



**HAL**  
open science

## Quelques classes d'opérateurs remarquables pour combiner des ensembles flous

Didier Dubois

► **To cite this version:**

Didier Dubois. Quelques classes d'opérateurs remarquables pour combiner des ensembles flous. Bulletin pour les sous-ensembles flous et leurs applications, 1979, 1, pp.29–35. hal-04566730

**HAL Id: hal-04566730**

**<https://hal.science/hal-04566730>**

Submitted on 2 May 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

QUELQUES CLASSES D'OPERATEURS REMARQUABLES

POUR COMBINER DES ENSEMBLES FLOUS

-----  
Didier DUBOIS

IMAG - B.P. 53 X - 38041 GRENOBLE

APPROCHE DU PROBLEME

Soient A et B deux sous-ensembles d'un référentiel E. On s'intéresse ici aux façons de combiner symétriquement A et B en un autre sous-ensemble C avec les conditions suivantes :

si  $a \in A$  et  $a \in B$       alors  $a \in C$   
si  $a \notin A$  et  $a \notin B$       alors  $a \notin C$

Si on raisonne en termes d'ensembles ordinaires, il n'y a que fort peu de façons de combiner A et B avec ces contraintes : C est l'intersection ou l'union de A et de B. Si on raisonne en termes d'ensembles flous, ce problème n'est pas mathématiquement trivial, et il s'avère sémantiquement beaucoup plus riche : il se pose chaque fois qu'on veut agréger des éléments d'informations. Par exemple, en reprenant le cadre conceptuel désormais classique de BELLMAN et ZADEH [1], A et B sont des ensembles de bonnes actions au sens de deux critères, et C l'ensemble des bonnes décisions.

Pouvoir répertorier les façons de combiner A et B, c'est identifier les comportements de l'esprit humain quand il agrège des informations. Dans le cadre de l'analyse de la décision et d'une échelle de jugement à deux niveaux, si le décideur considère que les bonnes décisions satisfont les deux critères, on aura  $C = A \cap B$  ; s'il considère que les bonnes décisions sont celles qui satisfont au moins l'un des critères, on aura  $C = A \cup B$ , et c'est tout.

En pratique, les jugements sont plus nuancés et les situations de choix sont plus nombreuses. Dans la suite, on essaie de classer les opérateurs traduisant ces situations, d'une façon qui prolonge le cas non flou, l'intersection et l'union d'ensembles non flous étant vues comme des agrégations extrêmes.

TENTATIVE DE CLASSEMENT

Soient  $\mu_A$  et  $\mu_B$  les fonctions d'appartenance de A et de B. Celle de C est définie formellement par :

$$\mu_C(a) = \mu_A(a) * \mu_B(a) \quad \forall a \in E$$

C'est-à-dire que  $\mu_C(a)$  ne dépend que de a (indépendance par rapport au contexte). \* est une opération interne au segment [0,1] qui satisfait les axiomes suivants :

$$0 * 0 = 0 ; 1 * 1 = 1 \quad (A1)$$

$$* \text{ est commutative.} \quad (A2)$$

Ces axiomes assurent que \* est un opérateur conforme aux conditions du paragraphe précédent.

Un autre axiome naturel est le suivant :

$$\forall x, y, x', y' \in [0,1] \text{ si } x \geq x' \text{ et } y \geq y' \text{ alors } x * y \geq x' * y' \quad (A3)$$

Dans le cadre de l'analyse de la décision, cet axiome stipule que si a est meilleur que a' au sens de A et de B, alors a est une meilleure décision que a'. C'est-à-dire que \* ne contredit pas l'ordre partiel au sens de Paréto, induit par les critères A et B sur E.

Un dernier axiome (A4) sera la continuité de \*, à savoir qu'une variation infinitésimale de l'un des opérands ne peut entraîner une variation finie du résultat. On peut aussi considérer cet axiome comme une commodité mathématique.

Soit  $\mathcal{C}$  la classe des opérateurs satisfaisant les axiomes A1 jusque A4.

Trois sous-classes de  $\mathcal{C}$  semblent dignes d'intérêt :

. Les opérateurs de conjonction : ils satisfont l'axiome

$$x * y \leq \min(x,y) \quad \forall x,y \in [0,1] \quad A5$$

Sémantiquement, cela revient à supposer que l'appartenance à C demande plus que l'appartenance à A et à B.

. Les opérateurs de disjonction : ils satisfont l'axiome

$$x * y \geq \max(x,y) \quad \forall x,y \in [0,1] \quad A6$$

Leur sémantique est duale de celle des opérateurs de conjonction.

Les opérateurs de compromis

$$x * y \in [\min(x,y), \max(x,y)] \quad \forall x,y \in [0,1] \quad (A7)$$

et  $* \neq \min$  ou  $\max$  (A8)

L'appartenance à C est intermédiaire entre l'appartenance à A et à B. Ce type d'opérateur n'existe pas dans la théorie des ensembles classiques, mais est très courant en pratique.

En termes d'analyse de la décision, cela revient à classer les types de choix selon 2 critères, en trois catégories : refus de compromis, acceptation de compromis, abandon d'un des critères. En pratique, on trouvera des situations hybrides, ce qui s'exprime par le fait que les trois classes ci-dessus dégagées ne couvrent pas l'espace  $\mathcal{C}$ .

#### QUELQUES PROPRIETES DES OPERATEURS

On donne ici sans démonstration quelques propriétés remarquables des opérateurs introduits :

. le seul opérateur de conjonction qui soit idempotent ( $x * x = x$ ) est  
 $x * y = \min(x,y)$

. le seul opérateur de compromis qui soit associatif est

$$x * y = \text{med}(x,y,0*1)$$

où med signifie valeur médiane.

. le seul opérateur de disjonction qui soit idempotent ( $x * x = x$ ) est

$$x * y = \max(x,y)$$

. si  $*$  est un opérateur de conjonction, alors défini par

$$x \perp y = 1 - (1-x) * (1-y)$$

est un opérateur de disjonction (c'est le dual de  $*$  au sens des lois de MORGAN).

$\perp$  est associatif si et seulement si  $*$  l'est.

Une classe d'opérateurs intéressants est celle des opérateurs auto-duaux, c'est-à-dire  $x * y = 1 - (1-x) * (1-y)$ . Appelés sommes symétriques par SILVERT (1979), ces opérateurs ont l'interprétation suivante :

pour calculer le degré d'appartenance de  $a$  à  $C$ , on peut soit combiner  $A$  et  $B$  par  $*$ , soit combiner leurs compléments et obtenir ainsi le degré d'appartenance au complément de  $C$ .

NB On suppose ici que le complément  $\bar{A}$  de  $A$  se définit par la complémentation à 1.

La classe des sommes symétriques et celle des opérateurs de compromis ne sont pas disjointes, mais il n'y a aucune relation d'inclusion entre elles.

Exemples :

. Conjonctions :  $x * y = \min(x,y)$

$$x * y = x.y$$

$$x * y = \max(0, x+y-1)$$

$$x * y = x \text{ si } y = 1 ; y \text{ si } x = 1 ; 0 \text{ sinon. (noté } T_W(x,y))$$

Les 4 conjonctions ci-dessous sont associatives ; ce sont des cas particuliers de "t-normes" opérateurs étudiés indépendamment de la théorie du flou par des mathématiciens tels que SCHWEIZER et SKLAR (1963).

. Disjonctions : les duales des conjonctions, c'est-à-dire :

$$x * y = \max(x,y)$$

$$x * y = x.y$$

$$x * y = \min(1, x+y)$$

$$x * y = x \text{ si } y = 0 ; y \text{ si } x = 0 ; 1 \text{ sinon. (noté } T_W^*(x,y))$$

. Opérateurs de compromis qui ne sont pas des sommes symétriques :

$$x * y = \sqrt{xy} \quad \text{et son dual } x \star y = 1 - \sqrt{(1-x)(1-y)}$$

$$x * y = \text{med}(x,y,\alpha), \quad \alpha \in [0,1] - \{0, \frac{1}{2}, 1\}$$

. Opérateurs de compromis qui sont des sommes symétriques

$$x * y = \text{med} \left( x, y, \frac{1}{2} \right)$$

$$x * y = \frac{x+y}{2} \quad (\text{moyenne arithmétique})$$

$$x * y = \frac{\min(x,y)}{1-|x-y|} \quad \text{et} \quad x * y = \frac{\max(x,y)}{1+|x-y|}$$

. Sommes symétriques associatives dans ]0,1[ (≠ opérateurs de compromis)

$$x * y = \frac{xy}{1-x-y+2xy} \quad x * y = \frac{x+y-xy}{1+x+y-2xy}$$

Remarque : plusieurs façons de paramétriser les conjonctions (et partant, les disjonctions) existent dans la littérature :

. Opérateur de HAMACHER :  $x \dot{\gamma} y = \frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}$   $\gamma \geq 0$  (ZIMMERMAN 1978)

. Opérateur  $T_p$  (SCHWEIZER & SKLAR, 1963) :

$$T_p(x,y) = (x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-1/p} \quad (p > 0)$$

$$T_0(x,y) = xy$$

$$T_p(x,y) = [\max(0, x^{-p} + y^{-p} - 1)]^{-1/p} \quad (p < 0)$$

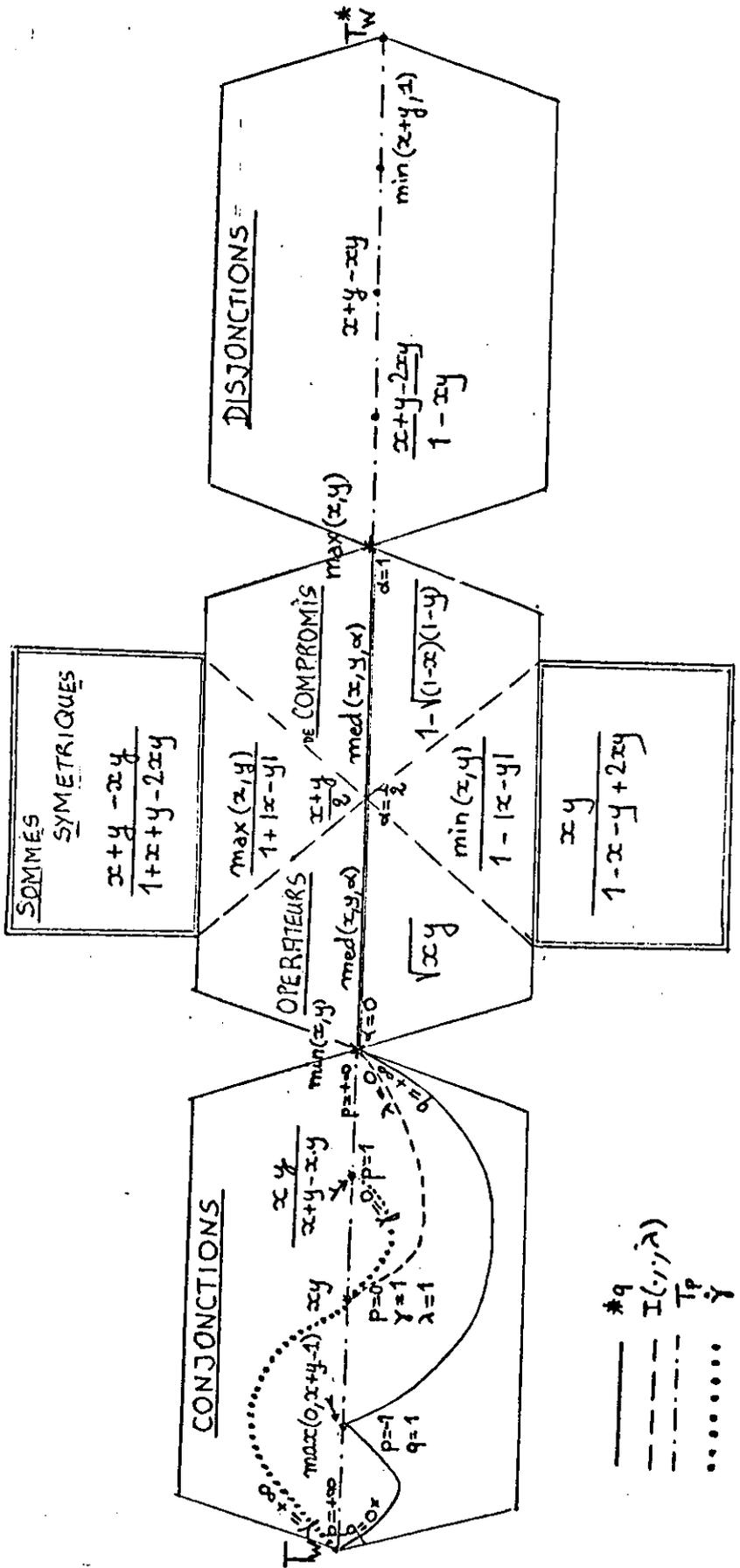
. Opérateur  $I(\cdot, \cdot, \lambda) = \frac{xy}{\max(x,y,\lambda)}$   $\lambda \in [0,1]$

. Opérateur de YAGER (1979) :  $x * q y = 1 - \min(1, [(1-x)^q + (1-y)^q]^{1/q})$   $q \geq 0$

Le tableau ci-contre résume les configurations respectives des classes considérées, et précise le domaine de variation des opérateurs paramétrés.

#### CONCLUSION :

L'approche esquissée ci-dessus n'est certes pas exhaustive. Elle doit être étendue aux opérateurs n-aires, et à des combinaisons dissymétriques d'ensembles. Ces extensions, ainsi que les considérations ici présentées, sont discutées dans deux articles plus longs (DUBOIS et PRADE, 1979 a, b).



Le champ d'application d'une telle panoplie d'opérateurs sémantiquement interprétés, est très vaste. Tous les domaines où l'on agrège des éléments d'information en vue d'un choix, sont concernés : l'analyse de la décision (agrégation de critères numériques), la reconnaissance des formes (agrégation de caractères significatifs), la recherche dans une base de donnée (agrégation de descripteurs), l'attraction des points de vente (choix multicritère du consommateur).

En particulier, il convient de souligner l'insuffisance de la traditionnelle somme pondérée, souvent considérée comme universelle quand on agrège des éléments d'information d'importance inégale : en définitive, ce n'est qu'un opérateur de compromis de structure symétrique (la moyenne arithmétique) dont les opérands varient sur deux échelles de valeurs différentes.

#### REFERENCES

- BELLMAN R.E., ZADEH L.A. : Decision-making in a fuzzy environment Management Science 17, B141-B164, 1970.
- DUBOIS D., PRADE H. : "New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators". 1st Symposium on Policy Analysis and Information Systems Durham, North Carolina, U.S.A. 1979.
- DUBOIS D., PRADE H. : Criteria aggregation and ranking of alternatives in the framework of fuzzy set theory. Non publié (s'adresser aux auteurs).
- SCHWEIZER B., SKLAR A. : "Associative functions and abstract semi-groups" Publ. Math Debrecen 10, 69-81, 1963.
- SILVEPT W. : "Symmetric Summation : a class of operations on fuzzy sets" A paraître dans IEEE Trans. Systems, Man, Cybernetics.
- YAGER R.R. : "Some procedures for selecting operators for fuzzy operations". Tech. Rep. RRY-79-05 Iona College, New Rochelle, NY.1979.
- ZIMMERMANN H.F. : "Fuzzy programming and L.P. with several objective functions". Int. J. for fuzzy sets and systems. 1, 45-55, 1978.