



HAL
open science

Un siècle de descriptions statistiques des fluctuations boursières

Christian Walter

► **To cite this version:**

Christian Walter. Un siècle de descriptions statistiques des fluctuations boursières. 2003. hal-04567477

HAL Id: hal-04567477

<https://hal.science/hal-04567477>

Preprint submitted on 3 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

1900 – 2000 :
Un siècle de descriptions statistiques des fluctuations boursières
ou
Les aléas du modèle de marche au hasard en finance

Christian Walter¹

Version provisoire

Texte préparé pour le colloque “Marché boursier”
de la chaire “Théorie économique et organisation sociale” du Collège de France
organisé par Roger Guesnerie

Collège de France
27 mai 2003

Résumé

Le modèle de marche au hasard représente l'axe structurant de la modélisation financière sur un siècle pour la formalisation des fluctuations des marchés, et trouve son fondement statistique-probabiliste dans une hypothèse comportementale extrêmement forte, celle de variations boursières successives qui seraient indépendamment et identiquement distribuées (i.i.d.) au cours du temps. Cet article a pour objet de présenter l'histoire de cette modélisation, de ses problèmes et de ses perfectionnements tout au long du vingtième siècle. On montre que l'histoire du modèle de marche au hasard s'analyse comme celle du cheminement aléatoire de l'hypothèse i.i.d. à travers les marchés réels, entre succès temporaires et anomalies dérangeantes, problèmes récurrents de vérification statistique qui contraignaient les chercheurs à imaginer sans cesse de nouvelles formes de modélisation. On montre que l'ensemble des débats sur un siècle se positionne sur une articulation centrale : la manière de résoudre le problème de la non normalité des fluctuations boursières. La recherche de la résolution de ce problème conduisit : soit, pour maintenir l'hypothèse de normalité, à abandonner l'hypothèse i.i.d. (famille des ARCH), soit, pour maintenir l'hypothèse i.i.d., à abandonner l'hypothèse de normalité (théorie des valeurs extrêmes, processus de Lévy stables, puis non stables). Le concept d'efficacité informationnelle des marchés est situé dans cette problématique, à la fois comme effet (1959 – 1976) et comme cause (1976 – 1998) des choix de modélisations probabilistes. Finalement, l'histoire du modèle de marche au hasard apparaît comme un palimpseste à travers lequel se dessine la question de la mesure du temps des marchés.

¹Directeur de la recherche du secteur financier de PricewaterhouseCoopers, professeur associé à l'Institut d'études politiques. Adresse de correspondance : PricewaterhouseCoopers, 32 rue Guersant – 75017 Paris. Tél. 01 56 57 85 96. Fax 01 56 57 24 09. e-mail : christian.walter@fr.pwcglobal.com. Je remercie Monique Jeanblanc pour les très fécondes conversations que nous avons eues à propos de la relecture des travaux de Osborne et Samuelson.

Table des matières

1	Introduction	4
2	L'appréhension statistique des fluctuations boursières	6
2.1	Les données disponibles et les quantités suivies	6
2.2	Les constitution des échantillons : temps et échelles	7
2.2.1	Le choix de la mesure du temps, le temps de l'horloge et le temps de l'échange	7
2.2.2	Le choix de l'échelle de résolution et l'hypothèse i.i.d.	9
2.2.3	L'invariance d'échelle et le modèle standard des fluctuations boursières	11
3	La formation du modèle standard des fluctuations boursières	13
3.1	L'introduction du mouvement brownien en finance	13
3.1.1	Regnault et Bachelier (1863 – 1900)	13
3.1.2	Osborne, Mandelbrot et Samuelson (1959 – 1965)	14
3.2	La validation du modèle de marche au hasard (1933 – 1973)	15
3.2.1	Le programme statistique des années trente et la typologie des tests	16
3.2.2	Les simulations de Monte Carlo et la question de l'analyse technique	17
4	L'interaction avec le concept d'efficacité informationnelle des marchés	22
4.1	Efficacité informationnelle et modélisation probabiliste	22
4.2	La formation et la conception classique du concept (1900 – 1976)	23
4.2.1	L'intuition du concept avant sa naissance	23
4.2.2	Les définitions de Fama et la désintringation des hypothèses jointes	26
4.3	La reconstruction moderne du concept (1976 – 1998)	29
4.3.1	De l'efficacité informationnelle à la condition de non existence d'arbitrages	29
4.3.2	L'espérance nulle du spéculateur : compréhension moderne	31
5	Le modèle standard face à la non normalité et à l'hétéroscédasticité	33
5.1	Le phénomène leptokurtique : omniprésence et voies de modélisation	33
5.1.1	Permanence et reconnaissance de la leptokurticité	33
5.1.2	Le choix fondamental : i.i.d. ou normalité	34
5.2	La modélisation de la non normalité sous hypothèse i.i.d.	35
5.2.1	Du modèle i.i.d.-2-stable au modèle i.i.d.- α -stable	35
5.2.2	Du modèle i.i.d.- α -stable global au modèle i.i.d.- α -stable partiel	36
5.2.3	Du modèle i.i.d.- α -stable partiel au modèle i.i.d.-max-stable	36
5.2.4	Du modèle i.i.d.-max-stable au modèle i.i.d. non stable	38
5.3	Le spectre de la mémoire longue des marchés	39
5.3.1	La mémoire longue sur les rentabilités : le camp du diable	39
5.3.2	La mémoire longue sur les volatilités	40
A	Annexes	43
A.1	La marche au hasard et le modèle standard des fluctuations boursières	43
A.2	Le modèle standard et la propriété de martingale sur les prix actualisés	43
A.3	L'efficacité informationnelle des marchés et la notion de filtration	44
A.4	L'efficacité informationnelle des marchés et l'idée d'une juste valeur	46
A.5	La marche au hasard et les représentations ARIMA et ARFIMA	47
A.6	Le test d'inertie du marché et l'erreur de Cowles et Jones (1937)	49
A.7	Le principe des tests de séries pour la recherche des "rallyes" boursiers	52
A.8	Les tests de normalité et la mise en évidence de la leptokurticité	53
B	Bibliographie	56

Liste des tableaux

1	Les descriptions statistiques des fluctuations boursières à plusieurs échelles.	12
2	L'évolution de la modélisation boursière en temps continu (1900 – 1965)	15
3	Les premiers travaux validant le modèle de marche au hasard (1933 – 1962)	17
4	Les types de fluctuations boursières selon Working (1956).	25
5	Les quatre causes de l'efficacité informationnelle.	27
6	L'efficacité informationnelle en puissance (ex ante) et en acte (ex post).	27
7	La m -efficacité informationnelle selon le modèle m	31
8	L'efficacité informationnelle et la rentabilité anormale	32
9	La prolifération des types de modélisation ARCH	42
10	Les résultats des tests d'inertie de Cowles et Jones (1937)	52
11	Les travaux précurseurs de Mandelbrot et Fama sur la leptokurticité	55
12	Permanence de la leptokurticité sur le marché des actions	55
13	Permanence de la leptokurticité sur le marché des changes	55
14	Décroissance du coefficient d'aplatissement (kurtosis) K	55

Les différentes définitions de l'efficacité informationnelle

Définitions relatives à la non existence d'arbitrages

L'efficacité informationnelle selon Fama (1965)	26
L'efficacité informationnelle selon Fama (1970)	26
L'efficacité informationnelle selon Fama (1976)	26
La m -efficacité informationnelle selon Fama (1976)	28
L'efficacité informationnelle selon Karatzas et Schreve (1998)	30

Définitions relatives à la gestion passive d'actifs

L'efficacité informationnelle selon Jensen (1978)	32
L'efficacité informationnelle selon Long (1990)	32

Définitions relatives à la répartition de l'information

L'efficacité informationnelle selon Grossman (1976)	??
L'efficacité informationnelle selon Grossman et Stiglitz (1980)	??
L'efficacité informationnelle selon Beaver (1981)	28

1 Introduction

Colonne vertébrale de la modélisation des variations boursières depuis un siècle, le modèle de marche au hasard n'en a pas moins connu, à l'instar des termes d'aléas qui le définissent, des fluctuations importantes en fonction des différentes anomalies qui apparaissaient au cours de ses vérifications statistiques sur les marchés réels. On peut en ce sens parler des *aléas* du modèle de marche au hasard, voulant signifier à la fois les caractéristiques des termes probabilistes qui en constituent la structure propre, mais aussi les évolutions internes de ce modèle, brinquebalé sous les poussées contradictoires des différents phénomènes financiers qui en percutaient la posture.

Dans cette longue durée de l'histoire du modèle de marche au hasard, on peut distinguer au cours du siècle trois grandes phases de son évolution. Dans un premier temps, de 1933 à 1973, une accumulation de résultats statistiques conduit la communauté universitaire à valider en première approximation la marche au hasard gaussienne sur les rentabilités continues. Du point de vue de la modélisation financière en temps continu, c'est le premier modèle de Samuelson de 1965, ou exponentielle de mouvement brownien, qui devient le paradigme de la dynamique boursière, en parachevant les épures de Bachelier puis Osborne. Parallèlement, cette validation statistique trouve un fondement économique avec l'introduction de la notion d'efficacité informationnelle des marchés, pressentie tout au long des premières décennies du vingtième siècle, mais formalisée entre 1959 et 1976. La conjonction entre le modèle de marche au hasard gaussienne et l'hypothèse de l'efficacité informationnelle des marchés constitue alors une seconde phase, que l'on pourrait appeler l'apogée du paradigme brownien en finance. Cette période dure approximativement de 1973 à 1987.

Puis, des crises et des interrogations répétées sur les marchés financiers conduisent à rouvrir le dossier des anomalies, autoritairement fermé en 1973 avec la mise en place opérationnelle du modèle de Black-Scholes-Merton, mais qui n'avaient jamais cessé d'apparaître depuis l'origine des tests dans les résultats obtenus sur les marchés réels. En réalité, dès 1963 et 1965, Mandelbrot et Samuelson avaient conjecturé l'aventure statistique à venir, en proposant des processus de Lévy α -stables (premier modèle de Mandelbrot) et non stables (deuxième modèle de Samuelson) pour rendre compte des phénomènes de volatilité erratique qui prennent de plus en plus d'ampleur à la suite de la crise pétrolière de 1973.

L'aventure des processus de Lévy α -stables, le premier modèle de Mandelbrot, commence en 1962 et semble s'achever dans une impasse au début des années quatre-vingt, au moment où s'ouvre une deuxième voie de recherche, celle des représentations ARCH de Engle. A son tour, cette deuxième voie semble s'achever dans l'épuisement de ses développements et ses ramifications de plus en plus complexes vers la fin des années quatre-vingt dix, au moment où l'on redécouvre les processus de Lévy non stables, le deuxième modèle de Samuelson. Et finalement, au tournant du siècle, on en revient à se poser la question fondamentale qui déjà animait les premiers travaux statistiques : celle de la mesure du temps des marchés.

On se propose ici de décrire les grandes lignes de cette évolution en choisissant comme fil conducteur l'hypothèse cardinale de la marche au hasard : celle de variations boursières successives qui seraient indépendamment et identiquement distribuées (i.i.d.) au cours du temps. On utilisera un certain nombre de résultats antérieurs déjà publiés sur l'histoire et l'analyse de la modélisation financière, auxquels on se permet de renvoyer le lecteur pour éviter les répétitions². Ces travaux précédents sont complétés ici dans plusieurs directions.

La première partie décrit les choix intellectuels opérés lorsqu'on décide d'analyser statistiquement une série chronologique boursière, en insistant sur l'importance cruciale de l'hypothèse i.i.d. pour le traitement statistique des variations des marchés : elle facilite le produit de convolution et le changement d'échelle de l'analyse des rentabilités. On présente le modèle standard de la finance, appelé indifféremment marche au hasard (temps discret), mouvement brownien (temps continu), ou modèle i.i.d.-2-stable (pour faire

²Voir les références Walter [1996, 1999, 2001a, 2001b, 2002].

apparaître son appartenance à la famille des processus de Lévy).

La deuxième partie décrit la formation historique du modèle standard des fluctuations boursières. D'une part, on montre comment la modélisation financière progresse du mouvement brownien arithmétique de Bachelier (1900) au mouvement brownien géométrique de Samuelson (1965) en passant par la contribution intermédiaire importante de Osborne (1959), et l'on fait apparaître la précocité des intuitions de Samuelson et Mandelbrot sur l'utilisation des processus de Lévy (stables et non stables). D'autre part, on présente la différence de portée des tests statistiques entrepris à partir de 1933, en utilisant une manière simple d'établir une typologie globale des tests, et on insiste sur le débat intellectuel avec l'analyse technique, méthode de prévision boursière qui s'oppose frontalement à l'hypothèse i.i.d. (et violemment).

La troisième partie aborde l'interaction entre le modèle standard et le concept d'efficacité informationnelle des marchés. On étend les analyses précédentes de Walter [1996, 1999] à la période contemporaine (1976 – 2000), en faisant apparaître le changement de statut du concept, qui passe d'un état intuitif en 1976 à un état rigoureux en 1998, au moyen de sa redéfinition par la condition de non existence d'arbitrage formalisée en 1981, redéfinition qui lui assure en quelque sorte une seconde vie. Le concept d'efficacité informationnelle des marchés, de *causé* en 1976, devient *causant* à partir de 1976, dans le sens où il conditionne la modélisation des variations boursières en termes de martingales sur les prix arbitrés actualisés. On utilise la théorie des quatre causes pour désintriquer les hypothèses jointes dans la définition de 1976. On montre comment la reformulation de la notion d'efficacité informationnelle en 1998 permet de résoudre de manière moderne la pseudo-controverse entre Fama et LeRoy : ceci est fait en transportant tous les concepts modernes de Harrison–Kreps–Pliska (1981) dans la syntaxe statique de Fama (1976), réécriture qui permet de sortir de l'impasse de la controverse Fama – LeRoy.

La quatrième partie développe les différentes voies de résolution du problème leptokurtique, en présentant tout d'abord les propositions qui conservent l'hypothèse i.i.d., puis celles qui supposent l'abandon de cette hypothèse. En réalité, la chronologie est enchevêtrée, la recherche en modélisation s'enroulant autour de l'une et l'autre voie selon les périodes d'analyse et les développements techniques des outils probabilistes et statistiques. Dans un premier temps, l'hypothèse i.i.d. est validée avec le modèle i.i.d.-2-stable. Sous l'effet de l'anomalie leptokurtique, la recherche explore en premier une modélisation i.i.d.- α -stable globale, mais qui se heurte à d'autres sortes d'anomalies. On abandonne alors l'hypothèse i.i.d. avec la recherche de la modélisation des fluctuations de la volatilité (courant ARCH). Pourtant, l'hypothèse i.i.d. se maintient au travers de modèles i.i.d.- α -stables partiels, puis de modèles i.i.d.-max-stables, qui conduisent à la théorie des valeurs extrêmes et aux lois de puissance. Enfin, dans les années quatre-vingt dix, l'hypothèse de stabilité est abandonnée dans les modèles i.i.d. non stables (processus de Lévy) tandis que l'on découvre simultanément des phénomènes de mémoire longue sur la volatilité.

Finalement, l'ensemble constitué par les travaux précédents et cette étude dessine le portrait en évolution du modèle de la marche au hasard en finance au cours du vingtième siècle³.

³ Afin de ne pas surcharger la lecture, un certain nombre d'éléments techniques ont été regroupés dans huit annexes situées à la fin de l'étude. L'annexe A.1 présente la relation de passage entre le modèle de marche au hasard sur les rentabilités en temps discret et l'exponentielle de mouvement brownien, ou modèle standard en temps continu. L'annexe A.2 précise la manière dont l'exponentielle de mouvement brownien conduit à la propriété de martingale sur les cours actualisés. L'annexe A.3 rappelle la définition de la notion de filtration et son utilité pour la formalisation du concept d'efficacité informationnelle des marchés, en adoptant une modélisation à temps discret et à nombre fini d'états du monde. L'annexe A.4 présente la relation équivoque entre la notion de juste valeur et le concept d'efficacité informationnelle des marchés. L'annexe A.5 est un rappel de notions élémentaires sur les marches au hasard et les processus ARIMA et ARFIMA. L'annexe A.6 présente de manière détaillée le test d'inertie du marché afin de faire apparaître l'importante erreur de spécification de Cowles et Jones en 1937. L'annexe A.7 décrit les tests de détection de rallyes boursiers introduits par Roberts en 1959. Enfin, l'annexe A.8 présente les coefficients de Pearson–Fisher et les tests faisant apparaître le phénomène leptokurtique sur les séries financières.

2 L'appréhension statistique des fluctuations boursières

2.1 Les données disponibles et les quantités suivies

Le point de départ de toute analyse statistique est la définition des quantités (des variables) à examiner. Puisque l'on cherche à décrire les variations boursières, l'on va donc s'intéresser à la matière première à analyser, les cours boursiers. On définit une période d'analyse d'une action entre deux dates $t = 0$ et $t = T$. Sur cette période, on dispose de la totalité des enregistrements boursiers qui comprennent :

- les cotations des titres, c'est-à-dire les cours correspondant à un échange effectif de titres,
- les volumes de cotation, c'est-à-dire le nombre de titres échangés à chaque cotation,
- les dates de cotation, c'est-à-dire les moments où s'est effectué l'échange (mois - jour / heure - minute - seconde).

On note S_i le cours de l'action correspondant au moment de la i -ème cotation (c'est-à-dire du i -ème échange), et v_i le volume de titres échangés au moment de cette cotation. La description statistique précise du comportement boursier d'un titre (et donc des variations boursières) conduit par conséquent à s'intéresser à la fois au cours coté et au volume échangé. On se place à une date t donnée entre 0 et T , et on note $N(t)$ le nombre total d'échanges (cotations) réalisés entre les dates 0 et t . On dispose de deux ensembles de données :

- La suite $S_1, S_2, \dots, S_{N(t)} = \{S_i\}_{i=1, \dots, N(t)}$ des cours cotés entre les dates 0 et T .
- La suite $v_1, v_2, \dots, v_{N(t)} = \{v_i\}_{i=1, \dots, N(t)}$ des volumes de titres échangés à chaque cotation i entre les dates 0 et T .

En notant $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$ la variation de cours entre deux cotations, le cours final en date T est

$$S(T) = S(0) + \sum_{i=1}^{N_t} \Delta S_i \quad (1)$$

et le volume total de titres échangés entre les dates 0 et T est

$$V(T) = \sum_{i=1}^{N_t} v_i \quad (2)$$

Dans la description statistique des fluctuations boursières, on se trouve donc en présence de trois processus différents :

- Le processus $\{S(t), t \geq 0\}$ du cours de l'actif entre les dates 0 et T , ou processus du prix de l'échange.
- Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ du nombre de cotations entre les dates 0 et T , qui est un processus de *comptage d'échanges* : à une date $t \in [0, T]$ donnée, il y a eu $N(t)$ cotations (ou $N(t)$ échanges) depuis la date $t = 0$.
- Le processus $\{V(t), t \geq 0\}$ du nombre de titres échangés entre les dates 0 et T , qui est un processus de *comptage de titres* : à une date $t \in [0, T]$ donnée, il y a eu $V(t)$ titres échangés depuis la date $t = 0$.

Le cours coté en date T est donc la résultante de trois facteurs, ou trois processus : le processus des échanges, celui des variations de cours, et celui des volumes. Le cours en date T est issu de l'effet *simultané* de ces trois facteurs.

On choisit en général d'aborder l'analyse statistique des fluctuations boursières au moyen de la description des seules variations de cours cotés S_i , sans l'intégration des volumes échangés v_i . Ce choix représente une opération intellectuelle de *filtrage* ou de *reconstruction* de la réalité boursière, qui comporte le risque d'évacuer une dimension importante de la dynamique des cours boursiers, l'impact des volumes d'échange et de la durée entre chaque échange. Cependant, si le marché est complet, le cours coté devient une statistique suffisante et le volume des échanges n'est pas alors nécessaire. Ce qui revient à dire que le choix de la description statistique des variations boursières au moyen du seul cours correspond à une hypothèse implicite sur la complétude du marché.

A partir des données de base que sont les cours cotés sur la période $[0, T]$, on s'intéresse à deux quantités lorsque l'on cherche à décrire statistiquement les variations boursières :

1. le *gain boursier* (ou la perte) réalisé sur l'actif entre les dates 0 et T , défini par

$$G(T) = S(T) - S(0) \quad (3)$$

2. le *taux de rentabilité boursière continu* de l'actif entre les dates 0 et T , défini par

$$R(T) = \ln S(T) - \ln S(0) \quad (4)$$

Il s'agit pour un investisseur de la rentabilité résultant de la détention de l'actif considéré entre les dates 0 et T , c'est-à-dire de la rentabilité totale, ou cumulée, de l'actif depuis son achat. Lorsque la durée de détention est brève, on a

$$R(T) = \ln \frac{S(T)}{S(0)} = \ln \left(1 + \frac{S(T) - S(0)}{S(0)} \right) \simeq \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}$$

qui est le *taux de rentabilité boursière* classique de l'actif entre les dates 0 et T

En analysant les fluctuations boursières, on voit que l'on peut aussi bien examiner les gains que les rentabilités (identiques à une constante $S(0)$ près).

Dans la description statistique des variations boursières, on s'intéresse aux évolutions des quantités (3) et (4) sur des sous-périodes successives. Soit une sous-période de durée τ . Pour faire apparaître ce caractère périodique, qui n'est rien d'autre qu'un accroissement (positif ou négatif) de la rentabilité totale, on utilise la notation Δ , et on définit, le taux de rentabilité périodique sur une sous-période τ comme la quantité

$$\Delta R(t, \tau) = \ln S(t) - \ln S(t - \tau) = R(t) - R(t - \tau) \quad (5)$$

2.2 Les constitution des échantillons : temps et échelles

2.2.1 Le choix de la mesure du temps, le temps de l'horloge et le temps de l'échange

Le choix de la mesure du temps Pour l'analyse statistique des fluctuations boursières, il s'agit ensuite de prélever un *échantillon* de cours cotés entre les dates $t = 0$ et $t = T$ parmi la multitude des cours disponibles. Pour l'obtention d'un tel échantillon de cours, on découpe l'intervalle $[0, T]$ au moyen de plusieurs dates intermédiaires t_k , $k = 1, \dots, n$, telles que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. A chaque date t_k , on relève le cours coté S_{t_k} . On obtient alors un échantillon de taille $n + 1$ des cours $\{S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_n}\}$, ou un échantillon de taille n des rentabilités $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$. La modélisation des variations boursières revient à faire l'hypothèse que S_t est une *variable aléatoire* : la suite des cours cotés $S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}$ est alors considérée comme un ensemble de valeurs à certaines dates t d'un processus aléatoire en temps continu $\{S_t, t \geq 0\}$. L'analyse statistique de l'échantillon $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ permettra de valider ou non le modèle choisi.

Avec cet échantillon, on calcule alors des variations boursières périodiques de l'actif, c'est-à-dire prises entre deux dates successives, et l'on a, pour tout k , la rentabilité périodique

$$\Delta R_k = \ln S_{t_k} - \ln S_{t_{k-1}} \quad (6)$$

Lorsque les données sont relevées en haute fréquence, ΔR_k est "petit" et on a

$$\Delta R_k \simeq \frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \quad (7)$$

et l'on peut mesurer indifféremment la rentabilité périodique par l'une ou l'autre expression. Pour toute partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$, on obtient alors pour tout actif examiné un échantillon de taille n des valeurs de ses rentabilités périodiques, $\{\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_n\}$.

Le choix des dates t_k peut s'effectuer selon trois possibilités : entre deux cours S_{t_k} qui vont servir au calcul de la rentabilité, on peut avoir

- soit un nombre constant d'unités de temps,
- soit un nombre constant de titres échangés,
- soit un nombre constant d'échanges.

c'est-à-dire que la durée entre deux données S_{t_k} est définie en fixant soit

- le temps de l'horloge : $t_k - t_{k-1} = \tau$ pour tout k
- le volume des échanges : $V(t_k) - V(t_{k-1}) = v$ pour tout k
- le nombre des échanges : $N(t_k) - N(t_{k-1}) = N$ pour tout k .

Le temps de l'horloge Dans le cadre d'analyse en temps de l'horloge, on fixe l'intervalle de temps séparant deux dates t_k et t_{k-1} : $\tau = t_k - t_{k-1}$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Cela signifie que l'on relève les cours selon une fréquence d'observation fixe, autrement dit, cela revient à subdiviser la période $[0, T]$ en n sous-périodes de longueur τ (soit $T = n\tau$). La durée τ est appelée le *temps caractéristique* d'observation du marché, ou *échelle de résolution* de l'analyse statistique des variations boursières. Cette durée τ peut être indifféremment 1 jour, 1 semaine, 1 mois, mais aussi 1 heure, 1 minute, ou tout autre intervalle de temps. Dans ce cas, $t_k = k\tau$ et la rentabilité périodique est correspond à celle de la durée τ . On examinera ainsi les rentabilités horaires, quotidiennes, mensuelles, trimestrielles etc.

A leurs débuts, en raison de l'absence d'accès simple aux données de cotation (les systèmes SuperDOT à New York ou SuperCAC à Paris sont relativement récents), les travaux économétriques ont utilisé les données correspondant au temps de l'horloge en fixant l'échelle de résolution à une durée τ qui fut d'abord (en général) trimestrielle, puis mensuelle. A partir des années 80, les données de haute fréquence et l'accroissement de la puissance informatique des moyens de calcul permirent d'analyser les marchés en fréquence hebdomadaire, puis quotidienne, puis intraquotidienne, puis cotation par cotation, ce qui ouvrit la voie à l'analyse en temps déformé. Sur un siècle, entre 1900 et 2000, l'ordre de grandeur de la taille des échantillons statistiques utilisés dans l'analyse des fluctuations boursières a augmenté de plusieurs puissances de dix. Les premiers tests statistiques réalisés sur les marchés utilisaient environ une centaine de données. Dans les années soixante, la taille des échantillons passa à environ 1000 données. Puis les années quatre-vingt virent l'apparition d'échantillons d'environ 100 000 données. Les plus récentes investigations examinent environ 1 million de données. Ce qui représente une progression de 10^2 à 10^7 .

L'*agrégation temporelle* des rentabilités s'effectue en rapprochant les expressions (4) et (5) :

$$R_n = \sum_{k=1}^n \Delta R_k \quad (8)$$

qui est une relation de *changement d'échelle* des rentabilités. Cette équation (8) montre que la rentabilité à l'échelle T est la somme des rentabilités aux échelles τ : le changement d'échelle sur les rentabilités se traduit par l'addition des variables aléatoires. On voit donc poindre ici les règles de l'arithmétique des variables aléatoires et le théorème central limite.

Le temps des échanges Dans les deux cas où le temps choisi comme pertinent pour l'analyse statistique n'est pas le temps de l'horloge mais le temps des échanges, les rentabilités boursières périodiques obtenues ne correspondent pas à des détentions de titres de durée identique, mais à des détentions sur

une durée modifiée, durée pondérée par une quantité de titres ou d'échanges. Ces cas correspondent à l'utilisation d'un temps opérationnel des échanges, ou temps déformé, appelé selon les chercheurs "temps intrinsèque", "temps boursier", "temps multifractal", "temps-volume", ou "temps-information". Dans cette approche, la durée du temps de l'horloge est altérée par une quantité qui mesure le niveau de l'activité boursière (nombre de titres ou nombre d'échanges) et tout se passe comme si l'intensité des échanges contractait ou dilatait le temps de l'horloge. Ce type d'analyse en temps déformé permet, entre autres possibilités, de tester les théories de la microstructure des marchés apparues à la suite des travaux de Kyle [1985].

2.2.2 Le choix de l'échelle de résolution et l'hypothèse i.i.d.

La question du choix de l'échelle de résolution Si l'on choisit une description statistique en temps de l'horloge, donc à échelle de résolution fixe, la question qui se pose immédiatement après cette décision initiale est celle du choix de l'échelle de résolution τ : faut-il privilégier une échelle particulière? Existe-t-il une échelle plus pertinente que les autres pour capter au mieux la structure statistique des fluctuations boursières ou au contraire est-il indifférent de choisir l'une ou l'autre échelle? Faut-il examiner les variations horaires, quotidiennes, hebdomadaires, mensuelles etc.? Dans de nombreux domaines, l'analyse des phénomènes cherche des échelles caractéristiques (d'espace, de temps etc.), qui seront ensuite utilisées comme références pour les autres mesures. Une analyse statistique sur plusieurs échelles des variations boursières semble donc à première vue inévitable si l'on ne veut pas perdre d'information sur le comportement du marché à chaque échelle.

En effet, on peut considérer que chaque échelle de résolution correspond à un temps caractéristique d'un phénomène financier donné : la haute fréquence étant le domaine des opérateurs de salle de marché (les traders) et la basse fréquence celui des gérants de portefeuille ou de compagnie d'assurance. Si l'on conçoit chaque échelle de temps comme représentant un horizon de mesure de risque pour une catégorie donnée d'opérateurs, il n'y a apparemment pas de raison particulière pour que le risque du trader et celui du gérant de portefeuille soient modélisables par la même loi de probabilité, et donc que la description statistique des fluctuations boursières horaires, utile pour le trader, convienne au gérant de portefeuille et réciproquement. : le risque du trader et le risque du gérant ne sont apparemment pas de même nature, et il serait donc nécessaire de les modéliser indépendamment.

C'est Mandelbrot qui, en 1962, introduisit l'idée d'une *analyse simultanée sur plusieurs échelles*, afin de comparer les distributions des rentabilités périodiques $\Delta R(t, \tau)$ selon ces différentes échelles τ . Mais, contrairement à la recherche d'une échelle caractéristique, Mandelbrot cherchait à mettre en évidence une *invariance par changement d'échelle* sur les rentabilités périodiques $\Delta R(t, \tau)$, ce qui est appelé une *structure fractale du marché*, ou encore une *loi d'échelle* sur les rentabilités. Cette idée de structure fractale peut se comprendre de deux manières différentes :

- Soit on la perçoit comme une "non propriété" : l'absence d'échelle caractéristique. Cela revient à dire que, pour caractériser le risque d'un marché boursier, toutes les échelles de temps interviennent simultanément et l'on ne peut pas détecter d'échelle privilégiée pour son observation statistique.
- Soit on l'interprète comme la trace, la "signature" de l'existence d'une organisation forte dans les données et le système boursier : dans ce cas, au contraire la présence d'une loi d'échelle est particulièrement importante pour la compréhension du fonctionnement du marché.

D'un point de vue statistique, la mise en évidence d'une telle loi est très économe car elle permet de décrire les fluctuations à toutes les échelles de résolution à partir d'une seule échelle arbitrairement choisie.

L'importance de l'hypothèse i.i.d. On se place en temps de l'horloge et on considère un temps caractéristique τ d'observation d'une série boursière sur une période totale de durée $T = n\tau$. Les rentabilités périodiques $\Delta R(t, \tau)$ dépendent du choix de l'échelle de résolution τ . Sur la période d'observation $[0, T]$, l'on obtient un échantillon de taille n de la rentabilité périodique de l'action : $\{\Delta R_1^\tau, \Delta R_2^\tau, \dots, \Delta R_n^\tau\}$.

On rappelle l'équation (8) de changement d'échelle des rentabilités

$$R(T) = R_n^r = \sum_{k=1}^n \Delta R_k^r$$

et l'on s'interroge sur la loi de distribution de $R(T)$.

Considérons un exemple simple sur les rentabilités quotidiennes ΔR_k d'un actif, et sa rentabilité sur 2 jours, notée R_2 . Il est clair que l'on a

$$R_2 = \Delta R_1 + \Delta R_2$$

Soient $P_1 = P(\Delta R_1)$ et $P_2 = P(\Delta R_2)$ les lois de probabilité de ΔR_1 et ΔR_2 , et soit $P = P(R_2)$ la loi de probabilité de R_2 . Il vient de la relation précédente que $P(R_2)$ est la loi de probabilité de la somme $\Delta R_1 + \Delta R_2$. On cherche à définir cette loi de probabilité. Pour cela, cherchons la probabilité pour que R_2 soit égale à un niveau de rentabilité fixé, par exemple $\Pr(R_2 = 3\%)$. D'après la définition de R_2 , on a

$$\Pr(R_2 = 3\%) = \Pr(\Delta R_1 + \Delta R_2 = 3\%)$$

On voit que ceci peut être obtenu par toutes les combinaisons de type $\Delta R_1 = x\%$ et $\Delta R_2 = 3 - x\%$, soit

$$\Pr(R_2 = 3\%) = \sum_x (\Pr \Delta R_1 = x\% \text{ et } \Delta R_2 = 3 - x\%)$$

pour toute valeur arbitraire de x . Trois possibilités existent alors :

1. Si les rentabilités ΔR_k ne sont ni indépendantes, ni stationnaires, il est nécessaire de connaître la loi conjointe du couple $(\Delta R_1, \Delta R_2)$ pour pouvoir obtenir la valeur de $\Pr(R_2 = 3\%)$.
2. Si les rentabilités ΔR_k , sont indépendantes, tout en restant non stationnaires, l'opération se simplifie. En effet, si deux événements A et B sont indépendants, $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$. Donc si les rentabilités successives ΔR_k sont indépendantes, on a

$$\Pr(R_2 = 3\%) = \sum_x (\Pr(\Delta R_1 = x\%) \times \Pr(\Delta R_2 = 3 - x\%))$$

Dans ce cas, la valeur de $\Pr(R_2 = 3\%)$ est obtenue par produit de convolution entre les lois de ΔR_1 et ΔR_2 , soit

$$P = P_1 \otimes P_2$$

où \otimes représente l'opérateur de convolution.

3. Si les rentabilités successives sont non seulement indépendantes, mais aussi stationnaires, alors $P_1 = P_2$ et dans ce cas, l'opération de convolution revient à convoluer la loi de probabilité 2 fois avec elle-même :

$$P = P_1 \otimes P_1 = P_1^{\otimes 2}$$

La généralisation de l'exemple précédente à n périodes est immédiate. Soit $P(\Delta R(t, \tau))$ la loi de probabilité de la rentabilité périodique $\Delta R(t, \tau)$, et $P(R(T))$ celle de la rentabilité sur la période totale $T = n\tau$. Il vient de la relation (8) que :

1. Rentabilités ni indépendantes ni stationnaires : dans ce cas, il est nécessaire de connaître la loi conjointe du n -uplet $\{\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_n\}$ pour l'obtention de la loi de R_n .
2. Rentabilités indépendantes mais non stationnaires : on applique le produit de convolution et

$$P = P_1 \otimes P_2 \otimes \dots \otimes P_n$$

3. Rentabilités indépendantes et stationnaires : l'opération de convolution revient à convoluer la loi n fois avec elle-même :

$$P = P_1^{\otimes n} \tag{9}$$

Ce développement montre l'importance de l'hypothèse i.i.d. pour l'analyse statistique des marchés boursiers. L'hypothèse i.i.d. permet un passage aisé de la distribution des rentabilités à une échelle donnée à celle des rentabilités à une autre échelle, par exemple le passage des rentabilités hebdomadaires aux rentabilités mensuelles. Si l'hypothèse i.i.d. des accroissements $\Delta R(t, \tau)$ est vérifiée, alors la seule connaissance de la loi de base suffit. Plus généralement, grâce à l'hypothèse i.i.d., le passage d'une échelle de résolution donnée à une autre échelle k fois supérieure se fait simplement par la relation

$$P(\Delta R(t, k\tau)) = P(\Delta R(t, \tau))^{\otimes k}$$

L'hypothèse i.i.d. facilite donc grandement le calcul de la distribution de $R(T)$ et, en ce sens, on peut dire que l'un des intérêts principaux de cette hypothèse est essentiellement calculatoire.

2.2.3 L'invariance d'échelle et le modèle standard des fluctuations boursières

Processus H -asas et α -stables Dans le cas d'une invariance par changement d'échelle, les relations de changement d'échelle se simplifient encore davantage, de la manière suivante. Si $P(\Delta R(t, \tau))$ est la distribution de probabilité des rentabilités périodiques $\Delta R(t, \tau)$, la relation (9) devient

$$P = P_1^{\otimes n} = n^H P_1 \quad (10)$$

où H est un exposant d'autosimilarité. Cette nouvelle relation revient à énoncer que le processus des rentabilités $\{R(t), t \geq 0\}$ est autosimilaire d'exposant H à accroissements stationnaires, ou H -asas, c'est-à-dire que, si $R(\tau)$ est la rentabilité sur l'échelle de résolution de base, on a pour tout $T = n\tau$

$$R(T) = R(n\tau) \equiv n^H R(\tau) \quad (11)$$

où \equiv symbolise l'égalité en distribution.

Cette relation (11) montre que la distribution de la rentabilité R à horizon long terme T s'obtient directement à partir de la distribution de la rentabilité R sur le pas de temps de base d'observation, ou horizon court terme τ : il devient possible d'estimer la loi de probabilité pour un horizon long à partir de l'étude des fluctuations boursières sur un horizon court et réciproquement. Autrement dit, en observant le marché à n'importe quelle échelle, on accède à sa structure comportementale fondamentale : la loi de probabilité qui caractérise les fluctuations boursières est indépendante de l'échelle de ces fluctuations.

Cette absence d'échelle d'observation privilégiée, de temps caractéristique discriminant, pour l'observation et la description statistiques d'un marché est l'une des conséquences importantes de l'hypothèse fractale : *l'information acquise sur le comportement du marché est indépendante de la résolution à laquelle sa mesure est effectuée*. Cette propriété fondamentale est massivement utilisée dans le modèle standard des variations boursières dans lequel $H = 1/2$.

Si les accroissements $\Delta R(t, \tau)$ sont i.i.d., l'hypothèse fractale se confond avec la propriété de stabilité par addition au sens de Lévy, et, dans ce cas, on a $H = 1/\alpha$ où α est l'exposant caractéristique des lois α -stables⁴. Le mouvement α -stable correspond au mouvement brownien lorsque $\alpha = 2$.

Le modèle standard des variations boursières Le modèle standard des variations boursières définit la dynamique du cours sous sa forme de l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \quad (12)$$

⁴Ne pas confondre processus de Lévy et mouvement α -stable. Un processus de Lévy est un processus à accroissements i.i.d. Les mouvements α -stables sont des processus de Lévy particuliers, qui sont "stables par addition", c'est-à-dire "fractals" au sens de Mandelbrot. Les processus de Lévy non stables sont à accroissements i.i.d., mais non fractals.

où W_t est un mouvement brownien standard, c'est-à-dire avec $W_0 = 0$, $E(W_1) = 0$ et $E(W_1^2) = 1$, équation qui admet pour solution

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right) \quad (13)$$

qui définit un mouvement brownien géométrique sur les cours des actifs. On l'appelle aussi le modèle Log-normal car il implique que les rentabilités périodiques $\Delta R(t, 1) = (\mu - \sigma^2/2) + \sigma(W_t - W_{t-1})$ sont i.i.d.-normales de variance σ^2 , et que les rentabilités $\Delta R(t, \tau) = (\mu - \sigma^2/2)\tau + \sigma(W_t - W_{t-\tau})$ sont i.i.d.-normales de variance $\sigma^2\tau$. Dans le modèle standard, on suppose donc en général en première approximation que le processus $\{R(t), t \geq 0\}$ de la rentabilité de l'actif examiné est un mouvement brownien.

Les rentabilités périodiques successives étant indépendantes et stationnaires (i.i.d.), avec $\alpha = 2$ et $H = 1/2$, on peut donc énoncer que le modèle standard des variations boursières est un modèle de type i.i.d.-2-stable, autrement dit : le modèle standard des fluctuations boursières fait l'hypothèse que le processus $\{R_t, t \geq 0\}$ est un processus 1/2-autosimilaire 2-stable, ou encore un processus fractal d'exposant d'autosimilarité 1/2. Ainsi par exemple, dans le modèle standard, le passage de la distribution des rentabilités quotidiennes ($\tau = 1$ jour) aux rentabilités hebdomadaires ($k = 5$) sera décrit par la relation

$$P(\Delta R(t, 1 \text{ semaine})) = P(\Delta R(t, 5 \text{ jours})) = P(\Delta R(t, 1 \text{ jour}))^{\otimes 5} = \sqrt{5} P(\Delta R(t, 1 \text{ jour}))$$

Financièrement, l'indépendance des accroissements s'interprète comme le fait que les rentabilités périodiques successives ΔR_k s'apparentent à des tirages aléatoires avec remise, c'est-à-dire que le processus des accroissements $\{\Delta R_k, k \in \mathbf{N}\}$ est un processus *sans mémoire*. Autrement dit, l'hypothèse d'indépendance correspond à une compréhension des variations boursières dans laquelle *aucun effet d'élan, de mémoire, n'existe sur le marché*. L'hypothèse de stationnarité exprime le fait que les caractéristiques probabilistes de la variable aléatoire ΔR ne varient pas (ou "pas trop") au cours du temps.

type de modèle	opération de changement d'échelle	agrégation temporelle (loi somme)
modèle standard	invariance d'échelle	$P = \sqrt{n} P_1$
i.i.d.- α -stable	invariance d'échelle	$P = n^{1/\alpha} P_1$
i.i.d. non stable	produit de convolution	$P = P_1^{\otimes n}$
i. non i.d.	produit de convolution	$P = P_1 \otimes P_2 \otimes \dots \otimes P_n$
i.d non i.	loi conjointe	$P = ?$

TAB. 1 – Les descriptions statistiques des fluctuations boursières à plusieurs échelles.

Econométriquement, une fois obtenu un échantillon de taille n des rentabilités périodiques ΔR_k , on écrira le modèle standard sous la forme

$$R_k = R_{k-1} + \mu \Delta t_k + \varepsilon_k \quad R_0 = 0$$

avec ε_k i.i.d.-gaussiens et plus précisément

$$\varepsilon_k = \sigma u_k \sqrt{\Delta t_k}$$

où u_k suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ avec les u_k i.i.d., et où μ et σ représentent les rentabilité espérée et volatilité de l'actif. On peut normaliser l'écriture en posant par convention $\Delta t = 1$, ce qui conduit à

$$R_k = R_{k-1} + \mu + \varepsilon_k \quad R_0 = 0 \quad (14)$$

Cette équation (14) définit identiquement une *marche au hasard gaussienne avec dérive* μ sur les rentabilités R_k et représente le *modèle de base* de l'analyse économétrique des séries financières. Tous les tests statistiques entrepris à partir des années trente s'intéresseront à la condition i.i.d.-normale sur les termes ε_k . Lorsqu'apparaîtront des violations de cette condition i.i.d.-normale, on cherchera progressivement à spécifier de plus en plus précisément la forme de la relation entre R_k et R_{k-1} afin de parvenir à retrouver un bruit blanc gaussien sur ε_k .

3 La formation du modèle standard des fluctuations boursières

3.1 L'introduction du mouvement brownien en finance

3.1.1 Regnault et Bachelier (1863 – 1900)

Cette propriété fractale du mouvement brownien (qui représente une caractéristique fractale du modèle standard) fut découverte avant ses aspects trajectoriels. En effet, l'une des conséquences de cette propriété est directement perceptible sur les paramètres caractéristiques des distributions marginales, en particulier sur les moments. Notons $\sigma(\tau)$ l'écart-type des rentabilités périodiques successives ΔR_k^τ , où la présence de l'échelle de résolution τ rappelle que la valeur de l'écart-type est fonction de cette échelle. Si le processus $\{R_t, t \geq 0\}$ est 1/2-autosimilaire 2-stable, on doit avoir par définition

$$\sigma(n\tau) = n^{1/2}\sigma(\tau) \quad (15)$$

qui représente l'exacte transposition en termes de moments de la relation (11) définie en termes de distributions pour une valeur $H = 1/2$:

$$R(n\tau) \equiv n^{1/2}R(\tau) \quad (16)$$

si ce n'est que, entre les deux expressions (15) et (16), il s'écoule près d'un siècle. Cette relation s'exprime aussi en terme de ratio

$$\frac{\sigma(n\tau)}{\sigma(\tau)} = \sqrt{n}$$

qui constitue la relation de base des tests de ratio de variance dans la littérature économétrique, qui est une relation de dilatation (ou de contraction) du risque (mesuré par la volatilité) selon l'horizon de temps (voir plus bas partie 5.3.1).

Il semble que cette *loi de dilatation* sur l'écart-type des variations boursières successives ait été pré-supposée par Jules Regnault dès 1863 sur les cours (et non les rentabilités), dans un ouvrage publié mais oublié sur "La science de la bourse". La redécouverte de l'ouvrage de Regnault puis l'exploitation des archives relatives à cet ouvrage dans des travaux récents⁵ laisse supposer⁶ que Regnault aurait établi une relation de type (15) sur l'écart-type des variations boursières. Jovanovic [2000] et Jovanovic et Le Gall [2002] citent ainsi le passage clé de Regnault [1863] :

"Il existe donc une loi mathématique qui règle les variations et l'écart moyen des cours de la bourse [...]. Nous la formulons ici pour la première fois : l'écart des cours est en raison directe de la racine carrée du temps".

Mais la manière dont Regnault parvient à ce résultat n'est pas claire, et il semble qu'il commette la même erreur que Cowles et Jones [1937] dans leur test de l'inertie des variations boursières (voir annexe A.6). La question de l'apport exact de Jules Regnault à la modélisation financière est laissée pour un travail ultérieur.

Puis en 1900, par une voie d'analyse totalement différente, dans sa thèse de doctorat soutenue le 29 mars 1900 à Paris, Louis Bachelier [1900] propose une modélisation des variations boursières qui se traduit aussi par "la loi en racine carrée du temps"⁷. Au sens strict de sa définition, Bachelier ne

⁵Voir Jovanovic [2000] et Jovanovic et Le Gall [2002] pour plus détails.

⁶Sous réserve d'une investigation plus précise du texte de Regnault. En effet, l'absence de toute forme de modélisation dans les travaux de Jules Regnault (voir Jovanovic [2000] pour une explication à cette absence) empêche de positionner clairement cet apport.

⁷Sur ce sujet, outre la thèse elle-même de Bachelier, remarquablement moderne, on pourra consulter la biographie de Bachelier établie par Courtault *et al.* [2002], la mise en perspective du travail probabiliste de Bachelier dans le contexte de son époque faite par Taqqu [2002], la relecture financière de Bachelier dans Walter [1996], et la place de la thèse de Bachelier dans son projet probabiliste global dans Jovanovic [2000].

pouvait connaître le mouvement brownien puisqu'il sera formalisé par Einstein en 1905 et Wiener en 1923. Mais, dans la mesure où il suppose que les variations successives des cours sont indépendantes, de distribution gaussienne et de variance linéairement proportionnelle à l'intervalle de temps, cela revient de fait à décrire l'une des propriétés fractales du mouvement brownien. C'est dans ce sens que l'on peut considérer que Bachelier est un précurseur du modèle standard de la finance moderne, bien qu'il n'ait aucune préoccupation trajectorielle.

En termes contemporains, on pourrait écrire le modèle de Bachelier au moyen de l'équation

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t \quad (17)$$

où W_t est un mouvement brownien standard, avec $W_0 = 0$, $E(W_1) = 0$ et $E(W_1^2) = 1$.

La relecture de la thèse de Bachelier laisse apparaître une incertitude sur la formule choc qu'il pose au début : "l'espérance mathématique du spéculateur est nulle". Au sens strict de cette assertion, on devrait apparemment écrire l'équation (17) comme

$$S_t = S_0 + \sigma W_t$$

sans le terme de dérive μ . En réalité, Bachelier considère les cours de la rente obligataire qu'il appelle "vrais" : les cours vrais au sens de Bachelier sont les cours qui correspondent à des cours d'obligations dont on dirait aujourd'hui qu'ils sont "pied de coupon"⁸. Il est donc nécessaire de retirer le terme de dérive μ pour écrire que

$$S_t - \mu t = S_0 + \sigma W_t$$

et la dynamique du cours réel est donc bien celle d'un mouvement brownien avec dérive μ .

3.1.2 Osborne, Mandelbrot et Samuelson (1959 – 1965)

L'on voit cependant que, dans le modèle de Bachelier, le cours peut devenir négatif. C'est la raison pour laquelle, en 1959, dans un article consacré à la description du mécanisme des variations boursières, Osborne [1959] remplace l'analyse des variations ΔS des cours par celle des variations ΔR des rentabilités continues, et montre que

"les cours cotés sur les marchés peuvent être assimilés à un ensemble de résultats d'un équilibre statistique, dont les caractéristiques sont analogues à celles d'un ensemble de particules en mécanique statistique. Si $\Delta R(t, \tau) = \ln(S(t)/S(t - \tau))$ où $S(t)$ et $S(t - \tau)$ sont les prix d'une action aux instants t et $t - \tau$, alors la fonction de densité de $\Delta R(t, \tau)$ sera précisément celle d'une particule animée d'un mouvement brownien".

Osborne introduit donc le mouvement brownien sur les logarithmes des cours. Mais il montre également que la distribution $\Delta R(t, \tau)$ a une espérance nulle, ce qui conduit à une absence du terme de dérive μ et à une modélisation pour la dynamique du cours de type

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t) \quad (18)$$

où W_t est un mouvement brownien standard. On voit que, par rapport à Bachelier, Osborne introduit l'exponentielle de mouvement brownien, mais perd le terme de dérive. Ce qui revient à faire l'hypothèse que "l'espérance mathématique du spéculateur est nulle" (au sens de Bachelier), mais sur les cours réels et non les cours déflatés.

Il revient à Mandelbrot en 1962 et à Samuelson en 1965, d'introduire simultanément dans la modélisation boursière les logarithmes des cours avec une dérive non nulle (Mandelbrot [1962], Samuelson

⁸Voir Walter [1996] pour davantage de précisions sur la notion de cours vrai, qui correspond à un cours déflaté.

auteurs	année	EDS	dynamique du cours
Bachelier	1900	$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$	$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$
Osborne	1959	$dS_t = S_t (\sigma^2/2 dt + \sigma dW_t)$	$S_t = S_0 \exp \sigma W_t$
Samuelson	1965	$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t)$	$S_t = S_0 \exp \{ (\mu - \sigma^2/2) t + \sigma W_t \}$

TAB. 2 – L'évolution de la modélisation boursière en temps continu (1900 – 1965)

[1965a]). Dans les deux cas, et ceci est tout à fait remarquable compte tenu de la date à laquelle cette modélisation est proposée, Mandelbrot comme Samuelson ne s'arrêtent pas sur le seul mouvement brownien, mais proposent directement des généralisations par des processus de Lévy, α -stables pour Mandelbrot, généraux non stables pour Samuelson. Ils décrivent la dynamique du cours boursier comme

$$S_t = S_0 \exp(L_t) \quad (19)$$

où L_t est un processus de Lévy quelconque.

Du point de vue du modèle standard sous sa forme contemporaine, on le trouve explicitement décrit chez Samuelson [1965a], qui ajoute le terme de dérive μ au modèle d'Osborne (qu'il critique assez durement par ailleurs) pour parvenir à la dynamique du cours qui est celle du modèle standard

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \right)$$

En 1965, le modèle standard des fluctuations boursières est formé et, pourrait-on dire, figé pour longtemps. Il faudra attendre les années quatre-vingt dix (voir plus bas partie 5.2.4) pour généraliser le modèle standard au moyen des processus de Lévy, et redécouvrir ce qui était contenu dans l'article de Samuelson. Quant à l'hypothèse de Mandelbrot, elle aura entretemps fait l'objet de controverses passionnées qui lanceront la recherche sur la voie des dépendances non linéaires des variations boursières (voir plus bas partie 5.2.1).

Comme le modèle standard est souvent défini par l'équation différentielle stochastique (12) que l'on réécrit

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t)$$

on a également écrit le modèle d'Osborne sous la forme d'une équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t ((\sigma^2/2) dt + \sigma dW_t)$$

afin de pouvoir comparer les trois modèles de Bachelier, Osborne et Samuelson. Le tableau 2 positionne ces trois modèles caractérisant la dynamique des cours boursiers. L'annexe A.2 précise le passage du modèle standard à la propriété de martingale sur les prix actualisés⁹.

3.2 La validation du modèle de marche au hasard (1933 – 1973)

Les axes principaux du déroulement des tests ayant été présentés dans Walter [1996], on veut seulement ici compléter cette étude précédente en développant plus précisément deux aspects :

- la mise en évidence de la portée du type de tests effectués quant à la forme de validation du modèle de marche au hasard qu'elle implique, ceci au moyen de l'introduction d'une fonction générale de dépendance entre deux variables aléatoires, qui permet de périodiser de manière simple l'ensemble des tests sur un siècle,

⁹Voir aussi Mandelbrot (1966) et Samuelson (1965b, 1973) pour la justification des modèles de martingales au moyen d'une équation d'arbitrage utilisant la valeur actuelle de flux futurs espérés pour un actif donné.

- la réfutation heuristique des méthodes graphiques de l’analyse technique par l’utilisation de simulations de Monte Carlo, comme chez Working et Roberts, en situant la source de l’erreur interprétative commise par les analystes graphiques dans un effet trajectorien de la marche au hasard provenant de la loi de l’Arcsinus.

3.2.1 Le programme statistique des années trente et la typologie des tests

Comme le rappelle Cootner [1964, p. 79], dans un texte qui évoque le parcours de la recherche statistique sur les variations boursières,

“malgré cet intérêt précoce pour l’analyse des variations boursières en termes de processus aléatoires, et malgré les études de Working dans les années 20, la recherche de la formalisation probabiliste des marchés fut très longue à démarrer. Alors même que les professionnels des marchés s’intéressaient aux mouvements boursiers, les universitaires ne considéraient pas ce sujet avec attention, et cette recherche marqua une pause jusqu’au krach boursier de 1929”.

La création de la commission Cowles relança les travaux statistiques sur l’étude des fluctuations boursières, et des tests systématiques furent alors entrepris sur les marchés. Le point de départ de l’analyse économétrique est l’étude de la série chronologique issue des valeurs du processus $\{R_t, t \geq 0\}$. On fixe une échelle de résolution τ et l’on obtient un échantillon de taille n des rentabilités périodiques $\{\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_n\}$ sur lesquelles on applique des tests statistiques. Les tests examinèrent la question de la prévisibilité boursière en suivant trois directions principales :

- des tests d’autocorrélation des variations boursières successives,
- des tests de détections d’élans de marché,
- des tests de résultats de méthodes diverses utilisées pour “battre le marché”.

De fait, “battre le marché” a représenté une préoccupation constante des professionnels, et l’on peut citer Campbell *et al.* [1997, p. 27] pour illustrer cette tendance :

“L’une des questions les plus anciennes comme les plus persistantes de la finance est celle de la prévisibilité des cours boursiers. Les modèles mathématiques qui ont été développés pour aborder cette interrogation ont une histoire très ancienne, dont l’origine est bien antérieure à celle des autres domaines de l’analyse économique, car elle plonge ses racines dans une autre histoire, celle des jeux de hasard, et ceci vraisemblablement à cause de l’analogie entre la bourse et les jeux de hasard. Si l’on ajoute à cela la fascination qu’a exercé la modélisation financière sur quelques uns parmi les plus brillants des mathématiciens probabilistes, on mesure l’enjeu du défi intellectuel représenté par cette question. De fait, les principes fondamentaux de la modélisation financière moderne restent profondément enracinés dans les premiers modèles développés pour essayer de “battre le marché”, espoir qui, s’il n’a pas abouti en tant que tel, est toujours l’objet de nombreuses discussions dans les milieux financiers, que ce soit dans des articles, des journaux, des conférences, ou même dans des cocktails!”

Dans la formation du paradigme statistique-probabiliste en finance de marché, plusieurs types de tests ont donc été entrepris pour valider l’hypothèse de marche au hasard, mais ces tests ne vérifiaient pas les mêmes caractéristiques des modèles. On peut établir une typologie de ces tests au moyen de l’introduction d’une fonction générale de dépendance : si les fluctuations boursières sont modélisables par marche au hasard avec dérive, alors la mesure de l’interdépendance des variations successives doit faire apparaître un résultat nul. Dans le cas le plus général, la dépendance entre deux variables aléatoires X et Y est mesurée par la quantité

$$C_{f,g}(X, Y) = E(f(X)g(Y)) - E(f(X))E(g(Y))$$

et on a la relation d’orthogonalité : X et Y indépendantes $\iff C_{f,g}(X, Y) = 0$ pour toutes les fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$. Le cas $f(x) = g(x) = x$ correspond à la mesure de covariance usuelle (cas gaussien). Les autres cas incluent toutes les corrélations possibles (non linéaires) entre les variables X et Y .

auteurs	année	test	période	fréquence
Cowles	1933			
Working	1934	cours du blé	1913-1931	hebdomadaire
Kendall	1953	19 indices Inst. Fac. Actuaries	1928-1938	hebdomadaire
Kendall	1953	cours du blé	1883-1934	hebdomadaire
Kendall	1953	cours du coton	1816-1951	hebdomadaire
Osborne	1959	20 actions du NYSE	1924-1956	1 à 12 jours
Roberts	1959	indice DJIA	1956	hebdomadaire
Cowles	1960	indice DJIA	1897-1959	quot., mensuelle
Cowles	1960	indice SP 500	1928-1958	hebdo., mensuelle
Larson	1960	prix du maïs à terme	1922-1931	quotidienne
Alexander	1961	indices de Kendall	1928-1938	1 à 16 semaines
Houthakker	1961	prix à terme : maïs, blé	1921-1939	quotidienne
Cootner	1962	45 actions du NYSE	1956-1960	1 à 16 semaines

TAB. 3 – Les premiers travaux validant le modèle de marche au hasard (1933 – 1962)

Deux rentabilités périodiques successives séparées de h unités de temps, ΔR_k et ΔR_{k+h} , seront indépendantes si et seulement si

$$C_{f,g}(\Delta R_k, \Delta R_{k+h}) = E(f(\Delta R_k)g(\Delta R_{k+h})) - E(f(\Delta R_k))E(g(\Delta R_{k+h})) = 0$$

pour toutes les fonctions f et g . La chronologie de l'étude de la dépendance des variations boursières successives se confond avec les différents choix effectués pour la définition des fonction $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$. La plupart des tests ont été construits avec $f = g$. Dans ce cas, l'étude de l'indépendance des rentabilités périodiques a suivi le chemin de l'analyse de la fonction

$$\begin{aligned} C(h) &= C_{f,f}(\Delta R_k, \Delta R_{k+h}) \\ &= E(f(\Delta R_k)f(\Delta R_{k+h})) - E(f(\Delta R_k))E(f(\Delta R_{k+h})) \end{aligned}$$

selon la fonction $f(\cdot)$ choisie.

Dans les premiers tests, on a choisi $f(x) = x$, et $C(h)$ devient alors la fonction d'autocovariance usuelle

$$C(h) = \gamma(h) = E(\Delta R_k \Delta R_{k+h}) - E(\Delta R_k)E(\Delta R_{k+h}) \quad (20)$$

et l'indépendance des rentabilités périodiques est assimilée à la nullité du coefficient de corrélation linéaire $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$. Ceci ne signifie donc pas nécessairement que les rentabilités périodiques sont indépendantes, mais seulement mais qu'elles sont *linéairement* indépendantes.

Il pourrait cependant exister d'autres formes de dépendances, comme des dépendances non linéaires (cas correspondant aux fonctions $f(x) = x^2$ ou $f(x) = |x|$) qui produiraient des rentabilités périodiques non indépendantes, quoique également non autocorrélées. Ces cas sont intéressants car ils s'inscrivent dans le paradigme de la *non prévisibilité* des variations boursières, quoique ces variations ne sont pas indépendantes. Ainsi, au moment de la crise du paradigme dans les années quatre-vingt, lorsque apparaîtront des difficultés de validation du modèle de marche au hasard et qu'il faudra abandonner l'une ou l'autre de ses hypothèses, seule la forme $f(x) = g(x) = x$ sera finalement rejetée. Par exemple, le courant de représentation ARCH (voir plus loin) se traduit par une indépendance avec $f(x) = x$ et une dépendance avec $f(x) = x^2$. Autrement dit, la mise en évidence d'une indépendance linéaire sur les rentabilités ne donne pas d'information sur l'existence possible d'une dépendance portant sur les volatilités. Le tableau 3 résume les principaux travaux réalisés entre 1933 et 1962.

3.2.2 Les simulations de Monte Carlo et la question de l'analyse technique

L'analyse technique graphique, ou méthode de prévision boursière utilisant des caractérisations visuelles particulières des trajectoires des cours des actifs à des fins de repérage de leur valeur future, est

le démon intellectuel des universitaires, qui y voient davantage la survie à l'état endémique sur les marchés financiers de pratiques gnostiques ou alchimiques, que la mise en oeuvre de méthodes statistiques rigoureuses¹⁰.

On présente ci-après l'une des réfutations les plus classiques de l'analyse technique graphique, celle qui consiste à faire apparaître que les méthodes graphiques ne peuvent pas distinguer entre une série réelle boursière et une série engendrée par des tirages aléatoires i.i.d.-normaux. On ajoute à cette réfutation heuristique un argument de type formel, situant la source de l'illusion graphique dans une loi totalement contre-intuitive de la marche au hasard, mais capitale pour la compréhension de la survenance de pseudo-tendances : la loi de l'Arcsinus. Nous suivons les développements de Working puis de Roberts.

Les travaux de Working (1934 – 1956) Dans un article publié en 1934 dans le Journal of the American Statistical Association (Working [1934]), Holbrook Working propose une construction de série artificielle. L'idée de Working est de comparer les séries chronologiques réelles des marchés à une série artificielle simulée par générateur de nombres aléatoires. Working construit une marche au hasard simple ("cumulated random serie" dans la terminologie de Working) dont le modèle est

$$X_k = X_{k-1} + \varepsilon_k$$

dont il précise que la différenciée d'ordre 1 ("random-difference serie" dans la terminologie de Working), soit $(1 - L)X_k = \varepsilon_k$, est un bruit blanc gaussien. La série $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ produite est composée de 2400 nombres aléatoires provenant des six premières pages des tables de Tippett [1927].

La première utilisation est visuelle et pédagogique. On ne peut qu'être surpris par la capacité de la série différenciée à imiter les fluctuations d'une série économique réelle :

"Une rapide analyse du graphique 1 fait apparaître que 200 à 300 tirages d'un bruit blanc stationnaire, qui seraient analysés comme une très longue série de données économiques annuelles ou mensuelles, pourraient assez facilement être interprétés comme la trace d'un phénomène économique présentant un caractère cyclique irrégulier sur lequel se surajoutent des fluctuations aléatoires." (p. 21)

C'est une fait une illusion d'optique, comme le note Kendall en 1953 :

"Si la série est réellement aléatoire, alors toute configuration présentant une apparence de forme repérable, comme une tendance ou un cycle, est une pure illusion de l'observateur."

Working précise cette idée dans un article ultérieur publié en 1956 :

"En comparant les deux graphiques, le graphique boursier réel et la trajectoire simulée, le lecteur pourra apprécier comme la simulation reproduit bien la réalité. Quoiqu'elle ne soit pas parfaite, cette simulation prendrait en défaut le jugement de quiconque examinerait de près les deux séries, sauf à être lui-même un spécialiste compétent de l'analyse boursière." (p. 1435)

Working pointe ici la propriété des trajectoires des marches au hasard à apparaître comme issues de processus non aléatoires, et plus précisément l'incapacité de l'analyse technique à pouvoir distinguer entre marche au hasard et présence de configurations aux formes caractéristiques apparentes utiles pour la prévision : si ces formes sont bien réelles du point de vue de l'observation, elles ne le sont pas du point de vue de la prévision. Cette conviction est précisée dans l'article de 1956 :

"Beaucoup de configurations particulières étudiées par les analystes techniques [tête-épaule, niveaux de résistance et de soutien, triangle, canal etc.] peuvent être retrouvées en l'état dans une trajectoire artificielle engendrée par des tirages aléatoires gaussiens : nous savons cependant que, en l'occurrence, ils ne signifient rien puisque, précisément, la trajectoire artificielle

¹⁰Certaines méthodes de l'analyse technique s'inspirent directement de la gnose pythagoricienne : pour plus de détails sur ces méthodes et leurs partisans, comme leur opposition violente à l'hypothèse i.i.d., voir Walter [1996].

est issue de tirages aléatoires. Ainsi, nous pensons avoir montré qu’une série totalement artificielle peut être interprétée comme totalement déterminée par des analyses graphiques, et donc que ces formes si particulières apparemment clairement détectées par les analystes graphiques n’ont pas plus de capacité prédictive que les formes changeantes des nuages dans un ciel d’été n’ont de signification sur la course de ces mêmes nuages.” (p. 1436)

La seconde utilisation est de pouvoir tester la théorie économique de formation des prix boursiers que Working propose en 1949, pour l’affiner en 1956 et 1958 (voir plus bas partie 2.3.1). En effet, la série artificielle présente *moins d’erraticité* que la série réelle lorsque apparaissent des variations considérées comme illégitimes (causées par des anticipations inexactes du “vrai” prix du titre). Working désigne ici l’analyse technique et ses pratiques, comme cause possible de variations boursières erratiques et non justifiées. Pour mesurer l’importance de ces amplifications non souhaitées des variations boursières, on peut alors comparer la série réelle à une série artificielle construite adéquatement, qui n’inclut que des variations produites par des causes “bonnes” (au sens de l’article de 1956). Il pose alors la question de la mesure de l’amplitude de l’effet de l’analyse technique :

“Pour moi, il est clair que certaines de ces formes caractéristiques relèvent effectivement d’aspects techniques du marché [par opposition à un mouvement produit par une information exogène]. Mais la question suivante qui vient immédiatement à l’esprit d’un économiste serait : quelle est la part des variations boursières due à cette sorte d’effet ? est-elle importante ou faible ? ”

Et finalement la question centrale rejoint les préoccupations de Hayek [1945] sur la pertinence des prix de marché :

“Les marchés sont-ils de bons indicateurs des prix relatifs à l’activité économique réelle, en tant qu’ils transmettent une information sur cette activité économique, ou bien, au contraire, sont-ils des amplificateurs d’informations sans rapport avec la réalité, qui produisent des grandes fluctuations boursières non souhaitées ? La voie est désormais ouverte pour aborder cette question et tenter d’y répondre de manière définitive.”

Voilà donc à quoi peut servir la simulation de trajectoires boursières.

Working choisit de simuler des trajectoires au moyen d’un bruit blanc gaussien, justifiant son choix par des considérations sur la “supériorité naturelle” de la loi normale et sa “plus grande généralité” :

“En raison de la *supériorité naturelle* (souligné par nous) de la loi normale due à sa grande généralité, il est souhaitable que les valeurs obtenues dans l’échantillon différencié correspondent à des tirages aléatoires gaussiens (p. 16) [...] Il faut noter que ce choix particulier ne représente que l’un des nombreux choix possibles, effectué uniquement en raison de ce qui est supposée être sa *plus grande généralité* (souligné par nous) (p. 24).

L’argument de la “plus grande généralité” de la loi normale, qui fait référence à une utilisation du théorème central limite, peut être utilisé contre le choix de cette loi. En effet, la forme la plus générale du théorème central limite conduit, non à la loi normale, mais aux lois α -stables de Lévy, que Working semble ne pas connaître. Cependant, il admet qu’une autre loi serait conceptuellement envisageable :

“Mais d’autres types de trajectoires pourraient être obtenues au moyen de nombres aléatoires présentant des caractéristiques probabilistes non gaussiennes. Et d’autres encore en faisant fluctuer le paramètre de l’écart-type”(p. 24).

Il est tout à fait extraordinaire de trouver dans ces considérations les termes du débat sur la modélisation financière qui traverse les recherches depuis les années 1930 jusqu’à nos jours. En effet, en termes contemporains, Working propose :

- soit une marche au hasard gaussienne à écart-type constant

$$X_k = X_{k-1} + \sigma u_k \quad u_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

- soit une marche au hasard à écart-type variable

$$X_k = X_{k-1} + \sigma_k u_k \quad u_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

– soit une marche au hasard non gaussienne

$$X_k = X_{k-1} + \eta_k \quad \eta_k \sim \mathcal{L}$$

Autrement dit, soit l'on fixe la volatilité σ et l'on utilise un aléa non gaussien : ce sera la position de Mandelbrot ; soit on conserve un aléa gaussien et l'on fait varier la volatilité : ce sera l'inspiration des modèles de la famille ARCH. Dans ce dernier cas, et dans une note de bas de page (p. 24), Working fait observer que de tels types de modélisation “introduiraient des corrélations sur les valeurs absolues des rentabilités périodiques plutôt que sur les rentabilités elles-mêmes”. Mais il semble (p.24) que Working pense plus à des distributions asymétriques à écart-type constant, qu'à des écarts-types variables.

Les simulations de Roberts (1959) Un autre exemple de cette démarche est donné par Harry Roberts. Dans un article publié en 1959 dans le *Journal of Finance* (Roberts [1959]), Roberts commence par rappeler que “de toutes les séries chronologiques en économie, les séries de cours boursiers, aussi bien individuels qu'agrégés en indices, sont probablement celles qui ont été le plus étudiées”. Le débat sur la prévisibilité des cours ou rentabilités futures est toujours un objet de controverses. En particulier, partisans et adversaires de la prévisibilité au moyen des méthodes graphiques de l'analyse dite “technique” des trajectoires boursières s'affrontent régulièrement. Le but de l'article de Roberts est de montrer que l'existence de formes caractéristiques ou reconnaissables comme telles sur les trajectoires boursières (tête-épaule, double sommet etc.) n'est pas contradictoire avec l'hypothèse d'une marche au hasard sur les rentabilités cumulées.

Roberts veut lui aussi montrer que ces formes ne sont rien d'autres que le résultat de tirages aléatoires indépendants et stationnaires. L'assimilation de ces formes à des signes spécifiques de telle ou telle tendance provient, selon lui, d'une erreur de lecture des variations boursières dont la cause est double : les graphiques boursiers sont analysés en niveaux de cours et non en différences premières des cours, et, par ailleurs, toute simulation de tirages aléatoires peut produire des figures apparemment spécifiques qui présentent l'apparence de déterminations mystérieuses, mais qui sont sans effet sur la prévisibilité réelle.

Pour illustrer cette proposition, Roberts entreprend une simulation de Monte Carlo de 52 tirages (assimilés à 52 “semaines”) au hasard de nombres distribués suivant une loi normale de moyenne $\mu = 0, 50\%$ (la “rentabilité hebdomadaire”) et d'écart-type $\sigma = 5\%$ (la “volatilité hebdomadaire”), ce qui représente une volatilité annualisée de $5 \times \sqrt{52} \simeq 36\%$, soit un marché dont on dirait qu'il est assez agité. Le modèle de Roberts est

$$R_k = R_{k-1} + \mu + \sigma u_k \quad R_0 = 0$$

où les u_k suivent une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, modèle qui est donc une marche au hasard gaussienne avec dérive. Roberts compare les résultats avec les variations réelles de l'indice Dow Jones, et montre que les deux graphiques se ressemblent fortement. Comme Working, Roberts ajoute que l'hypothèse de normalité est “moins essentielle que celle de l'indépendance” des tirages.

La loi de l'Arcsinus et les “tendances” du hasard En fait, l'origine de cette capacité des trajectoires issues de tirages aléatoires indépendants et stationnaires à présenter au regard des apparences presque nettes de “formes” reconnaissables, de “figures” observables, de “configurations de marché”, et qui pourraient faire croire aux analystes techniques qu'une quelconque détermination est à l'oeuvre sur ces séries artificielles alors qu'il n'en est rien, vient d'une propriété totalement non triviale et contre-intuitive de la marche au hasard : la loi de l'arc sinus, découverte par Paul Lévy en 1939.

Soit une marche au hasard $\{R_k, k \in \mathbf{N}\}$ représentant la rentabilité boursière totale d'un actif quelconque à partir d'une date $t = 0$ (on a $R_0 = 0$). On considère les $2n$ premières valeurs de cette rentabilité boursière, soit R_1, R_2, \dots, R_{2n} . La probabilité que, parmi ces $2n$ rentabilités, il y ait $2k$ rentabilités

positives ou nulles et $2n - 2k$ rentabilités négatives est

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}$$

Le rapport $2k/2n = k/n$ représente la proportion du temps pendant laquelle la rentabilité boursière est restée positive ou nulle. On s'intéresse à la limite de k/n quand $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire quand le temps resté à être investi sur le marché boursier augmente indéfiniment (tend vers l'infini). Soit a cette limite, qui est donc la proportion limite de temps passé par la suite $\{R_k, k \in \mathbf{N}\}$ du côté positif (le temps pendant lequel "l'on reste gagnant en bourse"). On montre alors (Lévy (1939), Erdős-Kac (1947), Chung-Feller (1950)) que

$$\Pr(a < t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \sqrt{t}$$

et qui indique que la probabilité pour que la durée limite du gain boursier soit inférieure à une durée donnée t est égale à la fonction arcsinus de cette durée t : c'est la *loi de l'arcsinus*. La densité de cette loi est

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

qui est *infinie* au voisinage de 0 et de 1. Ceci veut dire que tout se passe comme si la proportion du temps où l'on "reste gagnant en bourse" était *attirée* par les deux extrêmes (0 et 1), c'est-à-dire que la situation la plus vraisemblable de l'évolution d'un gain boursier artificiel simulé par une marche au hasard sera celle où les gains resteront positifs (ou négatifs) pendant de très longues périodes (et même la plupart du temps).

Du point de vue des trajectoires boursières simulées, qui seraient alors les graphiques scrutés par les analystes techniques, ces longues périodes de gains ou de pertes persistants se traduiraient par des "tendances" à la hausse ou à la baisse, des "persistances" de gains ou de pertes, alors même que ces persistances ne signifient aucunement la présence d'une quelconque prévisibilité boursière puisque ε_k est un bruit blanc. Ce phénomène de pseudo-tendances visuelles sur les graphiques de marches au hasard résulte donc uniquement de la présence d'une densité infinie en 0 et 1, et non d'une dépendance statistique entre les accroissements des gains. Ce qui ne signifie pas qu'il ne puisse pas exister de réelles dépendances statistiques, mais seulement que, du point de vue de ses méthodes graphiques, l'analyse technique ne peut pas distinguer une marche au hasard d'un processus à accroissements dépendants.

4 L'interaction avec le concept d'efficacité informationnelle des marchés

4.1 Efficacité informationnelle et modélisation probabiliste

Vers le milieu des années soixante, à la suite de cette accumulation de résultats statistiques semblant valider l'hypothèse brownienne, le paradigme statistique-probabiliste gaussien-markovien est solidement accepté dans les milieux universitaires financiers et le modèle brownien acquiert dès lors une reconnaissance forte, qui va recevoir un soutien théorique important avec la naissance du concept d'efficacité informationnelle. Ce concept fournit en effet un *fondement économique* à l'observation de la marche au hasard, et permet donc de valider une seconde fois, mais par une théorie économique et pas seulement un ensemble de résultats statistiques, l'hypothèse du mouvement brownien.

La construction a posteriori du concept d'efficacité informationnelle des marchés, à partir de l'interprétation économique des résultats statistiques, construction fortement associée à cette grille interprétative, a été présentée dans Walter [1996]. On y a montré comment la dépendance du concept d'efficacité informationnelle aux résultats statistiques des tests entrepris à partir 1933 a conduit à comprendre l'efficacité informationnelle à travers un *filtre statistique-probabiliste* précis. En ce sens, on peut dire que le concept d'efficacité informationnelle tel qu'il prend forme entre 1959 et 1976 est un concept *causé*, dans le sens où il survient *après* des descriptions statistiques-probabilistes des fluctuations boursières.

On complète ici cette analyse à la période 1976 – 2000, en faisant apparaître comment ce concept, entièrement reconstruit à partir de la condition de non existence d'arbitrage, va devenir dans la période récente, non plus *causé*, mais *causant*, dans le sens où il conditionnera à partir de 1981 les choix de représentations probabilistes des fluctuations boursières qui utiliseront toutes des modèles de martingales sur les prix actualisés (voir annexes A.2 et A.3). Il se produit alors un renversement complet de perspective. Tandis que la première efficacité informationnelle répondait au besoin intellectuel de justifier économiquement le modèle de marche au hasard, la seconde efficacité informationnelle est posée d'emblée et contraint la modélisation financière à utiliser des modèles de martingales de carré intégrable. Le modèle probabiliste n'est plus l'origine d'une réflexion économique-financière, il en devient le résultat.

Grâce à cette reconstruction radicale, à partir des années quatre-vingt, on peut enfin sortir de l'impasse intellectuelle des débats des années soixante-dix (en particulier la stérile controverse entre Fama et LeRoy), sur la question de la validation par les marchés réels de l'hypothèse d'efficacité informationnelle. D'autre part, cette reconstruction du concept permet aussi de définir de manière très précise la seconde forme de l'efficacité informationnelle, celle de Jensen de 1978. Dans Walter [1999], on avait abordé cette forme à partir des travaux de Cowles, de 1933 à 1967, dans le but de faire apparaître son émergence conceptuelle dès les années trente. On montre ici comment cette idée se trouve formalisée au moyen de la notion de portefeuille numéraire introduite par Long en 1990 et définie précisément par Geman *et al.* en 1995.

Autrement dit, la première interprétation de l'efficacité informationnelle, celle de Fama [1965, 1970, 1976], trouve son aboutissement formel dans la spécification de Harrison – Kreps – Pliska de 1981, tandis que la seconde interprétation, celle de Jensen [1978] s'accomplit dans la spécification de Long – Geman de 1990 – 1995. Les deux approches se correspondent par un changement de probabilité, ce qu'exprime la définition de Karatzas et Shreve de 1998, qui permet de comprendre de manière moderne l'assertion de Bachelier [1900] selon laquelle "l'espérance mathématique du spéculateur est nulle".

4.2 La formation et la conception classique du concept (1900 – 1976)

4.2.1 L'intuition du concept avant sa naissance

Le démon du hasard de Kendall (1953) En 1952, la question de la prévisibilité boursière est abordée par le statisticien anglais Murray Kendall, professeur à la London School of Economics, dans une étude sur l'analyse des séries chronologiques en économie, étude dont les conclusions vont renforcer l'hypothèse de Cowles et de Working sur la marche au hasard des prix boursiers. Cette étude fait l'objet d'une conférence devant la Royal Statistical Society le 17 décembre 1952, et est ensuite publiée, accompagnée de la discussion qui s'en suivit, dans le *Journal of Royal Statistical Society* en 1953 (Kendall [1953]).

Analysant plusieurs séries chronologiques de variations hebdomadaires (voir tableau 3 page 17) Kendall trouve que, dans toutes les séries de prix observées, les variations de prix sont si importantes qu'elles l'emportent sur tout autre effet de "tendance" qui pourrait exister. En regard de ce résultat, il estime qu'il sera difficile de détecter des tendances sur les marchés en utilisant les méthodes statistiques usuelles. De plus, à supposer que l'on parvienne à caler un modèle de représentation des variations boursières sur le marché réel, rien ne garantit qu'un autre modèle ne serait pas aussi efficace que le premier (sinon plus). Autrement dit, *il n'existe pas de manière simple de pouvoir choisir entre plusieurs modèles de représentation des variations boursières.*

Kendall conclut de ses examens statistiques qu'il n'est pas possible de parvenir à une prévisibilité des rentabilités futures en utilisant la seule information contenue dans la série des cours passés (ce qui décrit implicitement un modèle de martingale), mais il laisse aussi ouverte la possibilité de pouvoir accéder à une prévisibilité partielle à partir d'une autre information que celle des cours passés, l'information utilisée étant alors celle d'une variable exogène au marché.

On en arrive alors au célèbre passage où Kendall adopte cette image suggestive pour décrire ses conclusions (n°8), en évoquant le "démon du hasard" :

"A premier abord, les conséquences de ces résultats sont assez perturbantes. En adoptant l'hypothèse de l'homogénéité des séries, il semble que les variations hebdomadaires des prix soient pratiquement indépendantes. (...) En fait, les séries ressemblent à des marches au hasard, et *tout se passe comme si chaque semaine, un démon du hasard tirait un nombre aléatoire dans une urne de contenu homogène, et l'ajoutait au prix précédent pour obtenir le prix de la semaine suivante.*

Il insiste sur ce résultat :

"Et, pour insister encore davantage sur ce résultat, il faut rappeler qu'il ne caractérise pas un petit marché peu développé ou exotique, un marché dans un trou perdu, mais au contraire le marché du blé de Chicago sur une période de cinquante ans."

Kendall introduit alors (n°19) la notion de mouvement brownien sur les cours cotés

"Il se pourrait bien que le mouvement [des cours] soit réellement aléatoire, et que ce qui semble représenter un mouvement déterminé sur longue période ne soit peut-être simplement qu'une sorte de *mouvement brownien économique.*"

Ce qui valide le modèle de marche au hasard, mais sur les cours et non les rentabilités. Le besoin d'une justification économique des résultats obtenus sur les tests apparaît simultanément :

"Pour le statisticien, c'est un assez grand plaisir de penser qu'une telle régularité distributionnelle puisse émerger du brouhaha apparemment chaotique qui agite le parquet de la bourse de Chicago. Quoique pour les économistes, je crains bien que cette découverte apparaisse plutôt comme une supercherie statistique, tant qu'ils ne se seront pas convaincus eux-mêmes de l'absence de mouvements systématiques sur les cours. Mais je les encourage vivement à persévérer dans cette voie" (p.13). "J'imagine que les économistes seront très réticents à accepter cette

conclusion et y résisteront durement, mais je ne connais malheureusement pas le moyen de les aider à l'accepter sans douleur" (p. 18).

Pourtant, les réactions des économistes aux conclusions de Kendall, quoique variées, ont été plutôt bienveillantes : ils trouvent Kendall "provocateur" (p. 27), "iconoclaste" (p. 32), mais globalement "stimulant" (p. 28) et, dans l'ensemble, sa proposition est bien reçue. En fait, les économistes seraient enclins à accepter la mise en évidence statistique, mais il faudrait justifier économiquement les résultats obtenus. C'est l'objet d'un échange assez vif entre Houthakker et Kendall : la critique de Houthakker porte sur la notion de "mesure sans théorie" (p. 32). Kendall y répond en indiquant qu'il s'agit de "faits, nonobstant l'existence d'un cadre théorique sous-jacent" (p. 34). Bartlett et Houthakker font observer que, pour un économiste, la connaissance de la seule série de cours et sa description statistique ne sont pas suffisantes : il est aussi nécessaire de chercher à expliquer la formation des cours, et que par conséquent il serait intéressant de considérer comment des phénomènes de l'économie réelle peuvent rendre compte de l'observation de séries de cours aléatoires.

En réalité, cette préoccupation n'a jamais été totalement absente des travaux de recherche et, dès le début de la recherche en modélisation financière, dès la thèse de doctorat de Bachelier, on trouve des considérations économiques sur l'explication de l'apparence aléatoire des variations boursières. Bachelier [1900] partitionnait les variations boursières selon la provenance de leurs causes, en considérant "naturelles" les variations issues de l'observation de l'environnement économique et financier, et "factices" les variations résultant de facteurs techniques propres au marché lui-même. Puis, en 1921, Taussig avait imaginé une fourchette permettant de caractériser cette partition, appelant "zone d'ombre" le domaine des variations factices. On voit que l'argumentation servant à justifier l'apparence de hasard sur les variations boursières utilisait la notion d'information passant dans les prix de marché. Cette argumentation sera reprise par la suite de nombreuses fois jusqu'à sa mise en forme par Fama en 1965.

Le miroir de la spéculation de Working [1956] Holbrook Working a approfondi la question de l'origine de l'information. Dans son article de 1956 intitulé "New Ideas and Methods for Price Research", il commence par établir le constat de Houthakker dans sa controverse avec Kendall : "L'analyse des variations boursières a souvent été qualifiée de recherche sans théorie. La raison principale en est probablement l'absence de théorie économique de la dynamique des prix, les seules théories de formation des prix existantes étant des théories de l'équilibre en statique. Les variations boursières délimitent un champ de recherche encore peu connu et mal compris des économistes." (p. 1430). Pour aider les économistes "à se diriger dans ce territoire inconnu sans boussole ni règles d'exploration", Working leur propose de chercher des invariants statistiques de comportements boursiers, afin de pouvoir caractériser des faits objectifs repérables et répétables, qui pourraient ensuite être utilisés comme fondations aux théories à venir.

Il propose de qualifier de *spéculatif* un prix qui dépend directement des *anticipations* faites par les opérateurs de marché, c'est-à-dire, au sens propre du mot, de leur *spéculation* sur l'avenir¹¹, de leur opération de discernement du futur dans les méandres du présent. Dans cette perspective, Working introduit une bipartition des mouvements boursiers selon la nature de leurs causes, selon la même subdivision que Bachelier [1900] :

- les mouvements relatifs à l'arrivée d'une information exogène nouvelle sur le marché, ce qui correspondrait aux causes *naturelles* de Bachelier, et
- les mouvements non relatifs à cette information exogène, ce qui correspondrait aux causes *factices* de Bachelier.

Chacune des deux catégories peut à son tour être subdivisée selon une règle de proportionnalité, l'ensemble conduisant à une typologie des variations boursières résumée dans le tableau 4. Autrement dit,

¹¹Le mot "spéculation" vient de la famille des mots latins de radical "specula", qui expriment tous une idée de scrutation d'événements : sens physique comme un lieu d'observation chez Cicéron, un lieu élevé chez Virgile, une vitre ou une transparence chez Pline l'ancien, ou sens figuré comme une lueur d'espoir chez Plaute, ou même l'espionnage chez Ammien Marcellin.

pour Working, comme pour Bachelier, autant il est légitime de spéculer en scrutant l'économie réelle (l'information exogène), autant la spéculation devient cause de variations excessives lorsque l'on utilise une information autre qu'exogène, comme par exemple l'information endogène propre au marché lui-même. Le marché ne peut fonctionner correctement que si personne ne le regarde. Dès que les opérateurs se retournent pour se contempler dans le *miroir* de leurs opérations (et le mot miroir est aussi une traduction du latin "speculum"), la spéculation devient nocive et le marché ne peut plus fonctionner correctement.

Dans les analyses statistiques qu'il entreprend afin de tester cette partition des mouvements boursiers, Working (qui ne précise pas le détail des tests) rend compte d'une difficulté à détecter les sources des variations boursières au moyen des outils statistiques usuels (corrélation) : à cause de la non unicité de l'échelle de résolution de l'analyse qui doit être mise en oeuvre pour mesurer la diffusion de l'information dans les variations des cours, une mesure de corrélation en temps de l'horloge peut ne pas être suffisamment précise. Nonobstant cet obstacle, Working indique qu'il semble que, dans l'ensemble, les réponses des prix cotés aux informations disponibles et pertinentes soient inadéquates.

type	dénomination	caractéristique
1	exacte	appropriée à l'information exogène
2	excessive	trop forte en regard de l'information exogène
3	inadéquate	trop faible en regard de l'information exogène
4	erratique	sans rapport avec l'information exogène
5	correctrice	corrigeant un mouvement inadéquat

TAB. 4 – Les types de fluctuations boursières selon Working (1956).

Dans un deuxième article publié en 1958 dans *American Economic Review* (Working [1958]) et intitulé "A theory of anticipatory prices", Working approfondit sa conception de la formation des prix spéculatifs : "Je voudrais à présent proposer un modèle de formation des prix boursiers qui fournisse une compréhension de la nature de leurs variations meilleure que celle issue de modèles existants (...) L'idée principale sous-jacente est la suivante : tout modèle doit inclure au centre de la formation des prix boursiers les anticipations des opérateurs." (p. 191). Ensuite, "la nature et le comportement des anticipations du modèle dépendent du type d'intervenants sur le marché" (p. 192). Enfin, "les opérateurs utilisent chacun une information différente et doivent par conséquent avoir des opinions différentes" (p. 192). Il s'agit donc de retraiter de l'information. Développant la bipartition de 1956, Working propose de diviser les opérateurs en deux groupes :

- ceux qui utilisent l'information exogène, qu'il appelle les opérateurs *bien informés*, et
- ceux qui utilisent l'information endogène, qu'il appelle les opérateurs *mal informés*

Autrement dit le monde des opérateurs devient séparé en deux : les bons et les méchants. Seuls les bons contribuent au bon fonctionnement du marché, grâce à l'utilisation de la bonne information, tandis que les méchants parasitent les fluctuations boursières en créant des mouvements déraisonnables, déconnectés de toute réalité économique. On voit alors qu'une variable importante du modèle va être la *proportion* des opérateurs bien informés par rapport à l'ensemble de tous les opérateurs, car seuls ces opérateurs pourront intervenir efficacement pour *corriger* les cotations qui ne reflèteraient pas correctement la bonne évaluation d'un titre.

La roue de la roulette de Roberts [1959] Roberts donne une explication très similaire de l'observation du hasard boursier. Pour justifier ce comportement apparemment aléatoire du marché, il propose le raisonnement suivant : "si le marché se comportait comme une roulette mécaniquement imparfaite, les opérateurs des marchés repéreraient ces imperfections et agiraient en conséquence (en langage contemporain : les arbitreraient), en sorte que, par leur action, ils les feraient disparaître"(p. 7). Autrement dit, c'est par l'effet de l'action *informée* des opérateurs de marché que le marché se comporte comme une roue de roulette sans mémoire, c'est-à-dire mécaniquement parfaite. En d'autres termes, *les variations*

boursières sont imprévisibles parce que les opérateurs les rendent imprévisibles en les prévoyant. Si le marché est globalement imprévisible pour tous, c'est parce que chacun agit individuellement selon les propres prévisions. Si la simulation de Monte Carlo permet d'obtenir des trajectoires réalistes, c'est parce qu'aucun opérateur ne croit que les cours évoluent au hasard. La bourse s'apparente donc à un casino, dans le sens exact où aucune variation boursière n'est due au hasard !

En 1960, l'idée est mûre. Larson [1960] a ainsi cette formulation compacte : "Les variations des prix cotés reflètent l'arrivée d'une information nouvelle sur le marché. Comme l'information nouvelle est par définition imprévisible, alors les variations des prix apparaîtront comme aléatoires". C'est la formulation moderne de la justification de la marche au hasard des rentabilités boursières : si les cours contiennent tout le prévisible, alors les seules sources de variations boursières viennent de l'imprévisible. Elle est pratiquement reprise textuellement par Cootner [1962] "La bourse est un marché bien organisé et fortement concurrentiel. Supposons, en pratique, que c'est un marché parfait. Alors, dans ce cas, les seules variations des prix qui apparaissent sont celles qui résultent d'une information nouvelle. Comme il n'y a pas de raison de supposer que l'apparition de cette information n'est pas aléatoire, les changements de prix d'un titre, d'une période à l'autre, devraient être des mouvements aléatoires, *statistiquement indépendants* (souligné par nous) les uns des autres".

4.2.2 Les définitions de Fama et la désintrinsication des hypothèses jointes

Les trois définitions classiques de l'efficacité informationnelle sont celles proposées dans les trois articles de Fama [1965, 1970, 1976], auxquelles tous les acteurs des marchés se réfèrent plus ou moins, auxquelles des définitions plus récentes, mais pas modernes pour autant, font également référence (comme celle de Malkiel [1989]), et que l'on rappelle ci-après.

La première définition (Fama [1965], p. 90) est centrée sur la notion de juste évaluation de la valeur des sociétés :

Définition 1 (L'efficacité informationnelle selon Fama (1965))

Un marché boursier est dit informationnellement efficace si, par rapport à toute l'information disponible, les cours des titres sont de bons estimateurs de leur valeur intrinsèque.

La seconde définition (Fama [1970, p. 383]) est plus générale et plus faible. La notion de juste évaluation est abandonnée, pour ne conserver que l'idée d'une juste intégration de l'information dans les cours :

Définition 2 (L'efficacité informationnelle selon Fama (1970))

Un marché boursier est dit informationnellement efficace si les cours "reflètent pleinement" toute l'information disponible.

Le terme entre guillemets ("fully") de la définition 2 indique que, dans le sens précisé dans l'annexe A.4 (analogie avec le rendement d'un moteur), il s'agit d'une efficacité à 100%. Avec cette seconde définition, on passe de la juste évaluation à la juste intégration. La troisième définition évoquée chez Fama [1965, p. 40] puis développée chez Fama [1976, p. 143], introduit la notion de nombre suffisant d'investisseurs correctement informés pour que le passage de l'information soit bien réalisé :

Définition 3 (L'efficacité informationnelle selon Fama (1976))

Un marché boursier est dit informationnellement efficace si les cours cotés reflètent correctement toute l'information utilisée par les opérateurs.

La définition 3 renvoie à la notion d'information réellement (effectivement) utilisée par des investisseurs informés et ouvre la voie aux modèles d'agrégation d'information hétérogène (Grossman [1976], Hellwig [1980], Admati [1985], Biais *et al.* [2002]) ou asymétrique (Grossman et Stiglitz [1980]) dans les prix.

Il est bien connu depuis Fama que les définitions précédentes de l'efficacité informationnelle sont trop générales pour pouvoir être réellement utilisables dans la pratique, et qu'il est nécessaire de préciser le contenu opérationnel du concept par un certain nombre de compléments. Tout le monde s'accorde

aujourd'hui là-dessus, et on peut citer par exemple la savoureuse et très exacte remarque de Roger [1988, p. 59], pour qui "cette définition est providentielle pour les chercheurs et les professionnels car chacun peut l'interpréter comme bon lui semble".

Pour mieux caractériser et différencier les divers aspects théoriques contenus dans le concept d'efficacité informationnelle, afin de désintriquer les hypothèses jointes qui sont toujours présentes dans les tests d'efficacité, on propose d'utiliser la théorie des quatre causes (matérielle, formelle, efficiente, finale). Selon cette théorie développée par Aristote et formalisée par les scolastiques, tout phénomène peut être analysé au moyen de quatre causes distinctes, chacune s'identifiant à un type de relation entre l'environnement et le phénomène examiné, et qui sont respectivement :

- La cause matérielle : *ce à partir de quoi* quelque chose advient et qui demeure dans la chose même.
- La cause formelle : *ce à l'image de quoi* quelque chose advient.
- La cause efficiente : *ce par quoi* quelque chose advient, le principe du mouvement qui fait passer l'objet d'un état potentiel (en puissance) à un état réel, ou "actuel" (en acte).
- La cause finale : *ce en vue de quoi* quelque chose advient.

En appliquant cette catégorisation à la problématique de l'efficacité informationnelle d'un marché, on fait la proposition suivante :

Proposition 1 (Les quatre causes de l'efficacité informationnelle)

Les quatre causes de l'efficacité informationnelle sont les suivantes.

- *L'information est la cause matérielle de l'efficacité informationnelle.*
- *L'arbitrage est la cause efficiente de l'efficacité informationnelle.*
- *Le modèle mathématique est la cause formelle de l'efficacité informationnelle.*
- *Le juste prix des actifs est la cause finale de l'efficacité informationnelle.*

Les relations entre les quatre causes et le prix d'équilibre sont résumées dans les tableaux 5 et 6 ci-dessous.

cause matérielle	information	ce à partir de quoi l'équilibre advient
cause formelle	modèle	ce à l'image de quoi l'équilibre advient
cause efficiente	arbitrage	ce par quoi l'équilibre advient
cause finale	juste prix	ce en vue de quoi l'équilibre advient

TAB. 5 – Les quatre causes de l'efficacité informationnelle.

cause matérielle	l'équilibre en puissance	cause antérieure
cause formelle	l'équilibre en acte (effectif)	cause postérieure
cause efficiente	ce par quoi l'équilibre en puissance devient effectif	cause antérieure
cause finale	ce pour quoi l'équilibre en puissance devient effectif	cause postérieure

TAB. 6 – L'efficacité informationnelle en puissance (ex ante) et en acte (ex post).

L'on voit que, pour caractériser le concept d'efficacité informationnelle, il est nécessaire d'en préciser le contenu multiforme, c'est-à-dire d'analyser les causes matérielle, formelle et efficiente : l'information, l'arbitrage et les modèles. L'on peut séparer cette analyse en chacune des trois causes, ce qui donne accès à trois domaines distincts de la finance d'aujourd'hui : l'étude des contenus de l'information, à laquelle se rattachent les travaux sur la comptabilité et l'impact des signes émis par l'entreprise en direction du marché; l'étude des comportements des acteurs, à laquelle se rattachent les travaux sur la microstructure des marchés, mais aussi les modèles d'interaction sociale ou de théorie des jeux; l'étude des modèles d'évaluation, qui constituent un domaine important de la finance théorique depuis les années soixante.

Par exemple, il était logique que, s'intéressant à la juste intégration de l'information (la cause finale de l'équilibre), on en vienne à s'interroger sur la juste proportion des acteurs concernés puisque c'est par l'action d'opérateurs informés (la cause efficiente de l'équilibre) que le prix coté peut contenir de l'information sur l'économie réelle et sur la nature de leur information (la cause matérielle de l'équilibre)

en supposant que ces opérateurs interviennent en évaluant le prix futur de l’actif selon un modèle particulier (la cause formelle de l’équilibre), puis en “arbitrant” le marché. Cela revient à définir l’efficacité informationnelle au moyen de considérations portant sur cette partition des acteurs des marchés, entre ceux qui sont accés à une information particulière sur la société cotée, et les autres, recherches engagées à la suite des travaux de Grossman [1976] et Grossman et Stiglitz [1980]. Des définitions de l’efficacité informationnelle préciseront alors cette partition, en réduisant le concept d’efficacité à des sous-ensembles d’information. Les définitions de Grossmann et Stiglitz étant très connues, on présente plutôt ici celle de Beaver [1981, p. 35] qui participe de la même logique :

Définition 4 (L’efficacité informationnelle selon Beaver (1981))

Un marché boursier est dit informationnellement efficace par rapport à un ensemble d’information spécifique donné, si la communication à tous les participants du marché de l’information contenue dans cet ensemble n’a pas d’impact sur le niveau des cours cotés.

On insiste ici sur les causes formelle et efficiente. Pour alléger la lecture et ne pas conserver sur chaque variable les dates t et $t + 1$ (notation par ailleurs ambiguë : voir annexe A.3), on utilise un artifice de notation, consistant à considérer l’équilibre entre les dates $t = 0$ et $t = 1$. Toutes les relations d’efficacité informationnelle (de Fama) puis de condition de non existence d’arbitrages sont réécrites ainsi. L’information en date $t = 0$ est notée Φ , le taux de rentabilité d’un actif j entre les dates $t = 0$ et $t = 1$ est noté R_j défini en temps discret par la relation $1 + R_j = S_1^j/S_0^j$. La probabilité “objective” (la même pour tous les acteurs) est notée P définie sur un ensemble d’événements Ω .

La *forme* de l’équilibre en date $t = 0$ est donnée par le modèle d’évaluation des actifs, qui doit fournir la rentabilité espérée de tout actif j en date $t = 0$ pour la date $t = 1$, en fonction de l’information Φ , notée $E(R_j|\Phi)$. La propriété d’efficacité informationnelle d’un marché se traduit donc formellement par une *équation d’équilibre* ou *équation d’arbitrage* ou *équation d’évaluation* du prix d’un actif j en date $t = 0$, en fonction de l’anticipation faite pour le prix de cet actif en date $t = 1$, c’est-à-dire d’un choix du *modèle d’évaluation* du titre j pour la formation des anticipations de S_1^j . C’est la raison pour laquelle Fama [1970, p. 384] définit l’efficacité informationnelle comme

$$E(S_1^j|\Phi) = S_0^j (1 + E(R_j|\Phi)) \quad (21)$$

relation qui paraît tautologique si l’on oublie qu’il faut *d’abord* préciser la manière dont $E(R_j|\Phi)$ est obtenue. Fama [1991, p. 1576] le rappellera explicitement : “la notion d’efficacité informationnelle des marchés et la question de l’évaluation des actifs financiers sont indissociables”.

En fait, chaque type de modèle d’évaluation conduira à un type particulier d’efficacité informationnelle. Dans ce cas, le marché est efficace par rapport à un modèle donné m , au sens où le prix d’équilibre S_0^j reflète cette information Φ retraitée à travers le modèle m . C’est la raison pour laquelle Fama [1976, p. 144] précise sa définition de 1970 en insistant sur le rôle du modèle d’évaluation :

Définition 5 (La m -efficacité informationnelle selon Fama (1976))

Un marché boursier est dit informationnellement m -efficace si les cours reflètent pleinement l’information utilisée par les opérateurs au moyen d’un modèle d’évaluation m en sorte que, pour tout actif j en date $t = 0$, on ait l’équation d’équilibre

$$S_0^j = \frac{E(S_1^j|(\Phi, m))}{1 + E(R_j|(\Phi, m))} \quad (22)$$

La notation (Φ, m) est utilisée pour insister sur le fait que $E(R_j|\Phi)$ doit *au préalable* être défini par un modèle m pour que cette expression ait une signification. En posant $E(R_j|\Phi) = \mu_j$, on peut aussi écrire la m -efficacité informationnelle de la manière suivante :

$$S_0^j = E_m \left(\frac{S_1^j}{1 + \mu_j} \middle| \Phi \right) \quad (23)$$

où la notation E_m indique que l’espérance mathématique E se définit et se calcule au moyen d’un modèle m . Toute équation d’équilibre utilisant un modèle d’évaluation m donné peut donc traduire l’efficacité

informationnelle. C'est en ce sens que l'on peut dire que la forme de l'équilibre dépend du consensus de modélisation, et en cela que le modèle d'évaluation représente donc la cause formelle de l'équilibre.

4.3 La reconstruction moderne du concept (1976 – 1998)

4.3.1 De l'efficacité informationnelle à la condition de non existence d'arbitrages

Les approches modernes de la finance s'appuient toutes sur la notion de prix arbitré. En fait, l'année même où la controverse entre Fama [1976] et LeRoy [1976] pouvait laisser supposer une extinction du concept à cause de son ambiguïté intellectuelle, cette notion d'arbitrage apparaissait dans toute son importance dans un article de Cox et Ross [1976]. Elle conduira à la manière moderne de caractériser l'efficacité informationnelle au moyen de la condition de non existence d'arbitrage. Deux manières de caractériser la condition de non existence d'arbitrage sont équivalentement utilisées :

- le passage dans un monde dual d'individus indifférents au risque,
- l'utilisation d'un portefeuille numéraire dans le monde réel.

On présente brièvement ci-dessous ces deux approches dans le but de spécifier l'équation d'arbitrage (22) de Fama [1976] de manière moderne.

La première des deux approches utilise un changement de probabilité. On commence par définir et noter le cours actualisé $S_j^*(t)$ d'un actif j en date t comme

$$S_j^*(t) \equiv \frac{S_t^j}{(1+r)^t}$$

où r est le taux d'intérêt sans risque. On note $\Delta S_j^* = S_j^*(1) - S_j^*(0)$ la différence des cours actualisés entre les dates $t = 0$ et $t = 1$, et ΔS_j^* représente donc la *valeur actuelle du gain* résultant de l'achat du titre j en date $t = 0$ en vue de sa détention jusqu'à la date $t = 1$, en choisissant comme taux d'actualisation le taux sans risque.

On définit une mesure de probabilité particulière notée Q sur Ω , équivalente à P , telle que $Q(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ et telle que, *par construction*, on ait $E_Q(\Delta S_j^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, N$, où la notation $E_Q(X)$ désigne l'espérance mathématique de la variable aléatoire X évaluée avec la probabilité Q . Cette condition qui définit Q correspond donc concrètement à l'hypothèse explicite que l'espérance mathématique (calculée avec Q) de la valeur actuelle du gain est nulle. Ce qui n'est pas sans rappeler l'hypothèse fondamentale de Bachelier [1900] selon laquelle "l'espérance mathématique du gain du spéculateur est nulle". Nous reviendrons plus loin sur cette analogie en la précisant. Le théorème fondamental (presque le plus essentiel) de la finance moderne (Harrison et Kreps [1979], Harrison et Pliska [1891]) énonce que, si les prix sont arbitrés, alors une telle probabilité existe.

La condition $E_Q(\Delta S_j^*) = 0$ est équivalente à

$$S_0^j = \frac{1}{1+r} E_Q(S_1^j | \Phi) \quad j = 1, \dots, N \quad (24)$$

qui indique que, en date $t = 0$, l'espérance mathématique des prix des actifs j actualisée au taux sans risque r est égale à leur prix à cette date. Cette équation (24) correspond à une *caractérisation par la probabilité Q* de l'équation d'arbitrage (22) de Fama [1976].

L'autre approche fondée sur la condition de non existence d'arbitrages permet de caractériser l'efficacité informationnelle d'un marché à partir de la notion de *portefeuille numéraire*. Dans la mesure de performance des portefeuilles, on parle en général de "portefeuille de référence", ou de "benchmark", et pour ces raisons l'on notera B_t la valeur du portefeuille numéraire en date t , et $R_B \equiv (B_1 - B_0)/B_0$ sa

rentabilité entre les dates $t = 0$ et $t = 1$. De la même manière que l'on avait actualisé les cours des titres au taux sans risque, on les actualise à présent au taux de rentabilité du portefeuille numéraire : on définit et note $S'_j(t)$ le cours d'un actif j actualisé en date t , soit

$$S'_j(t) \equiv \frac{S_t^j}{(1 + R_B)^t}$$

où R_B est le taux de rentabilité du portefeuille numéraire. On note $\Delta S'_j = S'_j(1) - S'_j(0)$ la différence des cours actualisés entre les dates $t = 0$ et $t = 1$, et $\Delta S'_j$ représente donc la *valeur actuelle du gain* résultant de l'achat du titre j en date $t = 0$ en vue de sa détention jusqu'à la date $t = 1$, en choisissant comme taux d'actualisation le taux du portefeuille numéraire.

On montre que (voir par exemple Long [1990] ou Geman *et al.* [1995]) lorsque tous les prix des actifs sont arbitrés, alors il existe un portefeuille numéraire tel que $E_P(\Delta S'_j) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, N$. Autrement dit, pour tout achat de titre, l'espérance mathématique du gain, actualisée au taux du portefeuille numéraire, est nulle. Ce qui rappelle également l'hypothèse fondamentale de Bachelier [1900] selon laquelle "l'espérance mathématique du gain du spéculateur est nulle", mais cette fois interprétée en termes de portefeuille numéraire.

La condition $E_P(\Delta S'_j) = 0$ est équivalente à

$$S_0^j = E_P \left(\frac{S_1^j}{1 + R_B} \middle| \Phi \right) \quad j = 1, \dots, N \quad (25)$$

équation qui correspond à une *caractérisation par la portefeuille numéraire* de l'équation d'arbitrage (22) de Fama [1976]. On introduit alors la manière moderne de définir l'efficacité informationnelle :

Définition 6 (L'efficacité informationnelle selon Karatzas et Shreve (1998))

Un marché boursier est dit informationnellement efficace si, pour tout actif j ,

– il existe une probabilité Q telle que

$$S_0^j = E_Q \left(\frac{S_1^j}{1 + r} \middle| \Phi \right)$$

– il existe un portefeuille numéraire B tel que

$$S_0^j = E_P \left(\frac{S_1^j}{1 + R_B} \middle| \Phi \right)$$

où $E_Q(\cdot)$ et $E_P(\cdot)$ désignent l'espérance mathématique calculée avec la probabilité Q et la probabilité P .

Ces définitions sont résumées dans le tableau 7 ci-dessous.

Les équations (24) et (25) précédentes permettent d'établir la relation entre l'efficacité informationnelle et les modèles de martingales. En effet, considérons les "processus" des prix actualisés $S_j^* = \{S_j^*(t) : t = 0, 1\}$ et $S'_j = \{S'_j(t) : t = 0, 1\}$. Avec ces processus, les relations (24) et (25) s'écrivent

$$E_Q(S_j^*(1)|\Phi) = S_j^*(0)$$

et

$$E_P(S'_j(1)|\Phi) = S'_j(0)$$

qui définissent respectivement une Q -martingale et une P -martingale sur les processus S_j^* et S'_j . Autrement dit, la condition de non existence d'arbitrage s'écrit sous la forme d'une martingale selon la probabilité retenue, en sachant que les deux probabilités P et Q sont équivalentes. On retrouve à nouveau la vision duale des marchés qui caractérise la finance moderne.

Fama (1976)	$S_0^j = E_m \left(\frac{S_1^j}{1+\mu_j} \mid \Phi \right)$
portefeuille numéraire	$S_0^j = E_P \left(\frac{S_1^j}{1+R_B} \mid \Phi \right)$
probabilité Q	$S_0^j = E_Q \left(\frac{S_1^j}{1+r} \mid \Phi \right)$

TAB. 7 – La m -efficacité informationnelle selon le modèle m

4.3.2 L'espérance nulle du spéculateur : compréhension moderne

Considérons à présent les rentabilités R_j des titres. On peut également calculer des rentabilités de cours actualisés, ce qui correspond financièrement à des rentabilités *déflatées*, ou encore *nettes* du taux d'intérêt utilisé dans l'actualisation. Dans la mesure de performance des portefeuilles, ces rentabilités nettes correspondent aussi à un calcul de rentabilité en excédent de la rentabilité retenue comme taux de référence, ce qui signifie que le calcul d'une rentabilité déflatée représente un calcul de *surperformance* d'un actif ou d'un portefeuille par rapport à la rentabilité de référence. En définissant les rentabilités déflatées comme R_j^* et R_j' telles que

$$1 + R_j^* = \frac{1 + R_j}{1 + r}$$

$$1 + R_j' = \frac{1 + R_j}{1 + R_B}$$

on obtient respectivement :

$$E_Q(R_j^*) = 0 \tag{26}$$

$$E_P(R_j') = 0 \tag{27}$$

Ces équations caractérisent la propriété d'efficacité informationnelle d'un marché par une condition d'espérance nulle de surperformance des titres par rapport à un taux de référence donné, qui dépend de la probabilité choisie. On peut alors établir la relation entre ces formulations et celle de Fama [1970] qui apparaissait tautologique à LeRoy [1976]. En effet, Fama [1970, p. 385] avait défini la condition d'espérance nulle de surperformance par une relation du type

$$E(R_j - E(R_j|\Phi)|\Phi) = 0$$

qui, de fait, est toujours vérifiée par simple propriété de l'espérance mathématique, sans faire intervenir d'autre notion économique ou financière. Mais, en considérant que la différence $R_j - E(R_j|\Phi)$ représente une rentabilité appelée "anormale" dans la littérature usuelle en finance, et en notant ε_j cette rentabilité anormale, on voit que la condition d'efficacité de Fama revient simplement à postuler que

$$E(\varepsilon_j|\Phi) = 0 \tag{28}$$

c'est-à-dire que l'espérance (sous P) de la rentabilité anormale est nulle. Ceci représente identiquement la condition d'efficacité de Karatzas et Schreve puisque les rentabilités déflatées R_j^* et R_j' s'analysent comme des rentabilités en excès du taux de référence (Long [1990]), et donc que les relations (26) et (27) définissent l'efficacité comme l'espérance nulle des rentabilités excédentaires, ou "anormales" dans la terminologie usuelle. Autrement dit, les relations (26) et (27) sont les formes modernes de l'équation (28) de Fama.

On peut donc indifféremment caractériser l'efficacité informationnelle par une espérance nulle de rentabilité anormale ou de rentabilité déflatée, sous P par rapport au portefeuille numéraire, ou sous Q par rapport au taux sans risque.

Le tableau 8 ci-dessous résume ces perspectives.

Fama (1970)	$E(\varepsilon_j \Phi) = 0$
portefeuille numéraire	$E_P(R'_j \Phi) = 0$
probabilité Q	$E_Q(R_j^* \Phi) = 0$

TAB. 8 – L’efficacité informationnelle et la rentabilité anormale

Plus précisément, en interprétant le portefeuille numéraire comme un benchmark dans le cadre de la mesure de performance des portefeuilles, et en appliquant la condition $E(R'_j) = 0$ à un portefeuille P de titres, on peut donc exprimer la propriété d’efficacité informationnelle par une *espérance nulle de surperformance de la gestion contre le benchmark* dans le sens précis où

$$E(R'_P) = 0 \tag{29}$$

où R'_P représente la rentabilité relative du portefeuille P par rapport au benchmark B . On retrouve alors la définition de Jensen [1978, p. 96], que l’on rappelle.

Définition 7 (L’efficacité informationnelle selon Jensen (1978))

Un marché boursier est dit informationnellement efficace par rapport à un ensemble d’information donné s’il est impossible de réaliser un gain (“economic profit”) à partir d’une allocation d’actifs fondée sur cet ensemble d’information.

et dont la traduction moderne et précise est celle de Long [1990, p.30] :

Définition 8 (L’efficacité informationnelle selon Long (1990))

Un marché boursier est dit informationnellement efficace par rapport à un ensemble d’information donné s’il existe un portefeuille numéraire tel que l’espérance de surperformance par rapport au portefeuille numéraire de toute allocation d’actifs fondée sur cet ensemble d’information (“profit opportunities”) soit nulle.

Ces deux définitions représentent le fondement théorique de la gestion indicielle passive (l’indice étant le portefeuille numéraire).

Propriété 1 (Fondement de la gestion passive (Jensen – Long))

Dans un marché boursier informationnellement efficace, l’espérance de surperformance de la gestion active sur la gestion passive est nulle.

5 Le modèle standard face à la non normalité et à l'hétéroscédasticité

5.1 Le phénomène leptokurtique : omniprésence et voies de modélisation

5.1.1 Permanence et reconnaissance de la leptokurticité

Kendall [1953] observe un problème sur les distributions empiriques obtenues : elles sont “plutôt leptokurtiques”. Ce caractère non normal des distributions peut venir invalider les conclusions tirées des résultats statistiques. En réponse aux critiques des économistes qui lui reprochent une mesure sans théorie, Kendall évoque des “faits” statistiques, mais ces “faits” sont mis en évidence au moyen de l'utilisation d'un appareil statistique particulier qui conditionne la perception de la réalité économique. On mesure (si l'on peut dire) la fragilité des faits mis en évidence, qui sont étroitement dépendants des choix statistiques méthodologiques effectuées. Précisément, la critique des conclusions de Kendall va venir, non des économistes, mais des statisticiens. Alors que Kendall pensait être critiqué par les économistes et validé par les statisticiens, c'est le contraire qui s'est produit : ces derniers ont exprimé un doute sur la validité de la démarche de Kendall, à cause précisément de cette non normalité. D'autres études (Osborne [1959], Alexander [1961]) confirment la présence d'une non normalité dans les distributions empiriques des rentabilités périodiques.

En fait, ce problème apparaît être un phénomène omniprésent dans la finance : sur *presque toutes* les séries chronologiques examinées, à *presque toutes* les échelles de résolution τ , pour *presque toutes* les périodes d'analyse, on observera que le coefficient d'aplatissement (ou kurtosis K) est significativement supérieur à sa valeur théorique 0 correspondant à la distribution normale (voir annexe A.8). Ce phénomène est appelé le “phénomène leptokurtique”, et correspond à une invalidation partielle du modèle standard¹². Mais il aura fallu près de quarante ans pour ce “fait” observable devienne un “fait” observé, la non-normalité entrant dans le champ de la recherche scientifique. En effet, bien qu'apparu assez rapidement, il n'était pas considéré comme “fait” significatif pour la bonne compréhension des variations du marché étudié et la modélisation des mouvements des marchés, et ce phénomène resta longtemps considéré comme négligeable. Certains travaux suggéraient même, en cohérence avec cette conception intellectuelle, de tronquer les queues de distribution pour en retirer les grandes valeurs, assimilées à des “points aberrants” non pertinents pour la modélisation : le “fait” disparaissait purement et simplement du phénomène observé. Granger et Orr [1972] représentent une illustration de cette position, qui valide de manière emblématique la conception de Kuhn [1983] sur la nature subjective des “faits” d'expérience dans les paradigmes¹³.

Mandelbrot, le premier, prit en 1962 l'option opposée, et attira l'attention sur l'importance financière du caractère leptokurtique des distributions observées, ainsi que sur la nécessité de ne pas chercher à ignorer ce phénomène. Il fallait selon lui, tout au contraire, s'intéresser particulièrement à ces points de queues. Mandelbrot considérait en effet que les queues de distributions, loin d'être un refuge de “points aberrants”, contenaient des informations essentielles sur le fonctionnement du marché, pour la compréhension des risques potentiels des marchés. La position de Mandelbrot représentait donc une modification radicale du regard porté sur les variations boursières. Jusqu'alors, on s'était intéressé aux fluctuations des moyennes empiriques. Mandelbrot suggérait de s'intéresser aux fluctuations des extrêmes.

Historiquement, c'est sur les marchés d'actions que s'est d'abord concentrée l'étude de la leptokurticité. Progressivement, est apparue une deuxième voie de recherche, sur les marchés des changes ; enfin, les

¹²Voir Walter [2002] pour plus de détails.

¹³Pour un développement sur l'utilisation de la notion de paradigme au sens de Kuhn à la conception normale-gaussienne des variations boursières, voir Walter [1994, ch.8], et une discussion de l'applicabilité de la notion de paradigme en économie dans Coats [1969].

marchés de matières premières et de taux d'intérêt, puis les marchés à terme, ont aussi été examinés. Aujourd'hui, tous les compartiments des marchés ont, à peu près, fait l'objet d'investigations statistiques de leurs distributions empiriques. L'annexe A.8 présente un échantillon de ces résultats.

5.1.2 Le choix fondamental : i.i.d. ou normalité

A partir du moment où le fait leptokurtique fut reconnu comme tel dans la recherche en finance, deux grandes possibilités de modélisation émergent successivement pour le prendre en considération :

1. Conserver l'hypothèse i.i.d., et modifier alors le type d'aléa entrant dans la relation d'efficacité informationnelle. Cette démarche revient à s'intéresser à la loi *marginale* des rentabilités.
2. Abandonner au moins partiellement l'hypothèse i.i.d. en faisant varier des paramètres de la série au cours du temps, c'est-à-dire en introduisant une forme de dépendance sur les rentabilités. Cette démarche revient à s'intéresser aux lois *conditionnelles* des rentabilités.

Mais, plus récemment, une autre alternative, plus radicale encore, apparut :

1. Conserver une analyse en temps de l'horloge, et modifier alors certaines caractéristiques de la modélisation. Dans ce cadre, on se trouve devant l'alternative précédente (i.i.d. ou non i.i.d.).
2. Abandonner le temps de l'horloge et analyser la série en changeant la mesure du temps, pour redresser les distributions des rentabilités empiriques de manière à retrouver une distribution gaussienne en temps déformé.

Dans le référentiel du temps de l'horloge, on peut résumer les choix de modélisation à opérer à partir du schéma suivant. Le modèle de marche au hasard avec dérive se traduit par la relation

$$R_k = R_{k-1} + \mu + \varepsilon_k \quad R_0 = 0$$

avec $\{\varepsilon_k, k \in \mathbb{N}\}$ bruit blanc gaussien, c'est-à-dire que l'on a $E(\varepsilon_k) = 0$ et $\text{var}(\varepsilon_k) = \sigma^2$. On peut alors poser la problématique de la non normalité de la manière suivante :

1. Dans le modèle standard, on fait l'hypothèse que les aléas sont

$$\varepsilon_k = \sigma u_k \quad u_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

avec σ constant, c'est-à-dire que l'on se trouve en présence d'un bruit blanc gaussien. Par rapport à cette hypothèse :

2. On peut introduire une fluctuation sur le préfacteur, i.e. une volatilité variable, telle que la valeur de σ dépende du temps. C'est la famille des modèles à volatilité conditionnelle non constante, ou famille ARCH. A ce moment, on a

$$\varepsilon_k = \sigma_k u_k \quad u_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

où la valeur de σ_k dépend de k .

3. On peut modifier le bruit blanc gaussien standard u_k en bruit blanc *non gaussien*, par exemple α -stable. C'est le choix de Mandelbrot [1962], ou modèle i.i.d.- α -stable. A ce moment, on a

$$\varepsilon_k = \gamma u'_k \quad u'_k \rightsquigarrow \mathcal{S}_\alpha(0, 1)$$

où $\mathcal{S}_\alpha(0, 1)$ est une loi α -stable standard, et γ est une volatilité correspondant à la volatilité gaussienne σ dans le cas précédent.

C'est-à-dire que la violation du modèle standard par le phénomène leptokurtique conduit à abandonner l'une des trois hypothèses de stationnarité, indépendance, ou normalité des rentabilités boursières périodiques.

5.2 La modélisation de la non normalité sous hypothèse i.i.d.

5.2.1 Du modèle i.i.d.-2-stable au modèle i.i.d.- α -stable

Le principe du modèle de Mandelbrot (1962 – 1967) L'idée de Mandelbrot peut s'exprimer de manière simple : le modèle standard des variations boursières est un modèle dont le terme d'aléa est un mouvement brownien, c'est-à-dire un mouvement 2-stable à accroissements i.i.d. Par rapport à cette hypothèse du modèle standard, Mandelbrot conserve la propriété i.i.d. et abandonne celle de normalité tout en conservant la stabilité au sens de Lévy (qui en est une généralisation), pour des valeurs de α entre 0 et 2. Autrement dit : si $R(\tau)$ est la rentabilité sur l'échelle de résolution de base, pour tout $T = n\tau$, le modèle standard est défini par une relation scalante sur le processus des rentabilités $\{R(t), t \geq 0\}$ de type

$$R(T) = R(n\tau) \equiv n^{1/2}R(\tau)$$

où \equiv symbolise l'égalité en distribution. Le changement d'aléa se traduit par le remplacement de l'exposant 1/2 par l'exposant $1/\alpha$ et donc, dans le cas d'une modélisation i.i.d.- α -stable, la relation précédente devient

$$R(T) = R(n\tau) \equiv n^{1/\alpha}R(\tau) \quad (30)$$

qui représente la *fractalité* des variations boursières sur toutes les échelles d'observation.

Non normalité et controverses sur l'invariance d'échelle Les premières mises en évidence de distributions α -stables de Lévy en finance de Mandelbrot et Fama sont résumées dans le tableau 11 de l'annexe A.8. De manière générale, tous les travaux qui vont être entrepris sur les marchés boursiers vont confirmer la non normalité des distributions des rentabilités sur différentes échelles, l'ajustement éventuel à des distributions de Lévy sur chaque échelle, mais aussi la difficulté de valider l'hypothèse fractale. En effet, très vite va apparaître une *anomalie* importante pour la validation de cette hypothèse, qui va porter sur le concept central de la fractalité des marchés : la tendance à l'augmentation systématique de la valeur de $\alpha(\tau)$ en fonction de l'échelle de résolution τ . L'augmentation systématique de l'exposant caractéristique $\alpha(\tau)$ des lois stables en fonction de τ constitue ce qui est appelé une "anomalie scalante" et pose un problème majeur de validation de l'hypothèse i.i.d.- α -stable.

En effet, la relation (30) doit s'accompagner de la vérification à *toutes les échelles* de la relation

$$\alpha(T) = \alpha(n\tau) = \alpha(\tau) \quad (31)$$

qui exprime la *constance* de l'exposant caractéristique α quelle que soit l'échelle de résolution de l'analyse du marché. Le fait que cette relation ne soit pas retrouvée pour toutes les valeurs de n montre que l'invariance d'échelle n'est pas globale sur l'ensemble des échelles de temps, ou que l'hypothèse i.i.d. n'est pas valide.

Les différences entre les travaux concerneront le choix de processus de remplacement pour rendre compte de cette défaillance, au moyen de modélisations non fractales¹⁴. Cette anomalie scalante conduit Hsu *et al.* [1974] à estimer que "dans une économie où les facteurs affectant les niveaux de cours (développement techniques, politiques gouvernementales etc) peuvent subir des mouvements de grande ampleur, il paraît *déraisonnable* (souligné par nous) de vouloir chercher à représenter par une distribution de probabilité unique les variations des cours", argumentation reprise par Hagerman [1978] pour qui "le modèle stable symétrique ne peut pas *raisonnablement* (souligné par nous) être considéré comme une description appropriée des rentabilités boursières". On remarque la parenté d'argumentation entre les deux équipes

¹⁴Voir par exemple Teichmoller [1971], Officer [1972], Fielitz et Smith [1972], Praetz [1972], Barnea et Downes [1973], Brenner [1974], Blattberg et Gonedes [1974], Zajdenweber [1976], Hagerman [1978], Upton et Shannon [1979], Fielitz et Rozelle [1983], Wasserfallen et Zimmermann [1985], Boothe et Glassman [1987], Agkiray et Booth [1988a, 1988b], Tucker et Pond [1988], Hall *et al.* [1989].

de chercheurs : il n'apparaît pas "raisonnable" de retenir un modèle à invariance d'échelle. Mais l'on peut observer que l'invariance d'échelle théorique de la modélisation gaussienne (loi d'échelle en racine carrée du temps) n'est en tous les cas pas validée par les marchés réels¹⁵.

En 1986, on lit dans l'ouvrage de synthèse de Taylor [1986] sur l'analyse des variations boursières :

"Beaucoup de chercheurs ont estimé que l'hypothèse de la variance infinie n'était pas acceptable. Des études détaillées sur les variations boursières ont rejeté de manière concluante les distributions de Lévy. (...) Dix ans après son article de 1965, Fama lui-même préféra utiliser une distribution normale pour les variations mensuelles et donc abandonner les distributions stables pour les variations quotidiennes" (p. 46).

A la fin de la décennie 80, le modèle i.i.d.- α -stable des rentabilités boursières semble rejeté par l'ensemble des travaux réalisés. Mais l'on peut dire que les difficultés d'estimation de l'exposant caractéristique α rendent délicate la détermination d'une position définitive. On trouve ainsi dans Embrechts *et al.* [1997, p. 406] la considération suivante : "Nous pensons que les méthodes d'estimation du paramètre α ne sont pas assez précises pour inférer une conclusion nette sur la nature réelle des distributions à partir d'estimations faites sur différentes échelles de temps". Lorsqu'il se produit, le rejet de la stabilité de α n'apparaît donc pas aussi "concluant" que l'affirme péremptoirement Taylor¹⁶.

5.2.2 Du modèle i.i.d.- α -stable global au modèle i.i.d.- α -stable partiel

Pour sauver la propriété d' α -stabilité malgré la violation de la relation (31) pour toutes les valeurs de n , on peut considérer que cette relation est seulement vérifiée pour certaines échelles de résolution du marché, appartenant à une bande de fréquences donnée (par exemple entre une heure et une semaine), autrement dit, que l'invariance d'échelle est partielle et comprise entre ces bornes. Cela revient à faire l'hypothèse de l'existence de changements de régimes variationnels dans les fluctuations boursières, les variations restant invariantes par changement d'échelle entre deux fréquences limites, et différentes en-deçà et au-delà.

Cette idée avait déjà été abordée par Mandelbrot [1963], qui supposait l'existence de limites supérieures et inférieures ("cutoff") à la fractalité des marchés¹⁷, et introduisait la notion de "bande de fractalité" ("scaling range"). Elle est reprise par Akgiray et Booth [1988a] qui utilisent cette notion de bande d'invariance partielle pour renforcer l'argumentation de McCulloch [1978] sur le rapport coût-avantage d'un modèle à invariance d'échelle : l'utilisation de distributions stables entre deux fréquences repérées (deux "cutoff") est pertinente car moins coûteuse en estimations de paramètres que d'autres modélisations, peut-être plus fines (comme les mélanges de lois normales ou les processus mixtes diffusion-sauts) mais également plus complexes et donc sources d'un plus grand nombre d'erreurs d'estimation. Bouchaud et Potters [1997] et Mantegna et Stanley [2000] proposent par exemple un modèle i.i.d. combinant distributions α -stables jusqu'à un certain seuil, puis loi exponentielle à partir de ce seuil. Mais, dans cette perspective de modélisation, la question cruciale à résoudre est alors la détection des points de changements de régime.

5.2.3 Du modèle i.i.d.- α -stable partiel au modèle i.i.d.-max-stable

L'autre option suivie par la recherche pour conserver l'hypothèse i.i.d tout en se donnant la possibilité de pouvoir bénéficier de la pertinence des ajustements paréliens des queues de distributions a consisté à

¹⁵Voir Lévy Véhel et Walter [2002], ch. 5, pp 107-111, pour une discussion sur cette question de la validité de l'argument du rejet des lois stables par la non validation de la propriété de l'invariance d'échelle. Voir aussi MacCulloch [1978] pour des considérations sur le compromis entre faible nombre de paramètres requis par les lois stables, par rapport aux cinq paramètres nécessaires aux modèles à sauts comme ceux proposés par Merton [1976] et puissance de modélisation.

¹⁶Voir Walter [2001b] et Lévy Véhel et Walter [2002] pour une discussion sur ces questions statistiques.

¹⁷Voir aussi Mandelbrot [1997], p. 51, et pp 64-66.

concentrer l'analyse statistique sur ces seules queues de distribution : c'est la redécouverte de la théorie des valeurs extrêmes. En effet, au lieu de considérer l'ensemble de la distribution empirique des rentabilités, on peut ne s'intéresser qu'à ses valeurs extrêmes. Comme le faisait observer Mandelbrot dès 1967, "la loi de Pareto est invariante par rapport à la considération du maximum", et ainsi la recherche d'une propriété d'invariance sur les marchés peut emprunter le chemin de l'analyse des grandes variations boursières.

En 1983, à la suite des difficultés expérimentales rencontrées avec le modèle i.i.d.- α -stable global, DuMouchel [1983] proposa, sans faire a priori d'hypothèse sur l'invariance d'échelle globale, de "laisser les queues de distribution parler d'elles-mêmes"¹⁸. Pour cela, DuMouchel avait redécouvert la distribution de Pareto généralisée introduite par Pickands [1975], et dont la fonction de répartition est

$$G_{\xi,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\sigma)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\sigma) & \xi = 0 \end{cases} \quad (32)$$

avec

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\sigma/\xi & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

où σ est un paramètre d'échelle, et $\xi > 0$ un paramètre de "forme" de la distribution. Plus précisément, ξ est un indice de poids des queues de distribution. Quand $\xi > 0$, la distribution est à queue épaisse. Plus ξ augmente, plus la queue de distribution s'épaissit. Les cas $\xi \leq 0$ correspondent à des distributions à queue fine. Le cas $\xi = 0$ correspond à la présence de queues de distribution exponentielles, telles que les gaussiennes. Dans le cas où la distribution est stable d'exposant caractéristique $\alpha < 2$ (invariance d'échelle), alors $\alpha = 1/\xi$.

Il est remarquable d'observer l'inversion de perspective qui relie Mandelbrot et DuMouchel : tandis que, pour Mandelbrot, les lois de Pareto avaient été à l'origine de la recherche d'une invariance d'échelle globale sur les variations boursières, conduisant au modèle i.i.d.- α -stable global, pour DuMouchel au contraire, l'échec apparent du modèle i.i.d.- α -stable global devait inciter la recherche à un repli sur la loi de Pareto, sans l'invariance globale recherchée par Mandelbrot. C'était d'une certaine manière une invariance par rapport aux seuls extrêmes, ou modèle i.i.d.-max-stable. De la même manière, Mitnik et Rachev [1989] ont proposé de remplacer l'invariance d'échelle sur la sommation des variables i.i.d.- α -stables par une autre structure d'invariance, l'invariance par rapport au minimum

$$a_n \min_{1 \leq i \leq n} X_i + b_n \equiv X_1 \quad (33)$$

dans lequel la propriété de stabilité par addition est remplacée par la propriété de stabilité pour une valeur extrême, le minimum.

Un troisième courant de pensée parvint à la même conclusion, issu d'un autre milieu scientifique que la recherche en finance, celui des physiciens qui travaillaient sur la mise en évidence de comportements en *lois de puissance* dans les milieux désordonnés. Une densité de probabilité $P(x)$ d'une variable aléatoire X admet un comportement asymptotique en loi de puissance d'exposant $1 + \alpha$ si

$$P(x) \simeq C \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} \quad \text{quand } x \rightarrow \pm\infty \quad (34)$$

où C dépend de α . Or la loi de Pareto est précisément une distribution en loi de puissance. Le courant physicien poussait donc l'analyse statistique des fluctuations boursières dans la direction des lois de Pareto.

Tous ces courants se rejoignirent et aboutirent à la redécouverte en finance, dans les années quatre-vingt dix, de la théorie des valeurs extrêmes¹⁹, c'est-à-dire à la mise en évidence d'invariance par rapport à la considération des maxima et des minima dans un contexte i.i.d.

¹⁸DuMouchel [1983], p. 1025.

¹⁹Sur l'application de la théorie des valeurs extrêmes en finance, voir Longin [1993, 1995, 1996, 2000].

5.2.4 Du modèle i.i.d.-max-stable au modèle i.i.d. non stable

Finalement, vers le début des années quatre-vingt dix, la recherche en finance se tourne vers les processus de Lévy non stables, qui avaient été proposés dès 1965 par Samuelson. Ces processus définissent la dynamique des variations boursières sous la forme très générale introduite dans l'équation (19) que l'on rappelle

$$S_t = S_0 \exp(L_t)$$

où L_t est un processus de Lévy quelconque, comportant éventuellement une dérive.

Les processus de Lévy forment une classe de processus aléatoires définis par leur propriété fondamentale simple d'avoir des accroissements qui soient indépendants et stationnaires (i.i.d.) : en temps discret, ce sont en fait des marches au hasard non gaussiennes²⁰. Ils sont continus en probabilité, et l'on peut toujours en choisir une version dont les trajectoires sont "cadlag" c'est-à-dire continues à droite et ayant une limite à gauche en chaque point. Ce sont également des processus de Markov. Le mouvement brownien, c'est-à-dire le modèle standard de la finance, en est l'exemple typique bien connu et sa généralisation par des processus de Lévy était donc naturelle.

Bien qu'ayant été d'abord explorée sous la forme plus classique de processus mixtes (diffusion avec sauts ou processus de Poisson composé) par Press [1967] et Merton [1976], c'est-à-dire de processus dans lesquels les taux d'arrivée des sauts étaient *finis*, la généralisation du modèle standard par des processus de Lévy généraux (les taux d'arrivée des sauts sont *non finis*) fut le fait des travaux de Barndoff-Nielsen [1995, 1997, 1998], Eberlein et Keller [1995], Eberlein et Prause [1998], Prause [1999] et Raible [2000].

Ces processus peuvent être caractérisés par la seule connaissance de la loi de distribution d'une seule de leurs variables aléatoires et, en cela, on dit que les distributions sont *infiniment divisibles*. Se pose alors la question de pouvoir caractériser de manière simple une distribution infiniment divisible et le processus de Lévy qui lui correspond. Cette question a été résolue en terme de fonction caractéristique, c'est-à-dire de transformée de Fourier de la densité. La fonction caractéristique de toute distribution infiniment divisible peut s'exprimer de manière explicite, simple et concise, et l'on peut donc spécifier un choix de distribution et de processus par le choix de la fonction caractéristique.

La forme explicite de cette fonction caractéristique est due à Lévy-Khintchine. Elle a été déterminée et démontrée de manière probabiliste par Lévy au début des années trente. Soit L_1 la variable aléatoire servant à caractériser le processus de Lévy. Dans ce cas, on a

$$E(\exp(iuL_1)) = \exp\left(iub - \frac{1}{2}cu^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux) \nu(dx)\right) \quad (35)$$

où :

$$\begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R}^+ \\ \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) < +\infty \end{cases}$$

Cette formule dépend de trois paramètres : b , c et ν . Le paramètre b correspond à une simple dérive linéaire déterministe, c représente la partie diffusive (brownienne) du processus²¹, et ν est une mesure, appelée couramment mesure de Lévy, qui décrit l'arrivée des sauts. Cette mesure est centrale pour tout processus de Lévy puisque l'originalité d'un tel processus réside dans ses sauts.

²⁰On les appelle ainsi souvent des "PAIS" - processus à accroissements indépendants et stationnaires. Pour plus de détails, voir Le Courtois et Walter [2003].

²¹On peut noter que la partie continue d'un processus de Lévy ne peut donc être qu'un mouvement brownien arithmétique.

Par analogie avec l'écriture usuelle de la dynamique boursière sous la forme d'une équation différentielle stochastique, on peut écrire ce modèle de fluctuations boursières de la manière suivante :

$$dS_t = S_{t-}(\mu dt + \sigma dL_t) \quad (36)$$

qui représente donc la généralisation la plus forte du modèle standard des variations boursières qui conserve l'hypothèse i.i.d., et qui est apparue à peu près un siècle après le modèle de Bachelier.

5.3 Le spectre de la mémoire longue des marchés

5.3.1 La mémoire longue sur les rentabilités : le camp du diable

L'hypothèse i.i.d. conduit à des *relations scalantes* caractéristiques sur les paramètres des distributions empiriques. En particulier, on a vu que, pour le modèle standard, on doit avoir la relation (15) dite "loi en racine carrée du temps", et qui est

$$\sigma(n\tau) = n^{1/2}\sigma(\tau)$$

où $\sigma(\tau)$ est la volatilité à l'échelle de résolution τ du marché examiné. De la même manière, dans le modèle standard, on doit faire apparaître une relation d'échelle sur le coefficient d'aplatissement ou kurtosis K qui est décrite par l'équation

$$K(n\tau) = \frac{K(\tau)}{n} \quad (37)$$

où $K(\tau)$ est le coefficient d'aplatissement à l'échelle de résolution τ du marché. Ces relations scalantes sont à l'origine d'une reconsidération de l'hypothèse i.i.d. dans la littérature de recherche financière.

En effet, à partir de la loi d'échelle sur l'écart-type, on peut écrire très simplement que, si le modèle i.i.d.-2-stable est vérifié, on doit avoir l'égalité

$$\frac{\sigma^2(n\tau)}{n\sigma^2(\tau)} = 1 \quad (38)$$

qui a été à l'origine de tests connus sous le nom de tests de *ratio de variance*. Les tests de ratio de variance chercheront alors à mettre en évidence la validation ou la non validation de l'égalité (38). Or, précisément, les résultats des travaux de Summers [1986], Fama et French [1988], Poterba et Summers [1988] et DeBondt et Thaler [1989] parmi d'autres, semblaient mettre en évidence des phénomènes de retour à la moyenne sur horizon long, invalidant la valeur théorique 1 du ratio de variance, et donc contrevenant à l'hypothèse i.i.d.-2-stable. Que fallait-il abandonner : l'hypothèse i.i.d. ou la normalité?

C'est alors que certains résultats statistiques anciens, qui remontaient aux années soixante, et qui faisaient apparaître des phénomènes de corrélations à longue portée sur plusieurs séries économiques, furent reconsidérés. Ces résultats avaient conduit les chercheurs à s'intéresser au phénomène dit "de mémoire longue". En notant $\gamma(h) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h})$ la fonction d'autocovariance usuelle et $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$ la fonction d'autocorrélation associée, l'indépendance linéaire classique (par exemple des variations boursières) impliquait que $\rho(h)$ devait être géométriquement bornée, soit $\rho(h) \leq cr^{-h}$, $c > 0$. Or il était apparu que, dans certains cas, on obtenait parfois une décroissance de type hyperbolique $\rho(h) \sim ch^{2H-2}$ avec $c > 0$ et $0 < H < 1$, cette décroissance caractérisant un phénomène de "mémoire longue" ou "dépendance longue".

Ce phénomène de longue mémoire avait été observé par Adelman [1965] et Granger [1966], ce dernier le décrivant d'ailleurs comme "caractéristique des fluctuations des variables économiques" et avait conduit Mandelbrot [1965] à redécouvrir la loi de Hurst [1951] en introduisant la notion de "processus

homothétique à soi”, devenu par la suite (Mandelbrot et Van Ness [1968]) le mouvement brownien fractionnaire (MBF, ou “FBM” en langue anglaise) dont les accroissements sont autosimilaires d’exposant H et admettent comme fonction d’autocovariance

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \left(|h+1|^{2H} - 2|h|^{2H} + |h-1|^{2H} \right)$$

Mandelbrot appela cet effet de dépendance longue “effet Joseph” en référence aux cycles lents et apériodiques évoqués dans l’épisode biblique de l’histoire de Joseph à propos des fluctuations des récoltes égyptiennes (Mandelbrot [1973c]). À défaut de référence biblique, et en ce que cet effet de mémoire longue venait invalider l’hypothèse d’efficacité informationnelle qu’il avait forgée dans les années soixante, Fama [1991], pourtant élève de Mandelbrot, y vit plutôt la trace du diable et n’hésita pas à qualifier les partisans de cette hypothèse de “camp du diable” (p. 1602). Plusieurs travaux de recherche avaient en effet fait apparaître des valeurs de H supérieures à 0,5 indiquant la présence d’une mémoire longue sur les marchés, ce qui semblait corroborer les observations sur le comportement “anormal” des rentabilités sur longues périodes et la violation du ratio de variance. Les tests de mémoire longue utilisés dans les travaux de recherche utilisaient la statistique R/S de Hurst améliorée par Mandelbrot [1972].

Parallèlement, et depuis les années soixante-dix, les limites économétriques des processus ARMA (p, q) et ARIMA (p, d, q) stationnaires dans la description des séries financières, avaient conduit progressivement à une généralisation de ces modèles en introduisant un degré de différenciation d non entier (voir annexe A.5). Les courants ARFIMA et MBF se rejoignirent et conduisirent à la recherche de mémoire longue sur les rentabilités.

Cette recherche de mémoire longue sur les rentabilités périodiques fut, dans l’ensemble, décevante. En effet, en 1991, Lo [1991] a montré que cette statistique R/S est en réalité également sensible aux effets de mémoire courte. Lo prend comme exemple un processus AR(1), et fait apparaître que, dans ce cas, le résultat de la statistique R/S peut être biaisé à la hausse de 73%. Lo a alors proposé une statistique R/S modifiée, en ajoutant au dénominateur des termes d’autocovariances pondérées, et refait des tests avec cette nouvelle statistique. Les résultats furent stupéfiants. Il apparaissait alors que les nouvelles valeurs de H obtenues étaient voisines de 0,5 et que l’hypothèse de mémoire longue au sens de la persistance du MBF était intenable.

Ainsi par exemple, Corazza *et al.* [1997], Batten *et al.* [1999], Howe *et al.* [1999] ont effectivement vérifié que l’analyse classique R/S donne des valeurs de H supérieures à 0,5 mais que la statistique R/S modifiée de Lo [1991] fait chuter les valeurs de H vers 0,5. Howe *et al.* [1999] ont ce jugement en forme de conclusion radicale sur les tests de mémoire longue : “ce qui est le plus surprenant dans ce résultat, est moins l’absence de mémoire longue en tant que telle, que *le changement radical de jugement que l’on est conduit à opérer lorsqu’on utilise la statistique modifiée de Lo* (souligné par nous)”. Des travaux français, comme ceux de Mignon [1998] ont confirmé que les tests de mémoire longue étaient délicats à interpréter, et ne pouvaient pas servir à rejeter l’hypothèse usuelle d’indépendance des variations boursières successives²². Ainsi, la violation du modèle i.i.d.-2-stable par les résultats des tests de ratio de variance semblaient appeler une autre interprétation que celle de la mémoire longue des rentabilités.

5.3.2 La mémoire longue sur les volatilités

C’est alors qu’on se tourna vers les autres cas de dépendance inclus dans la définition (20) de la fonction $C(h)$: les cas $f(x) = x^2$ et $f(x) = |x|$, c’est-à-dire une mesure de dépendance de la volatilité des cours. La recherche s’intéressa d’abord à la mémoire courte : ce fut le courant de modélisation ARCH. Comme toutes ces recherches sont aujourd’hui très connues²³, l’on se contente ici d’en donner l’intuition

²²Voir aussi Lardic et Mignon [1996].

²³Voir une présentation des ARCH dans Guégan [1994] ou Gouriéroux [1997].

fondamentale au moyen de la présentation faite plus haut, en voulant faire apparaître la logique du développement ARCH plutôt que sa technique spécifique.

On a vu que le choix de modélisation à effectuer consistait, soit à maintenir l'hypothèse i.i.d. et à abandonner celle de normalité, soit à maintenir l'hypothèse de normalité et à introduire des termes d'aléas $\varepsilon_k = \sigma_k u_k$ non i.i.d. : c'est la démarche suivie par Engle en 1982, qui ouvre la voie de la recherche d'une dépendance courte sur les volatilités. Par exemple, dans le modèle ARCH(p), on spécifie la dépendance sur σ_k de la manière suivante :

$$\sigma_k^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{k-i}^2 = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_k^2 \quad (39)$$

où $A(L)$ est un polynôme autorégressif d'ordre p . On montre que ce type de modélisation permet de faire apparaître sur les distributions *marginales* des rentabilités périodiques des valeurs de K supérieures à leur valeur théorique dans le cas gaussien. Mais l'analyse des résidus de ce type de modèle laisse encore apparaître une trop forte leptokurticité. On peut alors généraliser la relation (39) en introduisant également, comme l'a fait Bollerslev en 1986, un terme autorégressif sur la variance elle-même : c'est l'intuition du modèle ARCH généralisé (ou GARCH (p, q)) qui suppose que

$$\sigma_k^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{k-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{k-i}^2 = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_k^2 + B(L)\sigma_k^2 \quad (40)$$

et l'on voit que l'on a ajouté une spécification sur la dépendance de la variance à son passé.

Cette idée d'adjonctions successives de spécifications conduira à tous les développements possibles au cours des quinze années qui vont suivre les travaux de Engle et Bollerslev. Par exemple, si le modèle GARCH (p, q) permet de rendre compte d'une persistance de volatilité au cours du temps, on ne considère cependant pas dans ce type de modèle qu'il puisse exister une relation entre le niveau de volatilité des cours et leur rentabilité moyenne. D'où l'intuition d'une nouvelle généralisation de la représentation ARCH à la prise en compte de la moyenne, qui conduira au modèle ARCH-M de Engle *et al.* [1987], puis à sa généralisation GARCH-M, et ainsi de suite.

L'une de ces adjonction présente une particularité intéressante. En effet, les représentations ARCH avaient été conçues et clairement présentées à la recherche et aux professionnels comme des manières élégantes d'éviter le recours à l'hypothèse i.i.d.- α -stable de Mandelbrot. Cette motivation apparaît par exemple dans ce commentaire de 1993 qui précise bien ces enjeux :

“Les modèles ARCH nous ont donc permis de répondre en grande partie à ce problème d'épaisseur des queues de probabilité, tout en gardant un cadre gaussien qui s'avère bien plus manipulable que celui des lois α -stables.” (Elie *et al.* [1993, p. 97]).

Or, par un retour de l'histoire (une ruse de l'histoire), les développements internes de la représentation ARCH pour la modélisation du phénomène de persistance sur la variance (techniquement, la présence d'une racine unité sur le polynôme de retard du modèle GARCH) conduiront à la mise en place de modélisations IGARCH (1,1), dont la variance marginale est infinie : ce qui revient de fait à retrouver l'hypothèse des lois α -stables.

Finalement, après quinze ans de développements formels de ce modèle de base au moyen d'adjonctions de termes qui le rendaient de moins en moins simple, en complétant dans plusieurs directions la logique initiale du conditionnement de la variance²⁴, on pouvait lire ce commentaire de Gouriéroux et Le Fol [1997, p. 8] :

“Cependant, l'inflation récente de variantes du modèle de base et des terminologies : GARCH, IGARCH, EGARCH, TARARCH, QTARCH, SWARCH, ACD-ARCH, révèle que cette approche semble avoir atteint ses limites (souligné par nous), ne pas pouvoir répondre de façon adéquate à certains questions, ou ne pas permettre de reproduire certains faits stylisés.”

²⁴Voir une revue de synthèse dans Bollerslev *et al.* [1992], Palm [1996], ou Pagan [1996].

type de modèle	auteur(s) de référence
ARCH	Engle [1982]
GARCH	Bollerslev [1986]
IGARCH	Engle et Bollerslev [1986]
TARCH	Zakoian [1994]
EGARCH	Nelson [1991]
APARCH	Ding, Granger et Engle [1993]
FIGARCH	Baillie, Bollerslev et Mikkelsen [1996]
FGARCH	Engle, Ng et Rothschild [1990]
OGARCH	Alexander et Chibumba [1997]
GOGARCH	van der Weide [2002]
CCC-GARCH	Bollerslev [1990]
TVC-GARCH	Tse et Tsui [1998]

TAB. 9 – La prolifération des types de modélisation ARCH

Ces “faits stylisés” concernent, en particulier, la décroissance hyperbolique de la corrélation des volatilités et la leptokurticité résiduelle²⁵. Le tableau 9 donne une illustration de la prolifération endémique de la variété des terminologies (et donc des modèles) de la famille des représentations ARCH.

En effet, d’autres anomalies scalantes étaient apparues sur les relations scalantes théoriques du modèle i.i.d.-2-stable. On a vu que la relation scalante théorique (37) du coefficient d’aplatissement K était

$$K(n\tau) = \frac{K(\tau)}{n}$$

or, par exemple, Cont [1997] a obtenu une relation du type

$$K(n\tau) = \frac{K(\tau)}{n} + \frac{6(K(\tau) + 2)}{(2 - \alpha)(1 - \alpha)n^\alpha}$$

qui illustre le phénomène observé de décroissance anormale de la kurtosis (voir tableau 14 annexe A.8) mais qui ne peut s’expliquer qu’en faisant l’hypothèse de corrélations en loi de puissance du type $\gamma(\tau) \simeq \gamma_0\tau^{-\alpha}$ sur la volatilité, où α est l’exposant qui règle la portée de la mémoire longue. Cette sorte de résultat indique qu’il faut chercher du côté d’une mémoire longue sur la volatilité pour rendre compte de certains phénomènes observés, et réintroduisait les *lois de puissance*, non plus sur les grandes valeurs des rentabilités, mais sur les corrélations de la volatilité.

²⁵Voir Lévy Véhel et Walter [2002], pp 38-41 pour un commentaire sur la limite des modélisations ARCH pour l’intégration de toute la leptokurticité.

A Annexes

A.1 La marche au hasard et le modèle standard des fluctuations boursières

On rappelle brièvement l'équivalence entre le modèle de marche au hasard et l'équation du modèle standard de la finance de marché. Pour plus de détails sur les aspects probabilistes du modèle standard, on pourra consulter les manuels de Dana et Jeanblanc [1998], Karatzas et Shreve [1998], Föllmer et Schied [2002].

L'hypothèse de la marche au hasard sur le processus $\{R_k, k \in \mathbf{N}\}$ se traduit par la relation

$$\Delta R_k = \mu \Delta t_k + \varepsilon_k \quad (41)$$

avec ε_k bruit blanc. Si ε_k suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$, alors on peut écrire la relation (41) comme

$$\Delta R_k = \mu \Delta t_k + \sigma u_k \sqrt{\Delta t_k} \quad (42)$$

où u_k suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ avec les u_k i.i.d., et où μ et σ représentent les rentabilité espérée et volatilité de l'actif. En posant $\Delta S_{t_k} = S_{t_k} - S_{t_{k-1}}$, et par définition de ΔR_k , ceci conduit à

$$\Delta S_{t_k} = S_{t_{k-1}} \left(\mu \Delta t_k + \sigma u_k \sqrt{\Delta t_k} \right)$$

qui définit une équation aux différences stochastique sur le cours S_{t_k} pour $t_k \in \mathbf{N}$. Soit $\{W_t, t > 0\}$ un mouvement brownien standard, c'est-à-dire $W_0 = 0$, $E(W_1) = 1$ et $E(W_1^2) = 1$. Notons $\Delta W_{t_k} = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$. Par définition, $u_k \sqrt{\Delta t_k} = \Delta W_{t_k}$ et l'équation précédente s'écrit

$$\Delta S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (\mu \Delta t_k + \sigma \Delta W_{t_k}) \quad (43)$$

qui définit une modélisation de la dynamique des cours boursiers sur la période $[0, T]$ associée à une *représentation brownienne des variations des cours*.

Dans le cas où la période Δt_k devient "très petite" (formellement : quand $\Delta t_k \rightarrow 0$) on peut écrire (43) de la manière suivante :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \quad (44)$$

L'équation précédente admet pour solution

$$S_t = S_0 \exp \{ (\mu - \sigma^2/2) t + \sigma W_t \} \quad (45)$$

qui est le *modèle standard* des variations boursières, et qui définit un mouvement brownien géométrique sur les cours des actifs.

A.2 Le modèle standard et la propriété de martingale sur les prix actualisés

Dans l'équation (45), on sépare les termes sous l'exponentielle de la manière suivante

$$S_t = S_0 \exp(\mu t) \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$$

pour isoler $\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$, qui est une martingale. Donc $S_t^* = S_t e^{-\mu t}$ qui est le processus des cours actualisés de l'actif est une martingale. C'est-à-dire que, pour tout actif, on a

$$E_0(S_t^*) = S_0^*$$

et plus généralement, pour tout $u > t$,

$$E_t(S_u^*) = S_t^* \quad (46)$$

qui définit la relation de martingale sur les prix actualisés.

On peut retrouver cette relation de martingale sur le modèle de marche au hasard (temps discret) des rentabilités cumulées, en considérant le processus aléatoire $\{R_k, k \in \mathbb{N}\}$. Ce processus est défini par l'équation aux différences stochastique

$$R_k = R_{k-1} + \mu\Delta t_k + \varepsilon_k \quad R_0 = 0 \quad (47)$$

avec ε_k bruit blanc gaussien.

On introduit un second processus aléatoire que l'on note $R^* = \{R_k^*, k \in \mathbb{N}\}$ où $R_k^* = R_k - \mu(t_k - t_0)$. Soit $\mathcal{F}_k = \sigma(R_0^*, R_1^*, \dots, R_k^*)$. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une filtration et le processus R^* est adapté à \mathcal{F} .

De l'équation aux différences stochastique (47), on obtient

$$\begin{aligned} R_k - \mu(t_k - t_0) &= R_{k-1} + \mu(t_k - t_{k-1}) + \varepsilon_k - \mu(t_k - t_0) \\ &= R_{k-1} + \mu(t_{k-1} - t_0) + \varepsilon_k \end{aligned}$$

ce qui conduit à la nouvelle équation aux différences stochastique

$$R_k^* = R_{k-1}^* + \varepsilon_k \quad R_0^* = 0 \quad (48)$$

En calculant l'espérance conditionnelle de (48), il vient

$$\begin{aligned} E(R_{k+1}^*/\mathcal{F}_k) &= E(R_k^*/\mathcal{F}_k) + E(\varepsilon_{k+1}/\mathcal{F}_k) \\ &= R_k^* + E(\varepsilon_{k+1}/\mathcal{F}_k) \end{aligned}$$

Comme les ε_k sont i.i.d., alors \mathcal{F}_k ne contient pas d'information sur l'innovation ε_{k+1} et

$$E(\varepsilon_{k+1}/\mathcal{F}_k) = E(\varepsilon_{k+1}) = 0$$

ce qui implique que

$$E(R_{k+1}^*/\mathcal{F}_k) = R_k^*$$

et par induction

$$E(R_{k+s}^*/\mathcal{F}_k) = R_k^* \quad (49)$$

qui montre que le processus R_k^* est une martingale.

A.3 L'efficacité informationnelle des marchés et la notion de filtration

La modélisation de l'idée selon laquelle les prix reflètent correctement toute l'information disponible et pertinente introduit dans la dynamique des cours boursiers la notion de l'intégration de l'information *nouvelle* arrivant sur le marché. Cette modélisation nécessite l'utilisation de la notion de *filtration*, pour la description du processus d'arrivée de l'information nouvelle et la résolution de l'incertitude au cours du temps, et de celle d'*espérance conditionnelle* pour l'intégration de cette information dans les cours. On présente ci-après l'intuition de cette modélisation en choisissant le cas simple d'un temps discret et d'un nombre fini d'états du monde et en l'appliquant ensuite à la reformulation de la définition de Fama [1970]. Pour plus de détails sur cette notion cruciale dans la formalisation du concept d'efficacité informationnelle, on pourra consulter, outre les manuels indiqués précédemment, celui de Pliska [1997] plus particulièrement développé en temps discret.

Soit une modélisation multipériodique d'un marché entre deux dates $t = 0$ (initiale) et $t = T$ (finale). Pour toute partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$, il y a $n + 1$ dates de cotations et $K < \infty$ états du monde possibles. La résolution de l'incertitude au cours du temps (passage de l'incertain au connu) est décrite par une suite de partitions correspondant à chaque date t_k , notées \mathcal{P}_k , dont l'ensemble forme la *structure d'information* du modèle du marché, et qui représente la manière dont les états du monde se révèlent aux opérateurs au fil du temps. On a :

- A la date initiale, ou date 0, $\mathcal{P}_0 = \{\{\omega_1, \dots, \omega_K\}\} = \{\Omega\}$
- A la date finale, ou date T , $\mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_K\}\}$
- Pour toute date intermédiaire, ou date t_k , \mathcal{P}_{k+1} est plus fine (plus précise) que \mathcal{P}_k .

Une filtration \mathcal{F}_k en date t_k représente *toute l'information* contenue en date t_k et est égale à l'ensemble de *toutes* les partitions possibles ("tribus d'événements") aux dates antérieures ou égales à t_k . Cela veut dire que les opérateurs *gardent en mémoire* l'information passée disponible, et que, précisément, *toute* cette information est bien utilisée au moment de l'achat ou de la vente, d'où la notion d'efficacité informationnelle. La *résolution de l'incertitude* au cours du temps peut, ou non, être la même pour tous les opérateurs et acteurs des marchés.

La filtration qui modélise l'évolution de l'information est

- A la date initiale, ou date $0 = t_0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \mathcal{P}_0\} = \{\emptyset, \Omega\}$
- A la date finale, ou date $T = t_n$, $\mathcal{F}_n = \{\emptyset, \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n\}$

Dans le cas où l'information ne porte que sur les seuls cours cotés, la filtration est dite filtration "naturelle" (notée \mathcal{F}_t^S) du processus aléatoire $S = \{S(t_k), k \in \mathbf{N}\}$ des cours, soit

$$\mathcal{F}_k^S = \sigma(S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_k})$$

L'information disponible représente tous les cours passés à la date t_k . \mathcal{F}_0^S représente l'appréhension la moins précise du futur (tous les cours possibles qui peuvent être cotés sont présents sans que l'on puisse savoir à l'avance quel cours sera coté), tandis que \mathcal{F}_n^S correspond à la connaissance en date $t_n = T$ de la cotation du cours. Comme l'on ne perd pas d'information entre deux dates intermédiaires (existence de graphiques boursiers disponibles aisément pour tous les intervenants), on exprime cette croissance dans l'information par la relation

$$\mathcal{F}_0^S \subseteq \mathcal{F}_1^S \subseteq \mathcal{F}_2^S \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n^S \quad (50)$$

qui permet de définir la notion d'intégration de l'information dans les cours au sens de l'efficacité informationnelle.

On peut alors écrire la définition de Fama en utilisant la notion de filtration :

$$E(S_{t_{k+1}}/\Phi_{t_k}) = S_{t_k} (1 + E(\Delta R_{k+1}/\Phi_{t_k})) \quad (51)$$

où Φ_{t_k} est défini de la manière suivante.

Efficacité faible Dans ce cas, Φ_{t_k} représente l'information publique disponible la plus "pauvre", ou la moins couteuse, qui est la série des cours passés des titres cotés. Du point de vue de la modélisation, Φ_{t_k} représente la filtration naturelle du processus aléatoire $S = \{S_{t_k}, t_k \in \mathbf{N}\}$ des cours, soit

$$\Phi_{t_k} = \mathcal{F}_k^S = \sigma(S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_k})$$

Efficacités semi-forte et forte Dans ce cas, Φ_{t_k} représente l'information précédente, augmentée de l'information provenant des sociétés et accessible gratuitement au public (forme semi-forte) et de toutes les études utilisées par les professionnels des marchés (forme forte). Du point de vue de la modélisation, Φ_{t_k} représente la filtration naturelle du processus aléatoire $S = \{S_{t_k}, t_k \in \mathbf{N}\}$ des cours, augmentée ("grossie") par une variable autre que les cours, variable qui représente les éléments financiers *exogènes* au marché (par exemple propres aux sociétés comme des dividendes, ou propres à l'économie comme des indicateurs macro-économiques), et qui est également publique, soit

$$\Phi_{t_k} = \mathcal{F}_k^{SY} = \mathcal{F}_k^S \vee \sigma(Y)$$

A.4 L'efficacité informationnelle des marchés et l'idée d'une juste valeur

Le concept d'efficacité informationnelle contient une double question, correspondant à une sémantique forte (notion de juste prix) et à une sémantique faible (notion d'information intégrée dans le prix). La question implicite posée par l'institution intellectuelle de la sémantique forte du concept d'efficacité informationnelle est simple et l'on peut la compacter dans la formulation suivante : le juste prix est-il accessible par l'intégration de l'information ? Si la réponse est positive, cela signifie que, au moment de l'équilibre, lorsque le prix de l'échange est "market clearing" (littéralement, "vide le marché" des ordres d'achats et de ventes, des intentions d'échange, de l'échange en puissance), les actifs cotés sont correctement évalués, et l'on a la relation

$$\boxed{\text{valeur de marché} = \text{juste valeur} = f(\text{information sur l'actif})}$$

où f représente une *fonction d'évaluation* de la société ou de l'actif négocié sur le marché.

La notion de "juste valeur" est aussi ancienne qu'ambiguë : énigmatique pour les sceptiques, équivoque pour les financiers, incertaine pour les comptables, voire louche pour les partisans d'un libéralisme mal compris, elle est au minimum (à l'instar des animaux amphibies qui peuvent vivre à la fois dans l'air et dans l'eau) amphibologique, dans la mesure où son double sens renvoie simultanément aux agents qui interviennent dans l'échange, et à la chose échangée. Sans entrer dans un débat éthique sur la représentativité des fondamentaux de l'économie ou des sociétés par les prix de marché, nous nous limitons ici à la définition donnée par la norme comptable internationale IAS 39 sous la dénomination de "fair value". Cette norme IAS 39, approuvée en 1998 par le comité des instances comptables internationales IASC, définit très précisément ce qu'il faut entendre par juste valeur.

Définition 9 (Juste valeur selon la norme IAS 39)

La juste valeur d'un actif est le montant pour lequel il pourrait être échangé entre des parties bien informées et bien disposées, dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale.

Généralement, il existe toujours un écart entre les cours boursiers des actions sur le marché et les valeurs des sociétés qui sont estimées à partir des données provenant des entreprises ; cet écart est considéré comme normal et naturel (car il existe toujours des informations sur les entreprises non disponibles sur le marché). Mais, dans certains cas, lorsque cet écart prend des proportions importantes, quand il apparaît un éloignement de plus en plus grand entre des critères d'investissement des opérateurs et la valeur intrinsèque des sociétés, on parle de "bulle spéculative", voire d'exhubérance irrationnelle (Shiller [2000]). On observe alors des situations dans lesquelles on a

$$\boxed{\text{bulle spéculative} = \text{écart de valeur}}$$

où il semble que le marché n'a pas rempli son rôle de diffusion de l'information, comme si le mécanisme de l'échange s'était révélé inefficace, comme si quelque chose avait parasité ce mécanisme. Ce qui conduit à se poser la question de la valeur de l'outil "marché" dans cette fonction de révélation de l'information. L'idée principale de l'efficacité informationnelle des marchés peut être résumée dans cette interrogation précédente, en sorte que l'on peut en donner la définition compacte suivante :

Définition 10 (Efficacité informationnelle d'un marché)

Un marché boursier est dit informationnellement efficace s'il transforme correctement de l'information en prix.

C'est-à-dire, en d'autres termes : le marché fonctionne-t-il bien ?

De ce point de vue, un marché peut être plus ou moins efficace (le prix peut intégrer plus ou moins d'information), dans la mesure où il peut exister une déperdition (un bruit) dans ce processus de transformation de l'information et une question pertinente pourrait être celle du niveau d'efficacité du marché considéré, c'est-à-dire le "rendement" du marché à transformer de l'information. Le concept d'efficacité totale (à 100%) peut alors être utilisé comme étalon pour apprécier la qualité de l'outil "marché" à transformer de l'information, et à comparer les marchés entre eux selon ce critère. Certains marchés peuvent être efficaces à 90%, d'autres à 20%. Ceci conduit à une remarque terminologique. On utilise le terme "efficacité informationnelle" plutôt que "efficacité informationnelle", car le terme "efficacité" rend mal

compte de l'analogie physique contenue dans le concept. En utilisant plutôt le terme "efficacité" (terme qui avait été choisi au moment de l'introduction en France du concept, puis abandonné par la suite pour être remplacé par l'expression "efficience"), on voit que l'on qualifie un marché par son efficacité à transformer de l'information en argent de la même manière que, par exemple, l'efficacité d'un moteur est sa capacité à transformer l'énergie contenue dans l'essence en travail utile.

A.5 La marche au hasard et les représentations ARIMA et ARFIMA

On présente ci-après quelques rappels de base sur les séries chronologiques à temps discret. Cette présentation est simplement destinée à aider le lecteur non familier avec ces représentations à les situer pour la bonne compréhension de l'article. Pour plus de détails, on pourra consulter les deux manuels très complets de Gouriéroux et Monfort [1990] et Guégan [1994].

- On rappelle qu'un processus $\{X_k, k \in \mathbf{N}\}$ est dit
- de second ordre si pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $E(X_k^2) < \infty$
 - stationnaire au sens strict si la loi de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est la même que celle de $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ pour tout n, t_1, \dots, t_n, h
 - stationnaire au sens faible (ou stationnaire au second ordre) si les deux premiers moments sont invariants dans le temps, c'est-à-dire que, pour tout $(k, h) \in \mathbf{N}^2$, on a $E(X_k) = m$ et $\text{cov}(X_k, X_{k+h}) = \gamma(h)$.

Un tel processus admet donc une loi qui est invariante par changement de l'origine des temps : la fonction d'autocovariance n'est définie par un seul paramètre, le décalage h , ceci indépendamment de k . En particulier, les variables X_k ont toutes la même variance égale à $\gamma(0)$: c'est la propriété dite d'homoscédasticité. On définit la fonction d'autocorrélation linéaire $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$.

L'exemple le plus simple de processus stationnaire au second ordre est donné par le *bruit blanc gaussien*. C'est une suite de variables aléatoires $\{\varepsilon_k, k \in \mathbf{N}\}$ de moyennes nulles $E(\varepsilon_k) = 0$, non corrélées, soit $\gamma(h) = 0$ pour tout $h \neq 0$, et de même variance (non nécessairement égale à 1) $\text{var}(\varepsilon_k) = \sigma^2 = \gamma(0)$. Les trajectoires des bruits blancs peuvent prendre des formes très variées.

Il est commode d'utiliser la notation $LX_k = X_{k-1}$, et L (pour "lag") est appelé dans l'analyse économétrique l'opérateur de décalage, ou opérateur retard. Cet opérateur est linéaire et inversible, et $L^p X_k = X_{k-p}$. On peut former des polynômes avec l'opérateur retard, appelées polynômes de retard. La *différenciation* d'un processus est l'opération consistant à appliquer au processus le polynôme de retard $\Phi(L) = 1 - L$, tel que $(1 - L)X_k = X_k - X_{k-1} = \Delta X_k$ dans les notations précédentes. Le processus résultant ΔX_k est appelé le processus différencié une fois. On peut généraliser l'opération de différenciation :

$$\begin{aligned} (1 - L)^2 X_k &= (1 - 2L + L^2) X_k \\ &= X_k - 2X_{k-1} + X_{k-2} \\ &= (X_k - X_{k-1}) - (X_{k-1} - X_{k-2}) \\ &= \Delta X_k - \Delta X_{k-1} \end{aligned}$$

et $(1 - L)^2 X_k$ est appelé le processus différencié deux fois, ou processus 2-différencié. Et ainsi de suite. Si le processus X_k n'est pas stationnaire, et que sa différenciée d fois est stationnaire, on dit que X_k est intégré d'ordre d , noté $I(d)$. Un processus stationnaire est donc un processus intégré d'ordre 0, ou $I(0)$. Autrement dit, si le processus X_k est $I(d)$, on a la relation :

$$(1 - L)^d X_k = \varepsilon_k$$

où ε_k est un bruit blanc.

On définit un polynôme autorégressif d'ordre p comme l'expression

$$\Phi(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p$$

où $\varphi_i \in \mathbb{R}$ pour tout i . On appelle processus autorégressif d'ordre p , ou processus AR(p) un processus stationnaire $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ vérifiant la relation

$$\Phi(L)X_k = \varepsilon_k \quad (52)$$

où $\{\varepsilon_k, k \in \mathbb{N}\}$ est un bruit blanc gaussien. Le processus X_k n'est défini qu'implicitement par la relation (52) : on montre qu'une solution n'existe que si toutes les racines du polynôme autorégressif $\Phi(L)$ sont différentes de 1. Dans le cas où il existe une racine unité, le processus n'est plus stationnaire.

Les modèles de processus les plus simples sont les modèles autorégressifs d'ordre 1. L'application du polynôme autorégressif d'ordre 1 au processus X_k donne

$$(1 - \varphi L)X_k = X_k - \varphi X_{k-1} = \varepsilon_k$$

soit

$$X_k = \varphi X_{k-1} + \varepsilon_k \quad (53)$$

qui est le modèle le plus simple de processus autorégressif : le processus AR(1) stationnaire, ou I(0). Quand $\varphi = 1$, on voit que le polynôme de retard $\Phi(L) = 1 - L$ admet 1 comme racine, et l'on se trouve dans un cas particulier intéressant : la relation (53) devient

$$X_k = X_{k-1} + \varepsilon_k \quad (54)$$

qui est une *marche au hasard*. Ce processus est *non stationnaire*, mais sa différenciée d'ordre 1 est stationnaire puisque $(1 - L)X_k = \varepsilon_k$ qui est un bruit blanc. Une marche au hasard est donc un processus intégré d'ordre 1, ou I(1). On voit sur ce cas simple que *l'existence d'une racine unité dans le polynôme de retard est la trace de la non stationnarité* de la série chronologique examinée.

A partir de ce modèle de base, on peut en déduire les quatre formes les plus fréquentes de processus autorégressifs :

- processus autorégressif d'ordre 1 avec constante, ou AR(1) stationnaire

$$X_k = \varphi X_{k-1} + \beta + \varepsilon_k \quad (55)$$

- auquel correspond pour $\varphi = 1$, la marche au hasard avec dérive, ou I(1) non stationnaire

$$X_k = X_{k-1} + \beta + \varepsilon_k \quad (56)$$

- processus AR(1) stationnaire avec tendance déterministe

$$X_k = \varphi X_{k-1} + \beta + \gamma k + \varepsilon_k \quad (57)$$

- auquel correspond pour $\varphi = 1$, la marche au hasard avec tendance déterministe

$$X_k = X_{k-1} + \beta + \gamma k + \varepsilon_k \quad (58)$$

où $|\varphi| < 1$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$.

On introduit la possibilité d'une autocorrélation des aléas au moyen d'un polynôme autorégressif d'ordre q défini comme

$$\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

On appelle processus moyenne mobile d'ordre q , ou processus MA(q) (pour "moving average") un processus stationnaire $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, défini comme

$$X_k = \Theta(L)\varepsilon_k$$

où $\{\varepsilon_k, k \in \mathbf{N}\}$ est un bruit blanc gaussien. En appliquant cette définition aux résidus, on obtient la moyenne mobile d'ordre q sur les résidus $\Theta(L)\varepsilon_k$. La moyenne mobile la plus simple est le comportement autorégressif d'ordre 1. L'application du polynôme autorégressif d'ordre 1 au processus ε_k donne

$$\varepsilon_k = \theta\varepsilon_{k-1} + \eta_k$$

ou les η_k sont i.i.d.-gaussiens.

En rapprochant cette définition de celle des processus autorégressifs, on définit alors le processus ARMA(p, q) comme le processus stationnaire $\{X_k, k \in \mathbf{N}\}$ tel que

$$\Phi(L)X_k = \Theta(L)\varepsilon_k$$

où $\{\varepsilon_k, k \in \mathbf{N}\}$ est un bruit blanc gaussien, et où les racines des polynômes $\Phi(L)$ et $\Theta(L)$ sont toutes différentes de 1. On voit que ARMA($p, 0$) = AR(p) et ARMA($0, q$) = MA(q).

Dans le cas où le polynôme $\Phi(L)$ a une racine unité d'ordre d , on le factorise tel que $\Phi(L) = \varphi(L)(1 - L)^d$ et la représentation ARMA(p, q) s'écrit

$$\varphi(L)(1 - L)^d X_k = \Theta(L)\varepsilon_k$$

Le processus $\{X_k, k \in \mathbf{N}\}$ est appelé autorégressif moyenne mobile intégré d'ordre d , ou ARIMA (p, d, q). Cela veut dire que le processus $(1 - L)^d X_k$ est un ARMA stationnaire.

Lorsque le degré de différenciation d est non entier, avec $0 < d < 1/2$, on définit le processus ARFIMA (p, d, q) de la même manière que le processus ARIMA (p, d, q). L'opérateur de différenciation non entière $\Delta^d = (1 - L)^d$ où Δ^d est alors défini comme

$$\Delta^d = (1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k}{d} L^k$$

où $\binom{k}{d}$ est le coefficient du binôme. Ces processus permettent l'obtention de "mémoire longue" sur les séries chronologiques.

Pour utiliser l'ensemble de valeurs $\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_n$ comme *échantillon* statistique, il est nécessaire que les rentabilités ΔR_k soient i.i.d.. Autrement dit, il est nécessaire de pouvoir écrire que

$$(1 - L)(R_k - k\mu) = \varepsilon_k \quad R_0 = 0$$

avec $\{\varepsilon_k, k \in \mathbf{N}\}$ bruit blanc, qui définit une relation autorégressive de type marche au hasard avec dérive (56) sur le processus des rentabilités $\{R_k, k \in \mathbf{N}\}$.

A.6 Le test d'inertie du marché et l'erreur de Cowles et Jones (1937)

Les conclusions de Cowles et Jones : pas de marche au hasard Au milieu des années soixante, il apparaît un consensus de validation pour l'hypothèse de la marche au hasard. Par rapport à ce consensus, l'étude de Cowles et Jones de 1937 semble introduire un contre-exemple, en faisant apparaître ce qui semble représenter une non indépendance des rentabilités périodiques successives, appelée par Cowles et Jones une "inertie" des variations boursières. Le test de Cowles et Jones qui exhume cette inertie est décrit par les deux auteurs comme suit²⁶.

²⁶Voir une introduction au contexte dans Walter [1999], pp 180-184.

“La mise en évidence d’une force du marché, de l’inertie des variations boursières successives, peut être entreprise de la manière suivante. Considérons le jeu de pile ou face : la probabilité d’obtenir pile après face (ou face après pile) est de $1/2$. Est-ce le cas dans un marché boursier : peut-on supposer que, à la suite d’une hausse pendant une heure, un jour, une semaine, un mois, ou une année, la probabilité d’une baisse sur une durée similaire soit de $1/2$? Pour répondre à cette question, on a compté les nombres d’élans et de retournements du marché, un élan étant défini comme la succession de deux hausses (ou deux baisses) et un retournement comme la succession d’une hausse suivie d’une baisse ou réciproquement. L’étude du rapport entre le nombre d’élans et le nombre de retournements sera donc le moyen de faire apparaître, si elle existe, l’inertie du marché, et sa significativité sera fournie par les méthodes statistiques usuelles.”(p. 281)

Autrement dit, si les variations boursières sont assimilables à un jeu de pile ou face, alors la probabilité que le marché monte pendant une durée déterminée après qu’il ait baissé sur la même durée (et réciproquement) est de $1/2$. En considérant les couples de deux rentabilités périodiques successives, on peut observer, soit une succession de deux hausses (ou deux baisses) consécutives, soit une hausse suivie d’une baisse (ou réciproquement). Dans le premier cas, on observe un couple de rentabilités périodiques successives de même signe et, dans le second, de signe opposé. La méthodologie de Cowles et Jones est donc la suivante :

1. Choisir une échelle de temps (ou pas de temps de base) τ pour l’analyse des variations boursières sur une période totale de durée $T = n\tau$.
2. Construire l’échantillon de taille n des variations boursières ΔR_k^τ .
3. Former la série chronologique $\text{sgn}(\Delta R_k^\tau)$, où $\text{sgn}(\Delta R_k^\tau)$ est le signe (+) ou (-) de la rentabilité périodique ΔR_k^τ .
4. Compter les couples (+, +), (-, -), (+, -), et (-, +). Soient N_1 le nombre de couples de même signe et N_0 le nombre de couples de signes opposés.
5. Calculer la valeur du ratio N_1/N_0 . Si les rentabilités R_k^τ suivent une marche au hasard simple (la suite des gains cumulés d’un jeu de pile ou face), alors il y a équiprobabilité entre les tendances et les retournements de marché et l’on doit trouver comme valeur théorique $N_1/N_0 = 1$.

Sur presque toutes les séries examinées (voir tableau 10), Cowles et Jones obtiennent des valeurs nettement différentes de la valeur théorique 1, ce qui semble invalider l’hypothèse de marche au hasard. Ces résultats font conclure à Cowles et Jones que

“le nombre significativement supérieur d’élans sur les retournements de marché pour toutes les échelles de temps comprises entre 20 minutes et 10 ans, à l’exception de 2 et 3 semaines, représente la trace claire de l’existence d’une dépendance statistique sur les variations boursières.”(p. 294)

ce qui semble invalider l’hypothèse de marche au hasard.

L’erreur de spécification de Cowles et Jones Or la méthodologie de Cowles et Jones n’est applicable que lorsque le processus des rentabilités testé suit une marche au hasard simple (i.e. sans dérive) de type

$$R_k = R_{k-1} + \varepsilon_k \quad R_0 = 0 \quad (59)$$

avec $\{\varepsilon_k, k \in \mathbf{N}\}$ un bruit blanc gaussien. S’il existe une dérive, et que le processus est décrit par la relation

$$R_k = R_{k-1} + \mu + \varepsilon_k \quad R_0 = 0 \quad (60)$$

alors il apparaît un biais dû à cette dérive, qui pousse les valeurs du ratio au-dessus de 1.

En effet, soit $p = \Pr(\Delta R_k^\tau > 0) = \Pr(+)$ la probabilité pour que la rentabilité périodique ΔR_k^τ soit de signe positif, et $1 - p = \Pr(\Delta R_k^\tau \leq 0) = \Pr(-)$ la probabilité que cette rentabilité soit de signe opposé. Si les rentabilités cumulées R_k suivent effectivement une marche au hasard de type (59) ou (60), les variations ΔR_k^τ sont indépendantes, et, en vertu de ce cette indépendance²⁷, la probabilité d’obtention d’un couple

²⁷On rappelle que si deux événements A et B sont indépendants, alors $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$.

de même signe est $\Pr(+, +) = p^2$ et $\Pr(-, -) = (1 - p)^2$. L'événement "tendance" est représenté par $(+, +)$ ou $(-, -)$: soit $p_1 = \Pr((+, +) \text{ ou } (-, -))$ la probabilité d'obtenir une tendance. L'événement "retournement" est représenté par $(-, +)$ ou $(+, -)$: soit $p_0 = \Pr((-, +) \text{ ou } (+, -))$ la probabilité d'obtenir un retournement. Si les rentabilités périodiques sont indépendantes, on a $p_1 = p^2 + (1 - p)^2$ et $p_0 = 1 - p_1 = 2p(1 - p)$.

Par application de la loi des grands nombres, on peut écrire que $p_1 = N_1/n$ et $p_0 = N_0/n$. On peut alors effectuer le calcul du ratio de Cowles et Jones, qui donne :

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_1/n}{N_0/n} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{p^2 + (1 - p)^2}{2p(1 - p)}$$

D'où la valeur théorique de la statistique de Cowles et Jones. Il est ensuite nécessaire de déterminer la significativité de l'écart obtenu à cette valeur. Pour déterminer si cet écart est significatif, on calcule l'écart-type du résultat estimé. L'écart-type du résultat d'un gain d'un jeu de pile ou face de probabilités p et q à l'issue de n tirages est $\sigma = \sqrt{npq}$. On dispose alors des éléments statistiques permettant de tester l'inertie des variations boursières.

C'est à cette étape du test qu'intervient la spécification du type de marche au hasard. Dans le cas de la marche au hasard simple de type (59), $p = 1/2$ d'où $p_1 = p_0 = 1/2$ soit $N_1/N_0 = p_1/p_0 = 1$ et $\sigma = \sqrt{n}/2$. Mais, si l'on se trouve dans le cas d'une marche au hasard avec dérive positive de type (60), alors $p = \Pr(+)$ $> 1/2$, et donc $N_1/N_0 = p_1/p_0 \geq 1$ (respectivement : dérive négative et $N_1/N_0 < 1$). Autrement dit, *l'obtention d'une valeur différente de 1 n'est donc pas nécessairement le signe de l'existence d'une dépendance statistique entre les rentabilités périodiques*, mais peut tout aussi bien être la conséquence d'une mauvaise spécification du modèle testé (par exemple l'oubli de la dérive μ). En comparant tous leurs résultats à 1, Cowles et Jones ajoutent donc une hypothèse supplémentaire sur le modèle de marche au hasard : l'absence de dérive.

Pour pouvoir appliquer avec pertinence la méthode de Cowles et Jones dans le cas d'une marche au hasard avec dérive, il faudrait d'abord supprimer l'effet de la dérive, par exemple en utilisant le processus $R^* = \{R_k^*, k \in \mathbb{N}\}$ où $R_k^* = R_k - \mu(t_k - t_0)$ qui définit une équation aux différences stochastique

$$R_k^* = R_{k-1}^* + \varepsilon_k \quad R_0^* = 0$$

où $\{\varepsilon_k, k \in \mathbb{N}\}$ est un bruit blanc gaussien : ce processus est bien une marche au hasard simple, dont la différenciée d'ordre 1, qui est $(1 - L)R_k^* = \Delta R_k^*$ est stationnaire. On pourrait alors compter les couples de rentabilités périodiques ΔR_k^* et vérifier que le ratio est proche de 1.

On reproduit à titre d'exemple le tableau (voir tableau 10) obtenu par Cowles et Jones. Par exemple, sur la série des rentabilités mensuelles (encadrée), le nombre de couples de rentabilités de même signe $(+, +)$ ou $(-, -)$ est $N_1 = 748$, et le nombre de couples de rentabilités de signe opposé $(+, -)$ ou $(-, +)$ est $N_0 = 450$ (ces deux quantités n'apparaissent pas dans le tableau), ce qui donne un ratio $N_1/N_0 = 1,66$. La probabilité d'une hausse est $p_1 = N_1/n = 748/1200 = 0,66 > 0,50$. En appliquant la probabilité théorique de $1/2$ à l'échantillon, on aurait du trouver un nombre $N_1 = 599$: il y a un écart de $748 - 599 = 149$ entre la valeur théorique et la valeur réelle. Comme il y a $n = 1198$ observations, l'écart-type est de $\sigma = \sqrt{1198}/2 = 17,3$. Cowles fait observer que la valeur de l'écart correspond à $149/17,3 = 8$ écarts-types, ce qui est nettement significatif. Mais l'on a vu comment ce résultat est biaisé par la non prise en compte de la dérive. Il suffirait que l'on ait $p = 0,75$ pour modifier considérablement les conclusions puisque, dans ce cas, on aurait $p_1 = 0,625$, $p_0 = 0,375$ soit un ratio $p_1/p_0 \simeq 1,67$, qui validerait alors le résultat obtenu par Cowles et Jones.

En conclusion, on peut dire que le test de Cowles et Jones ne peut pas permettre de distinguer une marche au hasard simple d'un autre processus, ce qui implique que les tests d'inertie ne sont pas suffisamment puissants pour décider de la présence ou non de dépendances statistiques sur les rentabilités périodiques ΔR_k . La fausse note de l'étude de 1937 ne peut donc pas être retenue comme contre-exemple pour rejeter l'hypothèse de la marche au hasard.

échelle τ	indice	période	taille n	ratio N_1/N_0
20 minutes	Harris Upham	1935-1936	2800	1,44
1 heure	DJIA (moy.horaires)	1933-1934	800	1,29
1 jour	DJIA (moy.horaires)	1931-1935	1200	1,18
1 semaine	Standards Statistics	1918-1935	938	1,24
2 semaines	DJIA	1897-1935	976	1,02
3 semaines	DJIA	1897-1935	652	1,08
1 mois	Chemins de fer	1835-1935	1200	1,66
2 mois	Chemins de fer	1835-1935	600	1,50
3 mois	<i>id.</i>	1835-1935	400	1,29
4 mois	<i>id.</i>	1835-1935	300	1,18
5 mois	<i>id.</i>	1835-1935	249	1,52
6 mois	<i>id.</i>	1835-1935	208	1,40
7 mois	<i>id.</i>	1835-1935	178	1,38
8 mois	<i>id.</i>	1835-1935	156	1,48
9 mois	<i>id.</i>	1835-1935	138	1,57
10 mois	<i>id.</i>	1835-1935	124	1,49
11 mois	<i>id.</i>	1835-1935	113	1,27
1 an	<i>id.</i>	1835-1935	100	1,17
2 ans	<i>id.</i>	1835-1935	50	1,63
3 ans	<i>id.</i>	1835-1935	33	1,46
4 ans	<i>id.</i>	1835-1935	25	0,85
5 ans	<i>id.</i>	1835-1935	20	1,00
6 ans	<i>id.</i>	1835-1935	16	0,67
7 ans	<i>id.</i>	1835-1935	14	0,71
8 ans	<i>id.</i>	1835-1935	13	0,22
10 ans	<i>id.</i>	1835-1935	10	0,60

TAB. 10 – Les résultats des tests d’inertie de Cowles et Jones (1937)

A.7 Le principe des tests de séries pour la recherche des “rallyes” boursiers

Pour vérifier l’hypothèse d’indépendance, Roberts [1959] met en application un type de test particulier : le test de séries. Le test de séries est une généralisation de l’idée de Cowles et Jones [1937], introduite par Mood [1940]. Le principe reste le même : chercher à mettre en évidence une “inertie” des variations boursières, au moyen de l’analyse des signes de ces variations successives. Le test de série reste en ce sens un test de signes. Mais, dans le cas du test de Mood, on ne s’intéresse plus seulement aux couples de rentabilités périodiques successives, comme chez Cowles et Jones, mais à un ensemble de variations de même signe, appelé en langage boursier un “rallye” haussier ou baissier. Si des rallyes sont systématiquement présents sur les bourses, cela tendrait à indiquer que les variations boursières ne peuvent pas être assimilables à des marches au hasard, et qu’une prévisibilité serait possible. Le principe du test est donc d’examiner la succession de rentabilités périodiques de même signe, ce paquet de signes identiques formant un rallye boursier, une “série” de marché, et de comparer le nombre de séries empiriques avec le nombre de séries théoriques qui résulterait d’une marche au hasard.

Il est commode de représenter la succession des rallyes boursiers au moyen des chiffres 0 (pour une variation négative) et 1 (pour une variation positive). On introduit pour cela la variable aléatoire indicatrice $\mathbf{1}_A$ qui désigne la fonction indicatrice de l’événement A , pour les deux événements “hausse” et “baisse”. Soit :

$$\mathbf{1}_{\{\Delta R_k > 0\}} = \mathbf{1}_k = \begin{cases} 1 & \Delta R_k > 0 \\ 0 & \Delta R_k \leq 0 \end{cases}$$

où ΔR_k est la rentabilité périodique définie précédemment. Une suite de 12 rentabilités périodiques conduisant à 110001011000 contiendrait par exemple trois séries de 1 (de longueur 2, 1 et 2) et trois séries de 0 (de longueur 3, 1, et 3), soit 6 séries au total. Pour le même nombre de 1 et de 0, il est clair que la suite 111100000100 semble très différente de la précédente, et répondre à une autre sorte de hasard. Elle contient deux séries de 1 (de longueur 4 et 1) et deux séries de 0 (de longueur 5 et 2), soit 4 séries au total. La méthodologie de Roberts est donc la suivante :

1. Choisir une échelle de temps (ou pas de temps de base) τ pour l’analyse des variations boursières

sur une période totale de durée $T = n\tau$.

2. Construire l'échantillon de taille n des variations boursières ΔR_k^τ .
3. Former la série chronologique $\text{sgn}(\Delta R_k^\tau)$, où $\text{sgn}(\Delta R_k^\tau)$ est le signe (+) ou (-) de la rentabilité périodique ΔR_k^τ .
4. Compter les séries de signe positif (+, +, ..., +) et de signe négatif (-, -, ..., -). Soient N_1 le nombre de séries de signe positif et N_0 le nombre de séries de signe négatif.
5. Calculer la valeur de la somme $N_0 + N_1$. Si les rentabilités R_k^τ suivent une marche au hasard avec dérive, alors l'on doit trouver une valeur théorique $N = N_1 + N_0$.

Le nombre théorique N de séries est obtenu de la manière suivante. Soit $p = \Pr(\Delta R_k > 0) = \Pr(+)$ = $\Pr(\mathbf{1}_k = 1)$ la probabilité que l'on observe une hausse du marché. Le nombre d'événements possibles étant réduit à 2, la variable aléatoire indicatrice $\mathbf{1}_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p , notée $\mathcal{B}(1, p)$. Si les variations boursières suivent une marche au hasard, les rentabilités successives sont indépendantes, et, dans le cas de n variations successives, la somme de n variables de Bernoulli est une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Ainsi par exemple, si l'on cherche la probabilité que l'on obtienne un rallye haussier de six hausses successives sur un total de n variations, soit $\Pr(111111)$, cette probabilité est

$$\Pr(N_1 = 6) = C_n^6 p^6 (1-p)^{n-6}$$

où C représente l'opérateur des combinaisons. Et de même pour $\Pr(000000) = \Pr(N_0 = 6)$. On montre alors que

$$E(N) = 2np(1-p) + p^2 + (1-p)^2 \tag{61}$$

qui représente le nombre total espéré de rallyes (haussiers et baissiers) sur une série de n variations boursières dans le cas binomial. Sur les 52 variations hebdomadaires du Dow Jones pour l'année 1956, Roberts obtient la séquence suivante :

001101111110100110001011111101000010001100100011011

soit décompte 24 séries. Le nombre théorique correspondant à l'hypothèse d'indépendance est donné par (61) : dans le marché analysé par Roberts, $n = 52$, l'hypothèse est $p = 0,5$, soit $E(N) = 26,5$. Robert en conclut à une validation de l'hypothèse de marche au hasard avec dérive.

Finalement, dit-il, les résultats des tirages passés n'ont d'utilité que pour la détermination de l'amplitude potentielle des variations boursières futures. Ces tirages (ces cours passés) servent à améliorer les fourchettes de prévisibilité, mais pas à obtenir la valeur du tirage suivant. Le passé du marché n'est utilisable que pour des prévisions distributionnelles, et non directionnelles : il peut servir à déterminer le niveau de volatilité, mais pas le sens à venir de la bourse. Les variations boursières sont donc à la fois totalement imprévisibles dans leur direction, mais totalement prévisibles dans leur variabilité. C'est le fondement du modèle brownien de Bachelier [1900].

On peut généraliser la démarche de Roberts pour prendre en compte les cas où la variation est nulle. Cela revient à introduire une troisième possibilité de séries, les séries de zéros, ce qui sera fait par Fama dans la publication de sa thèse dans le Journal of Business en 1965.

A.8 Les tests de normalité et la mise en évidence de la leptokurticité

Sous hypothèse i.i.d, c'est-à-dire $(1-L)(R_k - k\mu) = \varepsilon_k$ avec ε_k bruit blanc, on s'intéresse à la condition de normalité des résidus ε_k , en la vérifiant au moyen de tests de normalité. Ces tests utilisent en général des statistiques fondées sur les moments centrés de la variable aléatoire à tester. Soient μ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et m_k son moment centré d'ordre k : $m_k = E(X - \mu)^k$. Les coefficients de Pearson sont les quantités $\beta_1 = m_3^2/m_2^3$ qui est le coefficient d'asymétrie, et $\beta_2 = m_4/m_2^2$,

qui est le coefficient d'aplatissement. Si la distribution est symétrique, les moments centrés d'ordre impair sont nuls, et donc $\beta_1 = 0$. Si la distribution est normale, les moments centrés d'ordre pair s'écrivent $E(X^{2p}) = 2^p \Gamma(1/2 + p) / \Gamma(1/2)$, où Γ est la fonction gamma d'Euler, d'où $\beta_2 = 4 \Gamma(5/2) / \Gamma(1/2) = 3$. Les coefficients de Fisher dérivent de ceux de Pearson : $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = m_3 / \sigma^3$ représente une sorte de réduction du coefficient de Pearson, et $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ représente le centrage du coefficient de Pearson. Si la loi de X est normale, on a $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. On peut donc tout comparer à zéro.

Pour un échantillon de taille n , on utilise les moments empiriques et les estimateurs correspondant qui sont :

– l'estimateur de la moyenne

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$$

– l'estimateur de l'écart-type

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k - \hat{\mu})^2$$

– l'estimateur du coefficient d'asymétrie de Pearson-Fisher

$$\hat{S} = \frac{1}{n \hat{\sigma}^3} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k - \hat{\mu})^3$$

– l'estimateur du coefficient d'aplatissement de Pearson-Fisher

$$\hat{K} = \frac{1}{n \hat{\sigma}^4} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k - \hat{\mu})^4 - 3$$

La distribution testée sera gaussienne si $\hat{S} = \hat{K} = 0$. Pour apprécier la valeur obtenue par rapport à la valeur théorique 0, il est nécessaire de disposer d'une distribution des estimations. Les variances des estimateurs \hat{S} et \hat{K} des coefficients de Pearson-Fisher d'un échantillon de taille n sont respectivement :

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{S}) &= \frac{6n(n-1)}{(n-2)(n-1)(n+3)} \\ \text{var}(\hat{K}) &= \frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)} \end{aligned}$$

Les quantités $S = \hat{S} / \sqrt{\text{var}(\hat{S})}$ et $K = \hat{K} / \sqrt{\text{var}(\hat{K})}$ suivent asymptotiquement une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Lorsque n est "grand", on a

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{S}) &\sim \frac{6}{n} \\ \text{var}(\hat{K}) &\sim \frac{24}{n} \end{aligned}$$

D'où les tests de normalité : on calcule les quantités $S = \hat{S} \sqrt{n/6}$ et $K = \hat{K} \sqrt{n/24}$, puis on applique les règles usuelles de décision selon la région critique du test.

Test d'asymétrie Sous l'hypothèse H_0 (normalité), $S \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$. La région critique du test au seuil de signification α est définie par sa borne c telle que $\Pr(S > c | H_0) = \alpha$, ou c est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $\alpha = 5\%$, on a $1 - 0,05/2 = 0,975$ d'où $c = 1,96$: la région critique (de rejet de H_0) est $\mathcal{R} = \{S, S > 1,96\}$. Ce test est fiable pour $8 \leq n \leq 5000$.

Test d'aplatissement Sous l'hypothèse H_0 (normalité), $K \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$. La région critique du test au seuil de signification α est définie identiquement. Pour $\alpha = 5\%$, la région critique est $\mathcal{R} = \{K, K > 1,96\}$. Ce test est fiable pour $7 \leq n \leq 1000$.

Le phénomène leptokurtique consiste en la mise en évidence systématique, sur toutes les séries chronologiques des variations boursières, de valeurs de K supérieures à 1,96. Les tableaux 11, 12 et 13 ci-dessous (extraits de Walter [2002]) présentent une illustration des résultats obtenus sur différents marchés. La diminution de la leptokurticité avec la baisse de la fréquence d'observation en temps calendaire est également recensée dans le tableau 14.

auteurs	année	test	période	fréquence
Mandelbrot	1962	cours du coton	1880-1958	quotidienne, mensuelle
Mandelbrot	1963	cours du blé	1883-1936	quot., hebdo., mensuelle
Mandelbrot	1963	4 actions de sociétés de chemins de fer	1883-1936	quot., hebdo., mensuelle
Mandelbrot	1963	taux de change USD/STG	1857-1936	quot., hebdo., mensuelle
Fama	1965	30 actions du DJIA	1957-1962	quotidienne
Mandelbrot	1967	écart de taux CT à 6%	1857-1936	mensuelle

TAB. 11 – Les travaux précurseurs de Mandelbrot et Fama sur la leptokurticité

auteurs	année	test	période	fréquence
Press	1967	10 actions du DJIA	1926-1960	mensuelle
Teichmoller	1971	30 actions du NYSE	1962-1967	1 à 10 jours
Officer	1972	39 actions du NYSE	1926-1968	mensuelle
Officer	1972	50 actions du NYSE	1926-1968	quotidienne
Fielitz et Smith	1972	200 actions du NYSE	1963-1968	quotidienne
Praetz	1972	17 indices de la bourse de Sydney	1958-1966	mensuelle
Barnea et Downes	1973	81 actions du NYSE	1968-1969	quotidienne
Hsu <i>et al.</i>	1974	Boeing, ATT, General Motors, RCA	1963-1970	mensuelle
Brenner	1974	indice SP 500	1928-1971	quotidienne
Blattberg et Gonedes	1974	indice DJIA	1957-1962	1 à 5 jours
Zajdenweber	1974	24 actions du RM de Paris	1970-1973	quotidienne
Hagerman	1978	805 actions du NYSE	1962-1976	quotidienne
Jorion	1988	indice CRSP pondéré	1973-1985	hebdo., mensuelle
Mantegna	1991	indice MIB	1975-1989	quotidienne

TAB. 12 – Permanence de la leptokurticité sur le marché des actions

auteurs	année	test	période	fréquence
Westerfield	1977	USD/GBP-DEM-CAD-CHF-NLG	1970-1975	hebdomadaire
Rogalski et Vinso	1978	USD/GBP-DEM-CAD-CHF-NLG	1970-1975	hebdomadaire
Cornell et Dietrich	1978	USD/GBP-DEM-JPY-CHF	1975-1979	quotidienne
McFarland <i>et al.</i>	1982	USD/GBP-DEM-JPY-CAD	1973-1979	quot., hebdo., mens.
Friedmann et Vandersteel	1982	USD/9 devises	1973-1979	quotidienne
Hsieh	1988	USD/GBP-DEM-JPY-CAD-CHF	1974-1983	
Jorion	1988	USD/DEM	1973-1985	hebdo., mensuelle
So	1987	USD/GBP-DEM-JPY-CAD-CHF	1974-1982	quotidienne
Atlan <i>et al.</i>	1990	FRF/8 devises	1970-1991	hebdo., mens., trim.

TAB. 13 – Permanence de la leptokurticité sur le marché des changes

auteurs	année	test	période	fréquence
Blattberg et Gonedes	1974	30 actions du NYSE	1957-1962	1,3,5,8 jours
Hagerman	1978	805 actions du NYSE	1962-1976	1-35 jours
Hagerman	1978	286 actions de l'AMEX	1962-1976	1-35 jours
Upton et Shannon	1979	50 actions du NYSE	1956-1975	1,3,6,12 mois
Fielitz et Rozelle	1983	50 actions du NYSE	1962-1969	1-30 jours
Fielitz et Rozelle	1983	indice SP 500	1928-1973	1-30 jours
Wasserfallen et Zimmermann	1985	USD/CHF	1978-1980	1-10 minutes
Boothe et Glassman	1987	USD/GBP-DEM-JPY-CAD	1973-1984	1,5 jours, 1 mois, 1 trim.
Bouchaud et Potters	1997	contrat sur SP500	1991-1995	15 minutes-5 jours
Bouchaud et Potters	1997	contrat sur USD/DEM	1991-1995	15 minutes-5 jours
Bouchaud et Potters	1997	contrat sur Bund	1991-1995	15 minutes-5 jours

TAB. 14 – Décroissance du coefficient d'aplatissement (kurtosis) K

B Bibliographie

ADELMAN I. [1965], "Long Cycles : Facts or Artefacts?", *American Economic Review*, vol. 50, pp 444-463.

AKGIRAY V., BOOTH G. [1988a], "The Stable-Law Model of Stock Returns", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 6, n°1, pp 51-57.

AKGIRAY V., BOOTH G. [1988b], "Mixed Diffusion-Jump Process Modeling of Exchange Rate Movements", *The Review of Economics and Statistics*, pp 631-637.

AKGIRAY V., LAMOUREUX C. [1989], "Estimation of Stable-Law Parameters : A Comparative Study", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 7, pp 85-93.

ALEXANDER S. [1961], "Price Movements in Speculative Markets : Trends or Random Walks", *Industrial Management Review*, vol. 2, n°2, pp 7-26.

ANÉ T., GEMAN H. [2000], "Order Flow, Transaction Clock, and Normality of Asset Returns", *Journal of Finance*, vol. 55, pp 2259-2284.

ARAD R. [1980], "Parameter Estimation for Symmetric Stable Distributions", *International Economic Review*, vol. 21, n°1, pp 209-220.

BAILLIE R. [1996], "Long memory processes and fractional integration in econometrics", *Journal of Econometrics*, vol. 73, pp 5-59.

BAILLIE R., BOLLERSLEV T., MIKKELSEN H. [1996], "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, vol. 74, pp 3-30.

BARNEA A., DOWNES D.H. [1973], "A reexamination of the Empirical Distribution of Stock Price Changes", *J. of the American Statistical Association*, vol. 68, pp 348-350.

BARNDORFF-NIELSEN O. [1995], "Normal-inverse Gaussian distributions and the modelling of stock returns", Technical report, research report n° 300, dept of theoretical statistics, Aarhus University.

BARNDORFF-NIELSEN O. [1997], "Normal-inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modeling", *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 24, pp 1-13.

BARNDORFF-NIELSEN O. [1998], "Processes of normal inverse Gaussian type", *Finance and Stochastics*, vol. 2, pp 41-68.

BATTEN J., ELLIS C., MELLOR R. [1999], "Scaling laws in variance as a measure of long-term dependence", *International Review of Financial Analysis*, vol. 8, n°2, pp 123-138.

BEAVER W. [1981], "Market efficiency", *The Accounting Review*, vol. 56, pp 23-37.

BLATTBERG R., GONEDES N. [1974], "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices", *J. of Business*, vol. 47, pp 244-280.

BOLLERSLEV T. [1986], "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, vol. 31, pp 307-327.

- BOLLERSLEV T., CHOU R., KRONER K. [1992], "ARCH Modeling in Finance : A Review of the Theory and Empirical Evidence", *Journal of Econometrics*, vol. 52, nos 1-2, pp 5-59.
- BOOTHE P., GLASSMAN D. [1987], "The Statistical Distribution of Exchange Rates", *Journal of International Economics*, vol. 22, pp 297-319.
- BOUCHAUD J. P., POTTERS M. [1997], *Théorie des risques financiers*, CEA, collection Aléa, Saclay, 1997.
- BOULEAU N. [1998], *Martingales et marchés financiers*, Odile Jacob.
- BRENNER [1974], "On the Stability of the Distribution of the Market Component in Stock Price Changes", *J. of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 9, pp 945-961.
- CAMPBELL J., LO A., MAC KINLAY A. [1997], *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- CHAMBERS J., MALLOWS C., STUCK B. [1976], "A method for simulating stable random variables", *J. of the American Statistical Association*, vol. 71, pp 340-344.
- CLARK P. [1973], "A Subordinated Stochastic Process with Finite Variance for Speculative Prices", *Econometrica*, vol. 41, pp 135-155.
- COATS A.W. [1969], "Is there a Structure of Scientific Revolution in Economics?", *Kyklos*, vol.22, pp. 289-296.
- CONT R. [1997], "Scaling Properties of Intraday Price Changes", Science & Finance Working Paper, June.
- COOTNER P. [1962], "Stock Prices : Random vs Systematic Changes", *Industrial Management Review*, vol. 3, pp. 24-45.
- COOTNER P. [1964] (dir.), *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press.
- CORAZZA M., MALLIARIS A.G., NARDELLI C. [1997], "Searching for Fractal Structure in Agricultural Futures Markets", *The Journal of Future Markets*, vol. 17, n°4, pp 433-473.
- CORNELL W., DIETRICH J. [1978], "The Efficiency of the Market for Foreign Exchange under Floating Exchange Rates", *Review of Economics and Statistics*, vol. 60, pp 111-120.
- COURTAULT J.M., KABANOV Y. [2002] (dir.), *Louis Bachelier, aux origines de la finance mathématique*, Presses universitaires franc-comtoises.
- COWLES A. [1933], "Can Stock Market Forecasters Forecasts", *Econometrica*, vol. 1, pp. 309-324.
- COWLES A., JONES H. [1937], "Some a Posteriori Probabilities in Stock Market Action", *Econometrica*, vol. 5, pp. 280-294.
- COX J., ROSS S. [1976], "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp 145-166.
- DANA R.A, JEANBLANC M., [1998] *Marchés financiers en temps continu*, Economica.

- DEBONDT W., THALER R. [1989], "Anomalies. A Mean-Reverting Walk Down Wall Street", *Journal of Economic Perspectives*, vol. 3, n°1, pp 189-202.
- DING Z., GRANGER C., ENGLE R. [1993], "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model", *Journal of Empirical Finance*, vol. 1, pp 83-106.
- DUMAS B., ALLAZ B. [1995], *Les titres financiers*, PUF.
- DUMOUCHEL W. [1973], "Stable Distributions in Statistical Inference : 1. Symmetric Stable Distributions Compared to Other Long-Tailed Distributions", *J. of the American Statistical Association*, vol. 68, n° 342, pp 469-477.
- DUMOUCHEL W. [1975], "Stable Distributions in Statistical Inference : 2. Information from Stably Distributed Samples", *J. of the American Statistical Association*, vol. 70, n° 350, pp 386-393.
- DUMOUCHEL W. [1983], "Estimating the stable index α in order to measure tail thickness : a critique", *The Annals of Statistics*, vol. 11, n°4, pp 1019-1031.
- EBERLEIN E., KELLER U. [1995], "Hyperbolic distributions in finance", *Bernoulli*, vol. 1, pp 281-299.
- EBERLEIN E., PRAUSE K. [1998], "The generalized hyperbolic model : financial derivatives and risk structure", FDM preprint 56, Université de Fribourg.
- ELIE L., EL KAROUÏ N., JEANTHEAU T., PFERTZEL A. [1993], "Les modèles ARCH sur les cours de change", Actes du 3ème colloque AFIR, Rome, pp 91-1102.
- ENGLE R. [1982], "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, vol. 50, pp 987-1007.
- ENGLE R., NG V., ROTHSCHILD M. [1990], "Asset Pricing with a Factor-ARCH Covariance Structure : Empirical Estimates for Treasury Bills", *Journal of Econometrics*, vol. 45, pp 213-238.
- FAMA E.F. [1965], "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, vol. 38, 1965, pp 34-105.
- FAMA E. F. [1970], "Efficient Capital Market : a Review of Theory and Empirical Work", *Journal of Finance*, vol. 25, mai, pp 383-417, et discussion pp 418-423.
- FAMA E. F. [1976], "Reply", *J. of Finance*, vol. 31, pp 143-145.
- FAMA E. F. [1991], "Efficient Capital Market : II", *Journal of Finance*, vol. 46, mai, pp 1575-1618,
- FAMA E., FRENCH K. [1988], "Permanent and Temporary Components of Stock Prices", *Journal of Political Economy*, vol. 96, n°2, pp 246-273.
- FAMA E., ROLL R. [1968], "Some Properties of Symmetric Stable Distributions", *J. of the American Statistical Association*, vol. 63, pp 817-836.
- FAMA E., ROLL R. [1971], "Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions", *J. of the American Statistical Association*, vol. 66, n° 334, pp 331-336.
- FIELITZ B. ET ROZELLE J. [1983], "Stable Distributions and the Mixture of Distributions Hypotheses

- for Common Stock Returns”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 78, pp 28-36.
- FIELTIZ B., SMITH E. [1972], “Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes”, *J. of the American Statistical Association*, vol. 67, pp 813-814.
- FÖLLMER H., SCHIED A. [2002], *Stochastic Finance in Discrete Time*, Gruyter, New York.
- FRIEDMANN D., VANDERSTEEL S. [1982], “Short Term Fluctuations in Foreign Exchange Rates : Evidence from the Data, 1973-1979”, *Journal of International Economics*, vol. 13, pp 171-186.
- GEMAN H., EL KAROUÏ N., ROCHET J. [1995], “Changes of Numeraire, Changes of Probability Measures and Option Pricing”, *Journal of Applied Probability*, vol. 32, pp 443-458.
- GHYSELS E., GOURIÉROUX C., JASIAK J. [1997], “Market Time and Asset Price Movements : Theory and Estimation”, dans HAND D., JARKA S. (dir.), *Statistics in Finance*, Londres, Arnold, pp 307-322.
- GOURIÉROUX C. [1997], *ARCH Models and Financial Applications*, Springer Verlag.
- GOURIÉROUX C., LE FOL G. [1997], “Volatilités et mesures du risque”, *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 138, n°4, pp 7-32.
- GOURIÉROUX C., MONFORT A. [1990], *Séries temporelles et modèles dynamiques*, Economica.
- GRANGER C. [1966], “The typical spectral shape of an economic variable”, *Econometrica*, vol. 34, pp 150-161.
- GRANGER C., ORR D. [1972], “Infinite Variance and Research Strategy in Time Series Analysis”, *J. of the American Statistical Association*, vol. 67, pp 275-285.
- GROSSMAN S., STIGLITZ J. [1980], “On the Impossibility of Informationally Efficient Markets”, *American Economic Review*, vol. 70, pp. 393-408.
- GUÉGAN D. [1994], *Séries chronologiques non linéaires à temps discret*, Economica.
- HAGERMAN R. [1978], “More Evidence of the Distribution of Security Returns”, *J. of Finance*, vol. 33, pp 1213-1221.
- HALL J., BRORSEN B.W., IRWIN S. [1989], “The Distribution of Futures Prices : A Test of the Stable Paretian and Mixture of Normals Hypotheses”, *J. of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 24, pp 105-116.
- HARRIS L. [1986], “Cross-security Tests of the Mixture of Distributions Hypothesis”, *J. of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 21, pp 39-46.
- HARRISON J., KREPS D. [1979], “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory*, vol. 20, pp 381-408.
- HARRISON J., PLISKA S. [1979], “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and Applications*, vol. 11, pp 215-260.
- HAYEK F. [1945], “The use of knowledge in society”, *American Economic Review*, vol. 35, pp. 519-530.

- HOWE J.S, MARTIN D, WOOD B. [1999], “Much ado about nothing : Long-term memory in Pacific Rim equity markets”, *International Review of Financial Analysis*, vol. 8, n°2, pp 139-151.
- HSIEH D. A. [1988], “The Statistical Properties of Daily Foreign Exchange Rates : 1974-1983”, *Journal of International Economics*, vol. 24, pp 129-145.
- HURST H.E. [1951], “Long Term Storage Capacity of Reservoirs”, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 116, pp 770-799.
- JENSEN M. [1978], “Some anomalous evidence regarding market efficiency”, *J. of Financial Economics*, vol. 6, pp 95-101.
- JORION P. [1988], “On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets”, *Review of Financial Studies*, vol. 1, pp 427-445.
- JOVANOVIC F. [2000], “L’origine de la théorie financière : une réévaluation de l’apport de Louis Bachelier”, *Revue d’économie politique*, 110 (3), mai-juin, pp 395-418.
- JOVANOVIC F., LE GALL P. [2002], “Genèse et nature de la théorie de la spéculation : les contributions de Louis Bachelier et de Jules Regnault à la théorie financière et à l’économétrie”, dans COURTAULT J.M., KABANOV Y. [2002] (dir.), *Louis Bachelier, aux origines de la finance mathématique*, Presses universitaires franc-comtoises.
- KARATZAS I., SHREVE S. [1998], *Methods of Mathematical Finance*, Springer, Berlin.
- KENDALL M. [1953], “The Analysis of Economic Time Series – Part I : Prices”, *Journal of Royal Statistical Society*, série A, vol. 116, pp. 11-25, et discussion pp 25-34.
- KUHN T.S. [1983], *La structure des révolutions scientifiques*, Paris.
- KYLE A. [1985], “Continuous Auction Markets and Insider Trading”, *Econometrica*, vol. 53, pp 1315-1335.
- LARDIC S., MIGNON V. [1996], “Les tests de mémoire longue appartiennent-ils au camp du démon?”, *Revue économique*, vol. 47, n°3, pp 531-540.
- LARSON A. [1960], “Measurement of a Random Process in Future Prices”, *Food Research Institute Studies*, vol. 1, n°3, novembre, pp. 313-324.
- LE COURTOIS O., WALTER C. [2003], “Note de synthèse sur les processus de Lévy en finance”, ISFA, PricewaterhouseCoopers.
- LEROY E. F. [1976], “Efficient Capital Markets : A Comment”, *J. of Finance*, vol. 31, pp 139-141.
- LÉVY VÉHEL J., WALTER C. [2002], *Les marchés fractals*, PUF.
- LO A.W. [1991], “Long-Term Memory in Stock Market Prices”, *Econometrica*, vol. 59, n°5, pp 1279-13.
- LONG J.B. [1990], “The numeraire portfolio”, *Journal of Financial Economics*, vol. 26, pp 29-69.
- LONGIN F. [1993], “Volatilité et mouvements extrêmes du marché boursier”, Thèse de doctorat, HEC.

- LONGIN F. [1995], “La théorie des valeurs extrêmes : présentation et premiers résultats en finance”, *Journal de la Société de Statistique de Paris*, vol. 136, pp 77-97.
- LONGIN F. [1996], “The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns”, *Journal of Business*, vol. 63, n°3, pp 383-408.
- LONGIN F. [2000], “From Value-at-Risk to Stress testing : the Extreme Value Approach”, *Journal of Banking and Finance*, pp 1107-1130.
- MACCULLOCH J.H. [1978], “Continuous Time Processes with Stable Increments”, *Journal of Business*, vol. 51, n°4, pp 601-619.
- MACCULLOCH J.H. [1981], “Simple Consistent Estimators of the Stable Distributions”, présenté à l’Annual Meeting of the Econometric Society.
- MACFARLAND J.W, PETTIT R., SUNG S. [1982], “The Distribution of Foreign Exchange Price Changes : Trading Day Effects and risk measurement”, *J. of Finance*, vol. 37, pp 693-715.
- MAILLET B., MICHEL T. [1997], “Mesures de temps, information et distribution des rendements intra-journaliers”, *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 138, n°4, pp 89-120.
- MALKIEL B. [1989], “Is the Stock Market Efficient”, *Science*, vol. 243, pp 1313-1318.
- MANDELBROT B. [1962], “Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy”, *Compte-rendus à l’Académie des Sciences*, vol. 254, pp 3968-3970.
- MANDELBROT B. [1963], “The Variation of Certain Speculative Prices”, *Journal of Business*, vol. 36, pp 394-419.
- MANDELBROT B. [1965], “Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi ; application à la loi climatologique de H.E. Hurst”, *Comptes-rendus à l’Académie des Sciences*, vol. 260, pp 3274-3277.
- MANDELBROT B. [1967], “The Variation of Some Other Speculative Prices”, *Journal of Business*, vol. 40, pp 393-413.
- MANDELBROT B. [1972], “Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles : from the Covariance to R/S Analysis”, *Annals of Economic and Social Measurement*, vol. 1, pp 259-290.
- MANDELBROT B. [1973a], “Formes nouvelles du hasard dans les sciences”, *Economie Appliquée*, vol. 26, pp 307-319.
- MANDELBROT B. [1973b], “Le syndrome de la variance infinie et ses rapports avec la discontinuité des prix”, *Economie Appliquée*, vol. 26, pp 321-348.
- MANDELBROT B. [1973c], “Le problème de la réalité des cycles lents et le syndrome de Joseph”, *Economie Appliquée*, vol. 26, pp 349-365.
- MANDELBROT B., FISHER A., CALVET L. [1997], “A Multifractal Model of Asset Returns”, Cowles Foundation Discussion Paper n° 1164, Yale University.

- MANDELBROT B., TAYLOR H. [1967], "On the Distribution of Stock Prices Differences", *Operations Research*, vol. 15, pp 1057-1062.
- MANDELBROT B., VAN NESS J.W. [1968], "Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications", *SIAM Review*, vol. 10, n°4, pp 422-437.
- MANTEGNA R. [1991], "Lévy Walks and enhanced diffusion in Milan Stock Exchange", working paper, Istituto di Fisica, Palerme.
- MANTEGNA R, STANLEY E. [2000], *An introduction to Econophysics : Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, UK.
- MERTON R. [1976], "Option Pricing when underlying Stock Returns are discontinuous", *J. of Financial Economics*, vol. 3, pp 125-144.
- MIGNON V. [1998], *Marchés financiers et modélisation des rentabilités boursières*, Economica, Paris.
- MITTNIK S., RACHEV S. [1989], "Stable Distributions for Asset Returns", *Applied Mathematics Letters*, vol. 2, n°3, pp 301-304.
- MÜLLER U., DACOROGNA M., DAVÉ R., PICTET O., OLSEN R. WARD J. [1993], "Fractals and Intrinsic Time - A challenge to econometricians", Proceedings of the XXXIXth International Conference of the AEA, Luxembourg.
- NELSON D. [1991], "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : a New Approach", *Econometrica*, vol. 59, pp 349-370.
- OFFICER R. [1972], "The Distribution of Stock Returns", *J. of the American Statistical Association*, vol. 67, pp 807-812.
- OLSEN [2000], "Our research approach", <http://www.olsen.ch/library/research/ourapproach.html>, p.2.
- ORLEAN A. [1989], "Comportements mimétiques et diversité des opinions sur les marchés financiers", dans ARTUS P., BOURGUINAT H., *Théorie économique et crise des marchés financiers*, Paris, Economica, pp 45-65.
- OSBORNE M. F. [1959], "Brownian Motion in the Stock Market", *Operations Research*, vol. 7, pp 145-173.
- PAGAN A. [1996], "The Econometrics of Financial markets", *Journal of Empirical Finance*, vol. 3, pp 15-102.
- PALM F. [1996], "GARCH Models of Volatility", dans MADDALA G., RAO C., , *Handbook of Statistics*, pp 209-240.
- PAULSON A., HOLCOMB E., LEITCH R. [1975], "The estimation of the parameters of the stable laws", *Biometrika*, vol. 62, n°1, pp 163-170.
- PICKANDS J. [1975], "Statistical Inference Using Extreme Order Statistics", *The Annals of Statistics*, vol. 3, pp 119-131.
- PLISKA S. [1997], *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell, Oxford.

- POTERBA J.M., SUMMERS L. [1988], "Mean Reversion in Stock Prices, Evidence and Implications", *Journal of Financial Economics*, vol. 22, pp 27-59.
- PRAETZ P. [1972], "The Distribution of Share Price Changes", *Journal of Business*, vol. 45, pp 49-55.
- PRAUSE K. [1999], "The generalized hyperbolic model : estimation, financial derivatives, and risk measures", Thèse de doctoral, Université de Fribourg.
- PRESS S. J. [1967], "A compound events model for security prices", *Journal of Business*, vol. 40, pp 317-335.
- PRESS S. J. [1972], "Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions", *J. of the American Statistical Association*, vol. 67, n° 340, pp 842-846.
- RAIBLE S. [2000], "Lévy Processes in Finance : Theory, Numerics and Empirical Facts", Thèse de doctorat, Université de Fribourg.
- REGNAULT J. [1863], *Calcul des chances et philosophie de la bourse*, Paris, Mallet-Bachelier et Castel.
- ROBERTS H. [1959], "Stock Market Patterns and Financial Analysis : Methodological Suggestions", *Journal of Finance*, vol. 14, n°1, mars, pp. 1-10.
- ROGALSKI R., VINSO J. [1978], "Empirical Properties of Foreign Exchange Rates", *J. of International Business Studies*, vol. 9, pp 69-79.
- ROGER P. [1988], "Théorie des marchés efficients et asymétrie d'information : une revue de la littérature", *Finance*, vol. 9, n°1, pp 57-98.
- SAMUELSON P.A. [1965a], "A Rational Theory of Warrant Pricing", *Industrial Management Review*, vol. 6, pp. 13-39.
- SAMUELSON P.A. [1965b], "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", *Industrial Management Review*, vol. 6, pp. 41-49.
- SAMUELSON P.A. [1973], "Proof that Properly Discounted Present Value of Assets Vibrate Randomly", *Bell Journal of Economics*, vol. 4, pp. 369-374.
- SO J. [1987], "The sub-gaussian Distribution of Currency Futures : stable paretian or Nonstationnary?", *Review of Economics and Statistics*, pp 100-107.
- SUMMERS L. [1986], "Does the Stock Market Rationally Reflect Fundamental Values?", *Journal of Finance*, vol. 41, n°3, pp 591-601.
- TAQQU M. [2002], "Bachelier et son époque : une conversation avec Bernard Bru", dans COURTAULT J.M., KABANOV Y. [2002] (dir.), *Louis Bachelier, aux origines de la finance mathématique*, pp. 87-110.
- TEICHMOLLER J. [1971], "A Note on the Distribution of Stock Price Changes", *J. of the American Statistical Association*, vol. 66, pp 282-284.
- TUCKER A., POND L. [1988], "The Probability Distribution of Foreign Exchange Price Changes : Test of Candidate Processes", *The Review of Economics and Statistics*, pp 638-647.

- UPTON D., SHANNON D. [1979], “The Stable Paretian Distribution, Subordinated Stochastic Processes, and Asymptotic Lognormality : an Empirical Investigation”, *Journal of Finance*, vol. 34, n°4, pp 1031-1039.
- WALTER C. [1994], “Les structures du hasard en économie : efficience des marchés, lois stables et processus fractals”, Thèse de doctorat, IEP Paris.
- WALTER C. [1996], “Une histoire du concept d’efficience sur les marchés financiers”, *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, vol. 51, n°4 (juillet-août), pp 873-905.
- WALTER C. [1999], “Aux origines de la mesure de performance des fonds d’investissement : les travaux d’Alfred Cowles”, *Histoire et mesure*, vol. 14, n° 1-2, pp 163-197.
- WALTER C. [2001a], “Les échelles de temps sur les marchés financiers”, *Revue de synthèse*, T. 122, n°1, janvier-mars, pp 55-69.
- WALTER C. [2001b], “La recherche de lois d’échelles sur les variations boursières”, dans ABRY P., GONÇALVÈS P. LÉVY VÉHEL J. (dir.), *Lois d’échelle, fractales et ondelettes*, Hermès.
- WALTER C. [2002], “Le phénomène leptokurtique sur les marchés financiers”, *Finance*, vol. 23, n°2, pp 15-68.
- WASSERFALLEN W. ET ZIMMERMANN H. [1985], “The Behavior of Intra-daily Exchange Rates”, *Journal of Banking and Finance*, vol. 9, pp 73-99.
- WEIDE R. VAN DER [2002], “GO-GARCH : A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model”, *Journal of Applied Econometrics*.
- WESTERFIELD J. M. [1977], “An examination of Foreign Exchange Risk under Fixed and Floating Exchange rate Regimes”, *Journal of International Economics*, vol. 7, pp 181-200.
- WORKING H. [1934], “A Random-Difference Series for Use in the Analysis of Time Series”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 29, mars, pp 11-24.
- WORKING H. [1949], “The Investigation of Economic Expectations”, *American Economic Review*, vol. 39, mai, pp 150-166.
- WORKING H. [1956], “New Ideas and Methods for Price Research”, *Journal of Farm Economics*, vol. 38, pp 1427-1436.
- WORKING H. [1958], “A Theory of Anticipatory Prices”, *American Economic Review*, vol. 48, pp 189-199.
- ZAJDENWEBER D. [1974], “The daily variations of some Paris stock market prices”, document de travail Paris X, et n° 28/1975 CESA.
- ZAJDENWEBER D. [1976], *Hasard et prévision*, Paris, Economica.
- ZAJDENWEBER D. [2000], *L’économie des extrêmes*, Paris, Economica.
- ZAKOIAN J. [1994], “Threshold Heteroskedasticity Models”, *Journal of Economic Dynamic and Control*, vol. 15, pp 931-955.