

Chapitre 3

Le phénomène leptokurtique

Christian Walter

Est-il possible de rendre compte du fait que la dispersion de l'incertitude financière n'a pas la forme la plus communément admise au XIX^e et au XX^e siècles dans le cas de la dispersion des erreurs par exemple? C'est à ce point précis qu'intervient pertinemment une propriété de certaines lois de probabilité : la leptokurticité¹.

3.1 Caractérisation de la leptokurticité

3.1.1 Une image des variations boursières

Soit $(S(t), t \geq 0)$ le processus d'évolution du cours d'un actif quelconque noté S (pour *Stock*, *Share*, ou *Security*) : $S(t)$ est le cours de l'actif S en date t . Le graphique supérieur de la figure 3.1 représente une telle trajectoire. On note $(X(t), t \geq 0)$ le processus du taux de rentabilité continu de S , défini par

$$X(t) = \ln S(t) - \ln S(0) \quad (3.1)$$

C'est la rentabilité cumulée d'un placement sur l'actif S effectué entre les dates 0 et t . Si l'on veut faire apparaître la rentabilité sur une période donnée de durée τ , on notera

$$\Delta X(t, \tau) = X(t) - X(t - \tau) = \ln S(t) - \ln S(t - \tau) \quad (3.2)$$

cette rentabilité continue sur l'intervalle de durée τ .

En pratique, on examine le comportement d'un marché sur une période $[0, T]$, subdivisée en n sous-périodes de longueur τ , ($T = n\tau$), avec des longueurs

1. Ce chapitre s'appuie sur une partie d'un article publié dans la Revue *Finance*, vol. 23, n°2/2002, remaniée et mise à jour.

τ éventuellement différentes (par exemple, 1 jour, 1 semaine, 1 mois, ou autre) qui déterminent donc la taille n de l'échantillon. On note, pour $t = k\tau$,

$$\Delta X(t, \tau) = \Delta X_k = X_k - X_{k-1} \quad (3.3)$$

L'analyse du marché entre les dates 0 et T conduit à l'obtention d'un échantillon de taille n , $\{\Delta X_1, \dots, \Delta X_n\}$. Cet échantillon permet d'accéder à la structure de risque de l'actif examiné.

La figure 3.1 représente une illustration du procédé utilisé. A partir de la trajectoire (graphique du haut) de l'indice mesurée en points (de 10 000 à 45 000), qui représente les valeurs de $S(t)$, on représente les valeurs de $\Delta X(t, \tau)$ pour $\tau = 1$ jour, soit les variations logarithmiques (ou rentabilités continues) quotidiennes de l'indice, mesurée en pourcentages, de -15% à $+10\%$ (graphique du milieu). On voit qu'il apparaît des pics, correspondant à des grandes variations quotidiennes, autour de fluctuations plus centrales. On voit aussi que les fluctuations moyennes présentent la caractéristique de s'amplifier au fil des années, de $\pm 2\%$ à $\pm 5\%$. L'étape suivante est de construire l'histogramme de la distribution de ces variations quotidiennes, qui est présenté sur le graphique du bas. L'histogramme permet d'accéder à la distribution empirique des fluctuations de l'indice, et donc au *risque* réel du marché (ici : japonais) pour les investisseurs ou les opérateurs. La question est alors de savoir *quelle distribution ajuste au mieux* la distribution empirique observée. Et, plus fondamentalement, *quel processus aléatoire engendre cette distribution*. Il est essentiel de bien comprendre que ces deux questions sont, à la limite, totalement distinctes. Leur confusion est à l'origine des controverses sur le caractère fractal ou non des marchés de capitaux.

Une manière de décrire l'évolution trajectorielle du cours $S(t)$ est de représenter cette évolution au moyen d'une équation différentielle stochastique. Le *modèle standard* de la finance fait l'hypothèse que la dynamique du cours $S(t)$ peut être décrite par l'équation différentielle stochastique linéaire

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t) dW(t) \quad (3.4)$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien standard, soit $W(0) = 0$, $\mathbb{E}[W_1] = 0$ et $\mathbb{E}[W_1^2] = 1$. Les paramètres μ et σ sont respectivement l'espérance mathématique de la rentabilité instantanée du titre (ou performance boursière) et sa volatilité instantanée (ou fluctuations autour de l'espérance). Il est important de bien noter que ces paramètres ne sont pas, ici, conditionnés par de l'information. On fait ensuite l'hypothèse de stationnarité selon laquelle $\mathbb{E}[\Delta X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\Delta X_t]$ pour tout t . Le choix de la mesure de probabilité (P ou Q) n'apparaît pas dans cette équation : à ce stade, on considère qu'il s'agit de la probabilité du phénomène financier² dite « historique » P dans la littérature technique en finance. Une autre probabilité (la probabilité dite « risque neutre » Q) pourrait aussi être utilisée, moyennant une transformation simple

2. Selon la terminologie introduite par Eric Brian [2009].

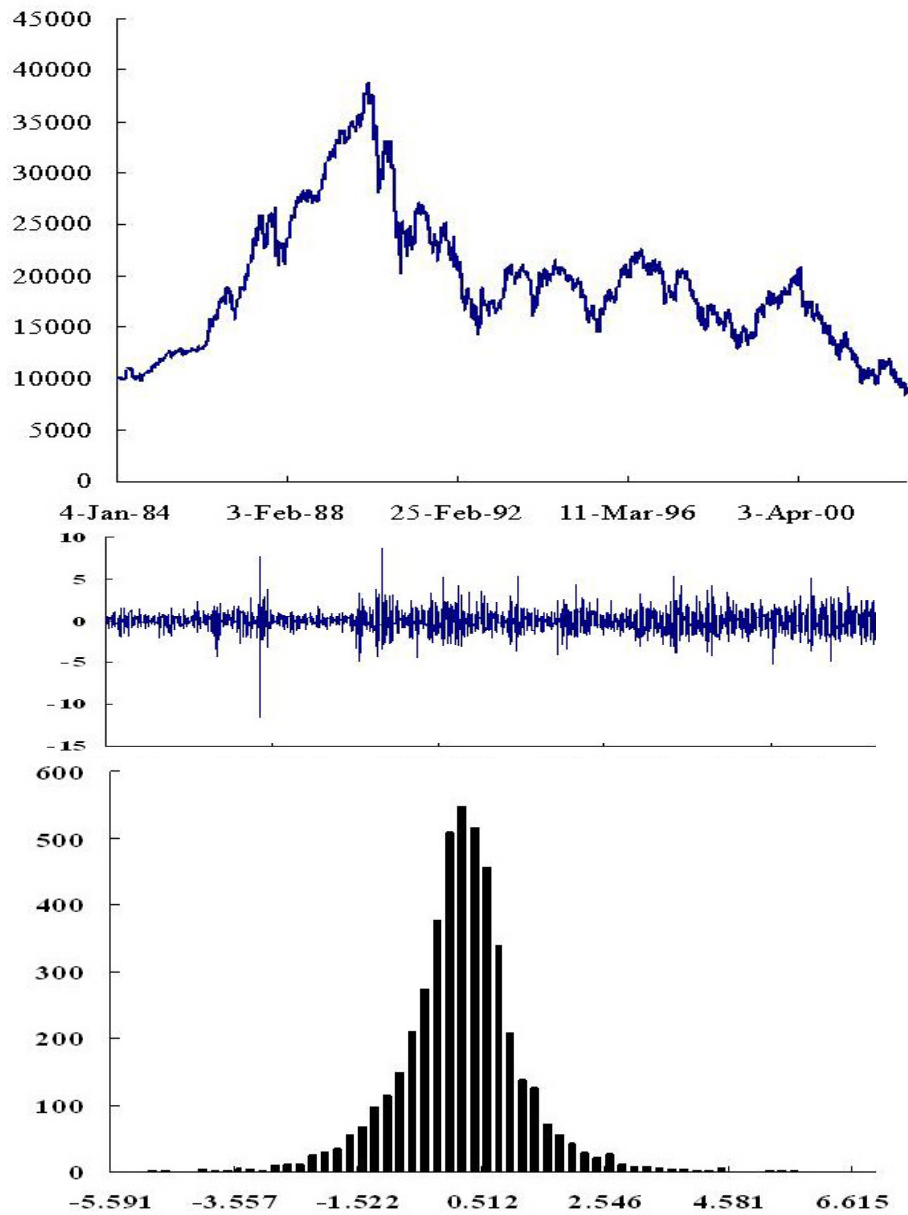


FIG. 3.1 – La transformation habituelle des représentations de la dynamique boursière : l'exemple de l'indice Nikkei 225 entre le 4/01/1984 et le 24/10/2002. En haut, la trajectoire de l'indice mesurée en points (de 10 000 à 45 000), qui représente les valeurs de $S(t)$. Au milieu, les variations quotidiennes soit les valeurs de $\Delta X(t, \tau)$ pour $\tau = 1$ jour. En bas, la construction de l'histogramme correspondant à ces variations.

sur l'espérance de rentabilité (qui deviendrait celle du marché monétaire au lieu d'être celle du titre) mais ce changement de probabilité ne modifierait pas le raisonnement que nous allons conduire dans ce chapitre. Insistons seulement ici sur le fait que cette stationnarité est une hypothèse forte qui est faite sur les caractéristiques probabilistes du processus. Ajoutée à l'hypothèse d'indépendance des accroissements, elle conduit à poser comme cadre probabiliste de la description des dynamiques boursières l'utilisation de processus de Lévy : les processus de Lévy sont des processus aléatoires à accroissements indépendants et stationnaires (ou indépendants et identiquement distribués, ci-après i.i.d.). Le mouvement brownien est un processus de Lévy très particulier, dans lequel la mesure de Lévy est nulle. Donc aucune discontinuité n'existe dans le mouvement brownien : les discontinuités n'apparaissent que dans le cas de mesures de Lévy non nulles.

En appliquant les techniques usuelles du calcul intégral-différentiel stochastique (lemme de Itô), on montre que l'équation (3.4) admet pour solution comme dynamique trajectorielle sur les cours des actifs

$$S(t) = S(0) \exp \left((\mu - \sigma^2/2) t + \sigma W(t) \right) \quad (3.5)$$

qui définit une *exponentielle de mouvement brownien*. Ici également, pour les développements qui vont suivre, il est important de bien comprendre que le modèle implicite qui est posé par l'hypothèse i.i.d. est une *exponentielle de processus de Lévy*, ici réduite à sa forme particulière brownienne.

Associé à tort à une interprétation économique utilisant la notion de transmission d'information dans et par les cours, l'exponentielle de mouvement brownien devint le cœur probabiliste du paradigme qui a longtemps été généralement admis en finance³, largement véhiculé par un très vaste ensemble de pratiques professionnelles et de théories successives, et qui est une description du comportement des marchés au moyen d'un concept fondateur et structurant, celui de l'efficacité informationnelle. Concept aux contours fluctuants, pressenti par Alfred Cowles⁴, esquissé par Hayek, l'efficacité informationnelle dans sa forme moderne a été successivement définie par Eugène Fama en 1965 et 1970 pour ses formes initiales (information disponible), puis à nouveau par Fama en 1976 pour une forme plus détaillée (information disponible et pertinente), puis par Michael Jensen en 1978 qui introduisit les coûts de transactions, pour être enfin précisée dynamiquement en 1980 dans les travaux de Sanford Grossman et Joseph Stiglitz⁵. L'association établie dès l'origine entre le mouvement brownien et le concept d'efficacité informationnelle a conduit à une forme particulière d'efficacité, que l'on a proposé d'appeler « forme brownienne de l'efficacité informationnelle »⁶.

Si l'on s'intéresse à la rentabilité cumulée $X(t)$ de l'actif, il est donc clair d'après (3.4) que le modèle standard de la finance conçoit $X(t)$ comme un

3. Voir Walter et Pracontal [2009].

4. Voir Walter [1999].

5. Fama [1965, 1970, 1976], Jensen [1978], Grossman et Stiglitz [1980].

6. Walter et Pracontal [2009].

mouvement brownien :

$$X(t) = \nu t + \sigma W(t) \quad (3.6)$$

où $\nu = \mu - \sigma^2/2$. Très tôt, c'est-à-dire dès les années 1960, un grand nombre de difficultés sont apparues quand il s'est agi de mettre en évidence la validité de l'équation (3.6) dans l'industrie et dans la recherche. Ces difficultés ont été de deux ordres : pratiques et théoriques. D'une part, des problèmes pratiques se sont posés avec les tentatives d'application directe de cette équation sur les outils de gestion des portefeuilles et de positions de marché. Dans les professions financières, presque tous les métiers de la finance de marché furent concernés par ces difficultés opérationnelles. D'autre part, tous les tests statistiques ont fait apparaître la violation permanente de la normalité des distributions. En effet, le modèle standard défini par l'équation (3.6) implique que les rentabilités $\Delta X(t, \tau)$ soient de la forme

$$\Delta X(t, \tau) = \nu \tau + \sigma \Delta W(t, \tau) \quad (3.7)$$

c'est-à-dire i.i.d.-normales de variance $\sigma^2 \tau$ (par définition du mouvement brownien).

Or les distributions réelles empiriques des variations boursières relevées en fréquence fixe pour différentes valeurs de τ (1 jour, une semaine, un mois etc.) ont une forme non normale qui présente à toutes les échelles (quoique différemment selon l'échelle) la même caractéristique : on observe un trop grand nombre de grandes et de petites variations et un nombre trop faible de variations moyennes. Cette observation correspond à cette impression souvent vérifiée par les professionnels des marchés selon laquelle « le marché est très calme, sauf quand il bouge beaucoup ». Alors que l'hypothèse du modèle standard (une distribution normale) correspondrait à un marché ni très calme, ni très agité, mais dans lequel l'agitation resterait en permanence moyenne. Insistons : avec la distribution normale, le marché boursier est *imaginé* comme un lieu où prévalent les agitations moyennes, tandis que la non normalité des distributions réelles illustre le fait que, dans le marché, l'agitation est, soit faible, soit forte, mais rarement moyenne. Si l'on pense que l'agitation boursière s'apparente à une « température » de marché, on voit que les marchés réels sont des places où il peut faire très chaud ou très froid : des climats tropicaux ou polaires, mais rarement des climats tempérés. La figure 3.2 est une symbolisation de ce phénomène. Les distributions réelles observées sont plus pointues au centre (davantage de moments de faible agitation), plus creuses dans les flancs (moins de moments d'agitation moyenne), plus étirées dans les queues (plus de moments d'agitation forte). Visuellement, on constate que la *courbure* de la distribution observée est plus mince que celle de la loi normale. Les flancs sont plus « maigres », et la métaphore joue car c'est exactement ce qui advient : on a retiré de la *masse* de probabilité des flancs pour la reloger au centre de la distribution et dans ses queues. C'est la raison pour laquelle on qualifie ce phénomène de leptokurtique (du grec *kurtosis*, courbure et *lepto*, mince).

Une manière directe de percevoir l'effet concret de la leptokurticité est de

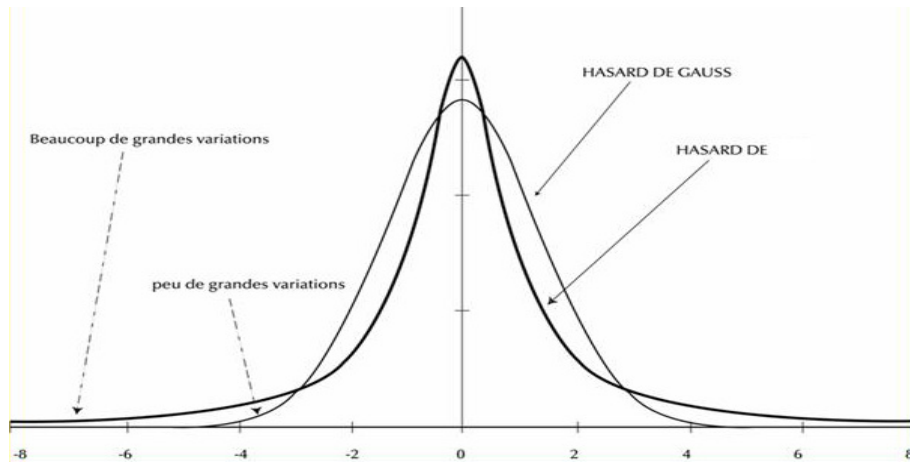


FIG. 3.2 – La mise en évidence du phénomène leptokurtique. Par rapport à la densité gaussienne (figurée en trait mince et intitulée « hasard de Gauss »), les distributions réelles observées sur les marchés sont toutes de la forme de la courbe en trait gras (intitulée « hasard de ? ») : elles sont plus minces que la gaussienne. La masse de probabilité s'est déplacée des flancs vers le centre et les queues.

considérer la performance boursière d'un actif. Davantage de moments d'agitation élevée (grandes variations) ou faible (petites variations) et moins de moments d'agitation moyenne produiront une concentration de la performance sur les moments d'agitation forte⁷. Par exemple, une performance de 30% en trois mois pourra résulter principalement de deux ou trois très fortes hausses, et non de la hausse régulière de chaque journée. Dans la progression de la performance cumulée $X(t)$, on verra apparaître des discontinuités : des périodes longues où l'on gagne très peu, suivies par un gain important, pour à nouveau attendre longtemps le gain suivant. La notion de gain moyen par jour aurait ici peu d'importance pour l'appréciation de la performance obtenue. Le monde financier décrit par la courbe en trait mince est donc un monde de *discontinuités* et de *concentrations*. C'est un monde dans lequel l'opération de moyennisation peut devenir un artefact sans pertinence. La leptokurticité en finance est donc la trace statistique de la perte de pertinence des moyennes.

3.1.2 Photographie de la leptokurticité

Donnons à présent un contenu mathématique à la mise en évidence de la leptokurticité. Considérons l'exemple précédent de la performance boursière cumulée $X(t)$. Si l'on cherche à suivre l'évolution de cette performance par exemple jour par jour, on va considérer des sous-périodes de durée $\tau = 1$

⁷. Gatfaoui et Walter [2009], Le Courtois et Walter [2008].

jour. Sur cette sous-période, on obtient comme on l'a vu le taux de rentabilité périodique $\Delta X(t, \tau)$: un accroissement du processus aléatoire $X(t)$ qui serait ici la performance quotidienne de l'actif. On cherche à caractériser la distribution de probabilité de $\Delta X(t, \tau)$. Il est d'usage de la résumer par ses moments (s'ils existent) dont la valeur dépend de τ . Pour toute échelle d'analyse τ , on définit les moments d'ordre k notés $\mu_k(\tau)$ comme

$$\mu_k(\tau) = \mathbb{E}[(\Delta X(t, \tau))^k] \quad (3.8)$$

et les moments centrés d'ordre k notés $m_k(\tau)$

$$m_k(\tau) = \mathbb{E}[(\Delta X(t, \tau) - \mu(\tau))^k] \quad (3.9)$$

Dans la finance classique, le couple rentabilité - risque est représenté par les deux premiers moments μ_1 et m_2 qui sont l'espérance mathématique

$$\mu(\tau) = \mathbb{E}[\Delta X(t, \tau)] \quad (3.10)$$

et la variance

$$\text{var}(\tau) = m_2(\tau) = \mathbb{E}[(\Delta X(t, \tau) - \mu(\tau))^2] \quad (3.11)$$

d'où l'on déduit l'écart type (la volatilité)

$$\sigma(\tau) = \sqrt{\text{var}(\tau)} \quad (3.12)$$

Si $\tau = 1$ jour, μ_1 et m_2 représentent donc la performance quotidienne moyenne et sa volatilité quotidienne.

La volatilité est en fait un paramètre d'échelle : les variations sont-elles de l'ordre de $\pm 3\%$ ou $\pm 30\%$? Mais la taille des fluctuations ne suffit pas : il est également nécessaire de savoir comment on parvient à cette taille, de manière régulière ou irrégulière. Comme on l'a vu, dans le cas d'un gain de 30% réalisé en trois mois, il est différent de l'avoir obtenu régulièrement au fil des jours ou bien en seulement deux ou trois jours de bourse. Dans le premier cas, la performance vient d'une hausse à peu près régulière du titre tandis que, dans le second, l'action aura effectué des « rebonds » (comme disent les professionnels) en réaction par exemple à des annonces faites par la société et considérées à la fois comme bonnes mais aussi comme surprenantes (« on ne s'attendait pas à d'aussi bons résultats »).

Pour apprécier cette dimension de la dynamique boursière, il faut utiliser un autre paramètre qui définisse la courbure de la distribution (normale ou mince). Il s'agit du moment centré d'ordre 4 ou de son équivalent, le coefficient d'aplatissement de Pearson et Fisher (appelé en langue anglaise le coefficient de courbure ou *kurtosis coefficient*). Ce coefficient permet d'apprécier si la courbure est celle d'une loi normale ou non. Il est défini par

$$K(\tau) = \frac{m_4(\tau)}{\sigma(\tau)^4} - 3 \quad (3.13)$$

Ce coefficient représente la réduction du moment centré d'ordre 4 par l'écart type de la distribution. Si la distribution est normale, $K = 0$. Si la distribution est plus mince que la normale, alors $K > 0$. Il est important de noter qu'une distribution plus mince que la normale (leptokurtique), donc à valeur de K supérieure à 0, n'implique pas nécessairement que les fluctuations seront de grande amplitude. Cela signifie seulement que les probabilités de survenance des différentes agitations du marché ont été modifiées, dans le sens d'une plus grande probabilité d'agitation forte et faible, et d'une moins grande probabilité d'agitation moyenne. Mais l'amplitude des variations peut être très faible. Par exemple dans le cas d'une obligation peu liquide du secteur privé, il est possible que le cours reste constant pendant plusieurs journées faute de transactions effectuées, puis que la vente ou l'achat de trois titres par un particulier fasse se déplacer le cours de 0,10 % ou de 0,20 %. Ce saut de cotation produira mécaniquement une valeur de K élevée sans pour autant que l'amplitude du mouvement soit importante en termes de gains ou de pertes. Le coefficient K mesure la rugosité d'une trajectoire (ou son erraticité, ses sauts), mais ne mesure que cela.

Si l'on veut inclure l'amplitude dans la mesure de la forme de la distribution, et disposer simultanément de l'amplitude et de la forme, il suffit de ne pas réduire le moment centré d'ordre 4 et de considérer ce seul moment. En fait, m_4 représente un paramètre de forme, « rempli » par la *taille appropriée des fluctuations*, mesurée par la volatilité (la puissance 4 de la volatilité permet d'homogénéiser le calcul). Réciproquement, on voit que la réduction par la volatilité permet de comparer l'aplatissement de deux distributions d'écarts types différents, donc de ne considérer que leur forme. En fait, dans la pratique de la finance professionnelle (comme par exemple les gestions de portefeuilles dynamiques) les deux mesures existent simultanément.

Tous les échantillons $\{\Delta X_1, \dots, \Delta X_n\}$ collectés depuis un siècle sur tous les marchés et tous les actifs présentent un coefficient d'aplatissement $K > 0$ donc trop élevé. C'est ce qu'on appelle sur les marchés le phénomène leptokurtique. La modélisation de ce phénomène a été l'objet de l'une des plus importantes controverses de la finance théorique pendant ces cinquantes dernières années, sur laquelle on revient au paragraphe suivant.

Auparavant, on peut s'arrêter un instant ce qui vient d'être décrit. On a fait apparaître par une mise en évidence empirique un phénomène particulier, appelé phénomène leptokurtique. Ce phénomène pose un problème majeur à la modélisation financière classique car le modèle standard des fluctuations boursières (défini indifféremment par les équations (3.5) et (3.6) sur les cours ou les rentabilités) *exclut* ce phénomène. Il s'agit donc de modifier le modèle standard pour prendre en compte cette leptokurticité. Mais, à ce stade purement descriptif d'une évolution boursière par sa distribution empirique, il est essentiel de bien comprendre que cette photographie d'une distribution ne dit *rien* sur le processus qui l'a engendrée. Il peut s'agir d'une loi marginale unique dans le cas d'un processus aléatoire à accroissements indépendants et stationnaires, d'un mélange de lois dans le cas de processus mixtes ou de paramètres évo-

luant au cours du temps, d'un effet d'un changement d'horloge de mesure du temps sur les variations boursières, ou de tout autre chose encore. Pour fixer les idées, il s'agirait dans le premier cas d'un processus de Lévy non brownien, dans le deuxième cas d'une modélisation économétrique à variance conditionnelle non constante de type ARCH, et dans le troisième cas d'un mouvement brownien mesuré dans un référentiel de temps utilisant un subordonateur de Lévy comme horloge. Insistons sur ce problème : c'est la confusion entre les aspects « distributionnels » et les aspects « temporels » (liés aux processus) de la leptokurticité qui a été à l'origine des débats les plus violents qui ont agité la communauté scientifique financière autour des modèles proposés par Benoît Mandelbrot⁸.

La seule photographie de la leptokurticité n'est donc pas suffisante pour choisir entre plusieurs modélisations concurrentes. Pour avancer dans la compréhension du phénomène leptokurtique et dans sa modélisation, il est nécessaire de poser de manière précise et explicite un *cadre temporel* de trajectoire boursière, c'est-à-dire de faire des hypothèses sur le processus aléatoire qui sera utilisé pour modéliser la dynamique trajectorielle du titre en bourse.

3.2 Modélisations de la leptokurticité

3.2.1 Un exemple : densités hyperboliques

Pour illustrer par un exemple la manière de passer d'une photographie de leptokurticité à une modélisation de trajectoire boursière, considérons le traitement effectué par des travaux récents⁹ sur les variations de l'action allemande Bayer. La figure 3.3 représente la mise en évidence du phénomène leptokurtique sur Bayer. Il s'agit tout d'abord de faire apparaître que la distribution empirique observée des rentabilités quotidiennes de Bayer diffère significativement de la loi normale. Pour cela, on trace la distribution empirique correspondant aux points observés et la densité gaussienne théorique. L'abscisse représente les valeurs des rentabilités logarithmiques quotidiennes, de -2% à $+2\%$. L'ordonnée la valeur de la densité de probabilité. Deux représentations graphiques sont possibles : avec les densités effectives (graphique de gauche), avec leur logarithme (graphique de droite). On voit sur le graphique de gauche qu'il apparaît davantage de points dans le centre de la distribution et moins de points sur les flancs : la distribution empirique est plus mince que la gaussienne. Mais les queues de distribution semblent confondues. La représentation logarithmique (graphique de droite) permet d'effectuer un zoom sur les queues de distribution (effet du logarithme) en faisant nettement apparaître que les points relevés se situent à l'extérieur de la densité gaussienne. On a donc bien un effet leptokurtique accompagné de queues de distributions étirées.

8. Voir une synthèse dans Walter [2009].

9. Il s'agit de l'article de Eberlein et Ozkan [2002].

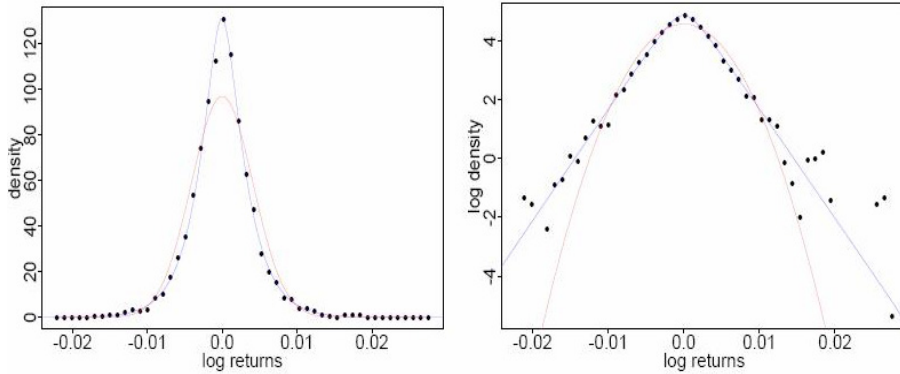


FIG. 3.3 – Deux représentations graphiques de la mise en évidence du phénomène leptokurtique sur l'action Bayer (source Eberlein et Ozkan [2002]). A gauche, les densités de probabilité empirique et gaussienne. A droite, leur logarithme et la densité hyperbolique.

Pour choisir une modélisation de cette distribution empirique, on peut considérer pour commencer la seule approche statique. La représentation logarithmique présente l'avantage de faire apparaître visuellement une autre classe de fonctions candidates que la densité gaussienne pour l'ajustement des points. En effet, on sait que la loi normale a pour densité une fonction exponentielle de type $\exp(-x^2)$, c'est-à-dire une *exponentielle de parabole*. Donc, en passant au logarithme de cette densité, on obtient simplement la fonction $-x^2$, soit une *parabole inversée*. Elle apparaît sur le graphique de droite comme l'ogive centrale qui traverse l'axe des abscisse au voisinage des rentabilités -2% et $+2\%$. La courbe des rentabilités réelles se présente plutôt comme une *hyperbole inversée* au-dessus de la parabole. De là vient une possibilité naturelle de choix de densité de probabilité : des *exponentielles d'hyperbole*.

Pour construire une distribution appropriée, il suffit donc d'utiliser l'équation d'une hyperbole (à sommet « en haut » pour obtenir une fonction de densité) et de normaliser la fonction pour obtenir une densité de probabilité (intégrale égale à 1). Une hyperbole a pour équation

$$f(x) = -\alpha\sqrt{1+x^2} + \beta x \quad (3.14)$$

où α et β sont deux constantes qui caractérisent la forme de l'hyperbole : lorsque x tend vers $\pm\infty$, les asymptotes sont les deux droites de pente $-\alpha + \beta$ (pour $x \rightarrow +\infty$) et $\alpha + \beta$ (pour $x \rightarrow -\infty$).

Il vient directement de (3.14) que la forme générale de la fonction de densité d'une loi hyperbolique sera

$$f_H(x) = a \exp\left(-\alpha\sqrt{1+x^2} + \beta x\right) \quad (3.15)$$

fonction	forme de la densité	queues de distribution
parabole	$a \exp(-x^2)$	finies (loi normale)
hyperbole	$a \exp(-\alpha\sqrt{1+x^2} + \beta x)$	étirées (loi non normale)

TAB. 3.1 – *Fonction de densité et formes de hasard.*

où a représente une constante de normalisation à 1 de la fonction de densité.

De la considération des pentes des deux asymptotes, il vient une interprétation directe des paramètres : $\alpha > 0$ et $0 < |\beta| < \alpha$ déterminent la *forme* de la distribution, en agissant sur l'épaisseur des queues (pour α) et sur la dissymétrie (pour β). Avec cette famille de distributions, on vient de compléter la mesure du risque en finance, classiquement réduit comme on l'a vu à la volatilité (taille), par une deuxième dimension de *forme*: le poids des queues de distribution et la dissymétrie. C'est-à-dire précisément les phénomènes que l'on cherchait à modéliser pour rendre compte des discontinuités et des concentrations. Autrement dit, du point de vue des seules distributions, les densités hyperboliques permettent de bien reproduire le phénomène leptokurtique et ces densités sont ainsi un candidat naturel pour la modélisation de la non normalité.

Mais cette description statique de la distribution ne dit rien du comportement trajectorien (temporel) de l'action Bayer. Il est nécessaire de faire une autre hypothèse pour obtenir le processus aléatoire recherché. Conservons l'hypothèse i.i.d. du modèle standard et n'abandonnons que l'hypothèse de normalité. On montre que les densités de forme hyperbolique possèdent la propriété d'être indéfiniment divisibles. En cela, elles peuvent constituer des briques de bases pour la construction de processus de Lévy non browniens. Par conséquent, on peut considérer qu'une modélisation de la trajectoire boursière de Bayer est possible dans un cadre i.i.d. avec des densités hyperboliques. En d'autres termes, on vient de poser l'hypothèse d'un processus de Lévy non brownien à densité hyperbolique pour la modélisation financière de l'évolution boursière de l'action Bayer.

On voit sur ce premier exemple simple comment se pose la question de la modélisation financière de la leptokurticité et l'importance de la distinction des deux aspects distributionnel et temporel.

3.2.2 Les termes du débat sur la modélisation

Les recherches relatives à la prise en considération du phénomène leptokurtique et à la modélisation de la leptokurticité ont toujours un double objectif.

D'une part, descriptif. Il s'agit dans cette perspective de parvenir à modéliser du mieux possible les variations des cours de bourse au moyen d'outils

probabilistes ou statistiques, en postulant des classes de processus qui reproduisent au mieux la leptokurticité sans chercher à en expliquer l'origine, donc sans référence à des comportements d'agents. C'est une approche que l'on pourrait qualifier de minimaliste, mais qui est cependant d'une utilité immédiate puisque une équation de dynamique boursière constitue l'ingrédient premier de toute ingénierie financière comme de toute valorisation d'actifs ou de contrôle de risque sur une position de marché.

On distingue dans cette approche plusieurs courants de recherche indépendants mais qui peuvent se regrouper par grands types de modélisation. Une première manière de classer les modèles existants est de considérer l'hypothèse i.i.d. c'est-à-dire le cadre conceptuel des processus de Lévy : une partie des modélisations conserve ce cadre, tandis qu'une autre l'abandonne. Une seconde manière de classer les modèles est de considérer l'horloge utilisée pour la mesure du temps : la plupart des modélisations conservent la mesure de temps physique ou calendaire, mais d'autres analyses préfèrent pondérer le temps calendaire par l'activité du marché, contractant ou dilatant le temps calendaire en fonction de cette activité, selon la « température boursière ». Dans ces dernières modélisations, la mesure du temps est alors celle produite par un temps social, le temps construit par les agents eux-mêmes. Cette deuxième typologie n'est pas contradictoire avec la première car les mêmes processus de Lévy peuvent être définis selon deux référentiel de temps différents. Cette démarche est la plus ancienne, les premiers travaux remontant aux années 1930, et a récemment été renouvelée par la redécouverte des processus de Lévy sous leur forme non stable (non fractale) dans les années 1990.

D'autre part, explicatif. Il s'agit dans cette perspective de développer des hypothèses relatives aux comportements des agents pour proposer une explication de la leptokurticité à partir des interactions à l'échelle des transactions, ou échelle dite microscopique du marché (ce qui est appelé dans la littérature de recherche la microstructure des marchés¹⁰). L'utilité de cette approche n'apparaît peut-être pas immédiatement aux professionnels mais c'est cependant un moyen efficace pour pouvoir choisir entre plusieurs classes de processus candidats relevant de l'approche descriptive seule (qui peut s'apparenter à ce qui est appelé en langue anglaise *curve fitting*). C'est une démarche plus récente qui a pendant longtemps été isolée de la précédente.

Mais avec les modélisations les plus récentes qui utilisent un temps social construit par les agents, ces deux démarches sont dans un mouvement de rapprochement l'une de l'autre. En effet, les investigations sur données de haute fréquence qui font intervenir d'autres variables que les seuls cours cotés (comme le contenu des carnets d'ordre d'achats et de ventes), peuvent permettre d'établir une relation entre la construction du temps social par les agents dans le mécanisme d'échange et la forme de la distribution empirique des variations des cours cotés dans ces échanges. Ainsi a été mis en évidence le rôle de lissage des fluctuations boursières opéré dans les années 1960 par les teneurs de mar-

10. Les travaux fondateurs sont ceux de Kyle [1985].

ché et les spécialistes de la cotation des titres pour régulariser les variations boursières et construire par leur intervention des distributions normales. Cette compréhension de l'articulation entre institutions boursières et formes du hasard observées sur les marchés est à l'origine du renouveau des modélisations à changement d'horloge par des processus de Lévy à subordonateur non brownien.

Le problème qui a alors surgi a été celui de l'échelle de temps. En effet, si on peut intuitivement comprendre que l'activité boursière (la « température du marché ») contracte ou dilate le temps physique à la manière dont la théorie de la relativité contracte ou dilate le temps selon l'intensité gravitationnelle, on voit aussi que cette analyse s'applique bien à l'échelle de la cotation des titres, mais pas à celle des relevés de cours de clôture en fin de journée de bourse. Pour cette échelle de temps (quotidienne), on se trouve confronté à la question de l'agrégation des variations de cours cotation par cotation. Apparaît ici le débat sur les fractales ouvert par Mandelbrot en 1962. Sauf à faire l'hypothèse d'une structure fractale stricte sur les variations boursières et à courir le risque d'être victime d'une illusion d'échelle, on ne peut pas appliquer simplement à l'échelle quotidienne (et *a fortiori* aux fréquences plus basses) la reproduction de la formation du cours dans les hautes fréquences (minute par minute). Les enjeux financiers et les populations concernées ne sont pas les mêmes : l'horizon de temps d'un arbitragiste (court) n'est pas celui d'un gérant de portefeuille de compagnie d'assurance (long). Sociologiquement, les mécanismes d'intervention sur les mêmes cours aux mêmes heures relèvent de logiques d'action et d'anticipation totalement différentes. Un gérant de portefeuille va vendre tel titre à telle heure, qui sera acheté par un arbitragiste au prix demandé par le gérant. Mais ces deux agents au moment où l'échange assure leur rencontre n'ont pas les mêmes perceptions du futur, pas les mêmes appareillages techniques, pas le même rapport à l'incertitude et c'est en cela que, pour chaque transaction-nouveau, c'est d'une certaine manière tout l'ordre du monde qui est en jeu : l'ordre symbolique de son système de représentation¹¹.

C'est également l'utilisation qui est faite des fréquences de relevé de cours qui est différente. On se trouve confronté ici à deux usages situés aux extrêmes d'une bande de fréquences donnée. Aux très hautes fréquences (cotation par cotation, ou heure par heure), les cours cotés sont utilisés par les arbitragistes pour intervenir à très court terme sur les anomalies de cotations détectées au moyen de calculs reposant sur des modèles d'arbitrage. Les très basses fréquences (annuelles) sont le domaine de la macroéconomie et des politiques économiques des États. Les cours sont alors utilisés dans des modèles de prévision économique, et la progression de la bourse est analysée en regard de celle de variables macroéconomiques (PNB, autres). La fréquence quotidienne est celle de la valorisation des instruments financiers qui répond à une autre logique institutionnelle, celle de la liquidité des actifs comme par exemple la valeur (justement) liquidative des OPCVM qui permet de croire que l'actif que l'on détient serait à tout instant liquidable (rendu liquide, transformé en liqui-

11. Voir Brian [2009], p. 36.

dités, liquéfié...) sur le marché. On retrouve aussi sur cette échelle la démarche des autorités de surveillance et de réglementation des marchés avec la valorisation dite *mark to market* de tous les actifs et les passifs des établissements financiers. La même cotation boursière est donc utilisée avec des objectifs tout à fait différents. Il y a conjonction d'une transaction à une échelle dite microscopique (celle de la microstructure des marchés) à une analyse développée sur une échelle dite macroscopique (celle de la macroéconomie). Les deux échelles microscopique et macroscopique se résolvent au même point au moment précis où le carnet d'ordre se vide, ce qui, littéralement, vide le marché (en anglais, le terme éclairant de *market clearing*). C'est aussi en cela que la base et le sommet de la pyramide savante se rencontrent très concrètement dans le cours de bourse. Mais la conjonction de ces deux perspectives ne doit pas masquer le fait que l'on se situe sur deux échelles différentes de signification¹².

Il est tout à fait remarquable de constater que l'approche statistique pure cerne ce phénomène sans pouvoir actuellement l'expliquer de manière pleinement satisfaisante. En effet, l'une des raisons du rejet des modélisations fractales de Mandelbrot est venue de ce que le phénomène leptokurtique n'est pas constant le long des échelles d'observations des fluctuations boursières. Plus précisément, *la leptokurticité est anormalement plus forte dans les hautes fréquences que dans les basses fréquences* : on trouve des valeurs de K plus élevées pour les variations à l'échelle de la cotation que pour les variations à l'échelle de la journée (et *a fortiori* aux fréquences plus basses). Cette décroissance anormale du coefficient d'aplatissement K a constitué un angle d'attaque contre la fractalité des premiers modèles de Mandelbrot. En effet, si la structure des marchés était fractale, alors la leptokurticité serait identique à toutes les échelles d'observation, moyennant une renormalisation appropriée (par exemple, dans le cas de fractales browniennes, on devrait avoir $K(n\tau) = K(\tau)/n$ soit une décroissance linéaire). Ce qui n'est pas le cas. Pour rendre compte de cette décroissance anormale, certains travaux ont proposé d'introduire une structure de dépendance complexe; d'autres ont introduit le concept de « respiration » de l'échelle des fluctuations par l'activité du marché¹³. La décroissance anormale de K semble donc être reliée à un mode d'interaction spécifique entre agents selon les échelles d'intervention. L'analyse du phénomène leptokurtique à différentes échelles est donc un moyen d'explicitier des modes d'action et d'interaction différents mais implicites. C'est également pour ces questions d'échelle qu'il n'est pas possible de se contenter d'une analyse distributionnelle seule, et qu'il est nécessaire de poser explicitement une hypothèse de processus aléatoire. Le tableau 3.2 donne un petit échantillon de la mise en évidence de la baisse du coefficient K en fonction de la fréquence d'observation (de résolution) des variations du marché.

12. Voir Brian [2009], p. 51.

13. Par exemple Hall *et al.* [1989] dans le premier cas, Bouchaud et Potters [1997] dans le second.

auteurs	année	test	période	fréquence
Blattberg et Gonedes	1974	30 actions du NYSE	1957-1962	1,3,5,8 jours
Hagerman	1978	805 actions du NYSE	1962-1976	1-35 jours
Hagerman	1978	286 actions de l'AMEX	1962-1976	1-35 jours
Upton et Shannon	1979	50 actions du NYSE	1956-1975	1,3,6,12 mois
Fielitz et Rozelle	1983	50 actions du NYSE	1962-1969	1-30 jours
Fielitz et Rozelle	1983	indice SP 500	1928-1973	1-30 jours
Wasserfallen et Zimmermann	1985	USD/CHF	1978-1980	1-10 minutes
Boothen et Glassman	1987	USD/GBP-DEM- JPY-CAD	1973-1984	1,5 jours, 1 mois, 1 trim.

TAB. 3.2 – *Décroissance du coefficient d'aplatissement K*

3.3 Trois raisons pour un phénomène

Lorsque l'on cherche à expliquer le phénomène leptokurtique, on peut utiliser de manière commode la grille interprétative suivante : soit on attribue cet effet à des causes externes aux marchés, soit l'on fait des marchés eux-mêmes la cause de l'effet. Dans le premier cas, la leptokurticité des distributions des variations boursières n'est que la transposition sur les marchés financiers de la non normalité de l'économie dite « réelle »¹⁴ et des chocs d'information d'impact très hiérarchisé qui en résultent. C'est l'« effet Noé » de Mandelbrot qui, par analogie avec l'épisode biblique du déluge¹⁵, avait supposé qu'un « déluge d'information » parvenait soudain sur le marché et se transmettait dans les prix par la propriété d'efficacité informationnelle. La leptokurticité est dans ce cas externe au marché. La seconde manière de voir prend l'option opposée : le phénomène leptokurtique n'est que le produit d'une amplification par les agents économiques de fluctuations ou d'informations normales, mais démultipliées par des effets de mimétisme qui peuvent conduire à des ruptures de marché. La leptokurticité devient alors interne au marché.

Les deux approches se différencient par d'une part, l'information utilisée; d'autre part, la structure des chocs d'information. L'information dont disposent et qu'utilisent les agents économiques peut être de deux natures : exogène ou endogène. Par information exogène, on entend une information relative à l'environnement économique ou financier dans lequel évolue le marché, décrite par exemple par les trois formes de Fama de 1970, c'est-à-dire des éléments qui concernent l'économie dans laquelle les agents forment leurs choix de portefeuille. Selon cette définition, entrent dans la catégorie d'information exogène,

14. Voir Walter et Brian [2007].

15. Mandelbrot [1973].

des éléments bilantiels d'entreprises, des données économiques, ou toute autre information sur les facteurs non techniques agissant sur le marché (c'est-à-dire externes au marché). Au contraire, une information endogène caractérisera des éléments internes au marché, c'est-à-dire propres aux agents eux-mêmes : on entre alors dans les modèles d'apprentissage et d'imitation, où l'information est obtenue par observation des autres agents, conduisant aux analyses mimétiques des mouvements boursiers¹⁶. Enfin les chocs d'information (les « nouvelles ») peuvent avoir des effets d'ampleur homogène (« chocs homogènes non hiérarchisés ») ou hétérogène (« chocs hétérogènes hiérarchisés »). On considère d'abord la première manière de voir la leptokurticité.

Leptokurticité d'origine externe au marché. La justification économique classique de la distribution normale utilise l'argument d'un grand nombre de petits chocs d'information exogène, homogènes et non hiérarchisés. En faisant l'hypothèse qu'il n'existe pas d'aléa sur l'offre, que la seule information pertinente est exogène, et que l'efficacité informationnelle du marché assure l'intégralité de la transmission de l'information exogène agrégée dans le prix, c'est donc cette hypothèse sur la nature des chocs d'information qui est à reconsidérer. Au lieu d'être percuté par un très grand nombre de petits chocs d'information homogènes et non hiérarchisés, le marché subirait plutôt l'effet de chocs hétérogènes et hiérarchisés, c'est-à-dire se répartissant entre un petit nombre de grands chocs, et un grand nombre de chocs insignifiants. Par exemple, l'annonce d'une OPA, ou d'une fusion entre sociétés, peut avoir plus d'impact que les résultats trimestriels publiés régulièrement. Cette conception revient à affaiblir la pertinence de la notion de « petit choc moyen », à l'instar de l'affaiblissement de celles de « perte moyenne » ou de « gain moyen » qui a été abordé dans notre ouvrage précédent¹⁷.

L'approche externe pure de la leptokurticité revient à Mandelbrot (dans ses conceptions initiales de 1963) puis à Fama. Elle consiste à chercher dans les quantités ou les variables de l'économie appelée « réelle » des structures leptokurtiques : selon la formulation de 1965 de Fama, « si de grandes variations de cours surviennent fréquemment, cela peut vouloir indiquer que la structure de l'économie à l'origine de ces variations, est elle-même sujette à de grands et fréquents changements »¹⁸. En 1972, Samuelson faisait remarquer que « de telles distributions ultra-étirées se manifestent fréquemment en économie »¹⁹. Cette idée a été systématiquement examinée en 2000 par Zajdenweber qui a présenté un échantillon important de résultats (la taille des entreprises, les chiffres d'affaires annuels, la répartition des richesses, la population des pays etc), et a qualifié d'« économie des extrêmes »²⁰ cette économie réelle où les quantités

16. Voir pour ce courant interprétatif Orléan [1986].

17. Voir Walter et Brian [2007].

18. Fama [1965], p. 41.

19. Samuelson [1972], pp 30,31.

20. Zajdenweber [2000].

observées sont modélisables par des fonctions puissance de type Pareto²¹.

Selon cette hypothèse, c'est donc une économie des extrêmes (décrite par la théorie des valeurs extrêmes), qui se transmet dans les variations extrêmes des marchés, variations qui peuvent donc à leur tour être décrites par la théorie des valeurs extrêmes. Mais cette interprétation de la leptokurticité réduite à des causes hors marché, se heurte à la réalité de l'existence de comportements collectifs qui peuvent effectivement produire des emballements boursiers. D'où l'intérêt de la seconde approche, malgré le fait qu'elle ne prend pas en compte la possibilité d'un déclencheur des emballements situé dans l'économie dite réelle.

Leptokurticité d'origine interne au marché. La définition de l'efficacité informationnelle au sens de Fama dans sa version de 1976 fait intervenir la notion de « pertinence » de l'information, de « significativité » d'un choc d'information²². L'amplitude que peut produire un choc sur la variation des prix, dépend de l'interprétation que les opérateurs de marché font de cette information. Un élément de subjectivité est introduit dans la hiérarchisation des chocs d'information exogène, et une formalisation du traitement de l'information devient nécessaire. L'hypothèse d'anticipations rationnelles avait pour objet la résolution de cette question en créant une objectivation de la valeur de l'actif²³, mais il est connu depuis 1982 que cette hypothèse ne suffit pas à permettre la réalisation d'un équilibre du marché : une polarisation des anticipations est possible, qui conduit le marché sur n'importe quel point fixe arbitraire²⁴. On observe bien ce phénomène de subjectivisation de la valeur de l'information et d'arbitraire changeant des conventions intellectuelles en suivant l'évolution du choix des quantités économiques retenues comme pertinentes par les opérateurs. Des phénomènes de modes font passer sur le devant de la scène des indicateurs macroéconomiques qui étaient considérés comme non significatifs la période précédente. Ainsi, selon les moments, c'est le nombre des mises en chantiers, le solde du commerce extérieur, le taux de chômage, le taux directeur de la banque centrale, ou d'autres, qui deviennent les indicateurs à suivre, et qui provoquent donc les plus grands chocs d'information.

Il a été abondamment montré depuis les travaux théoriques des années 1980²⁵ comment l'introduction de la subjectivité des agents dans l'explication de la variation des cours instaurait un régime d'opinion sur les marchés et comment le mimétisme pouvait affecter la réalisation d'un équilibre. En montrant comment le cours de bourse se formait sous l'effet des croyances interpénétrées des agents, ces travaux ont fait apparaître l'importance de la question de la coordination de ces croyances et de leur agrégation. En effet, l'indétermination

21. Voir Walter et Brian [2007].

22. Fama [1976].

23. Voir pour une synthèse de cet aspect E. Challe, « Valeur fondamentale et efficacité informationnelle », ch. 2 de Walter et Brian [2007].

24. Voir pour une synthèse de cet aspect I. This, « Valeur fondamentale et bulles rationnelles », ch. 3 de Walter et Brian [2007].

25. A la suite des articles de Azariadis [1981] et Azariadis et Guesnerie [1982]. Voir une synthèse dans Orléan [1999].

des cours et leur sensibilité aux prophéties autoréalisatrices des agents font apparaître le rôle déterminant des mécanismes de coordination, que l'on peut classer en trois types distincts : les conventions de type « taches solaires », la surdétermination des opinions individuelles par le pouvoir symbolique des gourous des marchés, l'influence d'états psychologiques collectifs sans cause précise. Les représentations mentales à l'oeuvre dans les mécanismes spéculatifs sont un élément important de cette explication de la leptokurticité²⁶.

Selon cette conception, la bourse n'est pas un miroir de la réalité économique : ce n'est pas une économie dite « objective » qui se transmet au système de prix par la propriété d'efficacité informationnelle, mais une économie filtrée par les croyances de ceux qui l'interprètent, c'est-à-dire une économie « intersubjective », un reflet des opinions collectives. Par exemple, dans l'interprétation mimétique classique, plus le mimétisme est généralisé, plus les opinions des opérateurs s'agglutinent pour interpréter les informations exogènes, plus les volumes de transactions augmentent, et plus le marché s'emballe. La leptokurticité des fluctuations boursières serait donc exclusivement d'origine endogène : les marchés seraient la source de leur leptokurticité. Certains modèles de formation des prix illustrent cette conception. Mais cette position constructiviste se heurte à deux objections principales. D'une part, on peut montrer qu'il existe des éléments qui entrent dans la cotation et qui ne sont pas liés aux seuls effets des opinions agrégées. D'autre part, cette interprétation néglige le fait que, sur le marché, l'investisseur peut ne parier, ni contre la « nature », ni contre les opinions collectives, mais seulement contre les autres investisseurs pris chacun individuellement, ce qui apparente la bourse à un jeu de stratégie à plusieurs joueurs (une partie de poker)²⁷. En fait, on peut parier : sur une valeur dite fondamentale calculée (ce qui nécessite un modèle de calcul de valeur), sur l'opinion de tout le marché en général (ce qui fait suivre toutes les modes et les tendances), ou bien sur le comportement de quelques uns. Lorsqu'on parie sur la valeur fondamentale, cette attitude est appelée « investissement ». Lorsqu'on parie sur l'*opinion* générale, cette attitude est appelée « spéculation ». Lorsqu'on parie sur le *comportement* de certains acteurs, on se trouve dans le cadre de la théorie des jeux.

Finalement cette intersubjectivité de l'information conduit à poser la question de la pertinence du temps dit « objectif », c'est-à-dire calendaire, pour mesurer les variations boursières : à l'instar du caractère intersubjectif de l'économie filtrée par les marchés, le temps boursier ne serait-il pas aussi un temps intersubjectif, c'est-à-dire un temps social construit ? C'est la troisième voie d'interprétation de la leptokurticité.

Leptokurticité, durée du temps, et valeur du temps. Si l'on fait l'hypothèse de pouvoir mesurer la valeur d'une durée de temps écoulé par la quantité

26. Voir pour une synthèse de la relation entre représentations mentales et types d'information, voir Y. Tajeddine, « Spéculation boursière et représentations mentales », ch. 6 de Walter et Brian [2007].

27. Voir Tajeddine.

d'information qui se déverse sur le marché pendant cette durée, il apparaît clairement que des durées de temps identiques n'ont pas la même valeur et donc que se pose la question de l'intervalle de temps approprié pour la mesure des variations des cours. Comme on l'a vu plus haut, puisqu'une même durée du temps ne contient pas la même quantité d'information pertinente selon les moments du marché, on peut interpréter la défaillance de la distribution normale à représenter les répartitions de variations réelles des marchés mesurées à intervalles réguliers, comme un signe de ce que, pour les opérateurs des marchés, le temps écoulé n'a pas la même valeur selon les périodes d'observation. Ce que l'on peut formuler de manière suivante: sur les marchés, *la valeur du temps n'est pas égale à la durée du temps*.

Pour conclure, on peut résumer les explications théoriques de la leptokurticité dans les trois hypothèses suivantes.

Hypothèse 1 (Economie parétienne)

La structure leptokurtique des variations boursières reflète la caractéristique parétienne de l'économie réelle.

Hypothèse 2 (Opinions polarisées)

La structure leptokurtique des variations boursières reflète l'interaction des opinions des agents.

Hypothèse 3 (Temps social du marché)

La structure leptokurtique des variations boursières reflète la disjonction entre temps physique et temps social.