



**HAL**  
open science

## Nomenclature of fuzzy measures

Henri Prade

► **To cite this version:**

Henri Prade. Nomenclature of fuzzy measures. Bulletin pour les sous-ensembles flous et leurs applications, 1979, 1, pp.26–28. hal-04566716

**HAL Id: hal-04566716**

**<https://hal.science/hal-04566716>**

Submitted on 2 May 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Nomenclature of fuzzy measures .

Proceedings of the Seminar on Theory of Fuzzy Sets.

Johannes Kepler Universität , Linz , Sept. 24-29 , 1979.

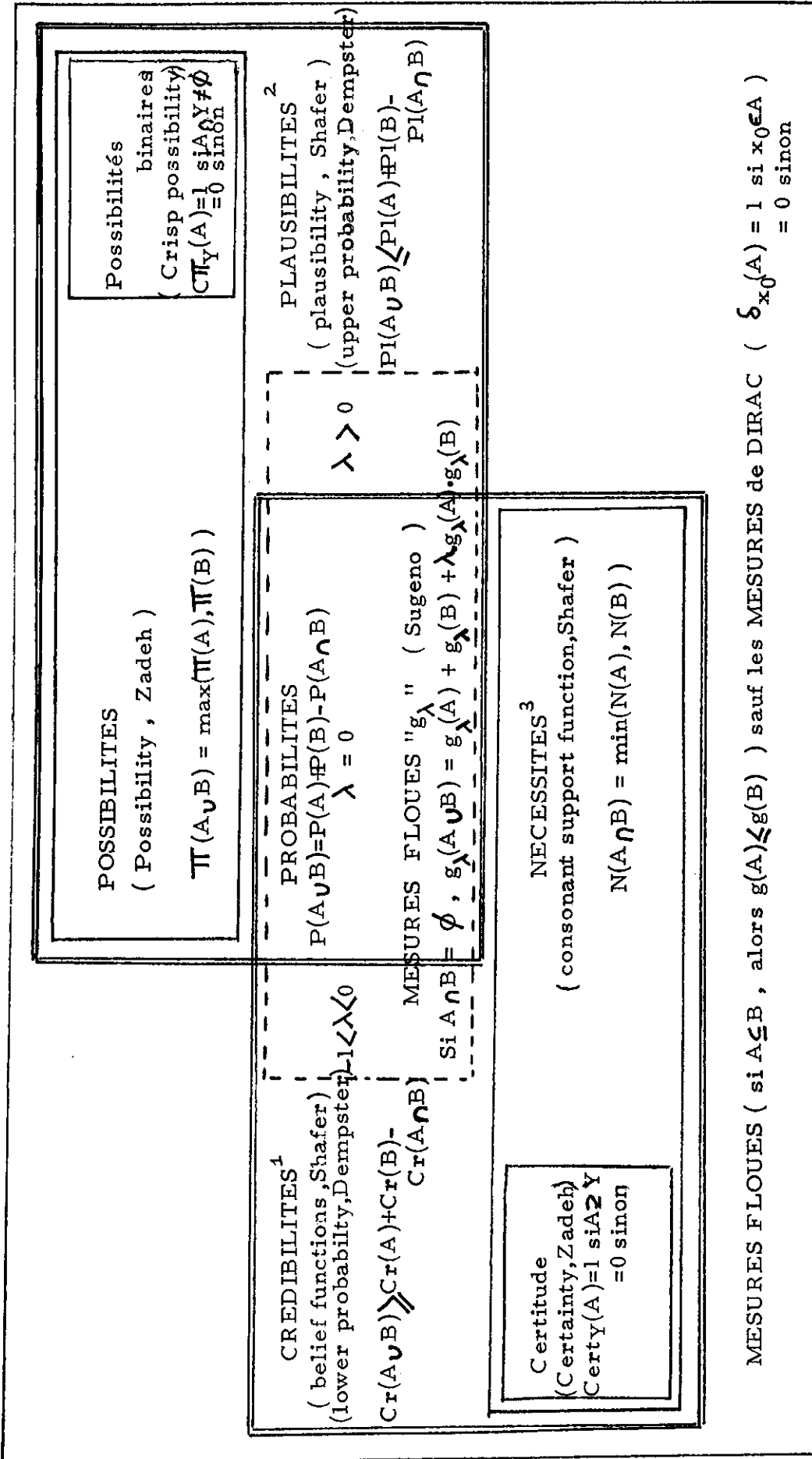
Egalement disponible sous forme de rapport du Lab. L.S.I. (17p)

Résumé

Henri Prade

L'expression "mesures floues" (fuzzy measures) a été employée par différents auteurs pour signifier soit des mesures opérant sur des sous-ensembles flous ( les mesures de probabilité d'événements flous introduites par Zadeh en 1968 en furent sans doute la première manifestation ), soit quelque chose de plus général que des mesures au sens où l'additivité y est remplacée par une propriété plus faible ( c'est ainsi que sous l'appellation de "mesures floues" Sugeno a regroupé des fonctions  $g$  de  $\mathcal{P}(X)$  dans  $[0, 1]$  croissantes au sens de l'inclusion et satisfaisant bien sûr  $g(\emptyset) = 0$  ,  $g(X) = 1$  et une propriété de continuité si  $X$  n'est pas fini ). Ces dernières mesures floues opèrent sur des sous-ensembles non-flous de  $X$  ; elles peuvent cependant être étendues , en général de diverses manières , aux sous-ensembles flous de  $X$  . C'est aux mesures floues au sens de Sugeno que s'intéresse principalement cette nomenclature .

En dehors des probabilités , de nombreux cas particuliers de mesures floues ont été introduits et étudiés dans la littérature , le plus souvent indépendamment de la théorie des sous-ensembles flous d'ailleurs . Le tableau ci-après rappelle leur axiome caractéristique , les auteurs qui les ont considérées les premiers . De plus , les relations d'inclusion entre les différentes familles de mesures floues y sont visualisées . L'établissement d'une telle classification avait été déjà largement débuté par G. Banon . Il restait principalement à vérifier que les mesures de possibilité sont des mesures de plausibilité et à montrer que les mesures floues " $g_\lambda$ " de Sugeno pour  $-1 < \lambda \leq 0$  sont aussi des mesures de plausibilité -- ce qui est aisé en remarquant que la fonction définie par  $\forall A , f(A) = 1 - g_\lambda(\bar{A})$  est une mesure floue  $g_\mu$  avec  $\mu = \frac{-\lambda}{1+\lambda}$  et que  $\lambda \mapsto \frac{-\lambda}{1+\lambda}$  est une bijection involutive de  $] -1, 0 ]$  dans  $[0, +\infty)$ , compte tenu du fait que pour  $\lambda \gg 0$  les mesures floues  $g_\lambda$  sont des mesures de crédibilité (belief functions) (Cf. Banon) .



1. Plus généralement,  $Cr(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_i Cr(A_i) - \sum_{i < j} Cr(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} Cr(A_1 \cap \dots \cap A_n)$
2. Plus généralement,  $\pi(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \sum_i \pi(A_i) - \sum_{i < j} \pi(A_i \cup A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \pi(A_1 \cup \dots \cup A_n)$
3. Indirectement considérées par Shackle dans sa théorie des "degrés de surprise". Voir aussi Cohen, L.J. .

Dans la transformation involutive  $g(.) \longmapsto 1 - g(\bar{.})$ , les plausibilités, possibilités, possibilités binaires donnent respectivement les crédibilités, nécessités, certitudes; dans la même transformation, les mesures  $g_\lambda$  sont globalement invariantes et les probabilités invariantes point par point. L'appellation "nécessité" pour les "consonant support functions" a été choisie par analogie avec la situation modale:  $\Box P = \neg \Diamond \neg P$ .

Il est également remarqué que (au moins pour X fini) si 1°)  $g(\emptyset)=0$ ,  $g(X)=1$ ; 2°)  $\forall A \subseteq X, \forall B \subseteq X$ , si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $g(A \cup B) = \max(g(A), g(B))$ , alors g est une mesure de possibilité.

Shafer a fait remarquer que la donnée d'une mesure de crédibilité Cr (belief function) était équivalente à celle d'un "basic probability assignment" m de  $\mathcal{P}(X)$  dans  $[0, 1]$  satisfaisant 1°)  $m(\emptyset)=0$ ; 2°)  $\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$ . On a les formules  $Cr(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$  et  $m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} Cr(B)$ . Pour les plausibilités, on a  $Pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B)$  et par suite  $\forall A, 0 \leq Cr(A) \leq Pl(A) \leq 1$ .

Remarquant que

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) = \sum_{B \subseteq X} \left( \sup_{x \in A} \mu_B(x) \right) \cdot m(B) \geq \sup_{x \in A} \sum_{B \subseteq X} \mu_B(x) m(B) = f(A)$$

on peut vérifier que  $f(A \cup B) = \max(f(A), f(B))$  et que  $f(X)=1$  ssi

$\bigcap \{ B, m(B) \neq 0 \} \neq \emptyset$ , f est alors une mesure de possibilité. Similairement,

à partir de m, on peut construire une mesure de nécessité h telle que  $Cr(A) \leq h(A)$

(si la même condition sur m tient de façon à avoir  $h(\emptyset)=0$ , de plus on a alors  $\forall A, h(A) \leq f(A)$ ).

Par ailleurs, toujours à partir de m, on peut construire une mesure de probabilité P telle que  $Cr(A) \leq P(A) \leq Pl(A)$ , selon la formule

$$P(\{x\}) = \sum_{B \ni \{x\}} \frac{1}{|B|} m(B)$$

La sémantique de ces mesures (principalement la justification de leur nom) est ensuite brièvement discutée.

Il est ensuite montré, en reprenant l'approche de Dempster pour les possibilités que les "upper and lower possibilities" sont encore des possibilités.

Enfin, l'extension de ces mesures floues à des événements flous (c.a.d. des sous-ensembles flous) et l'étude de mesures (floues) à valeur floue sont abordées.

Ce travail n'est qu'une première étape, de nombreux approfondissements étant encore à faire. Les résultats d'une telle étude peuvent être utiles notamment dans le cadre de modélisations du raisonnement approché.