



HAL
open science

Propriétés de la cardinalité floue d'un ensemble flou fini

Didier Dubois

► **To cite this version:**

Didier Dubois. Propriétés de la cardinalité floue d'un ensemble flou fini. Bulletin pour les sous-ensembles flous et leurs applications, 1980, 5, pp.11–12. hal-04564602

HAL Id: hal-04564602

<https://hal.science/hal-04564602>

Submitted on 30 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PROPRIÉTÉS DE LA CARDINALITÉ FLOUE
D'UN ENSEMBLE FLOU FINI

Didier DUBOIS

CERT / DERA

Soit U un référentiel fini et A un ensemble flou sur U , défini par sa fonction d'appartenance $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$. Zadeh (1978) a introduit la cardinalité floue d'un ensemble fini. Le cardinal flou $|A|$ de A est un sous-ensemble flou de $|N$, ensemble des entiers naturels, tel que

$$\forall n \in |N| \quad \mu_{|A|}(n) = \sup \{ \alpha \in]0,1[\mid |A_\alpha| = n \} \quad (1)$$

où A_α est la coupe de niveau α de A .

Il est naturel de penser que le cardinal d'un ensemble flou soit un entier flou. Cela correspond à une vision "horizontale" de l'ensemble flou comme une famille pondérée d'ensembles classiques; (1) contraste avec la puissance d'un ensemble flou

$$P(A) = \sum_u \mu_A(u)$$

(De Luca & Termini 1972) qui coïncide avec la notion usuelle de cardinalité si A est non flou, tout comme (1). $P(A)$ est un nombre réel évaluant l'importance moyenne de A dans U , $|A|$ est un entier flou reflétant une vision stratifiée de A . Des propriétés de la cardinalité floue sont résumées ci-dessous :

a) $|A|$ est toujours un sous-ensemble flou normalisé ($\exists n \in |N| : \mu_{|A|}(n) = 1$) :

si A est normalisé : $\mu_{|A|}(|A_\alpha|) = 1$ pour $\alpha = 1$

si A n'est pas normalisé : $\mu_{|A|}(0) = 1$ (car $|A_1| = \emptyset$)

b) $|A|$ est un ensemble flou convexe si et seulement si μ_A est injective, i.e.

$$\forall u, v \in U \quad u \neq v \rightarrow \mu_A(u) \neq \mu_A(v)$$

si non, la non convexité de $|A|$ est de la forme suivante :

$$\exists n_1, n_2 \quad n_1 > n_2 + 1 \quad \text{avec} \quad \mu_{|A|}(n_1) > 0 \quad \mu_{|A|}(n_2) > 0$$

et

$$\forall n \in]n_1, n_2[, \mu_{|A|}(n) = 0$$

c) $\mu_{|A|}$ décroît strictement sur son support :

$$\forall n_1, n_2 \in S(|A|) = \{n | \mu_{|A|}(n) > 0\}, n_1 > n_2 \rightarrow \mu_{|A|}(n_1) < \mu_{|A|}(n_2)$$

d) Quand $|A|$ est convexe alors la propriété classique des cardinaux

$$|A| \oplus |B| = |A \cap B| \oplus |A \cup B| \text{ tient ;}$$

\cap et \cup sont l'intersection et l'union de sous-ensembles flous (min et max), \oplus est l'addition sur \mathbb{N} étendue par le principe d'extension ; l'égalité exprime l'identité des fonctions d'appartenance.

e) Notons

$$\pi_{|A|}(x) = \sup_{x \geq n} \mu_{|A|}(x) = \sup \{\alpha \in]0, 1] | |A_\alpha| \geq x\}$$

On vérifie que $\pi_{|A|}(x)$ est l'enveloppe convexe de $|A|$ (i.e. le plus petit ensemble flou convexe contenant $|A|$, cf Lowen, 1980) et on a toujours

$$\pi_{|A|} \oplus \pi_{|B|} = \pi_{|A| \oplus |B|}$$

Que $|A|$ soit ou non convexe, la fameuse égalité

$$\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cup B)$$

s'écrit ici

$$\pi_{|A|} \oplus \pi_{|B|} = \pi_{|A \cap B| \oplus |A \cup B|}$$

Donc on n'a l'égalité que des enveloppes convexes, c'est-à-dire une presque égalité vu la forme des entiers flous considérés (décroissance sur le support) et parce que la non convexité éventuelle est du type décrit en b).

Pour les démonstrations des résultats s'adresser à l'auteur.

REFERENCES

- DE LUCA A., TERMINI S. (1972) : A definition of a non probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory, Inf. & Cont. 20, 301-312.
- LOWEN R. (1980) : Convex fuzzy sets Int. J. Fuzzy sets & Systems 3, 291-310.
- SADEH L.A. (1978) : A theory of Approximate reasoning, in Machine Intelligence (D. Michie, ed.) Vol. 9 Elsevier, New York.