an} , il existe $b \in \mathcal{B}$ telle que x adhère à Ω_b ; dès lors, le voisinage \mathcal{Y}^{an} de x rencontre Ω_b , ce qui est absurde.

Les hypothèses de la proposition 6.1.2 sont donc vérifiées; par conséquent, $X = \mathcal{X}^{\text{an}} - \coprod \Omega_b$ est un domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} .

(6.1.3.3) *Preuve de 2) \Rightarrow 1) dans le cas général.* On ne suppose plus que X est génériquement quasi-lisse, et l'on se place sous l'hypothèse 2).

Comme X est compacte, il existe une extension complète F de k , qui est égale à k si celui-ci est de caractéristique nulle, et de la forme k^{1/p^n} pour un certain $n \in \mathbb{N}$ sinon, telle que $X_{F, \text{red}}$ soit géométriquement réduite.

Si $x \in X$, il possède un unique antécédent x_F sur X_F ; les extensions $\widetilde{F}_{\text{gr}}/\widetilde{k}_{\text{gr}}$ et $\widetilde{\kappa}(x_F)_{\text{gr}}/\widetilde{\kappa}(x)_{\text{gr}}$ étant radicielles, $\mathbb{P}_{\widetilde{\kappa}(x_F)_{\text{gr}}/\widetilde{F}_{\text{gr}}} \rightarrow \mathbb{P}_{\widetilde{\kappa}(x)_{\text{gr}}/\widetilde{k}_{\text{gr}}}$ est un homéomorphisme; combiné au critère de Temkin, ce fait assure que x appartient au bord analytique de X si et seulement si x_F appartient au bord analytique de $X_{F, \text{red}}$.

Il s'ensuit que l'espace F -analytique $X_{F, \text{red}}$ satisfait lui aussi 2); en vertu du cas génériquement quasi-lisse déjà traité au 6.1.3.2, $X_{F, \text{red}}$ est affinoïde. On déduit alors du théorème 3.2.27 que X_F est affinoïde, puis du théorème 3.2.26 que X lui-même est affinoïde. \square

(6.1.4) Corollaire. *Si X est une courbe k -analytique compacte et irréductible, alors X est ou bien projective, ou bien affinoïde. \square*

6.2 Quelques compléments

Branches non discales, nœuds du squelette analytique et morphismes finis

(6.2.1) Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse, soit $x \in X_{[23]}$ et soit $b \in \text{br}(X, x)$. On dira que la branche b est *discale (relativement à X)* si la composante connexe U de $X \setminus \{x\}$ contenant b est un disque. Notons que comme b est issue de x , le point x appartient à ∂U . Il s'ensuit, en vertu de la proposition 5.1.18, que b est discale sauf si l'une au moins des trois propriétés suivantes est satisfaite :

- $\overline{U} = U \cup \{x\}$ n'est pas compacte ;
- \overline{U} n'est pas un arbre, c'est-à-dire encore contient une boucle ;
- U contient un point de genre strictement positif.

(6.2.2) Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse, soit $x \in \text{S}^{\text{an}}(X)$ et soit $b \in \text{br}(\text{S}^{\text{an}}(X), x)$. La branche b est alors non discale. En effet, soit U la composante connexe de $X \setminus \{x\}$ contenant b . Comme $b \in \text{br}(\text{S}^{\text{an}}(X), x)$, il existe un intervalle ouvert I contenu dans $\text{S}^{\text{an}}(X)$, aboutissant proprement à x et définissant b . Cet intervalle est nécessairement contenu dans U , et l'inclusion $I \subset \text{S}^{\text{an}}(X)$ assure que U ne peut être un disque.

(6.2.3) Lemme. *Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse et soit $x \in X_{[23]}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) le point x est un nœud de $\text{S}^{\text{an}}(X)$;
- ii) ou bien le point x est de genre strictement positif, ou bien il appartient à $\partial^{\text{an}} X$, ou bien il existe trois branches deux à deux distinctes dans $\text{br}(X, x)$ qui sont non discales.

Démonstration. Supposons que x soit un nœud de $\text{S}^{\text{an}}(X)$, qu'il n'appartienne pas à $\partial^{\text{an}} X$ et soit de genre zéro. C'est alors un sommet topologique de $\text{S}^{\text{an}}(X)$. En vertu du corollaire 5.1.20, la valence de $(\text{S}^{\text{an}}(X), x)$ vaut au moins 2 ; comme x est un sommet, elle vaut au moins 3, et il existe donc au moins trois éléments distincts dans $\text{br}(\text{S}^{\text{an}}(X), x)$, qui peuvent être vues comme trois branches deux à deux distinctes issues de x . En vertu de 6.2.2, elles sont non discales, ce qui achève de montrer que i) \Rightarrow ii).

Supposons maintenant que ii) soit vraie. Si x est de genre strictement positif ou appartient à $\partial^{\text{an}} X$, il appartient à $\text{S}^{\text{an}}(X)$ puisqu'il ne peut être situé sur un disque, et est alors par définition un nœud de $\text{S}^{\text{an}}(X)$. Supposons maintenant qu'il existe trois branches deux à deux distinctes dans $\text{br}(X, x)$ qui sont non discales.

Le point x appartient à $\text{S}^{\text{an}}(X)$. Supposons en effet le contraire. Le point x est alors contenu dans un ouvert U de X qui est un disque, et si ω désigne l'unique bout de ce dernier alors toutes les composantes connexes de $U \setminus \{x\}$ à l'exception de celle contenant $]x; \omega[$ sont des disques ; comme elles sont

relativement compactes dans U , ce sont encore des composantes connexes de $X \setminus \{x\}$, et $\text{br}(X, x) = \text{br}(U, x)$ compte ainsi au plus une branche qui n'est pas discale relativement à X , à savoir éventuellement celle définie par $]x; \omega[$; on aboutit donc à une contradiction.

Le point x est un sommet topologique, et en particulier un nœud, de $S^{\text{an}}(X)$. En effet, dans le cas contraire, il existerait un intervalle ouvert I tracé sur $S^{\text{an}}(X)$, ouvert et relativement compact dans ce dernier, et n'en contenant aucun nœud. Si X' désigne la composante connexe de X contenant x alors comme $S^{\text{an}}(X') = S^{\text{an}}(X) \cap X'$ est non vide, $S^{\text{an}}(X)'$ est un sous-graphe analytiquement admissible de X' , et il découle de 5.1.12.3 que I^b est une couronne. Si I' et I'' désignent les deux composantes connexes de $I \setminus \{x\}$ alors toutes les composantes connexes de $I^b \setminus \{x\}$ à l'exception de celle contenant I' et I'' sont des disques; comme elles sont relativement compactes dans I^b , ce sont encore des composantes connexes de $X \setminus \{x\}$, et $\text{br}(X, x) = \text{br}(I^b, x)$ compte ainsi au plus deux branches qui ne sont pas discales relativement à X , à savoir éventuellement celles définies par I' et I'' . On aboutit donc à une contradiction. \square

(6.2.4) Lemme. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme fini et plat entre courbes $\widehat{k^a}$ -analytiques quasi-lisses, soit $y \in Y_{[23]}$ et soit x son image sur X . Soit b appartenant à $\text{br}(Y, y)$. Si b est discale, $\varphi(b)$ l'est également.*

Démonstration. On prouve la contraposée; on suppose donc que $\varphi(b)$ n'est pas discale, et nous allons montrer que b ne l'est pas non plus. On désigne par U la composante connexe de $X \setminus \{x\}$ qui contient $\varphi(b)$, par V la composante connexe de $\varphi^{-1}(U)$ qui contient b , et par V' la composante connexe de $Y \setminus \{y\}$ qui contient b (ou V , ce qui revient au même). Comme $\varphi(b)$ n'est pas discale, plusieurs cas peuvent se présenter, que l'on traite séparément.

Premier cas : la composante U contient un point $z \in \partial^{\text{an}}X$. Comme φ est fini et plat, V se surjecte sur U , et il existe donc un antécédent t de z sur V ; la finitude de φ assure que $t \in \partial^{\text{an}}Y$. Ainsi, V' rencontre $\partial^{\text{an}}Y$ et b n'est pas discale.

Deuxième cas : la composante U contient un point z de genre strictement positif. Là encore, z possède un antécédent t sur V . Comme z est de type 2, t est de type 2; comme le genre du corps résiduel $\mathcal{H}(x)$ est strictement positif, celui de $\mathcal{H}(t)$ l'est aussi par le théorème de Lüroth. Ainsi, V' contient un point de genre strictement positif, et b n'est pas discale.

Troisième cas : il existe une boucle C tracée sur \overline{U} . L'image réciproque C' de C sur Y est un graphe localement fini et la surjection $C' \rightarrow C$ est injective par morceaux (th. 4.5.20 et th. 4.5.19); par compacité de φ , le graphe C' est compact et fini. Comme $C' \rightarrow C$ est ouverte et comme C est un cercle, le graphe C' ne comprend que des points pluribranches. Par conséquent, $C' \cap (V' \cup \{y\})$ est un sous-graphe compact et fini du graphe connexe $V' \cup \{y\}$ qui rencontre V' (puisque C rencontre U) et dont tous les points situés sur V' sont pluribranches. Cela implique que C' contient une boucle, et b n'est pas discale.

Quatrième cas : \overline{U} est non compacte. Le fermé \overline{U} de X est contenu dans $\varphi(\overline{V'})$, qui ne peut dès lors pas être compact. Par conséquent $\overline{V'}$ n'est pas compact, et b n'est pas discale. \square

(6.2.5) Proposition. Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme fini et plat entre courbes $\widehat{k^a}$ -analytiques quasi-lisses, soit $y \in Y$ et soit x son image sur X . Supposons que x est un nœud de $S^{\text{an}}(X)$. Dans ce cas y est un nœud de $S^{\text{an}}(Y)$.

Démonstration. Comme x est un nœud de $S^{\text{an}}(X)$ on se trouve nécessairement dans l'un des trois cas suivants.

Premier cas : le point x appartient à $\partial^{\text{an}}X$. Dans ce cas $y \in \partial^{\text{an}}Y$ et y est un nœud de $S^{\text{an}}(Y)$.

Deuxième cas : le point x est de genre strictement positif. Dans ce cas il est de type 2, et y aussi; comme le genre du corps résiduel $\widehat{\mathcal{H}}(x)$ est strictement positif, celui de $\widehat{\mathcal{H}}(y)$ l'est aussi par le théorème de Lüroth. Ainsi, y est de genre strictement positif et est donc un nœud de $S^{\text{an}}(Y)$.

Troisième cas : il existe au moins trois branches de X issues de x qui sont non discales. Si b est une branche issue de x , elle est de la forme $\varphi(\beta)$ pour une certaine $\beta \in \text{br}(Y, y)$ et si b est non discal alors β est non discal en vertu du lemme 6.2.4. Il s'ensuit qu'il existe au moins trois branches de Y issues de y qui sont non discales, et y est un nœud de $S^{\text{an}}(Y)$. \square

6.3 Espaces analytiques formels

(6.3.1) Soit X un espace k -affinoïde; nous dirons qu'un domaine analytique Y de X est *spécial* si Y est réunion finie de domaines affinoïdes de X de la forme

$$\mathcal{D}(f) := \{\xi \in X, |f(\xi)| = \|f\|_\infty\},$$

où f est une fonction analytique sur X et où $\|f\|_\infty$ désigne sa semi-norme spectrale.

Il revient au même de demander que Y soit l'image réciproque par la flèche de spécialisation d'un ouvert de Zariski de la réduction graduée $\widetilde{X}_{\text{gr}}$ de X .

Tout domaine analytique spécial de X est compact. Toute réunion (resp. intersection finie) de domaines spéciaux de X est un domaine spécial de X .

(6.3.2) Soit X un espace k -analytique. Un *atlas affinoïde formel* sur X est un ensemble \mathcal{E} de domaines affinoïdes de X telle que :

- i) \mathcal{E} constitue un G-recouvrement de X ;
- ii) pour tout couple (V, W) d'éléments de \mathcal{E} l'intersection $V \cap W$ est un domaine analytique spécial de V et de W .

On dit que deux atlas affinoïdes formels \mathcal{E} et \mathcal{E}' sur X sont *équivalents* si leur réunion est un atlas affinoïde formel; il revient au même de demander que pour tout couple (V, W) formé d'un élément de \mathcal{E} et d'un élément de \mathcal{E}' , l'intersection $V \cap W$ soit un domaine formel de V et de W . On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas affinoïdes formels de X .

Un atlas affinoïde formel sur X est dit *maximal* s'il est maximal pour l'inclusion (en tant que sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$) parmi tous les atlas affinoïdes formels de X ; toute classe d'équivalence d'atlas affinoïdes formels possède un unique élément maximal, à savoir la réunion de tous les atlas qu'elle contient.

(6.3.3) Un *espace k -analytique formel* est un couple (X, \mathfrak{A}) où X est un espace k -analytique et \mathfrak{A} un atlas affinoïde formel maximal de X .

(6.3.4) Soit X un espace affinoïde et soit \mathfrak{A} l'atlas affinoïde formel maximal équivalent à $\{X\}$; il est immédiat que \mathfrak{A} est l'ensemble des domaines affinoïdes spéciaux de X . On dira que \mathfrak{A} est l'atlas affinoïde formel *canonique* de X , et que (X, \mathfrak{A}) est l'espace k -analytique formel *canoniquement associé* à X .

(6.3.5) Si (X, \mathfrak{A}) est un espace k -analytique formel et si L est une extension complète de k , l'espace X_L hérite d'une structure naturelle d'espace L -analytique formel : c'est celle définie par l'atlas maximal équivalent à $\{V_L\}_V$, où V parcourt \mathfrak{A} ; cet atlas sera noté \mathfrak{A}_L .

(6.3.6) Soit X un espace k -affinoïde et soit f une fonction analytique sur X . La flèche induite $\widetilde{\mathcal{D}(f)}_{\text{gr}} \rightarrow \widetilde{X}_{\text{gr}}$ entre les réductions *graduées* des espaces en jeu identifie $\widetilde{\mathcal{D}(f)}_{\text{gr}}$ à l'ouvert de Zariski $D(\widetilde{f}_{\text{gr}})$ de $\widetilde{X}_{\text{gr}}$; il en résulte que si $x \in \mathcal{D}(f)$ alors x appartient au bord de Shilov de $\mathcal{D}(f)$ si et seulement si il appartient au bord de Shilov de X .

(6.3.7) Soit X un espace k -analytique, soit \mathfrak{A} un atlas affinoïde formel sur X (non nécessairement maximal), soit $x \in X$ et soient V et W deux éléments de \mathfrak{A} . Supposons que $x \in V \cap W$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- i) le point x appartient au bord de Shilov de V ;
- ii) le point x appartient au bord de Shilov de W .

Pour le voir il suffit, par symétrie, de montrer que i) \Rightarrow ii). Supposons donc que i) soit vraie; choisissons deux domaines affinoïdes V' et W' de $V \cap W$ qui contiennent x , le premier (resp. le second) étant de la forme $\mathcal{D}(f)$ (resp. $\mathcal{D}(g)$) où f (resp. g) est une fonction analytique sur V (resp. W).

On déduit successivement du 6.3.6 : que x appartient au bord de Shilov de V' ; qu'il appartient au bord de Shilov de $V' \cap W' = \mathcal{D}(g|_{V'})$; qu'il appartient au bord de Shilov de W' , puisque $V' \cap W' = \mathcal{D}(f|_{W'})$; et enfin, qu'il appartient au bord de Shilov de W , ce qu'on souhaitait établir.

Ainsi, si x est un point de X , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) il existe $V \in \mathfrak{A}$ tel que x appartienne au bord de Shilov de V ;
- b) pour tout $V \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in V$, le point x appartient au bord de Shilov de V .

Si elles sont satisfaites, nous dirons que x est un *sommet* de \mathfrak{A} . L'ensemble des sommets de \mathfrak{A} est une partie fermée et discrète de X : cela provient du fait que X est G -recouvert par les domaines affinoïdes appartenant à \mathfrak{A} , et de la finitude du bord de Shilov d'un tel domaine.

Si \mathfrak{B} est un atlas affinoïde formel sur X qui est équivalent à \mathfrak{A} , l'ensemble des sommets de \mathfrak{A} est égal à celui des sommets de \mathfrak{B} . Pour le voir il suffit, par symétrie, de s'assurer que tout sommet de \mathfrak{A} est un sommet de \mathfrak{B} . Soit donc x un sommet de \mathfrak{A} , et soit V (resp. W) un élément de \mathfrak{A} (resp. \mathfrak{B}) contenant x . Comme x est un sommet de \mathfrak{A} , il appartient au bord de Shilov de V . En appliquant l'équivalence entre les assertions a) et b) ci-dessus à l'atlas $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, on voit que x appartient au bord de Shilov de W ; par conséquent, c'est un sommet de \mathfrak{B} .

Si X est un espace affinoïde et si \mathfrak{A} désigne son atlas affinoïde formel canonique, on déduit de ce qui précède que l'ensemble des sommets de \mathfrak{A} coïncide avec l'ensemble des sommets de l'atlas $\{X\}$, autrement dit avec le bord de Shilov de X .

(6.3.8) Soit (X, \mathfrak{A}) un espace k -analytique formel. Comme un espace k -affinoïde est strictement k -affinoïde si et seulement si la semi-norme spectrale de son algèbre de fonctions est à valeurs dans le monoïde $\{0\} \cup \sqrt{|k^\times|}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un atlas affinoïde formel sur X contenu dans \mathfrak{A} et dont les éléments sont strictement k -affinoïdes ;
- ii) pour tout sommet x de \mathfrak{A} , on a $|\mathcal{H}(x)^\times| \subset \sqrt{|k^\times|}$;
- iii) tout élément de \mathfrak{A} est strictement k -affinoïde.

Si ces conditions sont satisfaites, on dira que (X, \mathfrak{A}) est un espace *strictement k -analytique formel*.

(6.3.9) Soit (X, \mathfrak{A}) un espace strictement k -analytique formel. On peut lui associer un schéma formel $\widehat{(X, \mathfrak{A})}$, à savoir le k° -schéma formel plat obtenu par recollement des $\mathrm{Spf} \mathcal{O}_X(V)^\circ$ où V parcourt \mathfrak{A} .

(6.3.9.1) Le k° -schéma formel $\widehat{(X, \mathfrak{A})}$ n'est pas en général localement topologiquement de présentation finie ; mais il l'est toutefois dans chacune des deux situations suivantes :

- $|k^\times| = \{1\}$;
- X est réduit et $|k^\times|$ est libre de rang 1 ;
- X est réduit et k est algébriquement clos.

Si $\widehat{(X, \mathfrak{A})}$ est localement topologiquement de présentation finie alors X s'identifie à sa fibre générique $\widehat{(X, \mathfrak{A})}_\eta$.

(6.3.9.2) On définit par recollement des $\mathrm{Spec} (\mathcal{O}(V)^\circ / \mathcal{O}(V)^{\circ\circ})$ la *fibre spéciale* $\widehat{(X, \mathfrak{A})}_s$ de $\widehat{(X, \mathfrak{A})}$; c'est un schéma localement de type fini et réduit sur \tilde{k} .

On construit, également par recollement, une flèche dite *de spécialisation* $\rho : X \rightarrow \widehat{(X, \mathfrak{A})}_s$ qui est anticontinue.

(6.3.9.3) On prendra garde que si L est une extension complète de k , la flèche naturelle $\widehat{(X_L, \mathfrak{A}_L)} \rightarrow \widehat{(X, \mathfrak{A})}_{L^\circ}$ n'est pas un isomorphisme en général.

(6.3.9.4) Lorsque $|k^\times| \neq \{1\}$, on dira que l'espace strictement k -analytique formel (X, \mathfrak{A}) est *distingué* si chacun des éléments de \mathfrak{A} est distingué ; on peut se contenter de le tester sur les éléments de n'importe quel atlas affinoïde formel de X contenu dans \mathfrak{A} . Si (X, \mathfrak{A}) est distingué, le schéma formel $\widehat{(X, \mathfrak{A})}$ est localement topologiquement de présentation finie, et $\widehat{(X, \mathfrak{A})}_s$ s'identifie à $\widehat{(X, \mathfrak{A})} \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$; si de plus le \tilde{k} -schéma réduit $\widehat{(X, \mathfrak{A})}_s$ est *géométriquement réduit* (c'est automatiquement le cas si \tilde{k} est parfait), alors pour toute extension complète L de k l'espace L -analytique formel (X_L, \mathfrak{A}_L) est distingué, et $\widehat{(X_L, \mathfrak{A}_L)} \simeq \widehat{(X, \mathfrak{A})}_{L^\circ}$.

(6.3.9.5) Soit S l'ensemble des sommets de \mathfrak{A} ; considérons les trois conditions suivantes :

- α) X est réduit ;
- β) $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$ pour tout $x \in S$.
- γ) toute extension finie de k est sans défaut.

Remarquons que β) est satisfaite si $|k^\times|$ est divisible, et que γ) l'est si k est algébriquement clos ou de valuation discrète.

Supposons que $|k^\times| \neq \{1\}$. Alors pour que (X, \mathfrak{A}) soit distingué, il faut que α) et β) soient satisfaites, et il suffit que α), β) et γ) le soient. En particulier, si k est algébriquement clos et si X est réduit alors (X, \mathfrak{A}) est distingué.

(6.3.10) Soit \mathfrak{X} un k° -schéma formel localement topologiquement de présentation finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) \mathfrak{X} est de la forme $(\widehat{\mathfrak{X}_\eta}, \mathfrak{A})$ pour un certain atlas strictement k -analytique formel \mathfrak{A} sur \mathfrak{X}_η ;
- ii) \mathfrak{X} est plat et relativement normal dans \mathfrak{X}_η (si \mathfrak{X}_η est normal, cela revient à demander que \mathfrak{X} soit plat et normal).

On suppose qu'elles sont satisfaites.

(6.3.10.1) L'atlas \mathfrak{A} de i) est alors unique : c'est nécessairement l'ensemble $\text{Aff}(\mathfrak{X})$ des \mathfrak{U}_η , pour \mathfrak{U} parcourant l'ensemble des ouverts formels affines de \mathfrak{X} .

(6.3.10.2) Posons $\mathfrak{X}_{\tilde{k}} = \mathfrak{X} \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$; on dispose d'une flèche de réduction anti-continue $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_{\tilde{k}}$. Comme le faisceau $k^{\circ\circ} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de \mathfrak{X} , la fibre spéciale \mathfrak{X}_s est isomorphe à $(\mathfrak{X}_{\tilde{k}})_{\text{red}}$; on dispose en particulier d'une identification canonique entre les espaces topologiques \mathfrak{X}_s et $\mathfrak{X}_{\text{red}}$ modulo laquelle les flèches de réduction de $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_s$ et $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ coïncident.

(6.3.10.3) Si $|k^\times| \neq \{1\}$ alors l'espace \mathfrak{X}_η est réduit. Pour le voir, on se ramène aussitôt au cas où \mathfrak{X} est affine, donc égal à $\text{Spf } A$ pour une certaine k° -algèbre A plate, topologiquement de présentation finie, et relativement normale dans son localisé $A \otimes_{k^\circ} k$. Choisissons un épimorphisme $k^\circ\{T_1, \dots, T_n\} \rightarrow A$. Il induit un épimorphisme $k\{T_1, \dots, T_n\} \rightarrow A \otimes_{k^\circ} k$, et l'on note $\|\cdot\|$ la norme quotient correspondante; par définition de $\|\cdot\|$, on a $\|a\| \leq 1$ pour tout $a \in A$. Soit f un élément nilpotent de $A \otimes_{k^\circ} k$. Pour tout $\lambda \in k$ l'élément λf de $A \otimes_{k^\circ} k$ est nilpotent, et partant entier sur A ; il appartient dès lors à A . Ceci implique que $\|\lambda \cdot f\| \leq 1$ pour tout $\lambda \in k$, et donc que $\|f\| = 0$ puisque $|k^\times| \neq \{1\}$. Ainsi, $f = 0$ et $A \otimes_{k^\circ} k$ est réduit, ce qu'il fallait démontrer.

(6.3.10.4) On fait toujours l'hypothèse que $|k^\times| \neq \{1\}$. L'espace strictement k -analytique formel $(\mathfrak{X}_\eta, \text{Aff}(\mathfrak{X}))$ est alors distingué si et seulement si $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est réduit, c'est-à-dire égal à \mathfrak{X}_s .

(6.3.11) Soit (X, \mathfrak{A}) un espace k -analytique formel. Si X est purement de dimension d , alors pour tout sommet x de \mathfrak{A} l'on a

$$\text{deg. tr. } \widetilde{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}} + \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|) = d.$$

Dans le cas particulier où $d = 1$, cela signifie que x est de type 2 ou 3; dans cette situation, $|\mathcal{H}(x)^\times| \subset \sqrt{|k^\times|}$ si et seulement si x est de type 2.

Autrement dit, une courbe k -analytique formelle est *strictement* k -analytique formelle si et seulement si tous ses sommets sont de type 2.

(6.3.12) Soit (X, \mathfrak{A}) un espace k -analytique formel et soit S l'ensemble des sommets de \mathfrak{A} . Si Y est un sous-ensemble de X qui est réunion d'éléments de \mathfrak{A} , c'est un domaine analytique fermé de X : en effet, si $V \in \mathfrak{A}$ l'intersection $Y \cap V$ est alors réunion de domaines analytiques spéciaux de V , et est dès lors un domaine analytique spécial de V ; c'est en particulier un domaine analytique compact de V , d'où notre assertion.

Un domaine analytique Y de X qui est réunion d'éléments de \mathfrak{A} sera dit \mathfrak{A} -formel. Si (X, \mathfrak{A}) est strictement k -analytique formel, il revient au même de demander que Y soit l'image réciproque par la flèche de spécialisation d'un ouvert de Zariski de $(\widehat{X, \mathfrak{A}})_s$.

Si Y est un domaine analytique \mathfrak{A} -formel de X l'ensemble $\mathfrak{A}|_Y$ des domaines affinoïdes appartenant à \mathfrak{A} et contenus dans Y est un atlas affinoïde formel maximal sur Y ; l'ensemble des sommets de $\mathfrak{A}|_Y$ est précisément $S \cap Y$.

Un domaine affinoïde V de X est \mathfrak{A} -formel si et seulement si il appartient à \mathfrak{A} ; si c'est le cas, $\mathfrak{A}|_V$ est l'atlas affinoïde formel canonique de V .

(6.3.13) Soient (Y, \mathfrak{B}) et (X, \mathfrak{A}) deux espaces k -analytiques formels. Un *morphisme* d'espaces k -analytiques formels de (Y, \mathfrak{B}) vers (X, \mathfrak{A}) est un morphisme $\varphi : Y \rightarrow X$ d'espaces k -analytiques tel que pour tout domaine analytique \mathfrak{A} -formel V de X , l'image réciproque $\varphi^{-1}(V)$ soit un domaine analytique \mathfrak{B} -formel de Y .

Il suffit de vérifier cette propriété sur un G -recouvrement de X par des domaines analytiques \mathfrak{A} -formels, et donc par exemple sur un atlas affinoïde formel de X contenu dans \mathfrak{A} .

Si (X, \mathfrak{A}) et (Y, \mathfrak{B}) sont deux espaces *strictement* k -analytiques formels, un morphisme de (Y, \mathfrak{B}) vers (X, \mathfrak{A}) sera simplement un morphisme d'espaces k -analytiques formels de (Y, \mathfrak{B}) vers (X, \mathfrak{A}) .

(6.3.13.1) La flèche $(X, \mathfrak{A}) \mapsto (\widehat{X, \mathfrak{A}})$ définit un foncteur de la catégorie des espaces strictement k -analytiques formels vers celle des k° -schémas formels plats, foncteur qui est pleinement fidèle.

Avant de dire quelques mots à propos de son image essentielle dans certains cas particuliers, introduisons une convention et une notation : on dira qu'une courbe k -analytique formelle (X, \mathfrak{A}) est réduite (resp. propre) si X est réduite (resp. propre) ; et l'on fixe un quasi-inverse $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}^{\text{alg}}$ du foncteur $\mathfrak{X} \mapsto \widehat{\mathfrak{X}}$, vu comme allant de la catégorie des k° -courbes propres vers les k° -courbes formelles propres.

(6.3.13.2) Supposonsque $|k^\times| \neq \{1\}$ et que k est ou bien algébriquement clos, ou bien de valuation discrète (*i.e.* $|k^\times|$ est libre de rang 1). Il résulte alors de 6.3.9.1 et 6.3.10 que $(X, \mathfrak{A}) \mapsto (\widehat{X, \mathfrak{A}})$ induit une équivalence entre la catégorie des courbes strictement k -analytiques formelles réduites et celle des k° -schémas formels plats, localement de présentation finie, et relativement normaux dans leur fibre générique. Un quasi-inverse est fourni par $\mathfrak{X} \mapsto (\mathfrak{X}_\eta, \text{Aff}(\mathfrak{X}))$.

En vertu de GAGA et de l'algébrisation des courbes formelles propres (th. 3.7.6, rem. 3.7.7), il s'ensuit que $(X, \mathfrak{A}) \mapsto (\widehat{X, \mathfrak{A}})^{\text{alg}}$ établit une équivalence

entre la catégorie des courbes strictement k -analytiques formelles réduites et propre et celle des k° -schémas propres et plats relativement normaux dans leur fibre générique. Un quasi-inverse est fourni par $\mathcal{X} \mapsto (\mathcal{X}_\eta^{\text{an}} = \widehat{\mathcal{X}}_\eta, \text{Aff}(\widehat{\mathcal{X}}))$.

Reconstitution d'une structure formelle sur une courbe à partir de ses sommets

(6.3.14) Soit X une courbe k -affinoïde et soit S son bord de Shilov. Soit ρ la flèche de spécialisation $X \rightarrow \widetilde{X}_{\text{gr}}$. Soit $\xi \in \widetilde{X}_{\text{gr}}$. On est dans l'un des deux cas suivants :

- ξ est un point générique de $\widetilde{X}_{\text{gr}}$; dans ce cas $\rho^{-1}(\xi)$ est de la forme $\{x\}$ avec $x \in S$, et tout élément de S s'obtient de cette manière (3.1.4.1);
- le corps résiduel gradué de ξ est fini sur $\widetilde{k}_{\text{gr}}$; dans ce cas $\rho^{-1}(\xi)$ est un ouvert connexe et non vide de X (3.1.4.3 dont le bord consiste exactement en les antécédents des points génériques des composantes irréductibles contenant ξ (3.1.4.2).

Il découle de ce qui précède qu'un compact W de X en est un domaine formel si et seulement si il existe un sous-ensemble S' de S et un sous-ensemble Π de $\pi_0(X \setminus S)$ tels que :

- i) $W = S' \cup \bigcup_{V \in \Pi} V$;
- ii) pour tout $V \in \Pi$ l'on a $\partial V \subset S'$;
- iii) presque toutes les composantes connexes de $X \setminus S$ de bord contenu dans S' appartiennent à Π .

(6.3.15) Théorème. Soit X une courbe k -analytique. Soit S un ensemble fermé et discret de X contenu dans $X_{[2,3]}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un atlas k -affinoïde formel sur X dont S est l'ensemble des sommets;
- ii) S satisfait les conditions suivantes :
 - α) $\partial^{\text{an}} X \subset S$;
 - β) toute composante irréductible de X rencontre S ;
 - γ) toute composante connexe de $X \setminus S$ est relativement compacte;
 - δ) pour tout $x \in S \setminus \partial^{\text{an}} X$ et pour toute composante connexe U de $X \setminus S$ telle que $x \in \partial U$ il existe une branche de X issue de x et non contenue dans U .

De plus si ces conditions sont satisfaites la classe d'équivalence de l'atlas évoquée au i) est unique; il existe en particulier un et un seul atlas affinoïde formel maximal sur X dont S est l'ensemble des sommets.

Démonstration. On procède par double implication.

(6.3.15.1) Preuve de i) \Rightarrow ii). On suppose que i) est vérifiée; soit \mathfrak{A} un atlas affinoïde formel sur X dont S est l'ensemble des sommets.

Soit $x \in \partial^{\text{an}} X$; il est situé sur un domaine affinoïde V de X qui appartient à \mathfrak{A} ; il appartient nécessairement au bord analytique de V , c'est-à-dire à son bord de Shilov (puisqu'on est en dimension 1); ainsi, $x \in S$, et α) est vraie.

Soit Y une composante irréductible de X . Il existe un élément V de \mathfrak{A} rencontrant Y ; l'intersection $V \cap Y$ est une réunion non vide de composantes irréductibles de V ; le bord de Shilov de chacune d'elles est non vide, et est contenu dans le bord de Shilov de V , et partant dans S ; ainsi, Y rencontre S , et β) est vraie.

Soit U une composante connexe de $X \setminus S$; il existe un élément V de \mathfrak{A} rencontrant U . Comme le bord topologique de V dans X est contenu dans le bord de Shilov de V , et donc dans S , l'intersection $U \cap V$ est contenue dans l'intérieur de V ; c'est donc une partie non vide, ouverte et fermée de U ; par connexité de U , il s'ensuit que $U \cap V = U$, c'est-à-dire que $U \subset V$; ainsi, U est relativement compacte et γ) est vraie.

Soit maintenant $x \in (S \setminus \partial^{\text{an}} X) \cap \bar{U}$. Comme $x \in V \cap S$, il appartient au bord de Shilov de V ; comme il n'appartient pas à $\partial^{\text{an}} X$, il appartient à ∂V . Il existe donc une branche issue de x qui est contenue dans $X - V$, et n'est dès lors pas contenue dans U . Ainsi, δ) est vraie.

(6.3.15.2) Preuve de ii) \Rightarrow i). Supposons que ii) soit vérifiée. Soit \mathfrak{A} l'ensemble des parties compactes W de X telles qu'il existe un sous-ensemble fini S' de S et une famille (U_i) de composantes connexes deux à deux disjointes de $X \setminus S'$ possédant les propriétés suivantes :

- a) $W = X - \coprod U_i$;
- b) pour tout $x \in S'$ l'ensemble des indices i tels que $x \in \partial U_i$ est fini, et non vide si $x \notin \partial^{\text{an}} X$;
- c) $(S \setminus S') \subset \coprod U_i$;
- d) toute composante irréductible de X qui ne rencontre pas S' est contenue dans $\coprod U_i$.

Nous allons démontrer : que \mathfrak{A} est un atlas affinoïde formel sur X ; que S est l'ensemble de ses sommets; et que tout atlas affinoïde formel sur X dont S est l'ensemble des sommets est contenu dans \mathfrak{A} . L'assertion d'unicité requise en résultera – ainsi par ailleurs que le caractère maximal de \mathfrak{A} .

Première étape : \mathfrak{A} constitue un G-recouvrement de X .

Un procédé général de constructions de parties appartenant à \mathfrak{A} .
Soit U une composante connexe de $X \setminus S$. Comme U est relativement compacte et S discrète, le bord de U est un sous-ensemble fini S' de S . Soit Z la réunion des composantes irréductibles de X qui ne rencontrent pas S' ; c'est un fermé de X . Soit Π l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus S'$ qui rencontrent Z ou $S \setminus S'$. Si $x \in S'$ alors comme S est discrète et Z fermé, il existe un voisinage ouvert connexe de x dans X ne rencontrant pas $(S \setminus S') \cup Z$; ceci entraîne que l'ensemble des $V \in \Pi$ telles que $S' \cap \partial V \neq \emptyset$ est fini. Soit Π' un ensemble fini de composantes connexes de $X \setminus S'$ différentes de U , tel que pour tout élément x de S' qui n'appartient pas à $\partial^{\text{an}} X$, il existe $V \in \Pi \cup \Pi'$ avec $x \in \partial V$. Posons $W = X - \coprod_{V \in \Pi \cup \Pi'} V$; le fermé W de X est un graphe qui vérifie par construction les conditions a), b), c) et d) énoncées au début de 6.3.15.2. Par ailleurs, si V est une composante connexe de $W \setminus S'$ alors V ne rencontre pas S ; c'est donc une composante connexe de $X \setminus S$, et elle est de ce fait relativement compacte dans X , et partant dans W ; on en déduit que W est compact, et finalement qu'il appartient à \mathfrak{A} .

Montrons que W contient U . Cela revient à prouver que $U \notin \Pi \cup \Pi'$. La définition même de Π' assure que $U \notin \Pi'$. Supposons que $U \in \Pi$; comme U ne rencontre pas S (c'est une composante connexe de $X \setminus S$), elle rencontre nécessairement Z ; il existe donc une composante irréductible T de Z telle que $T \cap U \neq \emptyset$. L'ouvert $U \cap T$ de T ne peut être fermé dans T : sinon, par connexité de T , ce serait T elle-même et l'on aurait ainsi $T \subset U$, ce qui contredirait le fait que T rencontre S ; dès lors il y a au moins un point de S' qui est situé sur T , ce qui est absurde puisque T est une composante irréductible de Z , et ne rencontre donc pas S' .

Application du procédé décrit ci-dessus. Soit $x \in X$.

Supposons que $x \notin S$. Soit U la composante connexe de $X \setminus S$ contenant x . Soient S' et Π comme ci-dessus. Pour tout point y de $S' \setminus \partial^{\text{an}} X$, il existe (propriété δ) de l'énoncé du théorème) une branche β_y issue de y et non contenue dans U . Soit Π' l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus S'$ contenant les différentes β_y ; il satisfait les conditions énoncées ci-dessus; il s'ensuit que $W := X - \coprod_{V \in \Pi \cup \Pi'} V$ est un élément de \mathfrak{A} qui contient U , et est en particulier un voisinage de x .

Supposons que $x \in S$ et que ce n'est pas un point isolé de X . Soit b une branche issue de x et soit U la composante connexe de $X \setminus S$ contenant b . Soient S' et Π comme ci-dessus. Pour tout point y de $S' \setminus \partial^{\text{an}} X$, il existe (propriété δ) de l'énoncé du théorème) une branche β_y issue de y et non contenue dans U . Soit Π' l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus S'$ contenant les différentes β_y ; il satisfait les conditions énoncées ci-dessus; il s'ensuit que $W := X - \coprod_{V \in \Pi \cup \Pi'} V$ est un élément de \mathfrak{A} qui contient U , laquelle contient b ; il contient par ailleurs presque toutes les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$.

Supposons que x est un point isolé de X . C'est alors à la fois une composante connexe, une composante irréductible et un domaine affinoïde de X ; il s'ensuit immédiatement que $\{x\}$ est un élément de \mathfrak{A} .

On déduit de ce qui précède que l'ensemble \mathfrak{A} constitue un G-recouvrement de X .

Seconde étape : les éléments de \mathfrak{A} sont des domaines affinoïdes de X .

Soit W un élément de \mathfrak{A} ; il résulte de la définition de \mathfrak{A} et de la proposition 4.2.14 que W est un domaine analytique fermé; nous allons montrer qu'il est affinoïde de bord de Shilov $W \cap S$. Remarquons déjà que si l'on se donne S' comme dans la définition de \mathfrak{A} alors $S' = W \cap S$, et S' est la réunion de ∂W et de $W \cap \partial^{\text{an}} X$; par conséquent, $S' = W \cap S$ est exactement le bord analytique de W .

Pour établir le caractère affinoïde de W il suffit, grâce au théorème 6.1.3, de démontrer que toute composante irréductible de W a un bord analytique non vide. Nous allons procéder par l'absurde; on se donne donc une composante irréductible Z de W dont on suppose que le bord analytique est vide. Dans ce cas, Z est propre, et est dès lors une composante irréductible de X . Par conséquent, Z rencontre S ; comme elle est contenue dans W , cela signifie qu'elle rencontre $W \cap S$, qui est précisément le bord analytique de W . On aboutit ainsi

à une contradiction, et W est donc bien domaine affinoïde de \mathcal{X}^{an} , comme annoncé ; son bord de Shilov est son bord analytique, à savoir $W \cap S$.

Preuve du fait que \mathfrak{A} est un atlas affinoïde formel.

Soient V et W deux domaines affinoïdes de X appartenant à \mathfrak{A} . Nous allons vérifier que $V \cap W$ est un domaine analytique spécial de V , ce qui permettra de conclure (comme V et W jouent le même rôle, ce sera aussi un domaine analytique spécial de W).

Les bords de Shilov respectifs de V et W sont, en vertu de ce qui précède, $S \cap V$ et $S \cap W$. Par définition de \mathfrak{A} , on peut écrire V (resp. W) comme la réunion de $S \cap V$ (resp. $S \cap W$) et de composantes connexes de $X \setminus S$; de plus, pour tout $x \in S \cap V$ (resp. $S \cap W$), presque toutes les composantes connexes de $X \setminus S$ qui aboutissent à x sont contenues dans V (resp. W).

Par conséquent, le compact $V \cap W$ est de la forme $(S \cap V \cap W) \cup \bigcup_{U \in \Pi} U$, où Π est un ensemble de composantes connexes de $V - (S \cap V)$ (ou, ce qui revient au même, de composantes connexes de $X \setminus S$ contenues dans V) possédant les deux propriétés suivantes : pour tout $U \in \Pi$, le bord de U est contenu dans $S \cap V \cap W$; presque toute composante connexe de $V - (S \cap V)$ dont le bord est contenu dans $S \cap V \cap W$ appartient à Π .

En vertu du 6.3.14, $V \cap W$ est un domaine spécial de V .

Détermination des sommets de \mathfrak{A} .

Soit $V \in \mathfrak{A}$. On a vu plus haut que le bord de Shilov de V est $V \cap S$; comme tout point de S appartient par ailleurs à au moins un domaine V de l'atlas \mathfrak{A} , l'ensemble des sommets de \mathfrak{A} est exactement S ; ceci achève de démontrer l'équivalence entre i) et ii).

Tout atlas affinoïde formel sur X ayant S pour ensemble des sommets est contenu dans \mathfrak{A} .

Soit \mathfrak{B} un atlas k -affinoïde formel sur X dont S est l'ensemble des sommets et soit W un domaine appartenant à \mathfrak{B} ; nous allons montrer que $W \in \mathfrak{A}$.

Le bord de Shilov S' de W est la réunion de ∂W et de $W \cap \partial^{\text{an}} X$; il coïncide par ailleurs avec $S \cap W$, puisque S est l'ensemble des sommets de \mathfrak{B} . Par conséquent, $X - W$ s'écrit sous la forme $\coprod U_i$, où (U_i) est une famille de composantes connexes de $X \setminus S'$.

Soit Y une composante irréductible de X rencontrant W . L'intersection de Y et W est une réunion non vide de composantes irréductibles de W , et elle contient donc au moins un point du bord de Shilov de W ; par conséquent, $Y \cap S' \neq \emptyset$. Par contraposition, si Y est une composante irréductible de X qui ne rencontrent pas S' alors $Y \subset \coprod U_i$.

Soit $x \in S'$; si $x \notin \partial W$ alors l'ensemble des indices i tels que $x \in \partial U_i$ est vide ; sinon, la proposition 4.2.14 assure que cet ensemble est fini ; compte-tenu du fait que $S \setminus \partial^{\text{an}} X \subset \partial W$, on en déduit que $W \in \mathfrak{A}$. \square

(6.3.16) Commentaire. On conserve les notations du théorème. Si x est un point de type 2 de S et si U est une composante connexe de $X \setminus S$ telle que $x \in \partial U$ alors comme $\text{br}(X, x)_{\subset U}$ est fini et comme $\text{br}(X, x)$ est infini, il existe une

branche b issue de x qui n'est pas contenue dans U . Il suffit par conséquent de vérifier la condition δ) de l'assertion ii) sur les points de type 3 de S ; en particulier si S ne contient que des points de type 2 alors δ) est automatiquement satisfaite.

Remarquons que si X est propre, si son squelette est un cercle et si x est un point de type 3 sur celui-ci alors $S := \{x\}$ satisfait les propriétés $\alpha), \beta)$ et $\gamma)$ de l'assertion ii), mais pas δ) : le bord analytique de X est vide, mais l'ouvert $X \setminus \{x\}$ est connexe et contient les deux branches de X issues de x .

(6.3.17) Si X est une courbe k -analytique, on appellera *sous-ensemble sommital de X* tout sous-ensemble S de X qui est l'ensemble des sommets d'un atlas affinoïde formel sur X ; en vertu du théorème 6.3.15 ci-dessus un sous-ensemble S de X est sommital si et seulement si il est fermé, discret, contenu dans $X_{[2,3]}$, et satisfait les conditions a), b), c), d) de l'assertion ii) de *loc. cit.* Il y a alors, toujours en vertu de *loc. cit.*, un unique atlas affinoïde formel maximal dont l'ensemble des sommets est S , et il contient (et est donc équivalent) à tout atlas analytique formel sur X dont l'ensemble des sommets est S : on le notera $\text{Atl}(S)$. Il est strictement analytique si et seulement si S est constitué de points de type 2.

Si \mathfrak{A} est un atlas analytique formel sur X , on notera $\text{Somm}(\mathfrak{A})$ l'ensemble de ses sommets. Les faits suivantes résultent des définitions : si S est un sous-ensemble sommital de X alors $\text{Somm}(\text{Atl}(S)) = S$; si \mathfrak{A} est un atlas k -analytique formel sur X alors $\text{Atl}(\text{Somm}(\mathfrak{A}))$ est l'unique atlas k -analytique formel maximal contenant \mathfrak{A} .

(6.3.18) *Extension des scalaires.* Soit X une courbe k -analytique et soit S un sous-ensemble sommital de X .

Soit F une extension presque algébrique de k . L'ensemble $\text{Somm}(\text{Atl}(S)_F)$ est égal à l'image réciproque S_F de S sur X_F . Par conséquent, S_F est une partie sommitale de X_F et $\text{Atl}(S_F) = \text{Atl}(S)_F$.

Soit V un domaine analytique $\text{Atl}(S)$ -formel de X . L'ensemble des sommets de $\text{Atl}(S)|_V$ étant égal à $S \cap V$, l'ensemble $S \cap V$ est une partie sommitale de V et l'on a $\text{Atl}(S \cap V) = \text{Atl}(S)|_V$.

Fonctorialité

(6.3.19) Proposition. *Soit X une courbe k -analytique et soit S un sous-ensemble sommital de X . Soit V un domaine analytique fermé de X . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) V est un domaine analytique $\text{Atl}(S)$ -formel de X ;
- ii) $\partial^{\text{an}}V \subset S$.

Démonstration. Supposons que i) soit vraie. L'ensemble des sommets de $\text{Atl}(S)|_V$ est alors égal à $V \cap S$, et l'on sait d'après le théorème 6.3.15 qu'il contient $\partial^{\text{an}}V$, d'où ii).

Supposons maintenant que ii) soit vraie. Le sous-ensemble $S \cap V$ de V est une partie fermée et discrète, constituée de points de type 2 ou 3.

(6.3.19.1) *Le couple $(V, S \cap V)$ satisfait les conditions $\alpha), \beta), \gamma)$ et $\delta)$ introduites dans l'énoncé du théorème 6.3.15 pour le couple (X, S) . Notons*

pour commencer qu'en vertu justement du théorème 6.3.15, le couple (X, S) satisfait $\alpha), \beta), \gamma)$ et $\delta)$.

L'hypothèse faite sur V signifie exactement que $(V, S \cap V)$ satisfait $\alpha)$.

Vérifions que $(V, S \cap V)$ satisfait $\beta)$; soit Z une composante irréductible de V . Si $\partial^{\text{an}} Z \neq \emptyset$ alors $\partial^{\text{an}} Z \subset \partial^{\text{an}} V \subset S \cap V$; et si $\partial^{\text{an}} Z = \emptyset$ la courbe Z est propre, et Z est dès lors une composante irréductible de X , qui rencontre dès lors S puisque (X, S) satisfait $\beta)$, et plus précisément $S \cap V$ puisque $Z \subset V$.

Vérifions que $(V, S \cap V)$ satisfait $\gamma)$. Soit U une composante connexe de $V \setminus S$. Elle est contenue dans une composante connexe de $X \setminus S$ et est dès lors relativement compacte dans X puisque (X, S) satisfait $\gamma)$; le domaine V étant fermé dans X , il s'ensuit que U est relativement compacte dans V .

Vérifions que $(V, S \cap V)$ satisfait $\delta)$. Soit $x \in (S \cap V) \setminus \partial^{\text{an}} V$ et soit U une composante connexe de $V \setminus S$ telle que $x \in \partial U$. Soit U' la composante connexe de $X \setminus S$ contenant U . Comme $x \notin \partial^{\text{an}} V, x \notin \partial^{\text{an}} X$. Puisque (X, S) satisfait $\delta)$, il existe une branche b de X issue de x et non contenue dans U' .

Le point x n'appartenant pas au bord analytique de V , il n'appartient en particulier pas à son bord topologique dans X ; autrement dit, V est un voisinage de x dans X . Ainsi, $b \in \text{br}(V, x)$ et comme b n'est pas contenue dans U' , elle ne l'est *a fortiori* pas dans U .

(6.3.19.2) Ainsi $S \cap V$ est-il un sous-ensemble sommital de V . Soit W un élément de l'atlas $\text{Atl}(S \cap V)$ de V ; nous allons montrer qu'il appartient à $\text{Atl}(S)$, ce qui montrera que V est réunion d'éléments de $\text{Atl}(S)$ et achèvera la démonstration.

D'après ce qu'on a vu au cours de la preuve du théorème 6.3.15, il existe un sous-ensemble fini S' de $S \cap V$ et une famille (V_j) de composantes connexes de $V \setminus S'$ tels que les conditions a), b), c) et d) du 6.3.15.2, énoncées pour $(X, S, S', W, (U_i))$, soient satisfaites par $(V, S \cap V, S', W, (V_j))$.

On a $\partial_X W \subset S'$. En effet, $\partial_X W \subset \partial_V W \cup (\partial_X V \cap W)$; or $\partial_X W \subset S'$ par la propriété a), et $\partial_X V \subset S \cap V$; mais les propriétés a) et c) garantissent que $(S \cap V) \cap W = S'$, d'où notre assertion.

Par conséquent, W s'écrit $X - \coprod U_i$ pour une certaine famille (U_i) de composantes connexes de $X \setminus S'$. Nous allons montrer que $(X, S, S', W, (U_i))$ satisfait également les propriétés a), b), c), et d), ce qui permettra de conclure.

La propriété a) résulte de la définition des U_i .

Vérifions b). Soit $x \in S'$ et soit I l'ensemble des indices tels que $x \in \partial U_i$. Si $x \notin \partial_X W$ alors I est vide, et si $x \in \partial_X W$ l'ensemble I est fini en vertu de la proposition 4.2.14. Supposons de plus que $x \notin \partial^{\text{an}} X$. Deux cas peuvent se présenter : ou bien $x \notin \partial^{\text{an}} V$, auquel cas il existe j_0 tel que x adhère à V_{j_0} (puisque $(V, S \cap V, S', W, (V_j))$ satisfait b)), et si i_0 désigne l'indice tel que $V_{j_0} \subset U_{i_0}$, alors $i_0 \in I$; ou bien $x \in \partial^{\text{an}} V$, auquel cas x appartient à $\partial_X V$, et *a fortiori* à $\partial_X W$, ce qui entraîne que I est non vide.

Vérifions c). Comme $(V, S \cap V, S', W, (V_j))$ satisfait c), l'ensemble $(S \cap V) \setminus S'$ ne rencontre pas W ; on déduit alors de l'inclusion $W \subset V$ que $(S \setminus S') \cap W = \emptyset$.

Vérifions d). Soit Z une composante irréductible de X ne rencontrant pas S' . L'intersection $Z \cap V$ s'écrit $\bigcup Z_l$, où chaque Z_l est une composante irréductible de V ne rencontrant pas S' . Comme $(V, S \cap V, S', W, (V_j))$ satisfait d), on a $Z_l \cap$

$W = \emptyset$ pour tout l ; on déduit alors de l'inclusion $W \subset V$ que $Z \cap W = \emptyset$, ce qui achève la démonstration. \square

(6.3.20) On définit comme suit la catégorie des *courbes k -analytiques épinglées* : ses objets sont les couples (X, S) , où X est une courbe k -analytique et S un ensemble sommital de X ; un morphisme $\varphi : (Y, T) \rightarrow (X, S)$ est un morphisme $f : Y \rightarrow X$ telle que $\varphi^{-1}(S) \subset T$. On appelle catégorie des courbes *strictement k -analytiques épinglées* la sous-catégorie pleine de la précédente dont les objets sont les couples (X, S) avec X strictement k -analytique et S inclus dans $X_{[2]}$.

Remarquons qu'une courbe strictement k -analytique épinglée compacte est simplement une courbe strictement k -analytique compacte munie d'un ensemble fini de points de type 2 rencontrant toutes ses composantes irréductibles.

(6.3.21) Proposition. *Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme de courbes k -analytiques, soit S un ensemble sommital de X et soit T un ensemble sommital de Y . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1) φ est un morphisme de courbes k -analytiques formelles de $(Y, \text{Atl}(T))$ vers $(X, \text{Atl}(S))$;
- 2) φ est un morphisme de courbes k -analytiques épinglées de (Y, T) vers (X, S) .

Démonstration. Supposons que 1) soit vraie, soit $x \in S$, soit y un antécédent de x et soit U un élément de $\text{Atl}(S)$ contenant x . D'après l'hypothèse 1), l'image réciproque de U est réunion d'éléments de $\text{Atl}(T)$; il existe donc $V \in \text{Atl}(T)$ tel que $\varphi(V) \subset U$ et tel que $y \in V$. Comme x appartient à $U \cap S$, il appartient au bord de Shilov de U ; il s'ensuit que y appartient au bord de Shilov de V , donc à $V \cap T$ et en particulier à T . Ainsi, $\varphi^{-1}(S) \subset T$ et 2) est vraie.

Supposons maintenant que 2) soit vraie et soit $U \in \text{Atl}(S)$; l'image réciproque V de U sur Y est un domaine analytique fermé de Y , dont le bord analytique est contenu dans $\varphi^{-1}(\partial^{\text{an}}U)$, donc dans $\varphi^{-1}(S)$ et par conséquent dans T d'après l'hypothèse 2). Il découle alors de la proposition 6.3.19 ci-dessus que $V \in \text{Atl}(T)$, ce qui achève la démonstration. \square

(6.3.22) La proposition ci-dessus peut se reformuler comme suit : les flèches $(X, S) \mapsto (X, \text{Atl}(S))$ et $(X, \mathfrak{A}) \mapsto (X, \text{Somm}(\mathfrak{A}))$ établissent une équivalence entre la catégorie des courbes k -analytiques épinglées (resp. des courbes strictement k -analytiques épinglées) et celle des courbes k -analytiques formelles (resp. des courbes strictement k -analytiques formelles).

(6.3.23) Supposons de plus que $|k^\times| \neq \{1\}$ et que k est ou bien algébriquement clos, ou bien de valuation discrète. Si \mathfrak{X} est une k° -courbes formelle relativement normale dans sa fibre générique alors $\text{Somm}(\text{Aff}(\mathfrak{X}))$ n'est autre que $\rho^{-1}(\mathfrak{X}_k^{(0)})$, où $\rho : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}_k$ est la flèche de réduction et $\mathfrak{X}_k^{(0)}$ l'ensemble des points génériques des composantes irréductibles de \mathfrak{X}_k . Bien entendu, on aurait tout aussi bien pu dans ce qui précède remplacer \mathfrak{X}_k par \mathfrak{X}_s , puisque ces deux espaces topologiques coïncident.

Il s'ensuit, en vertu de 6.3.22 et 6.3.13.2 que les flèches $(X, S) \mapsto (X, \widehat{\text{Atl}(S)})$ et $\mathfrak{X} \mapsto (\mathfrak{X}_\eta, \rho^{-1}(\mathfrak{X}_k^{(0)}))$ établissent une équivalence entre la catégorie des courbes strictement k -analytiques épinglées réduites et celle des k° -courbes formelles relativement normales dans leur fibre générique.

Compte-tenu de GAGA et de l'algébrisation des k° -courbes formelles propres, l'équivalence de catégories évoquée ci-dessus se décline comme suit dans le cas propre : $(X, S) \mapsto (X, \widehat{\text{Atl}}(S))^{\text{alg}}$ et $\mathcal{X} \mapsto (\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}, \rho^{-1}(\mathcal{X}_k^{(0)}))$ établissent une équivalence entre la catégorie des courbes strictement k -analytiques épinglées réduites et propres, et celle des k° -courbes algébriques propres relativement normales dans leur fibre générique.

(6.3.24) Théorème. *Soit X une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse, compacte, connexe et non vide admettant une plus petite triangulation S et soit Y une courbe $\widehat{k^a}$ -analytique quasi-lisse, compacte, connexe et non vide munie d'un morphisme fini et plat $\varphi : Y \rightarrow X$.*

1) *La courbe Y admet une plus petite triangulation T .*

2) *Le morphisme φ est un morphisme de courbes $\widehat{k^a}$ -analytiques formelles de (Y, T) vers (X, S) .*

Démonstration. Comme X possède une plus petite triangulation S , l'ensemble des nœuds de $S^{\text{an}}(X)$ est non vide et coïncide avec S . Soit T l'ensemble des nœuds de $S^{\text{an}}(Y)$. Il résulte de la proposition 6.2.5 que $\varphi^{-1}(S) \subset T$. Par conséquent, T est non vide, et Y possède ainsi une plus petite triangulation, à savoir T . Comme $\varphi^{-1}(S) \subset T$, le morphisme φ est bien, en vertu de la proposition 6.3.21 ci-dessus, un morphisme de courbes $\widehat{k^a}$ -analytiques formelles de (Y, T) vers (X, S) . \square

(6.3.25) Proposition. *Soit X une courbe k -analytique compacte, quasi-lisse, géométriquement connexe et non vide, et soit $\varphi : X \rightarrow X$ un morphisme fini et plat de degré strictement supérieur à 1. Supposons qu'il existe un ensemble sommital S de X tel que $\varphi^{-1}(S) \subset S$, c'est-à-dire tel que φ soit un morphisme de courbes k -analytiques formelles $(X, S) \rightarrow (X, S)$ (prop. 6.3.21). L'ensemble S est alors un singleton $\{x\}$, le point x est de type 2, et $\mathfrak{s}(x) = k$.*

Démonstration. On se ramène immédiatement par extension des scalaires à $\widehat{k^a}$ au cas où k est algébriquement clos : le fait que $S_{\widehat{k^a}}$ soit un singleton assurera que S est un singleton $\{x\}$ et que $\mathfrak{s}(x) = k$.

(6.3.25.1) Nous allons tout d'abord démontrer que S est un singleton. Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose donc que S compte au moins deux éléments, et l'on va prouver que le degré de φ est égal à 1. Comme $\varphi^{-1}(S) \subset S$ et comme φ est surjective on a $\varphi^{-1}(S) = S$ pour des raisons de cardinal. Ainsi, φ induit ainsi une permutation de S . Quitte à remplacer φ par $\varphi^{\circ n}$ pour n convenable, on peut supposer que φ fixe S point par point.

Soit Π l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus S$ dont le bord contient au moins deux points ; c'est un ensemble fini, et non vide puisque S n'est pas un singleton. Si U est une composante connexe de $X \setminus S$ alors $\varphi(U)$ est une composante connexe de $X \setminus S$ de bord égal à $\varphi(\partial U)$, et donc à ∂U . Par conséquent, $\varphi(U) \in \Pi$ si et seulement si $U \in \Pi$. Ainsi, φ induit une permutation de Π ; quitte, une fois encore, à remplacer φ par $\varphi^{\circ n}$ pour n convenable, on peut supposer que cette permutation est égale à l'identité. Choisissons $U \in \Pi$; on a $\varphi(U) = U$ et donc $\varphi^{-1}(U) = U$.

Le squelette analytique $S^{\text{an}}(U)$ est un graphe fini. En effet, il existe un sous-graphe analytiquement admissible Γ de X qui contient S et est localement fini ;

par compacité de X , le graphe Γ est fini. Les composantes connexes de $X \setminus S$ sont alors, d'une part les ouverts de la forme I^b , où I est une composante connexe de $\Gamma \setminus S$, et d'autre part les composantes connexes de $X - \Gamma$ dont l'unique point du bord appartient à S . Comme ∂U n'est pas un singleton, U est nécessairement de la forme I^b , où I est une composante connexe de $X \setminus S$; par conséquent, U possède un sous-graphe analytiquement admissible qui est fini, à savoir I , et son squelette analytique est *a fortiori* fini.

Soit T l'ensemble des nœuds de $S^{\text{an}}(U)$. Il est fini, car égal à la réunion : de l'ensemble des sommets topologiques de $S^{\text{an}}(U)$, qui est fini par finitude de ce dernier; de l'ensemble $\partial^{\text{an}}U$, qui est fini puisque contenu dans $\partial^{\text{an}}X$; et de l'ensemble des points de U de genre strictement positif, qui est fini puisque contenu dans l'ensemble des points de genre strictement positif de X . La proposition 6.2.5 assure que $\varphi^{-1}(T) \subset T$. Par le même raisonnement que ci-dessus on peut, en remplaçant une dernière fois φ par $\varphi^{\circ n}$ pour n convenable, supposer que φ fixe T point par point et que $\varphi(V) = \varphi^{-1}(V) = V$ pour toute composante connexe V de $U \setminus T$ dont le bord dans X compte au moins deux éléments.

Il existe une composante connexe V de $U \setminus T$ qui est un arbre à deux bouts. Pour le voir, notons pour commencer que comme ∂U compte au moins deux points, l'ouvert U a au moins deux bouts; dès lors, $S(U)$ est non vide, et est donc un sous-graphe admissible de U . Son bord dans X est dès lors égal à ∂U , et comprend en particulier au moins deux points distincts x et y . Il existe un intervalle ouvert contenu dans $S(U)$ et joignant x à y .

Si I rencontre T , on pose $J =]x; z[$ où z est le point de T le plus proche de x ; sinon, l'on pose $J = I$. Comme T contient tous les sommets topologiques de $S^{\text{an}}(U)$, l'intervalle J est à la fois ouvert et fermé dans $S^{\text{an}}(U) \setminus T$, et c'en est donc une composante connexe. Comme $S^{\text{an}}(U)$ est non vide, c'est un sous-graphe admissible de U et $V := J^b$ est une composante connexe de $U \setminus T$.

La composante V est un arbre à deux bouts, évidemment relativement compact dans X . Son bord est égal à ∂J , et consiste donc en deux points de type 2 et 3. Enfin, V ne contient aucun point de T , et donc aucun point de genre strictement positif ni aucun point de $\partial^{\text{an}}X$. La proposition 5.1.18 assure alors que V est une couronne.

Comme le bord de V contient au moins deux points, on a $\varphi^{-1}(V) = V$. Ainsi, φ induit une flèche $V \rightarrow V$ finie et plate de degré $\deg \varphi$. Il vient

$$\text{Mod}(V) = \text{Mod}(V)^{\deg \varphi},$$

et partant $\deg \varphi = 1$, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ, et montre ainsi que S est un singleton $\{x\}$.

(6.3.25.2) *Le point x est de type 2.* L'hypothèse $\varphi^{-1}(S) = S$ devient donc $\varphi^{-1}(x) = \{x\}$; par conséquent, φ induit une k -extension $\mathcal{H}(x) \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$ de degré $\deg \varphi$. Supposons x de type 3. L'égalité $\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \widetilde{k}$ (rappelons que \widetilde{k} est supposé algébriquement clos) assure alors que la \widetilde{k} -extension $\widetilde{\mathcal{H}(x)} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ induite par φ est triviale; comme le plongement $|\mathcal{H}(x)^\times| \hookrightarrow |\mathcal{H}(x)^\times|$ induit par φ est quant à lui évidemment trivial, la stabilité du corps $\mathcal{H}(x)$ (th. 4.3.14) assure que $\deg \varphi = 1$, ce qui est absurde. \square

6.4 Application : la réduction semi-stable

Dans cette section, l'on suppose que $|k^\times| \neq \{1\}$.

Le cas analytique

On fixe pour ce paragraphe une courbe *strictement* k -analytique quasi-lisse X .

(6.4.1) En vertu de l'assertion iv) du théorème 5.1.14, la courbe X admet une triangulation dont l'ensemble S des sommets est de type 2. Le couple (X, S) satisfait les conditions $\alpha), \beta), \gamma)$ et $\delta)$ de l'assertion ii) du théorème 6.3.15. C'est en effet clair pour $\alpha)$ et $\gamma)$; pour $\beta)$, cela résulte du fait que S rencontre toutes les composantes connexes de X (qui sont aussi ses composantes irréductibles par quasi-lissité); et pour $\delta)$, c'est une conséquence de 6.3.16.

L'ensemble S est donc sommital, et définit de ce fait une courbe k -analytique formelle (X, S) . Les points de S étant tous de type 2, la courbe (X, S) est même *strictement* k -analytique formelle; ceci permet de lui associer un k° -schéma formel plat $(\widehat{X}, \widehat{S})$.

(6.4.2) Supposons que la courbe analytique formelle (X, S) est distinguée et que $(\widehat{X}, \widehat{S})_s$ est géométriquement réduit. Dans ce cas le k° -schéma formel $(\widehat{X}, \widehat{S})$ est localement topologiquement de présentation finie, et

$$(\widehat{X}, \widehat{S})_{\widehat{\otimes}_{k^\circ} (\widehat{k^a})^\circ} \simeq (\widehat{X}_{\widehat{k^a}}, \widehat{S}_{\widehat{k^a}}).$$

Soit \mathbf{x} un point fermé de $(\widehat{X}_{\widehat{k^a}}, \widehat{S}_{\widehat{k^a}})_s$. Son image réciproque $\rho^{-1}(\mathbf{x})$ par la flèche de spécialisation ρ est une composante connexe de $X_{\widehat{k^a}} \setminus S_{\widehat{k^a}}$. Le sous-ensemble $S_{\widehat{k^a}}$ de $X_{\widehat{k^a}}$ en est une triangulation, puisque S est une triangulation de X ; par conséquent, $\rho^{-1}(\mathbf{x})$ est un disque ou une couronne; les sommets de $S_{\widehat{k^a}}$ étant de type 2, le lemme 5.1.15 garantit de plus que si $\rho^{-1}(\mathbf{x})$ est un disque (resp. une couronne) alors son rayon modulo $|(\widehat{k^a})^\times|$ est trivial (resp. ses deux rayons extérieurs modulo $|(\widehat{k^a})^\times|$ sont triviaux). Or en vertu des résultats de Bosch et Lütkebohmert, l'ouvert $\rho^{-1}(\mathbf{x})$ est un disque (resp. une couronne) de rayon modulo $|(\widehat{k^a})^\times|$ trivial (resp. de rayons extérieurs modulo $|(\widehat{k^a})^\times|$ triviaux) si et seulement si \mathbf{x} est un point lisse (resp. un point double ordinaire) de $(\widehat{X}_{\widehat{k^a}}, \widehat{S}_{\widehat{k^a}})_s$; il s'ensuit que le $(\widehat{k^a})^\circ$ -schéma formel plat $(\widehat{X}_{\widehat{k^a}}, \widehat{S}_{\widehat{k^a}}) = (\widehat{X}, \widehat{S})_{\widehat{\otimes}_{k^\circ} (\widehat{k^a})^\circ}$ est semi-stable; par conséquent, le k° -schéma formel $(\widehat{X}, \widehat{S})$ est semi-stable.

Donnons deux exemples, l'un général et l'autre extrêmement particulier, relevant de ce qui précède.

(6.4.2.1) Si k est algébriquement clos alors (X, S) est distinguée (6.3.9.5) et $(\widehat{X}, \widehat{S})$ est géométriquement réduit; par conséquent, $(\widehat{X}, \widehat{S})$ est semi-stable.

(6.4.2.2) Supposons : que k est une extension finie de \mathbb{Q}_p ; que X est le *demi-plan de Poincaré* sur k , c'est-à-dire l'ouvert $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}} - \mathbb{P}^1(k)$ de $\mathbb{P}_k^{1,\text{an}}$ (comme k est localement compact, $\mathbb{P}^1(k)$ est compact); et que S est le sous-ensemble de X formé des points $\eta_{a,r}$ où a parcourt k et où r parcourt $|k^\times|$ (on vérifie

sans difficultés, par passage à $\widehat{k^a}$, que c'est une triangulation de X ; elle est par construction constituée de points de type 2). Les conditions α , β et γ du 6.3.9.5 sont satisfaites; par conséquent, S est distinguée. Comme \widehat{k} est fini, il est parfait et $(\widehat{X}, S)_s$ est donc géométriquement réduit. Il s'ensuit que (\widehat{X}, S) est semi-stable.

(6.4.3) *Supposons que X est compacte, sans hypothèse particulière sur S . Dans ce cas, on peut recouvrir X par un nombre fini de domaines affinoïdes formels. Comme chacun d'eux devient distingué à fibre spéciale géométriquement réduite après une extension finie séparable convenable de k , il existe une extension finie séparable L de k telle que (X_L, S_L) soit distinguée et telle que $(\widehat{X_L}, S_L)_s$ soit géométriquement réduite; le L° -schéma formel $(\widehat{X_L}, S_L)$ est alors en vertu du 6.4.2 un modèle semi-stable de X ; on vient ainsi de démontrer que toute courbe strictement k -analytique quasi-lisse et compacte admet un modèle formel semi-stable après extension finie séparable de k .*

Le cas algébrique

(6.4.4) Soit \mathcal{X} une k -courbe projective et lisse. D'après le 6.4.3 ci-dessus, appliqué à $X = \mathcal{X}^{\text{an}}$, il existe une extension finie séparable L de k et une L° -courbe formelle semi-stable \mathfrak{X} tel que $\mathfrak{X}_\eta \simeq (\mathcal{X}_L)^{\text{an}}$; en vertu du théorème 3.7.6, le schéma formel \mathfrak{X} s'identifie au complété formel d'un L° -schéma propre et plat \mathcal{X} le long de sa fibre spéciale; on a alors

$$(\mathcal{X}_\eta)^{\text{an}} \simeq \mathfrak{X}_\eta \simeq (\mathcal{X}_L)^{\text{an}},$$

ce qui, en vertu de GAGA, entraîne que $\mathcal{X}_\eta \simeq \mathcal{X}_L$. Ainsi, \mathcal{X} admet un modèle semi-stable algébrique après extension finie séparable du corps de base.

(6.4.5) Supposons que $|k^\times|$ est libre de rang 1, et soit k' un sous-corps dense de k . Soit \mathcal{X} une k' -courbe projective et lisse. D'après le 6.4.3 ci-dessus, appliqué à $X = (\mathcal{X}_k)^{\text{an}}$, il existe une extension finie séparable L de k et une L° -courbe formelle semi-stable \mathfrak{X} telle que $\mathfrak{X}_\eta \simeq (\mathcal{X}_L)^{\text{an}}$. En vertu du lemme de Krasner, il existe une extension finie séparable L' de k' telle que $L \simeq L' \otimes_{k'} k$; le corps L' s'identifie naturellement à un sous-corps dense de L , et $\mathcal{X}_L \simeq (\mathcal{X}_{L'}) \otimes_{L'} L$.

On déduit alors du théorème 3.7.6 l'existence d'un $(L')^\circ$ -schéma projectif et plat \mathcal{Y} , purement de dimension relative 1, tel que $\mathcal{Y}_\eta \simeq \mathcal{X}_{L'}$ et tel que \mathfrak{X} s'identifie au complété formel de $\mathcal{Y} \otimes_{(L')^\circ} L^\circ$ le long de sa fibre spéciale. Ainsi, \mathcal{X} admet un modèle semi-stable algébrique après extension finie séparable de son corps de base k' .

6.5 Le cas particulier de la valuation discrète

(6.5.1) On suppose pour toute cette section que $|k^\times|$ est libre de rang 1. Les anneaux de la forme $k^\circ\{T_1, \dots, T_n\}$ sont alors noethériens; tout k° -schéma formel topologiquement de type fini est donc noethérien.

Rappelons quelques faits établis plus haut. Soit \mathfrak{X} un k° -schéma formel localement topologiquement de présentation finie et relativement normal dans sa fibre générique. Sa fibre générique \mathfrak{X}_η est réduite, l'ensemble $\text{Aff}(\mathfrak{X})$ des

domaines affinoïdes de \mathfrak{X}_η qui sont de la forme \mathcal{U}_η où \mathcal{U} est un ouvert affine de \mathfrak{X} est un atlas strictement k -analytique formel sur \mathfrak{X}_η , et $(\mathfrak{X}_\eta, \widehat{\text{Aff}}(\mathfrak{X})) \simeq \mathfrak{X}$. La fibre spéciale «absolue» \mathfrak{X}_s est naturellement isomorphe à $(\mathfrak{X}_{\tilde{k}})_{\text{red}}$. On dispose donc d'un homéomorphisme canonique $\mathfrak{X}_s \simeq \mathfrak{X}_{\tilde{k}}$, modulo lequel les applications de réduction $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_s$ et $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ coïncident. Nous nous permettrons de les désigner indistinctement par ρ , sans référence explicite à \mathfrak{X} . On désignera par $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}^{(0)}$ l'ensemble des points de codimension nulle de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$. L'ensemble $\rho^{-1}(\mathfrak{X}_{\tilde{k}}^{(0)})$ est l'ensemble des sommets de l'atlas $\text{Aff}(\mathfrak{X})$. Ce dernier est distingué si et seulement si $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$ pour tout $x \in \rho^{-1}(\mathfrak{X}_{\tilde{k}}^{(0)})$, ou encore si et seulement si $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est réduit, c'est-à-dire égal à \mathfrak{X}_s .

(6.5.2) Proposition. *Soit \mathfrak{X} un k° -schéma formel localement topologiquement de présentation finie et relativement normal dans sa fibre générique, soit ξ appartenant à $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}^{(0)}$ et soit x son unique antécédent par ρ .*

- 1) *La multiplicité de la composante irréductible $\overline{\{\xi\}}$ de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$, c'est-à-dire la longueur de l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\tilde{k}}, \xi}$, est égale à l'indice $[|\mathcal{H}(x)^\times| : |k^\times|]$.*
- 2) *Le corps $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ s'identifie à $\kappa(\xi)$.*

Démonstration. La question est locale sur \mathfrak{X} , ce qui autorise à le supposer affine, donc de la forme $\text{Spf } A$ où A est une k° -algèbre plate topologiquement de présentation finie intégralement close dans $A \otimes_{k^\circ} k$; on peut également supposer qu'il est purement de dimension d pour un certain d . Il en va alors de même de l'espace affinoïde \mathfrak{X}_η ; comme celui-ci est réduit, son lieu Y de non-normalité est de dimension strictement inférieure à d . Le corps $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ étant de degré de transcendance d sur \tilde{k} , le fermé de Zariski Y de X ne contient pas x ; son image $\rho(Y)$ évite donc ξ . Comme elle est constructible (et même fermée), on peut, quitte à encore restreindre \mathfrak{X} , supposer que \mathfrak{X}_η est normal et même intègre. Puisque A est intégralement close dans $A \otimes_{k^\circ} k$, l'algèbre intègre A est normale. Soit K son corps des fractions.

Le schéma $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ s'identifie à $\text{Spec } A \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$; le point ξ correspond par ce biais à un point de $\text{Spec } A$ que l'on note encore ξ et qui est de hauteur 1 dans le schéma noethérien normal $\text{Spec } A$. L'anneau local $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, \xi}$ est donc l'anneau d'une valuation discrète v de K qui prolonge la valuation de k° , normalisée pour que $v(k^\times) = \mathbb{Z}$. Soit π une uniformisante de k° et soit e l'entier $v(\pi)$. La longueur de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\tilde{k}}, \xi}$ est égale à celle de $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, \xi}/\pi$, et donc à e .

Soit $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ l'application qui envoie 0 sur 0 et a sur $|\pi|^{v(a)/e}$ si $a \neq 0$. C'est une valeur absolue dont la restriction à k coïncide avec la valeur absolue structurale de ce dernier, et qui est bornée par 1 sur A . Elle définit donc un point x' de $\mathcal{M}(A \otimes_{k^\circ} k)$. Si $a \in A$ on a par construction $a(\xi) = 0$ si et seulement si $\varphi(a) < 1$, ce qui signifie que $\rho(x') = \xi$; par conséquent, $x' = x$.

Par construction, (K, φ) est un sous-corps valué dense de $\mathcal{H}(x)$. Le corps résiduel de $\mathcal{H}(x)$ est dès lors égal à celui de (K, φ) , c'est-à-dire à celui de v et donc à $\kappa(\xi)$; et son groupe des valeurs n'est autre que $\varphi(k^\times) = |\pi|^{(1/e)\mathbb{Z}}$. Par conséquent, $[|\mathcal{H}(x)^\times| : |k^\times|] = e$, ce qui achève la démonstration. \square

(6.5.2.1) La flèche $\mathfrak{X} \mapsto (\mathfrak{X}_\eta, \rho^{-1}(\mathfrak{X}_{\tilde{k}}^{(0)}))$ établit une équivalence entre la catégorie des k° -courbes formelles relativement normales dans leur fibre

générique et celle des courbes strictement k -analytiques épinglées réduites. Si (X, S) est une courbe strictement k -analytique épinglée réduite, si \mathfrak{X} désigne la courbe formelle associée, et si $x \in S$, la proposition 6.5.2 ci-dessus assure que la composante irréductible de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ qui correspond à x a pour multiplicité $[|\mathcal{H}(x)^\times| : |k^\times|]$ et pour corps des fonctions $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$.

(6.5.2.2) Dans le cas propre on peut donner, grâce à GAGA et à l’algébrisation des courbes formelles propres, une variante algébrique (et non plus formelle) de l’équivalence évoquée ci-dessus, qui s’énonce comme suit.

La flèche $\mathcal{X} \mapsto (\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}, \rho^{-1}(\mathcal{X}_k^{(0)}))$ établit une équivalence entre la catégorie des k° -courbes algébriques projectives relativement normales dans leur fibre générique et celle des courbes strictement k -analytiques épinglées réduites et propres. Si (X, S) est une courbe strictement k -analytique épinglée réduite et propre, si \mathcal{X} désigne la courbe algébrique sur k° associée, et si $x \in S$, la proposition 6.5.2 ci-dessus assure que la composante irréductible de $\mathcal{X}_{\tilde{k}}$ qui correspond à x a pour multiplicité $[|\mathcal{H}(x)^\times| : |k^\times|]$ et pour corps des fonctions $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$.

Rappelons qu’une courbe strictement k -analytique épinglée propre est simplement une courbe k -analytique propre munie d’un ensemble fini de points de type 2 rencontrant chacune de ses composantes irréductibles.

(6.5.3) Nous allons terminer ce paragraphe en mentionnant une propriété de rareté des points x d’une courbe k -analytique qui sont de type 2 et satisfont la condition $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$. Soit donc X une courbe k -analytique et soit I un segment tracé sur $X_{[2,3]}$. L’ensemble \mathcal{E} des points x de I qui sont de type 2 satisfont la condition $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$ est alors fini. En effet, soit $x \in I$ et soit J une composante connexe de $I \setminus \{x\}$; elle définit une branche b issue de x et correspond donc à une valuation graduée non triviale $\langle \cdot \rangle$ du corps résiduel gradué $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_{\text{gr}}$. Choisissons $f \in \kappa(x)^\times$ tel que $\langle f \rangle_{\text{gr}} \neq 1$; la fonction $|f|$ est alors non constante le long de b . Il découle dès lors de 4.5.21 *et sq.* qu’il existe un intervalle ouvert J' contenu dans J et aboutissant à x tel que $|f|$ induise un homéomorphisme de J' sur un intervalle ouvert relativement compact J_0 de \mathbb{R}_+^\times . Comme $|k^\times|$ est un sous-groupe discret de \mathbb{R}_+^\times , l’intersection $J_0 \cap |k^\times|$ est finie. Si $x \in \mathcal{E} \cap J'$ alors $|f(x)| \in J_0 \cap |k^\times|$; il s’ensuit que J' ne contient qu’un nombre fini de points de \mathcal{E} , ce qui permet de conclure par compacité de I .

Disques unité maximaux sur une courbe quasi-lisse

(6.5.4) Commençons par un peu de vocabulaire. On appellera k -disque unité tout k -disque dont le rayon modulo $|k^\times|$ est égal à 1. Et si X est une courbe k -analytique et si x est un point de $X_{[2,3]}$ on dira que x est *non ramifié* si $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$ (ce qui entraîne qu’il est de type 2) et si $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est une extension séparable de \tilde{k} – c’est-à-dire si $\Omega_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\tilde{k}}$ est de dimension 1, ou encore si la \tilde{k} -algèbre $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est géométriquement réduite.

(6.5.5) Proposition. *Soit X une courbe k -analytique et soit U un ouvert de X qui est un disque virtuel relativement compact contenant un k -point. Soit x l’unique point de ∂U , qui appartient à $X_{[2,3]}$ en vertu de 3.6.39. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) U est un disque unité;
- ii) x est non ramifié.

Démonstration. D'après, 3.6.39 le point x appartient au lieu quasi-lisse de X . On peut donc, quitte à remplacer X par son lieu quasi-lisse (qui contient le disque virtuel U), la supposer elle-même quasi-lisse. La réunion de $\{x\}$ et de toutes les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$ qui sont relativement compactes est un domaine analytique compact X' de X . En restreignant encore X' par ablation des composantes connexes de $X' \setminus \{x\}$ qui rencontrent $\partial^{\text{an}} X'$ (ce n'est pas le cas du disque virtuel U), puis en substituant à X la composante connexe de x dans X' , on se ramène finalement au cas où X est quasi-lisse, compacte, irréductible, et où $\partial^{\text{an}} X \subset \{x\}$. Le singleton $\{x\}$ est alors un sous-ensemble sommital de X .

(6.5.5.1) *Supposons que i) soit vérifiée.* Le lemme 5.1.15 assure alors que $|\mathcal{H}(x)^\times| \subset |k^\times|$; par conséquent, $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$, et x est de type 2. L'ensemble sommital $\{x\}$ définit donc un modèle formel \mathfrak{X} de X sur k° qui est topologiquement de type fini, plat, et normal. L'ensemble $\{x\}$ étant un singleton, $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est irréductible. Soit \mathbf{x} le point fermé de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ qui correspond à la composante connexe U de $X \setminus \{x\}$; puisque $U(k)$ est non vide, \mathbf{x} est un \tilde{k} -point.

Comme $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$ l'espace strictement k -analytique formel $(X, \text{Atl}(\{x\}))$ est distingué, ce qui signifie que $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est réduite. Le fait que l'image réciproque U de \mathbf{x} sur X soit un disque unité assure alors que \mathbf{x} est un point lisse de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$. La \tilde{k} -courbe intègre $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est dès lors génériquement lisse. Son corps des fonctions est de ce fait séparable sur \tilde{k} ; or il s'identifie à $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ (prop. 6.5.2), d'où ii).

(6.5.5.2) *Supposons que ii) soit vérifiée.* L'égalité $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$ implique que $(X, \text{Atl}(\{x\}))$ est un espace strictement k -analytique formel distingué. Il lui correspond donc un k° -schéma formel topologiquement de type fini, plat, et normal \mathfrak{X} dont la fibre spéciale $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est réduite; comme le corps des fonctions de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ s'identifie à $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ (prop. 6.5.2), il est séparable sur \tilde{k} , ce qui signifie que $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est génériquement lisse. Soit F une extension finie purement inséparable de \tilde{k} . Par ce qui précède, la F -courbe \mathfrak{X}_F est génériquement réduite, et satisfait donc la propriété R_0 . Étant par ailleurs finie et plate sur la courbe $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$, laquelle est réduite et satisfait en particulier S_1 , elle satisfait elle-même S_1 ; par conséquent, \mathfrak{X}_F est réduite. Il en résulte que $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$ est géométriquement réduite.

Par conséquent, $(X_{\widehat{k^a}}, \widehat{\{x\}}_{\widehat{k^a}})$ s'identifie à $\mathfrak{X}_{(\widehat{k^a})^\circ}$. Soit \mathbf{y} l'unique antécédent du \tilde{k} -point \mathbf{x} sur $\mathfrak{X}_{\widehat{k^a}}$. L'image réciproque de \mathbf{y} dans $X_{\widehat{k^a}}$ est égale à $U_{\widehat{k^a}}$, qui est par hypothèse un disque; l'unique point de $\partial U_{\widehat{k^a}}$ étant situé au-dessus de x , il est de type 2, ce qui force, en vertu du lemme 5.1.15, le rayon modulo $|\widehat{k^a}^\times|$ de $U_{\widehat{k^a}}$ à être égal à 1. Mais \mathbf{y} est alors un point lisse de $\mathfrak{X}_{\widehat{k^a}}$; il s'ensuit que le \tilde{k} -point \mathbf{x} est situé sur le lieu lisse de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$, et partant que U est un disque unité. \square

Bibliographie

- [1] Vladimir Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [2] Vladimir Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.
- [3] Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu, and Wiesława Nizioł. Cohomology of analytical p -adic curves. *Camb. J. Math.*, 10(3) :511–655, 2022.
- [4] Pablo Cubides Kovacsics and Jérôme Poineau. Definable sets of Berkovich curves. *J. Inst. Math. Jussieu*, 20(4) :1275–1339, 2021.
- [5] Antoine Ducros. Variation de la dimension relative en géométrie analytique p -adique. *Compos. Math.*, 143(6) :1511–1532, 2007.
- [6] Antoine Ducros. Triangulations et cohomologie étale sur une courbe analytique p -adique. *J. Algebraic Geom.*, 17(3) :503–575, 2008.
- [7] Antoine Ducros. Les espaces de Berkovich sont excellents. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(4) :1443–1552, 2009.
- [8] Walter Gubler, Philipp Jell, and Joseph Rabinoff. Forms on berkovich spaces based on harmonic tropicalizations, 2024.
- [9] Michael Temkin. On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II. *Israel J. Math.*, 140 :1–27, 2004.