



HAL
open science

IAS 39 et la martingalisation des marchés financiers

Christian Walter

► **To cite this version:**

Christian Walter. IAS 39 et la martingalisation des marchés financiers. Christian Walter. Nouvelles normes financières. S'organiser face à la crise, Springer Paris, pp.97-123, 2010, 978-2-8178-0069-1. 10.1007/978-2-8178-0070-7_6 . hal-04568198

HAL Id: hal-04568198

<https://hal.science/hal-04568198>

Submitted on 14 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Chapitre 5

IAS 39 et la martingalisation des marchés financiers

Christian Walter

5.1 La financiarisation du monde

Dans ce chapitre, nous proposons une explication théorique au développement presque sans limite de la finance, observé à partir des années 1980, et qui culmine avec la notion de juste valeur (*fair market value* selon la norme IAS 39) dans les normes comptables internationales¹. Cette explication est la suivante. Le développement rapide de la finance professionnelle et des marchés financiers résulte de la percée conceptuelle opérée par l'unification mathématique de trois courants de recherche : l'évaluation financière, la modélisation des variations des cours de bourse et la théorie de l'équilibre général en économie.

Nous estimons que c'est cette unification conceptuelle qui a permis l'émergence d'une norme collective pour les transactions financières, et nous proposons d'interpréter cette norme en termes de convention keynésienne. Cette norme concerne une manière particulière de se représenter l'incertitude des marchés, que l'on réduit par le moyen de la construction d'un cadre probabiliste particulier qui utilise l'outil mathématique appelé « martingale », et l'on parlera ainsi de « martingalisation » des marchés, ou fabrique des marchés récents par des martingales. Pour cette raison, on propose de parler de « convention stochastique » pour désigner l'arrière-plan formel sur lequel se sont structurées toutes les transactions financières depuis le début des années 1980 jusqu'à la crise de 2007-2008².

1. Ce chapitre est une version remaniée et complétée d'un article publié dans la *Revue de synthèse* en 2006 (n°2).

2. Afin de ne pas surcharger techniquement ce chapitre, une annexe technique situé à la fin regroupe les notions mathématiques abordées en les présentant de manière plus systé-

Trois histoires de longue durée. Trois aventures intellectuelles de la pensée financière et économique traversent le XX^e siècle. Elles ont coexisté séparément dans les travaux universitaires pendant près de soixante ans et se sont ignorées mutuellement jusqu'à leur articulation formelle, dans les années 1980, une fois apparue dans la finance mathématique la possibilité de reconstruire certains des objets de la théorie financière au moyen de la mathématisation de l'arbitrage. Ces trois domaines sont : a) la modélisation des variations boursières par des processus aléatoires, c'est-à-dire une recherche de type descriptive (sans explication causale) pour caractériser par une formule mathématique adéquate la forme des trajectoires de cours observées sur les marchés réels; b) l'évaluation des actifs financiers et des entreprises, c'est-à-dire la recherche d'une théorie capable de fournir un cadre conceptuel rigoureux permettant de donner un prix supposé juste à tout objet réel pouvant être négocié; c) la modélisation de l'équilibre en économie, qui inclut les développements de la théorie économique de l'équilibre général, initialement décrit dans un cadre statique, puis ensuite généralisé dans un cadre dynamique intertemporel.

Le premier de ces courants de pensée trouve son origine mathématique en 1900 avec la thèse de doctorat de Louis Bachelier, et se poursuit dans la première moitié du vingtième siècle avec les travaux d'Alfred Cowles, Holbrook Working, Maurice Kendall, Maury Osborne, Sydney Alexander et Paul Cootner pour parvenir à structurer, avec Paul A. Samuelson en 1965, ce qui a été appelé à devenir le modèle standard des fluctuations boursières : l'exponentielle de mouvements browniens³. Le second domaine a ignoré les travaux relatifs aux processus aléatoires et aux tests statistiques, et a développé depuis 1930, avec Irving Fisher et John B. Williams, des analyses de la valeur des sociétés qui aboutissent à un autre modèle standard de l'évaluation financière : la méthode des flux futurs de revenu actualisés (*discounted cash flow*) dont la version de Myron J. Gordon et Eli Shapiro, en 1956, puis le manuel de Gordon, en 1962, sont la base de tous les analystes financiers⁴. Enfin, le troisième courant de recherche est celui de la théorie de l'équilibre général qui, depuis les travaux de Léon Walras et Vilfredo Pareto, formalise toujours davantage les caractéristiques de l'équilibre des marchés. Ce courant a abouti aux synthèses de Kenneth Arrow, Gérard Debreu et Roy Radner en 1954 et 1972⁵.

Trois domaines, donc, et trois théories en constante gestation : la théorie de la dynamique boursière (finance des marchés), la théorie de l'évaluation financière (finance des entreprises), la théorie de l'équilibre économique (cadre

matique. Ceci permettra au lecteur non spécialiste de suivre le raisonnement sans l'obstacle mathématique (les quelques formules mathématiques de ce chapitre peuvent être passées à la lecture car elles sont résumées immédiatement après leur écriture) et aux spécialistes ou aux lecteurs intéressés d'accéder avec l'annexe à une analyse plus détaillée de ces notions.

3. Il s'agit seulement des principales références, parmi de nombreuses autres : Cowles [1933], Working [1934], Kendall [1953], Osborne [1959], Alexander [1961], Cootner [1962], Samuelson [1965a].

4. Fisher [1930], Williams [1938], Gordon et Shapiro [1956], Gordon [1962].

5. Outre les références classiques de Walras [1874] et Pareto [1896], les textes principaux sont ici Arrow [1953], Arrow et Debreu [1954], Radner [1972].

conceptuel général). Ces trois axes de réflexion se sont développés parallèlement en suivant chacun une dynamique intellectuelle, mathématique, et institutionnelle propre : les types de modélisations, les outils mathématiques mobilisés, les cadres institutionnels à l'intérieur desquels s'effectuaient et se finançaient les recherches, et les populations universitaire et professionnelle concernées furent pendant longtemps différents et irréductibles les uns aux autres.

Ces mondes se sont ignorés d'autant plus volontiers que leurs objectifs professionnels étaient différents voire contradictoires. Ainsi par exemple, les évaluateurs de sociétés et les analystes financiers, disposant d'un outillage mathématique rudimentaire, étaient violemment opposés à l'intrusion des processus aléatoires dans les méthodes d'évaluation. Les statisticiens et probabilistes qui travaillaient sur les équations de la dynamique boursière ne cherchaient pas à intégrer la notion de valeur des entreprises, ni d'ailleurs celle d'allocation optimale des ressources au sens de la macroéconomie. Quant aux économistes universitaires, ils restaient éloignés des développements de la théorie financière, ceci alors même que ces développements commençaient à mordre sur le champ de l'économie.

Le désenclavement de ces trois mondes dans les années 1980 fut une mutation importante. Ce chapitre a pour objectif de montrer que cette mutation a rendu possible le développement presque sans limite de la finance mathématique à partir de ces années, et a représenté l'un des fondements intellectuels majeurs de la notion de *fair market value*. Nous montrons tout d'abord comment se sont opérées deux à deux les jonctions des trois domaines de recherche examinés, au cours de la seconde moitié du vingtième siècle. L'unification se produisit en effet par binôme de théories : la jonction entre l'évaluation financière et les martingales a été due à Paul A. Samuelson entre 1965 et 1973; la jonction entre les martingales et les modèles économiques d'équilibre fut le fait de Stephen LeRoy en 1973 et de Robert Lucas en 1978; la jonction entre la théorie de l'arbitrage et l'évaluation financière est venue de Stephen Ross, Michael Harrison, Daniel Kreps et Stanley Pliska entre 1976 et 1981⁶. Puis nous ferons apparaître comment la notion de noyau de l'évaluation (*pricing kernel*) permet de synthétiser puis d'unifier ces trois jonctions partielles, et comment toute écriture en noyau est identiquement une écriture en martingale. Nous concluons en proposant de rendre raison de la notion de noyau en terme de convention keynésienne. On mesure mieux dès lors le caractère sous-déterminé de la théorie mathématique de la finance par rapport au fonctionnement réel des marchés de capitaux.

6. Ici également, il ne s'agit que des principaux textes : Samuelson [1965b, 1973], LeRoy [1973], Ross [1976], Lucas [1978], Harrison et Kreps [1979], Harrison et Pliska [1981].

5.2 Trois sortes de martingales

5.2.1 Avec taux d'actualisation constant

La première des jonctions intellectuelles, unifiant d'une part les méthodes de l'évaluation financière des sociétés au moyen des valeurs actuelles de flux actualisés de Fisher et Williams, et d'autre part les descriptions probabilistes des variations boursières par des martingales, est effectuée par Samuelson dans ses articles de 1965 et 1973. Cherchant à réconcilier deux opinions apparemment contradictoires - celles des analystes pour lesquels l'art de l'évaluation financière permet de trouver de bons titres à acheter, et celles des statisticiens pour qui les marchés évoluent apparemment au hasard - Samuelson fait apparaître que, non seulement ces deux représentations ne sont pas contradictoires mais que, au contraire, plus les investisseurs évalueront correctement une société en utilisant le modèle de flux actualisés, et plus les variations boursières seront décorréliées.

L'assertion radicale de l'article de 1973 est la suivante : « les investisseurs qui s'informent (sur les conditions économiques réelles de l'entreprise) ont pour effet, par leurs achats et ventes de titres, de blanchir le spectre des variations boursières⁷. » Un spectre blanc (c'est-à-dire conforme à une distribution purement aléatoire) est le signe de variations décorréliées. Dès lors plus la bourse ressemblera à la roue de la roulette d'un casino, et plus cela signifiera que les investisseurs sont compétents et responsables. Le juste prix d'une société, bien prévu, est donc celui qui rend le marché imprévisible. Tel est l'apparent paradoxe de l'idée d'efficacité informationnelle d'un marché, qui ne sera pleinement résolu qu'en 1980 par Sanford Grossman et Joseph Stiglitz.

Plus précisément, en faisant l'hypothèse que les investisseurs évaluent la société par la méthode des flux actualisés au moyen d'un taux d'actualisation (*discount rate*) quelconque x , et celle que le rendement y (*yield*) des actions de cette société (rapport dividende/cours) soit stationnaire, puis en notant S_t le cours de l'action en date t , Samuelson montra que l'on pouvait retrouver une martingale sur le cours de l'action actualisé au taux $x - y$ car

$$S_t = \frac{1}{1 + x - y} \mathbb{E}_t[S_{t+1}] \quad (5.1)$$

Or, en notant S_t^* ce cours en date t actualisé, i.e. $S_t^* = (1 + x - y)^{-t} S_t$, l'écriture précédente se simplifie en

$$\mathbb{E}_t[S_{t+1}^*] = S_t^* \quad (5.2)$$

qui définit une martingale sur les cours actualisés. Soit, en langage courant : « la meilleure prévision du cours futur actualisé S_{t+1}^* connaissant toutes les valeurs passées de ce cours actualisé, est le cours actualisé S_t^* lui-même ».

Le taux d'actualisation x utilisé par les investisseurs pouvait par exemple être choisi à partir d'un modèle d'équilibre comme le CAPM⁸ de William

7. Samuelson [1973], p. 369.

8. *Capital Asset Pricing Model*: voir Sharpe [1964], Lintner [1965].

Sharpe et John Lintner de 1964-1965 : c'était donc une donnée exogène. De plus, il fallait qu'il fût constant, alors que l'on peut imaginer qu'il fluctue selon les horizons d'investissement considérés. Il fallait également que le rendement y de l'action fût stationnaire. Cette première forme de martingale sur les marchés financiers était donc assez simpliste⁹. En particulier, l'équation précédente ne disait rien sur l'équilibre entre la rentabilité et le risque du marché.

5.2.2 Avec taux d'actualisation aléatoire

L'un des objectifs principaux de la modélisation financière est en effet de pouvoir quantifier le risque pris sur un marché, afin d'en fixer le prix de l'échange et de créer des produits financiers qui permettent d'acheter et de vendre ce risque, décomposé en unités élémentaires. Dans le modèle de martingale de Samuelson, la notion de risque n'était pas explicitement prise en considération. Pour inclure une dimension de risque dans le prix d'un actif financier, il est nécessaire de construire un modèle d'équilibre, dans lequel on fait l'hypothèse que les individus n'acceptent de prendre des risques que moyennant une rémunération complémentaire qui dépend de leur attitude (prudence ou non) devant cette prise de risque. On peut alors formaliser la relation entre la rentabilité attendue et le niveau du risque.

En 1973, à partir d'un raisonnement d'équilibre économique, LeRoy montre que l'on peut retrouver cette propriété de martingale avec un taux endogène, mais dans des conditions assez restrictives. En 1978, à partir d'un raisonnement plus général, Lucas lève ces restrictions et obtient, par la condition du premier ordre d'un programme classique d'optimisation sur la consommation (annulation du gradient d'un lagrangien), l'équation fondamentale d'évaluation qui relie le cours de bourse S et le dividende D :

$$S_t = \mathbb{E}_t[\alpha_{t+1}(S_{t+1} + D_{t+1})] \quad (5.3)$$

dans laquelle le coefficient d'actualisation aléatoire (*stochastic discount factor*) α_{t+1} est égal au rapport des utilités marginales de la consommation agrégée en t et $t+1$: c'est le noyau de l'évaluation par le marché (*market pricing kernel*). Cette équation signifie que le prix de tout actif est donné par un modèle d'équilibre général. L'équation de Lucas établit donc la jonction entre l'évaluation financière d'une société et un modèle d'équilibre général en économie avec investisseur représentatif.

L'équivalence entre l'équation de Lucas et le cadre intellectuel du modèle d'équilibre général d'Arrow et Debreu du point de vue statique (nombre fini d'états du monde possibles) est obtenue en remplaçant l'espérance mathématique par son développement sur les différents états. On récrit l'équation (5.3) en développant l'espérance mathématique

$$S_t = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha_{t+1}(\omega) [S_{t+1}(\omega) + D_{t+1}(\omega)] P(\omega) \quad (5.4)$$

9. Shiller [1981] ainsi que LeRoy et Porter [1981] marquent le point de départ du rejet empirique de ce modèle.

où $P(\omega)$ est la probabilité de l'état ω .

Or dans le modèle statique d'Arrow et Debreu, le prix de tout actif peut s'écrire comme une unique combinaison linéaire des titres élémentaires (*primitive assets*) d'Arrow et Debreu :

$$S_t = \sum_{\omega \in \Omega} [S_{t+1}(\omega) + D_{t+1}(\omega)] e^\omega \quad (5.5)$$

où e^ω est le titre élémentaire correspondant à l'état ω .

Le rapprochement des deux expressions (5.4) et (5.5) fait apparaître l'équivalence entre le noyau de l'évaluation et les titres élémentaires : la valeur du noyau de l'évaluation dans un état du monde ω est égal au prix du titre élémentaire quantifiant cet état, ajusté par la probabilité de l'état correspondant¹⁰; soit, si e^ω est le titre élémentaire correspondant à l'état ω , et $P(\omega)$ est la probabilité de cet état, $\alpha(\omega) = e^\omega/P(\omega)$. D'où l'écriture du noyau en actifs d'Arrow et Debreu.

Le passage en temps continu de cette modélisation d'équilibre ne sera effectué qu'en 1985 par Darrel Duffie et Chi-Fu Huang¹¹. Mais la véritable percée intellectuelle de la finance mathématique ne sera opérée qu'à la charnière des années 1980 avec la réinterprétation du noyau et des prix d'Arrow-Debreu au moyen des opérateurs du calcul stochastique.

5.2.3 Avec taux sans risque et probabilité modifiée

L'intuition fondamentale qu'ont eue, entre 1976 et 1981, Stephen Ross, puis Harrison, Kreps et Pliska, a consisté à réinterpréter les prix des états du monde d'Arrow et Debreu comme des valeurs d'une probabilité particulière lorsque le marché était arbitré. Le passage de la probabilité réelle (que l'on note P) à la probabilité modifiée (que l'on note en général Q) s'effectua au moyen de la technologie du calcul intégral et différentiel stochastique, par l'opérateur de Radon-Nikodym (ou opérateur de changement de probabilité noté L et défini en temps discret par $L = Q/P$). D'un point de vue intuitif, le monde dual de la probabilité Q peut être compris comme un univers psychologique dans lequel les individus seraient indifférents à la chance de gain comme au risque de perte : cette neutralité psychologique vis-à-vis du risque explique à la fois la terminologie de langue anglaise (*risk neutral probability*), et l'actualisation à un taux d'intérêt qui, de ce fait, n'inclut pas de prime de risque.

Par la transformation de l'ensemble des équations d'évaluation écrites précédemment dans le monde réel en nouvelles équations écrites dans le monde dual de Q , Harrison, Kreps et Pliska ont posé les fondements de l'évaluation moderne

10. On insiste sur le caractère extrêmement intuitif et heuristique de cet aperçu. Pour des développements mathématiques rigoureux, on pourra consulter les manuels de Cochrane [2001], Föllmer et Schied [2002] et, en langue française, Dana et Jeanblanc [1998], Quittard-Pinon [2003]. Le cours de Guesnerie [2005] offre également une synthèse générale de ces sujets.

11. Duffie et Huang [1985].

des actifs financiers: le *juste prix* de tout actif financier n'est rien d'autre que l'espérance mathématique de sa valeur future calculée avec la probabilité Q et actualisée à un taux d'intérêt sans prime de risque, comme par exemple le taux du marché monétaire. Du point de vue de la dynamique boursière, toutes les martingales écrites avec la probabilité P et un taux d'actualisation incluant une prime de risque se transforment en martingales avec la probabilité Q et un taux d'actualisation sans prime de risque: en résumé, on passe de P -martingales à une Q -martingale au moyen de l'opérateur L et la possibilité même de ce passage est la trace mathématique de l'existence d'un marché arbitré à l'équilibre, c'est-à-dire dans lequel il n'y a plus aucun arbitrage à effectuer (*absence of opportunity of arbitrage*). La nouvelle relation sur les prix actualisés devient

$$\mathbf{E}_t^Q[S_{t+1}^*] = S_t^* \quad (5.6)$$

qui est une martingale avec cette probabilité Q .

5.3 La synthèse par le noyau de l'évaluation

Arrivé à ce point, le bouclage avec le noyau d'évaluation de Lucas se fait naturellement puisque, comme on l'a vu, le noyau est une autre expression des prix des titres élémentaires d'Arrow et Debreu. Ainsi, l'opérateur L peut être identifié au noyau de l'évaluation (au taux monétaire près), et cette identification $\alpha = L/(1+r)$ permet d'établir un lien entre évaluation, équilibre général dans le monde réel, et expression de cet équilibre dans le monde dual.

L'identification financière concrète du noyau de l'évaluation sera le fait de Long en 1990¹²: le noyau sera interprété sur un marché réel comme le facteur d'actualisation au taux de rentabilité d'un portefeuille qui maximiserait pour tout investisseur la croissance de son patrimoine (encore appelé portefeuille *Log-optimal*). En notant R_H la rentabilité de ce portefeuille Log-optimal, les différentes formes du noyau sont reliées entre elles par les égalités

$$\alpha(\omega) = \frac{L(\omega)}{1+r} = \frac{1}{1+R_H(\omega)} = \frac{e^\omega}{P(\omega)} \quad (5.7)$$

qui unifient l'ensemble des formes possibles des martingales modélisant les dynamiques boursières. Avec le portefeuille Log-optimal, l'équation d'évaluation de tout actif cotant le cours S en date t s'écrit

$$S_t = \mathbf{E}_t \left[\frac{1}{1+R_{t+1}^H} S_{t+1} \right] \quad (5.8)$$

soit, en notant à nouveau S_t^* le cours en date t actualisé à ce taux R_H , c'est-à-dire $S_t^* = S_t(1+R_H)^{-t}$,

$$\mathbf{E}_t[S_{t+1}^*] = S_t^* \quad (5.9)$$

¹². Long [1990].

Auteurs des travaux initiaux qui lancent le courant de pensée	Année de la publication	Taux d'actualisation utilisé pour l'obtention de la martingale	Probabilité utilisée dans la martingale
Samuelson	1965 - 1973	Taux constant exogène	historique P
LeRoy, Lucas	1973 - 1978	Taux aléatoire endogène	historique P
Ross, Harrison Kreps, Pliska	1976 - 1981	Taux sans prime de risque	subjective Q

TAB. 5.1 – *Le mouvement vers la jonction noyau - martingale - arbitrage*

C'est à nouveau l'expression d'une martingale, mais avec comme taux d'actualisation effectif, le taux de rentabilité R_H du portefeuille Log-optimal.

Si maintenant on écrit les relations précédentes avec les rentabilités des actifs et non plus leurs cours de bourse, et en notant R cette rentabilité, on fait apparaître la forme génératrice de tous les tests d'efficacité informationnelle des marchés

$$1 = \mathbb{E}_t[\alpha_{t+1}(1 + R_{t+1})] \quad (5.10)$$

car la contrainte (valeur 1) associant le noyau α et la rentabilité globale R , induite par leur association sous l'espérance mathématique, permet de définir les manières de tester, tant les niveaux de rentabilité que ceux de volatilité des cours sur les marchés financiers (inégalité dite de Hansen et Jagannathan¹³).

Ainsi la représentation d'un équilibre de marché par le noyau de l'évaluation conduit nécessairement à une modélisation de la dynamique boursière par une martingale, ce qui correspond indifféremment à une *évaluation juste* d'une société (au sens de la valeur de Fisher-Williams) ou à une optimalité au sens de l'allocation des ressources et des risques (au sens de Walras-Pareto). Dès lors, la notion de noyau de l'évaluation, qui représente l'aboutissement des développements de la théorie de l'équilibre général passés dans la finance professionnelle, peut être comprise comme l'objet intellectuel qui a permis à la pensée financière de s'unifier dans les années 1980, pour parvenir à une compréhension d'ensemble de phénomènes économique-financiers pertinents. Le tableau 5.1 résume cette trajectoire d'unification de la pensée financière.

5.4 Une convention keynésienne ?

La synthèse intellectuelle des années 1980 représente un moment très particulier dans l'histoire de la finance du XX^e siècle, qui a résulté d'une conjonction exceptionnelle de talents déployés à la fois dans les domaines de la finance mathématique, dans les pratiques professionnelles américaines des banques de marché, ainsi que dans les développements de la théorie des probabilités sur les processus aléatoires. La forme mathématique qu'a prise cette jonction conceptuelle fut une équation d'Euler qui exprime à la fois l'équilibre d'un marché, son optimalité au sens de Pareto, l'évaluation juste de tous les actifs cotés, et

13. Hansen et Jagannathan [1991].

la propriété de martingale de la dynamique boursière associée. Tout ceci, par quelque manière qu'on l'aborde, entre dans le cadre de la théorie des martingales, en sorte que l'on peut considérer que *la percée conceptuelle des années 1980 a été la compréhension profonde de la puissance de la forme martingale pour l'explication générale des phénomènes financiers et leur unification*. De la même façon que, au XIX^e siècle, la statistique était passée de la recherche de moyennes à une moyennisation systématique des variables, l'on peut dire que la finance du XX^e siècle est passée de la recherche de martingales sur les marchés à une « martingalisation » systématique des variations boursières, la martingale remplissant ainsi pour la finance du XX^e siècle le rôle de la moyenne pour la statistique du dix-neuvième siècle. Le développement apparemment sans limite des marchés de capitaux et la financiarisation du monde réel s'en sont suivis.

La gestion indicielle passive. Ainsi par exemple, à partir de 1989, toutes les mesures de performance existantes des portefeuilles gérés par des professionnels, sédimentées dans les progiciels industriels produisant des compte-rendus de gestion, ont été comprises comme des développements particuliers des contenus formels du noyau¹⁴. L'appréciation de la valeur ajoutée de la gestion de l'épargne mondiale repose ainsi sur la transposition opérationnelle de ce concept compact dans les conseils d'administration des organismes de retraite ou des fonds d'investissement.

Or l'utilisation du noyau à l'intérieur d'une martingale appropriée conduit à considérer que l'espérance de toute surperformance de toute gestion active contre un indice de marché convenablement choisi est comme nulle. La gestion active est ainsi transformée en jeu équitable par l'usage massif de martingales. En effet, en utilisant le portefeuille Log-optimal à la manière d'un numéraire (*benchmark*) sur les marchés de capitaux, et en écrivant l'équation d'évaluation du noyau avec des rentabilités de portefeuilles gérés, on vérifie aisément que l'on donne une forme extrêmement simple mais aussi extrêmement contraignante sur la rentabilité espérée R de toute gestion professionnelle :

$$0 = \mathbf{E}_t[R_{t+1}^*] \quad (5.11)$$

Cette équation exprime que l'espérance de la rentabilité excédentaire déflatée par celle du portefeuille Log-optimal est nulle. D'où le développement démesuré de la gestion indicielle, alors même que d'une part les investisseurs finaux cherchent de moins en moins des performances relatives par rapport à un indice, et davantage des performances absolues par rapport au marché monétaire, et que d'autre part les gestions non classiques (*hedge funds*, multigestion, choix de titres ou choix de gérants) se développent à l'encontre du paradigme de l'indexation.

Les normes comptables internationales. Le référentiel des normes comptables internationales IFRS (*International Financial Reporting Standards*) est

14. L'article qui ouvre cette voie d'analyse de performance est celui de Grindblatt et Titman [1989]. Une première synthèse de cette méthodologie a été faite par Chen et Knez [1996].

sous-tendu par la doctrine américaine de l'évaluation généralisée par le marché pour l'obtention de la juste valeur (*full fair market value*). Cette doctrine trouve son fondement dans l'idée que l'absence d'arbitrage dans un marché complet permet de donner un juste prix à tout actif. Les innombrables difficultés techniques rencontrées par les professionnels des banques ou des compagnies d'assurance dans l'application pratique de la norme IAS 39 (*International Accounting Standards*) n'ont, jusqu'à présent, toujours pas découragé les promoteurs de ces normes et de ces méthodes.

L'affirmation de la polyvalence de ces normes peut laisser les spécialistes perplexes : en effet, une conceptualisation des marchés comme complets, arbitrés et optimaux au sens de Pareto - hypothèse sur laquelle est fondée la validité de l'évaluation par noyau ou par martingale dans le cas de l'évaluation des actifs financiers - ne s'accorde pas avec des analyses théoriques et empiriques développées depuis une dizaine d'années, comme par exemple celles des défaillances de coordination sur les équilibres à anticipations rationnelles, ou celles des limites discontinues de trajectoires pour les processus de Lévy .

Malgré la crise financière de 2007-2008, on constate qu'aujourd'hui encore, rien ne semble pouvoir résister à l'apparente universalité du concept de noyau de l'évaluation et sa stupéfiante pénétration dans la finance professionnelle par le biais des martingales. Tout se passe comme si l'expérience collective des finances au XX^e siècle était passée par un triple mouvement (empirique, théorique, et institutionnel) d'ajustement à une forme mathématique particulière dont les hypothèses sont finalement relativement simples, voire trop simples pour le monde financier réel. Il y a là comme une action collective normative pour les pratiques professionnelles, et qui semble s'inscrire dans la longue durée comme un processus séculaire.

Il est donc pertinent de se demander si ce mouvement ne constituerait pas un axe structurant l'évolution historique de la théorie de la finance tout au long du XX^e siècle, caractérisé par un cheminement de la réflexion financière vers le noyau de l'évaluation par le marché dont la trace probabiliste est une martingale avec la probabilité Q . Si bien qu'on peut alors concevoir que cette conception unifiante du fonctionnement des marchés financiers issue de la théorie néo-classique ne relèverait finalement que de l'idée keynésienne de convention, cela pour autant que le concept mathématique de Q -martingale fût lui-même considéré comme une convention. Le terme, tel que John Maynard Keynes l'a employé dans sa *Théorie générale*, appellerait dès lors un qualificatif qui devrait souligner la nature probabiliste de l'approche des phénomènes en question et l'importance de sa formalisation probabiliste. De là l'expression proposée de « convention stochastique » :

« Dans la pratique, nous sommes tacitement convenus, en règle générale, d'avoir recours à une méthode qui repose à vrai dire sur une pure convention. Cette convention consiste essentiellement [...] dans l'hypothèse que l'état actuel des affaires continuera indéfiniment à

moins qu'on ait des raisons définies d'attendre un changement. [...] Dans la pratique, nous supposons, en vertu d'une véritable convention, que l'évaluation actuelle du marché, de quelque façon qu'elle ait été formée, est la seule correcte, eu égard à la connaissance actuelle des faits qui influenceront sur le rendement de l'investissement, et que ladite évaluation variera seulement dans la mesure où cette connaissance sera modifiée. [...] La méthode conventionnelle de calcul indiquée ci-dessus est compatible avec un haut degré de continuité et de stabilité dans les affaires, *tant que l'on peut compter sur le maintien de la convention*¹⁵. »

La convention keynésienne installe donc la condition de possibilité de l'échange économique construit dans l'expérience des agents, expérience solidifiée dans les institutions et dans les calculs. La focalisation des transactions financières sur cette la norme IAS 39 n'apparaîtra alors que comme un épisode de l'histoire des finances et de leurs calculs.

5.5 Annexe au chapitre 5

Voici une présentation plus systématique des notions utilisées dans ce chapitre. Il s'agit ici de rattacher des notions délicates de la finance mathématique à des intuitions concrètes en indiquant les références bibliographiques où le lecteur pourra trouver les développements supplémentaires.

5.5.1 Efficacité informationnelle et arbitrage

La notion de réplique. Commençons par introduire la notion de *réplique* d'un actif financier quelconque. On considère un actif financier qui procure en date T un flux de trésorerie X_T qui dépend de l'état du monde ω à cette date, noté $X_T(\omega)$. Dire que l'actif financier X est répliquable revient à dire que l'on peut trouver (ou construire) un portefeuille θ tel que, à cette date T , la valeur V_T du portefeuille soit exactement égale à celle de X_T dans tous les états ω du monde. Si le portefeuille θ réplique exactement les flux de l'actif X , il est appelé pour cette raison le portefeuille *réplique* de X . Cette notion de réplique, en tant qu'elle permet d'obtenir la *valeur* de l'actif X , est à la base de toutes les opérations d'arbitrage : on construit une réplique d'un actif au moyen d'autres actifs, puis on compare les valeurs obtenues correspondantes. Si elles sont différentes, il existe un arbitrage à mettre en place.

Du point de vue informationnel, cette différence de valeur entre l'actif réel et l'actif construit par réplique, indique que « quelque chose » relatif à l'évaluation correcte des actifs n'est pas (encore) passé dans les cours : la notion d'efficacité informationnelle est donc directement sous-jacente à celle d'arbitrage.

Plus précisément, si le marché est efficace au sens informationnel, alors l'arbitrage devient possible. Réciproquement, si le marché n'est pas efficace au

15. Keynes [1969], p. 167-168.

sens informationnel, alors l'arbitrage peut ne pas aboutir et conduire à des positions perdantes. La réplique des actifs est l'outil de détection et de mise en place des arbitrages.

Construction de la réplique. Passons maintenant à la construction d'une réplique. Pour cela, on considèrera un exemple très simple dans lequel le marché est composé de deux actifs : une action et un actif non risqué, de type bon du Trésor, produisant un taux monétaire. Les opérateurs de marché font deux scénarios sur l'état du monde futur en date T : pessimiste (ω_1) et optimiste (ω_2). La probabilité de survenance des états est $P(\omega_1) = p_b = 1 - p_h$ et $P(\omega_2) = p_h$. On cherche à évaluer un actif quelconque X dont le cours à la date T selon le scénario retenu est noté $X_T(\omega)$. Dans le scénario pessimiste (baissier), on notera $S_T(\omega_1) = S_b$ le cours de l'action. Dans le scénario optimiste (haussier), on notera $S_T(\omega_2) = S_h$ le cours de l'action. De la même manière, l'actif X prend les valeurs $X_T(\omega_1) = X_b$ et $X_T(\omega_2) = X_h$ en date T selon les scénarios. Le prix en date $t = 0$ de l'action est S_0 . Le taux du marché monétaire entre les dates $t = 0$ et $t = T$ est noté r . Le tableau ci-dessous résume la situation.

$t = 0$		$\omega_1 = b$	$\omega_2 = h$
1	marché monétaire	$1 + r$	$1 + r$
S_0	prix de l'actif S	S_b	S_h
X_0	prix de l'actif X	X_b	X_h
	probabilité P	$1 - p_h$	p_h

On cherche à construire un portefeuille qui réplique les flux de X en combinant l'action S et le marché monétaire : une allocation d'actifs θ entre marché monétaire et action. Soit $\theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ cette allocation d'actifs. On investit θ_0 euros au marché monétaire et l'on achète θ_1 titres. En date $t = 0$, la valeur V_0 de ce portefeuille est

$$V_0 = \theta_0 + \theta_1 S_0$$

En date $t = T$, la valeur de ce portefeuille est

$$V_T(\omega) = \theta_0(1 + r) + \theta_1 S_T(\omega)$$

soit dans les deux scénarios

$$\begin{cases} V_b = \theta_0(1 + r) + \theta_1 S_b \\ V_h = \theta_0(1 + r) + \theta_1 S_h \end{cases}$$

et il s'agit donc de déterminer les valeurs de θ_0 et θ_1 . Comme l'on veut que les flux du portefeuille répliquent exactement ceux de l'actif X , il faut donc que $V_b = X_b$ et $V_h = X_h$, soit

$$\begin{cases} \theta_0(1 + r) + \theta_1 S_b = X_b \\ \theta_0(1 + r) + \theta_1 S_h = X_h \end{cases}$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues s'effectue sans difficulté particulière, et donne comme solutions

$$\theta_0 = \frac{1}{1+r} \frac{X_b S_h - X_h S_b}{S_h - S_b} \quad (5.12)$$

et

$$\theta_1 = \frac{X_h - X_b}{S_h - S_b} \quad (5.13)$$

On a donc trouvé une réplique $\theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ de l'actif X .

Emergence d'une quantité associée à la réplique. Nous allons maintenant exprimer la valeur du portefeuille en date $t = 0$, et faire apparaître que cette valeur peut se comprendre comme une espérance mathématique calculée avec une nouvelle probabilité.

En date $t = 0$, cette réplique $\theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ a pour valeur $V_0(\theta) = \theta_0 + \theta_1 S_0$, soit en remplaçant θ_0 et θ_1 par leur valeur

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{X_b S_h - X_h S_b}{S_h - S_b} + \frac{(1+r)(X_h - X_b)}{S_h - S_b} S_0 \right) \\ &= \frac{1}{1+r} \left(X_b \frac{S_h - S_0(1+r)}{S_h - S_b} + X_h \frac{S_0(1+r) - S_b}{S_h - S_b} \right) \end{aligned}$$

Posons

$$\pi_h = \frac{S_0(1+r) - S_b}{S_h - S_b}$$

il vient que

$$1 - \pi_h = 1 - \frac{S_0(1+r) - S_b}{S_h - S_b} = \frac{S_h - S_0(1+r)}{S_h - S_b} = \pi_b$$

et l'on peut donc écrire que

$$V_0 = \frac{1}{1+r} (X_b \pi_b + X_h \pi_h)$$

Ce qui donne la valeur de l'actif X en date $t = 0$, puisque $V_t(\omega) = X_t(\omega)$ pour $t = 0, T$. On a donc

$$X_0 = \frac{1}{1+r} (X_b \pi_b + X_h \pi_h) \quad (5.14)$$

On va à présent examiner à quelle condition l'on peut interpréter π comme une probabilité. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait $\pi_h \in [0, 1]$.

D'après la définition de π_h , il vient que, si $S_b \leq S_0(1+r) \leq S_h$, alors $\pi_h \in [0, 1]$. Que représente financièrement cette condition?

1. Supposons que $S_0(1+r) < S_b < S_h$, soit $S_0(1+r) < S_T(\omega)$. Cela veut dire que, quel que soit l'état du monde ω en date T , le cours de l'action S_T est supérieur au résultat d'un placement de S_0 au marché monétaire.

Il n'y a alors aucun risque à emprunter S_0 euros au marché monétaire et à acheter l'action.

L'allocation d'actifs serait donc $\theta_0 = -S_0$ et $\theta_1 = +1$.

(a) En date $t = 0$, le portefeuille vaut $V_0 = -S_0 + S_0 = 0$: pas d'investissement à faire, ou encore, investissement autofinancé.

(b) En date $t = T$, le portefeuille vaut $V_T(\omega) = -S_0(1+r) + S_T(\omega)$. Comme $S_0(1+r) < S_T(\omega)$, on peut donc affirmer que $V_T(\omega) > 0$.

On vient de réaliser une opération à gain positif sans risque, ou encore un *arbitrage*. Dans ce cas, $S_0(1+r) - S_b < 0$, et donc $\pi_h < 0$.

2. Supposons que $S_b < S_h < S_0(1+r)$, soit $S_T(\omega) < S_0(1+r)$. Cela veut dire que, quel que soit l'état du monde ω en date T , le cours de l'action S_T est inférieur au résultat d'un placement de S_0 au marché monétaire. Il n'y a alors aucun risque à vendre l'action à découvert au cours S_0 et à prêter S_0 euros au marché monétaire. Puis, en date T , racheter l'action et recevoir l'intérêt du prêt.

L'allocation d'actifs serait donc $\theta_0 = S_0$ et $\theta_1 = -1$.

(a) En date $t = 0$, le portefeuille vaut $V_0 = S_0 - S_0 = 0$: pas d'investissement à faire, ou encore, investissement autofinancé.

(b) En date $t = T$, le portefeuille vaut $V_T(\omega) = S_0(1+r) - S_T(\omega)$. Comme $S_T(\omega) < S_0(1+r)$, on peut donc affirmer que $V_T(\omega) > 0$.

On vient à nouveau de réaliser un arbitrage. Dans ce cas, $S_0(1+r) - S_b > S_h - S_b$, et donc $\pi_h > 1$.

Le point commun de ces deux situations est le suivant : en date $t = 0$, on a $V_0 = 0$, et en date T , $V_T \geq 0$. Ces deux conditions caractérisent une opération d'arbitrage. Dans ces deux cas, où un arbitrage est possible, où donc le marché n'est pas encore arbitré, $\pi \notin [0,1]$.

Dans la condition $S_b \leq S_0(1+r) \leq S_h$, on voit que, au contraire des deux cas précédents, il n'est pas possible de mettre en place une telle opération d'arbitrage. En réalité, dans cette situation, *le marché à déjà été arbitré*. On dit alors qu'il n'y a plus d'arbitrage possible, et cette condition est appelée condition de non existence d'arbitrage (*absence of opportunity of arbitrage* : AOA). Dans ce cas, $\pi_h \in [0,1]$ et peut être interprété comme une probabilité. En particulier, si $S_0(1+r) = S_b$, l'état « bas » des scénarios est touché, et $\pi_h = 0$. A l'inverse, si $S_0(1+r) = S_h$, l'état « haut » des scénarios est touché, et $\pi_h = 1$ (certitude). On peut donc comprendre intuitivement π_h comme la probabilité *subjective* d'atteindre l'état « haut » des scénarios. Quand $\pi_h = 0$, il n'y a « aucune chance » (puisqu'on se trouve dans l'état « bas ») d'atteindre l'état haut. Quand $\pi_h = 1$, il y a « 100% de chance » d'atteindre l'état haut (puisque l'on s'y trouve).

Cette probabilité π_h traduit donc une sorte d'état d'esprit des agents devant les deux scénarios. En cela, elle est effectivement « subjective ». On peut donc compléter le tableau initial par les valeurs de cette probabilité, que l'on note Q : $Q(\omega_1) = \pi_b = 1 - \pi_h$, et $Q(\omega_2) = \pi_h$. Par rapport à la probabilité P , dite « la plus vraisemblable », ou encore « historique » (si l'on décide de l'estimer

par la statistique), ou « objective » (non liée aux anticipations des agents), la probabilité Q correspond à « ce que les agents ont à l'esprit » au moment où l'équilibre se forme : c'est, d'une certaine manière, la probabilité « du marché », et ceci nonobstant les valeurs théoriques de P .

Nous allons préciser cette idée en observant que l'équation (5.14) s'écrit

$$X_0 = \frac{1}{1+r} (X_T(\omega_1)Q(\omega_1) + X_T(\omega_2)Q(\omega_2))$$

qui représente l'espérance mathématique des valeurs possibles que peut prendre l'actif X en date T , calculée au moyen de la probabilité Q . Soit

$$X_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_Q[X_T] \quad (5.15)$$

La notation \mathbb{E}_Q signifie que l'espérance est calculée avec la probabilité Q . On voit que le prix de l'actif X en date $t = 0$ s'écrit avec cette probabilité comme la valeur actuelle au taux sans risque de son espérance en date T . Cette relation est aussi vérifiée pour l'actif risqué. En effet, d'après la définition de π_h , que l'on rappelle

$$\pi_h = \frac{S_0(1+r) - S_b}{S_h - S_b}$$

on a

$$S_0(1+r) = \pi_h S_h + (1 - \pi_h) S_b$$

soit

$$S_0 = \frac{1}{1+r} (S_T(\omega_1)Q(\omega_1) + S_T(\omega_2)Q(\omega_2))$$

et donc

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_Q(S_T) \quad (5.16)$$

On voit que le prix de l'action en date $t = 0$ est la valeur actuelle au taux sans risque de son espérance avec Q en date T .

Nous allons maintenant interpréter cette probabilité de manière comportementale. La relation $X_0(1+r) = \mathbb{E}_Q[X_T]$ exprime une égalité entre, d'une part, une valeur certaine, et, d'autre part, une espérance mathématique de variable aléatoire : il y a donc *indifférence* entre l'une et l'autre perspectives. Autrement dit, la probabilité Q est celle dont les valeurs permettent d'obtenir une indifférence entre une issue certaine et l'espérance mathématique d'une perspective risquée. On dit que Q est une probabilité s'apparentant à celle d'individus qui seraient donc indifférents à la prise de risque. Elle est appelée pour cette raison *risk neutral probability*.

Illustrons les développements précédents par une application numérique. En date $t = 0$, une action A cote $S_0 = 150$ euros. Le taux du marché monétaire est de $r = 2\%$. L'équilibre informationnel du marché écrit dans le monde réel en utilisant la probabilité P donne comme équation d'évaluation de l'actif la relation suivante

$$150 = \frac{140 \times 0,50 + 200 \times 0,50}{1 + 0,1333}$$

soit une prime de risque de $13,33 - 2 = 11,33\%$. L'écriture de cet équilibre informationnel dans le monde dual de la probabilité subjective Q conduit à l'équation d'évaluation

$$150 = \frac{140 \times 0,78 + 200 \times 0,22}{1 + 0,02}$$

Les valeurs de la probabilité Q sont $Q(\omega_1) = 0,78$ et $Q(\omega_2) = 0,22$: l'état défavorable est surpondéré par les agents. L'équilibre du marché (le système de prix cotés) exprimant une surpondération de l'état défavorable, tout se passe comme si les agents anticipaient plutôt une baisse de la bourse, par rapport à la probabilité la plus vraisemblable 50/50. On voit que la prime de risque disparaît dans le monde dual de la probabilité subjective.

En résumé, on peut écrire l'équivalence suivante :

Portefeuille réplique \Leftrightarrow probabilité Q

5.5.2 L'unicité de la probabilité Q après arbitrage

Dans l'exemple précédent, on pourrait supposer que cette probabilité Q dépend de l'actif risqué considéré (notons-le A , et donc Q_A), et qu'il y aurait donc autant de probabilités subjectives que d'actifs. Dans ce cas, cette probabilité Q_A aurait finalement assez peu d'intérêt pour l'évaluation puisqu'il serait nécessaire d'en déterminer les valeurs pour chacun des actifs. Si, en revanche, elle peut être utilisée identiquement pour tous les titres du marché, alors on justifie son usage dans la pratique de l'évaluation. On va montrer, à partir de l'exemple précédent, que c'est le cas si le marché est arbitré.

Supposons que, sur le même marché, un autre actif B prenne équiprobablement comme valeurs 50 ou 120 euros en date $t = 1$, cotant 66 euros en date $t = 0$. La même démarche que précédemment conduit aux équations d'équilibre

$$66 = \frac{50 \times 0,50 + 120 \times 0,50}{1 + 0,2879}$$

soit une prime de risque de $28,79 - 2 = 26,79\%$, et

$$66 = \frac{50 \times 0,75 + 120 \times 0,25}{1 + 0,02}$$

c'est-à-dire $Q_B(\omega_1) = 0,75$: l'état défavorable est surpondéré par les agents, mais moins qu'avec la probabilité Q_A . Apparemment, les deux probabilités subjectives sont différentes, ce qui semble indiquer qu'il y aurait autant de

probabilités Q_j que d'actifs j .

$t = 0$		$\omega_1 = b$	$\omega_2 = h$
1	marché monétaire	1,02	1,02
150	prix de l'actif A	140	200
66	prix de l'actif B	50	120
	probabilité P	0,50	0,50
	probabilité Q_A	0,78	0,22
	probabilité Q_B	0,75	0,25

Pourtant, l'on va montrer que cette situation de marché représente un état dans lequel toute l'information disponible n'a pas été intégrée dans les cours, et ceci *simultanément* sur tous les cours : c'est un marché non arbitré. En d'autres termes, le système de prix (150,66) n'est pas stable : le marché n'est pas à l'équilibre informationnel.

En général, on vérifie que le marché est arbitré en examinant les possibilités d'obtenir le taux sans risque (marché monétaire) à partir d'une combinaison d'actifs risqués. Pour cela, on cherche θ_A et θ_B tels que

$$\begin{bmatrix} 140 & 50 \\ 200 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne comme solution

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 50 \\ 200 & 120 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01029 \\ -0,00882 \end{bmatrix}$$

soit la valeur en date $t = 0$ d'un actif qui produit 1 euro quelle que soit la situation en date $t = 1$

$$V_0 = [0,01029 \quad -0,00882] \begin{bmatrix} 150 \\ 66 \end{bmatrix} = 0,96$$

Autrement dit, avec le portefeuille θ (la combinaison linéaire θ), on a pu obtenir de manière *certaine* la valeur 1 en date $t = 1$, c'est-à-dire le taux de rentabilité *certain*, ou encore taux *sans risque* dont la valeur est $1/0,96 - 1 = 3,98\%$. Comme le taux du marché monétaire coté est $r = 2\%$, on voit qu'il est possible de réaliser un gain immédiat en empruntant au monétaire la valeur du portefeuille θ et en vendant le portefeuille à découvert.

On a détailler une telle opération pour une ligne d'environ 100 000 euros. Elle s'effectue en deux temps.

1. Mise en place de l'arbitrage en date $t = 0$.

Marché boursier. Achat de 1 029 actions A au prix coté de 150 euros, et simultanément vente de 882 actions B au prix coté de 66 euros.

Soit un mouvement de trésorerie de $-1\,029 \times 150 + 882 \times 66 = -96\,138$ euros.

Marché monétaire. Emprunt de 96 138 euros au taux de 2%.

2. Déblocement de l'arbitrage en date $t = 1$.

Marché boursier. Vente de 1029 actions A et simultanément rachat de 882 actions B au prix qu'elle cotent en date $t = 1$. *Quel que soit l'état du marché*, le mouvement de trésorerie est de +100 000 euros.

Marché monétaire. Remboursement de 96 138 euros au taux de 2%, soit 98 061 euros. Le gain réalisé (sans prise de risque) est de $100\,000 - 98\,061 = 1\,939$ euros.

L'achat de 1 029 actions A sur le marché va avoir pour effet d'exercer une pression à la hausse sur le prix, tandis que la vente de 882 actions B aura l'effet inverse. Imaginons que les nouveaux prix d'équilibre se fixent à 151,25 euros, et 65,75 euros. Le taux monétaire implicite qui résulterait de ce nouvel équilibre serait de 2,37%. Le marché n'est toujours pas arbitré. Quel serait le bon niveau des prix d'équilibre?

En se rappelant que

$$1\,029 A_1 - 882 B_1 = 100\,000$$

quel que soit l'état du marché en date $t = 1$, on devrait donc avoir

$$1\,029 A_0 - 882 B_0 = \frac{100\,000}{1,02} = 98\,039,22$$

comme bonne valeur en date $t = 0$. Imaginons que seul le prix de l'actif B s'ajuste. Cela peut vouloir dire que seule l'information sur la société B n'avait pas été complètement prise en compte dans l'évaluation. Dans ce cas, cet ajustement conduirait à

$$B_0 = \frac{1}{882} (1\,029 A_0 - 98\,039,22) = 63,89$$

Si l'on recalcule Q_B avec ce nouveau prix, on trouve

$$63,89 = \frac{50 \times 0,78 + 120 \times 0,22}{1 + 0,02}$$

d'où $Q_B(\omega_1) = 0,78 = Q_A(\omega_1)$.

Autrement dit, lorsque le marché est arbitré, $Q_A = Q_B = Q$. On pourrait étendre ce raisonnement à tous les actifs du marché. Ce qui permet de dire que, dans un marché arbitré, la probabilité Q est unique.

$t = 0$		$\omega_1 = b$	$\omega_2 = h$
1	marché monétaire	1,02	1,02
150,00	prix de l'actif A	140	200
63,89	prix de l'actif B	50	120
	probabilité P	0,50	0,50
	probabilité Q	0,78	0,22
1,30	opérateur $L = Q/P$	1,57	0,43

Le couple de prix (150;63,89) représente les justes valeurs des deux actifs A et B, dans le sens où, selon les principes de la norme IAS 39, toute l'information disponible et pertinente a bien été incorporée dans l'évaluation de A et de B.

5.5.3 Noyau de l'évaluation et martingales

Les trois formulations de l'efficacité informationnelle. Notons de manière générale S_t^j le prix d'un actif j en date t , μ_j son taux de rendement sur la période et r le taux monétaire sur cette période. Le prix d'une action dans un marché arbitré est en général compris comme la valeur actuelle du prix de sortie (de revente) en date $t = 1$, calculée avec un taux d'actualisation incluant une prime de risque, de la forme

$$S_0^j = \frac{1}{1 + \mu_j} \mathbb{E}_0^P[S_1^j] \quad (5.17)$$

En général, $\mu_j = r + \mathbb{E}[\pi_j]$ où $\mathbb{E}(\pi_j)$ est la prime de risque espérée de l'action j . Par exemple, dans le CAPM, on a $\mathbb{E}[\pi_j] = \beta_j (\mathbb{E}[R_M] - r) = \lambda_M \text{cov}(R_j, R_M)$. La prime de risque espérée $\mathbb{E}[\pi_j]$ est l'ingrédient crucial pour le calcul de la valeur de S_0^j . Dans l'espace dual des agents indifférents à la prise de risque, cette prime de risque disparaît du taux d'actualisation pour figurer dans les valeurs de la probabilité Q . La déformation psychologique a pour effet d'aplatir la courbe des taux et de rendre donc « plat » l'espace du prix de l'argent et l'équation d'évaluation est

$$S_0^j = \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}_0^Q[S_1^j] \quad (5.18)$$

En résumé, on peut écrire les deux formes de l'équilibre du marché avec efficacité informationnelle, selon que l'on se place dans le monde réel de la probabilité P ou dans le monde dual de la probabilité Q . On a

$$S_0^j = \frac{1}{1 + \mu_j} \mathbb{E}_0^P[S_1^j] = \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}_0^Q[S_1^j] \quad (5.19)$$

L'écriture condensée $\mathbb{E}_0[\cdot]$ indique que toute l'information disponible en date $t = 0$ a été utilisée pour le calcul de l'espérance mathématique. On pourrait aussi écrire $\mathbb{E}[\cdot | \Phi_0]$. On voit que l'on a calculé deux valeurs actuelles avec deux représentations différentes. Nous pouvons donc exprimer la propriété d'efficacité informationnelle d'un marché avec deux formulations différentes.

Pour passer d'une représentation à l'autre, ce qui revient à passer de la probabilité P à la probabilité Q , on introduit la variable aléatoire L définie par $L(\omega) \equiv Q(\omega)/P(\omega)$. En effet, soit X une perspective aléatoire d'espérance

$$\mathbb{E}_P[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$$

Si l'on calcule l'espérance de LX , on trouve

$$\mathbb{E}_P[LX] = \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega)X(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)Q(\omega) = \mathbb{E}_Q[X] \quad (5.20)$$

qui est l'espérance de X avec la probabilité P : l'on voit que l'on a changé de probabilité au moyen de l'opérateur L . Il vient de (5.20) que

$$\frac{1}{1+r} \mathbb{E}_0^Q[S_1^j] = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_0^P[L S_1^j] \quad (5.21)$$

Intuitivement, L représente une sorte de sur- ou sous-pondération des « scénarios » ω_1 et ω_2 qui ressort de l'extraction des anticipations des agents avant l'arbitrage (la formation du prix d'équilibre); et le noyau représente la valeur actuelle de cette pondération en date initiale. Le calcul des valeurs de L selon ω donne ici : $0,78/0,50 = 1,57$ et $0,22/0,50 = 0,43$ et donc pour le noyau $1,57/1,02 = 1,54$ et $0,43/1,02 = 0,42$.

La valeur de L en date $t = 0$ peut être obtenue par la méthode des répliques : on peut considérer les valeurs que prend $L(\omega)$ en date $t = 1$ comme les valeurs d'un portefeuille à cette date et construire une réplique de L de la même manière que précédemment. La valeur de ce portefeuille réplique en date $t = 0$ est notée L_0 , qui est non aléatoire. Par exemple, dans le cas d'un actif risqué et d'un actif sans risque, si l'on veut que les flux du portefeuille répliquent exactement ceux de L , soit $V_b = L_b$ et $V_h = L_h$, cela donne le système vu au début dont les solutions (5.12) et (5.13) sont identiques en remplaçant X par L . En date $t = 0$, le portefeuille réplique a pour valeur $L_0 = \theta_0 + \theta_1 S_0$. L'application numérique donne $L_0 = 1,30$.

Nous pouvons introduire une troisième formulation, plus condensée, de l'efficacité informationnelle. Pour cela, posons $\alpha = \frac{L}{1+r}$. On appelle α le noyau d'évaluation (*pricing kernel*) du marché, ou « déflateur ». Il vient l'écriture générale

$$S_0^j = \mathbb{E}_0^P[\alpha S_1^j] \quad (5.22)$$

Le noyau de l'évaluation relie les flux futurs au prix présent S_0^j : sa valeur dépend donc des préférences intertemporelles des agents, des possibilités de consommation future, et des apports futurs éventuels de fonds. Il peut aussi être exprimé en fonction d'autres variables ($\alpha \equiv \alpha(x)$) telles que la rentabilité globale du marché ou le taux de croissance de la consommation. On montre que, si le marché est arbitré, alors ce noyau est unique.

Les valeurs espérées de L et du noyau s'obtiennent aisément. Pour l'opérateur L , le calcul est immédiat :

$$\mathbb{E}_P(L) = \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1 \quad (5.23)$$

d'où

$$\mathbb{E}_P[\alpha] = \frac{1}{1+r} \quad (5.24)$$

qui signifie que l'espérance de la valeur du noyau d'évaluation du marché est le facteur d'actualisation au taux sans risque. On peut retrouver cette valeur en considérant un taux d'intérêt sans risque, par exemple procuré par un titre

du marché monétaire, comme un bon du Trésor B . D'où $r = (B_1 - B_0)/B_0$ est le taux sans risque entre les dates 0 et 1. Il résulte de l'équation (5.22) que $B_0 = \mathbb{E}[\alpha B_1]$ soit $1 = \mathbb{E}[\alpha(1+r)]$ ce qui donne le résultat.

L'équation (5.22) conduit aussi à

$$S_0^j = \mathbb{E}_0^P[\alpha] \mathbb{E}_0^P[S_1^j] + \text{cov}(\alpha, S_1^j)$$

soit

$$S_0^j = \frac{\mathbb{E}_0^P[S_1^j] + \text{cov}(\alpha(1+r), S_1^j)}{1+r} = \frac{\mathbb{E}_0^P[S_1^j] + \text{cov}(L, S_1^j)}{1+r}$$

En rapprochant cette dernière expression de (5.18), on obtient l'égalité

$$\mathbb{E}_0^Q[S_1^j] = \mathbb{E}_0^P[S_1^j] + \text{cov}(L, S_1^j) \tag{5.25}$$

Cette expression représente l'équivalent certain de l'espérance conditionnelle du cours S_1^j .

Il y a donc plusieurs manières de calculer en date $t = 0$ la valeur actuelle S_0^j d'un actif j . On peut dire que la forme de l'efficacité informationnelle est celle qui lui est donnée par la spécification du modèle retenu par les opérateurs de marché, ou bien encore que le modèle mathématique de caractérisation de la rentabilité espérée est la *cause formelle* de l'efficacité informationnelle du marché.

définition classique	$S_0^j = \frac{1}{1+\mu_j} \mathbb{E}_0^P[S_1^j]$	années 1970
probabilité subjective	$S_0^j = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_0^Q[S_1^j]$	années 1980
noyau d'évaluation	$S_0^j = \mathbb{E}_0^P[\alpha S_1^j]$	années 1990

TAB. 5.2 – Les formes successives de l'efficacité informationnelle.

Le noyau de l'évaluation et la relation bêta généralisée. Dans la finance des années 1960, le modèle linéaire des rentabilités (ou modèle en bêta) est devenu le fondement de l'évaluation des actifs financiers. L'approche par le noyau généralise cette perspective, en permettant de retrouver des relations linéaires et des coefficients bêtas sur les rentabilités des actifs, mais non plus reliés au portefeuille de marché de Sharpe, mais au portefeuille Log-optimal ou à la densité des prix d'états.

Faisons apparaître à partir de (5.25) la rentabilité R_j de tout actif j en divisant les deux membres de l'équation par S_0^j :

$$\mathbb{E}_0^Q \left[\frac{S_1^j}{S_0^j} \right] = \mathbb{E}_0^P \left[\frac{S_1^j}{S_0^j} \right] + \text{cov} \left(L, \frac{S_1^j}{S_0^j} \right)$$

Introduisons les taux de rentabilité des différents titres j , que l'on note R_j sur la période $[0,1]$. On a

$$\mathbb{E}_0^Q[1 + R_j] = \mathbb{E}_0^P[1 + R_j] + \text{cov}(L, R_j)$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}_0^P[R_j] - r = -\text{cov}(L, R_j) = -(1 + r) \text{cov}(\alpha, R_j) \quad (5.26)$$

Cette équation signifie que, dans un marché efficace au sens informationnel et arbitré, la prime de risque espérée de tout actif j est fonction de la covariance entre la rentabilité de cet actif et le noyau d'évaluation du marché (la densité des prix d'état). Cette relation fait apparaître la propriété bien connue selon laquelle seul le risque systématique est rémunéré par le marché, le risque systématique étant ici appréhendé par le noyau d'évaluation (ou la densité L).

Nous nous plaçons maintenant dans l'espace de la probabilité P et, pour simplifier les notations, l'indexation par P est supprimée. Considérons alors la densité L comme un actif et déterminons-en une réplique θ_L . La rentabilité de ce portefeuille θ_L est $R_L = (L_1 - L_0)/L_0$. Remplaçons dans l'équation (5.26) le terme L_1 par sa valeur $L_0(1 + R_L)$: cela donne

$$\mathbb{E}[R_j] - r = -\text{cov}(R_j, L_0(1 + R_L)) = -L_0 \text{cov}(R_j, R_L)$$

relation qui est vraie pour le portefeuille θ_L lui-même :

$$\mathbb{E}[R_L] - r = -L_0 \text{var } R_L$$

d'où la valeur de $L_0 = \frac{\mathbb{E}[R_L] - r}{-\text{var } R_L}$. Ce qui donne finalement la relation entre la prime de risque espérée d'une action j avec la rentabilité du portefeuille réplique de L :

$$\mathbb{E}[R_j] - r = \frac{\text{cov}(R_j, R_L)}{\text{var } R_L} (\mathbb{E}[R_L] - r)$$

Introduisons alors le « bêta » de l'action j par rapport au portefeuille L comme la quantité $\text{cov}(R_j, R_L) / \text{var } R_L$, que l'on note β_j^L . Il vient la relation

$$\mathbb{E}[R_j] - r = \beta_j^L (\mathbb{E}[R_L] - r) \quad (5.27)$$

qui signifie que la prime de risque de l'action j est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille réplique de L , via le coefficient de proportionnalité bêta : la prime de risque d'une action est proportionnelle à son bêta en regard de la densité L . Ce résultat *ressemble* à la relation du CAPM, si ce n'est que, dans ce cas, le portefeuille θ_L est une réplique de la densité L , et non le portefeuille de marché.

Identification du noyau par le portefeuille Log-optimal. Le noyau étant un facteur d'actualisation qui est unique pour tous les titres du marché

lorsque le marché est arbitré, il s'agit donc de déterminer ce taux d'actualisation unique. Dans les équations classiques d'évaluation à base du coefficient bêta du CAPM, le taux d'actualisation unique retenu pour tous les titres était le taux du portefeuille du marché, car ce portefeuille était supposé être le portefeuille optimal tangent de Markowitz-Tobin. Dans le cas du noyau, il s'agit également de trouver dans le marché un portefeuille de référence dont le taux de rentabilité puisse être utilisé comme base d'évaluation des titres dont il se compose.

À la différence d'un portefeuille optimal en moyenne-variance (ou portefeuille MV-optimal), on cherche ici un portefeuille qui soit optimal par rapport à une fonction d'utilité donnée notée u , et qu'on appelle pour cette raison un portefeuille u -optimal. On voit que le point commun de la démarche, dans les deux cas, est l'utilisation d'un portefeuille optimal pour toute évaluation de titres. Dans les années 1960, le portefeuille optimal retenu était celui du CAPM de Sharpe; dans les années 1980, c'est celui du CAPM avec prise en compte de la consommation, ou CCAPM de Lucas.

Pour identifier concrètement le noyau sur le marché réel, on va donc utiliser l'approche de la maximisation de l'utilité espérée pour un investisseur donné. L'utilité en date $t = 1$ d'une richesse aléatoire de valeur V_1 (comme la valeur liquidative d'un portefeuille d'actifs) pour l'investisseur est $u(V_1(\omega), \omega)$. L'investisseur va chercher à maximiser son utilité espérée en date $t = 1$ notée $\mathbb{E}[u(V_1)]$ en fonction du montant initial ν investi sur le marché en date $t = 0$. Le problème à résoudre est donc un problème de maximisation du type

$$\begin{cases} \max_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}[u(V_1)] \\ \text{s.c.} \\ V_0 = \nu \end{cases} \quad (5.28)$$

Un portefeuille sera optimal par rapport à une fonction d'utilité u , ou u -optimal, s'il est obtenu par la résolution du programme d'optimisation (5.28), pour un niveau de richesse initiale ν donné.

La résolution du programme (5.28) passe par l'annulation d'un lagrangien. On obtient la forme du système d'équations

$$\mathbb{E}[u'(\tilde{V}_1) S_1^j] = \mathbb{E}[u'(\tilde{V}_1)](1+r)S_0^j \quad (5.29)$$

qui conduit à

$$S_0^j = \mathbb{E} \left[\frac{u'(\tilde{V}_1)}{\mathbb{E}[u'(\tilde{V}_1)](1+r)} S_1^j \right] \quad (5.30)$$

En rapprochant l'équation précédente de la définition (5.22) du noyau, l'on voit que

$$\alpha = \frac{1}{1+r} \frac{u'(\tilde{V}_1)}{\mathbb{E}[u'(\tilde{V}_1)]} \quad (5.31)$$

On a ainsi identifié le noyau d'évaluation au moyen du portefeuille u -optimal. On vérifie que

$$\mathbb{E}[\alpha] = \frac{1}{1+r}$$

Passons maintenant à une expression plus précise du noyau, en choisissant une fonction d'utilité logarithmique de type $u(x) = \ln x$. On a $u'(x) = 1/x$, d'où $u'(\tilde{V}_1) = 1/\tilde{V}_1$. Soit R_H telle que $\tilde{V}_1 = \nu(1 + R_H)$ la rentabilité du portefeuille log-optimal, utilisé comme *numéraire*. La valeur du noyau est

$$\alpha = \frac{\frac{1}{\nu(1+R_H)}}{\mathbb{E}\left[\frac{1}{\nu(1+R_H)}\right]} \frac{1}{1+r} = \frac{\frac{1}{1+R_H}}{\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+R_H}\right]} \frac{1}{1+r}$$

Pour obtenir la valeur de $\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+R_H}\right]$, on part de la relation (5.30) que l'on applique au portefeuille log-optimal lui-même

$$V_0 = \mathbb{E}\left[\frac{\frac{1}{1+R_H}}{\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+R_H}\right]} V_0(1+R_H)\right]$$

ce qui implique que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+R_H}\right] = \frac{1}{1+r}$$

On obtient alors la valeur recherchée du noyau

$$\alpha = \frac{1}{1+R_H} \tag{5.32}$$

Autrement dit, le noyau d'évaluation du marché représente exactement un facteur d'actualisation au taux de rentabilité du portefeuille Log-optimal. Réciproquement, l'inverse du noyau

$$H = \frac{1}{\alpha} = 1 + R_H$$

représente donc un facteur de capitalisation au taux de rentabilité du portefeuille Log-optimal.

Mise en évidence des martingales. Nous introduisons à présent les notations suivantes : $S'_1 = S_1/(1+r)$ et $S^*_1 = S_1/(1+R_H)$, qui représentent des cours actualisés aux taux respectifs r et R_H .

Comme $S'_0 = S^*_0 = S_0$, les relations (5.18) et (5.22) deviennent

$$S'_0 = \mathbb{E}_0^Q[S'_1] \tag{5.33}$$

$$S^*_0 = \mathbb{E}_0^P[S^*_1] \tag{5.34}$$

qui représentent, réduite à la période $[0,1]$, une Q -martingale et une P -martingale sur les cours actualisés aux taux sans risque et au taux du portefeuille numéraire.

Moyennant la définition précise d'un espace probabilisé filtré (que l'on ne fait pas ici pour ne pas surcharger le texte), l'intuition précédente s'écrirait pour toute date t comme

$$S'_t = \mathbb{E}_t^Q[S'_{t+1}] \quad (5.35)$$

$$S_t^* = \mathbb{E}_t^P[S_{t+1}^*] \quad (5.36)$$

Un marché arbitré est un marché dans lequel il est possible d'écrire que la succession des cours actualisés suit une martingale¹⁶.

Tournons-nous de nouveau vers les définitions classiques de l'efficacité informationnelle d'un marché. Dans son célèbre article de 1970, Fama définissait la propriété d'efficacité informationnelle par la formule suivante :

$$\mathbb{E}[S_1^j | \Phi] = S_0^j (1 + \mathbb{E}[R_j | \Phi]) \quad (5.37)$$

où Φ représentait l'ensemble des informations disponibles et pertinentes pour la formation des espérances $\mathbb{E}[\cdot]$, et où $\mathbb{E}[R_j | \Phi]$ devait être, disait Fama, obtenu par un modèle d'évaluation particulier (par exemple le CAPM). Comme la spécification de $\mathbb{E}[R_j | \Phi]$ correspond à celle de la prime de risque, on voit que le noyau représente la spécification la plus générale de la propriété d'efficacité informationnelle au sens de Fama.

Fama [1970, p. 385] avait défini la condition d'espérance nulle de surperformance par une relation du type

$$\mathbb{E}[R_j - \mathbb{E}[R_j | \Phi] | \Phi] = 0$$

qui, de fait, est toujours vérifiée par simple propriété de l'espérance mathématique, sans faire intervenir d'autre notion économique ou financière. En considérant que la différence $R_j - \mathbb{E}[R_j | \Phi]$ représente une rentabilité appelée « anormale » dans la littérature de recherche en finance, et en notant ε_j cette rentabilité anormale, on voit que la condition d'efficacité de Fama revient simplement à postuler que

$$\mathbb{E}[\varepsilon_j | \Phi] = 0 \quad (5.38)$$

c'est-à-dire que l'espérance (avec P) de la rentabilité anormale est nulle. Le tableau 5.3 ci-dessous résume ces notions en les plaçant en perspective.

De la même manière que l'on peut calculer des valeurs actuelles de cours, on peut calculer des rentabilités de cours actualisés, ce qui correspond financièrement à des rentabilités déflatées, ou encore nettes du taux d'intérêt utilisé dans l'actualisation.

Dans la mesure de performance des portefeuilles, ces rentabilités nettes correspondent aussi à un calcul de rentabilité en excédent de la rentabilité retenue

16. On insiste à nouveau sur le caractère extrêmement intuitif et heuristique de cet aperçu.

Fama	$\mathbb{E}[\varepsilon_j \Phi] = 0$	années 1970
probabilité subjective	$\mathbb{E}_Q[R'_j \Phi] = 0$	années 1980
portefeuille numéraire	$\mathbb{E}_P[R_j^* \Phi] = 0$	années 1990

TAB. 5.3 – Les formes successives de la rentabilité dite anormale

comme taux de référence, ce qui signifie que le calcul d'une rentabilité déflatée représente un calcul de *surperformance* d'un actif ou d'un portefeuille par rapport à la rentabilité de référence, qui est par exemple celle d'un portefeuille utilisé comme numéraire (le *benchmark*)

Il vient directement de l'équation (5.22) que

$$1 = \mathbb{E}[\alpha(1 + R_j)] \quad (5.39)$$

Cette équation d'arbitrage représente la forme de base (ou forme-mère) de l'idée d'efficacité informationnelle du marché.

Comme on a vu que le noyau représente un facteur d'actualisation aléatoire au taux de rentabilité d'un portefeuille Log-optimal noté R_H , on peut donc écrire que

$$\alpha(1 + R_j) = \frac{1 + R_j}{1 + R_H} = 1 + R_j^*$$

où la notation R_j^* représente pour les rentabilités R_j ce que la notation S_j^* représente pour les cours : une valeur actuelle ou ici une rentabilité déflatée par le taux du numéraire (*benchmark*) H . La propriété d'efficacité informationnelle d'un marché écrite dans les termes (5.39) du noyau signifie donc que

$$\mathbb{E}_P[R_j^*] = 0 \quad (5.40)$$

Cette nouvelle équation caractérise la propriété d'efficacité informationnelle d'un marché par une condition d'espérance nulle de surperformance des titres par rapport au taux de référence du portefeuille numéraire. Cette propriété s'étend naturellement des titres j aux portefeuilles θ combinaisons linéaires de ces titres. En considérant une allocation d'actifs quelconque θ parmi toutes les allocations d'actifs Θ possibles, l'efficacité informationnelle d'un marché signifie donc que, quelle que soit $\theta \in \Theta$, on a

$$\mathbb{E}_P[R_\theta^*] = 0 \quad (5.41)$$

En interprétant le portefeuille numéraire comme un *benchmark*, on peut donc exprimer la propriété d'efficacité informationnelle par une espérance nulle de

surperformance de la gestion contre le *benchmark*. On retrouve alors la définition de Jensen [1978, p. 96], que l'on rappelle.

Définition 1 (Efficacité informationnelle de Jensen) *On dit qu'un marché boursier est informationnellement efficace par rapport à un ensemble d'information donné s'il est impossible de réaliser un gain à partir d'une allocation d'actifs fondée sur cet ensemble d'information.*

et dont la traduction moderne et précise est celle de Long [1990, p.30]:

Définition 2 (Efficacité informationnelle de Long) *Cette fois, un marché boursier est informationnellement efficace par rapport à un ensemble d'information donné s'il existe un portefeuille numéraire tel que l'espérance de surperformance par rapport au portefeuille numéraire de toute allocation d'actifs fondée sur cet ensemble d'information soit nulle.*

Ces deux définitions représentent le fondement théorique de la gestion indicielle passive (l'indice étant le portefeuille numéraire).