



**HAL**  
open science

# Un aperçu de la théorie des ensembles flous et quelques applications (IV)

Didier Dubois

► **To cite this version:**

Didier Dubois. Un aperçu de la théorie des ensembles flous et quelques applications (IV). Bulletin pour les sous-ensembles flous et leurs applications, 1981, 6, pp.101–104. hal-04564462

**HAL Id: hal-04564462**

**<https://hal.science/hal-04564462>**

Submitted on 30 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UN APERÇU DE LA THEORIE DES ENSEMBLES FLOUS ET QUELQUES APPLICATIONS (IV)

Didier DUBOIS  
CERT-DERA  
TOULOUSE (France)

## RESUME :

Après avoir passé en revue les concepts fondamentaux et les applications à la classification, la modélisation du langage naturel et la commande de processus, on termine ce tour d'horizon en évoquant l'impact de la théorie de Zadeh en diagnostic automatisé et en recherche opérationnelle.

## 4 - DIAGNOSTIC AUTOMATISE

Le diagnostic consiste à découvrir les causes d'un phénomène. à partir de l'observation de ses manifestations, que l'on appelle symptômes. Les difficultés rencontrées lors de l'automatisation du diagnostic peuvent avoir deux origines :

- les causes isolées sont idéalisées. En réalité, un patient ne souffre jamais d'une maladie exactement telle qu'elle est décrite dans les livres de médecine
- le lien causal avec les symptômes est mal connu.

Les modèles classiques de diagnostic sont soit logiques soit probabilistes. Les premiers ne sont pas réalistes parce que trop rigides. Les seconds considèrent les degrés de croyance comme des probabilités subjectives et utilisent le théorème de Bayes. Ils sont très contestables, parce que les hypothèses d'indépendance des symptômes sont douteuses, parce que le caractère additif des degrés de croyance est peu vraisemblable, et parce qu'on ne peut représenter convenablement l'ignorance totale dans le cadre des probabilités. De plus l'observation de symptômes est un évènement flou.

Une nouvelle approche a été proposée par Sanchez /38/ dans le cadre du diagnostic médical. Une maladie est considérée comme un sous ensemble flou de patients c'est à dire qu'on suppose connaître pour un ensemble  $\mathcal{P}$  de patients et  $M$  de maladies diagnostiquées une relation floue  $T$  sur  $\mathcal{P} \times M$ . Par ailleurs, les symptômes sont aussi observés de façon inexacte sur les mêmes patients, d'où une relation floue  $Q$  sur  $\mathcal{P} \times S$  où  $S$  est un ensemble de symptômes. Connaissant  $Q$  et  $T$ , Sanchez propose de modéliser une connaissance médicale induite, relation floue sur  $S \times M$ . Soit  $R$  cette relation.  $R$  est définie comme la plus grande relation floue telle que la proposition logique  $R \Rightarrow (Q \rightarrow T)$  soit vraie "  $\rightarrow$  " est une implication au sens d'une logique multivalente qui vérifie les propriétés, relativement naturelles :

$$\begin{aligned} v(A \rightarrow B) &= 1 & \text{si} & & v(A) \leq v(B) \\ v(A \rightarrow (B \rightarrow C)) &= & & & v((A \wedge B) \rightarrow C) \end{aligned}$$

D'où  $R$  est définie comme la plus grande relation floue telle que :

$$v((R \wedge Q) \rightarrow T) = 1$$

ou encore  $\forall (x, A, p) \in M \times S \times P, \min(\mu_R(x, A), \mu_Q(p, x)) \leq \mu_T(p, A)$   
 c'est à dire  $Q \circ R \subseteq T$ .

On obtient une inéquation de relations floues d'inconnue R. Ce problème a été résolu par Sanchez /39/. Connaissant R, et un symptôme flou  $\tilde{S}$ , le diagnostic sera :

$$\tilde{x} = R \circ \tilde{S}$$

Si le diagnostic est insuffisant, le savoir médical peut être amélioré en agrandissant l'ensemble des patients, P, diagnostiqués par un médecin. D'autres modèles de diagnostics peuvent être trouvés dans Tsukamoto, Terano /40/ (diagnostic de pannes) et Smets /41/ (utilisation de fonctions de croyance au sens de Shafer (\*) pour modéliser la relation symptômes-maladie; prise en compte de l'événement flou "maladie observée".)

#### 5 - RECHERCHE OPERATIONNELLE - AIDE A LA DECISION

Grâce à l'utilisation de nombres flous, représentés canoniquement sous forme L-R comme en III.2<sup>(+)</sup>, beaucoup de modèles classiques de recherche opérationnelle peuvent être étendus, en remplaçant des quantités bien définies par des nombres flous. Cette substitution est justifiée chaque fois que des données ne peuvent être précisément estimées, et que l'établissement de statistiques s'avère impossible. De toute façon, les modèles flous de R.O. sont plus faciles à mettre en oeuvre pratiquement que les modèles probabilistes.

Des algorithmes connus en théorie des graphes ont pu être aisément étendus /42/. Considérons par exemple l'algorithme de Floyd /43/ qui recherche l'ensemble des plus courtes distances entre les noeuds d'un graphe  $G = (N, A)$  où  $N = 1, 2, \dots, n$  est un ensemble de noeuds et A un ensemble d'arcs i-j valués par  $d_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in A$ . L'algorithme est le suivant :

$$0. \quad \forall i, j \in N^2, \text{ on pose } l_{ij} = d_{ij} \text{ si } ij \in A; \quad l_{ii} = 0 \quad \forall i \in N; \quad l_{ij} = +\infty \quad \forall ij \notin A, i \neq j.$$

$$1. \quad \forall k \in N, \quad \forall i \in N - \{k\}, \quad \forall j \in N, \quad l_{ij} \leftarrow \min(l_{ij}, l_{ik} + l_{kj})$$

les  $l_{ij}$  sont les plus courtes distances recherchées, lorsque la procédure est terminée. La version floue de l'algorithme de Floyd prend comme données des nombres flous  $\tilde{d}_{ij}, \forall ij \in A$ . Elle est formellement la même que la version non floue Mais dans l'étape 1 on a :

$$\tilde{l}_{ij} \leftarrow \widetilde{\min}(\tilde{l}_{ij}, \tilde{l}_{ik} \oplus \tilde{l}_{kj})$$

où  $\widetilde{\min}$  est l'opérateur "min" étendu par le principe d'extension et  $\oplus$  l'addition floue. On conçoit que moyennant une représentation LR de nombres flous; l'algorithme soit très simple à mettre en oeuvre. Dans Dubois-Prade /42/ on trouvera une version floue de l'algorithme de Ford.

NB. : on peut montrer qu'étant donné deux nombres flous  $\tilde{m}$  et  $\tilde{n}$ , la quantité  $\widetilde{\min}(\tilde{m}, \tilde{n})$  n'est pas forcément  $\tilde{m}$ , ou  $\tilde{n}$ . En particulier les distances floues calculées ci-dessus, ne correspondent plus à un chemin précis, mais plusieurs chemins peuvent entrer dans la définition d'une distance floue  $\tilde{l}_{ij}$ .

(\*)

A Mathematical Theory of Evidence - Princeton 1976

(+)

BUSEFAL, n°3, Eté 80, p 68

Un autre exemple d'extension floue de modèle de R.O., se trouve dans Zimmermann /44/ (Programmation linéaire sous contraintes "molles") et Dubois-Prade /45/ (Programmation linéaire avec coefficients flous). Ces thèmes sont largement discutés et illustrés dans le livre de Negoita /54/.

En matière d'optimisation, les premiers à signaler le rapport entre les modèles connus (maximisation d'un critère sous contraintes) et le flou ont été Bellman et Zadeh /46/. Ils expliquent notamment la communauté de nature entre contraintes et objectifs. Un objectif n'est qu'une contrainte floue. Chaque contrainte floue (objectif) induit un ordre sur l'ensemble des solutions possibles, c'est à dire que de cette façon, un sous ensemble flou est défini. Trouver une solution satisfaisant les contraintes et les objectifs c'est formellement combiner entre eux des sous-ensembles flous de bonnes solutions au sens d'une contrainte ou d'un objectif (cf /51/; /52/). De plus, les valeurs des divers paramètres envisagés dans l'évaluation d'un objet donné peuvent être flous. Par exemple, une "utilité" est rarement quantifiable précisément. On est donc amené à fuzzi-fier les modèles d'agrégation de critères. Un exemple de modèle d'agrégation fuzzifié peut être trouvé dans Jain /47/ qui étend la pondération linéaire à des poids flous et des utilités floues. Ce modèle a été perfectionné par Dubois-Prade /48/ grâce à la représentation LR des quantités floues.

Il est à noter que des objets valués par des utilités floues ne peuvent plus être classés dans un ordre linéaire, par valeur décroissante de l'utilité. L'utilisation de l'opérateur  $\widetilde{\max}$  pour désigner la solution optimale ( $i^*$  tel que  $\widetilde{u}_i^* = \widetilde{\max} \widetilde{u}_i$  ou  $\widetilde{u}_i$  est une valeur floue d'utilité) ne conduit plus à la sélection automatique d'une solution, mais permet de représenter le caractère indécis d'une prise de décision dans un environnement flou. Dès qu'une décision devient arbitraire, ce fait est signalé par les modèles flous, ce qui en fait l'intérêt. D'autres travaux, en prise de décision statistique peuvent être trouvés dans Okuda Tanaka Asai /49/ (probabilités d'événements flous) Dubois-Prade (probabilités floues) /50/).

## CONCLUSION

L'intérêt de la théorie des sous ensembles flous se situe principalement dans son aptitude à saisir une information vague quand celle-ci ne peut être précisée ni quantifiée par des méthodes déjà connues (statistiques). On peut ainsi donner une représentation mathématique au contenu sémantique d'une description de stratégie décrite en langage naturel. Cette représentation s'interprète en termes de distributions de possibilités sur les valeurs des quantités inconnues. Par ailleurs, le développement de méthodes rapides de manipulation de nombres flous est crucial pour mettre en pratique les concepts de la théorie de Zadeh.

Il est envisageable de penser que celle-ci va permettre un renouveau de l'analyse des systèmes à composantes humaines (économie, recherche opérationnelle) et de certains points de vue sur l'intelligence artificielle.

## REFERENCES

- /38/ Sanchez E - "Solutions in composite fuzzy relation equations : application to medical diagnosis in Brouwerian logic" - Fuzzy Automata and Decision Processes (Gupta et al. Eds) North Holland, 221-234, 1977
- /39/ Sanchez E. - "Resolution of composite fuzzy relation equations" - Information and Control 30, 38-48, 1976

- /40/ Tsukamoto Y. Terano T. - "Failure diagnosis by using fuzzy logic" - Proc. IEEE conf. on Decision and Control - New Orleans - 1390-95, 1977
- /41/ Smets Ph. - "Medical diagnosis : fuzzy sets and degrees of belief" - Proc. Int. Symposium on Fuzzy sets - Marseille, 1978  
R.O. - Aide à la décision
- /42/ Dubois D., Prade H. "Algorithmes du plus court chemin pour traiter des données floues" - RAIRO série R.O., vol.12, n°2, pp 213 227, 1978
- /43/ Floyd R.N. - "Shortest paths" - Com. of the ACM alg. 97, vol.5, p 345, 1962
- /44/ Zimmermann H.J. - "Fuzzy programming and LP with several objective functions" Int. J. for Fuzzy sets and Systems, vol. 1, n°1, p 45 et seq. 1978
- /45/ Dubois D., Prade H. - "Systems of linear fuzzy constraints" - Int. J. for Fuzzy Sets and Systems, vol. 3, n°1, 37-48
- /46/ Bellman R.E., Zadeh L.A. - "Decision making in a fuzzy environment" Management Science, 17, n°4, B 141-B164, 1970
- /47/ Jain R. - "A procedure for multiple aspect decision making" Int. J. Systems Sci., vol.8, n°1, pp 1-7, 1977
- /48/ Dubois D., Prade H. "Correspondence" - Int. J. Systems Sci., vol.9, n°3, 357-360, 1978
- /49/ Okuda T., Tomaka H., Asail "A formulation of fuzzy decision problems with fuzzy information using probability measures of fuzzy events" Int. and Cont. Vol.38, n°2, pp 135-147, 1978
- /50/ Dubois D., Prade H. - "Decision making under fuzziness" in "advances in fuzzy set theory and applications" (M.Gupta, R.Ragade, R.Yager Ed.) North Holland, 279 302
- /51/ Dubois D. "Quelques classes d'opérateurs remarquables pour combiner des ensembles flous" Busefal, n°1, 29-36, 1980
- /52/ Zimmermann H.J., Zysno P. "Latent connectives in human decision making" Fuzzy Sets & Systems, 4, n°1, 37-52, 1980
- /53/ Watson S.R., Weiss J.J., Donnell M. (1979) Fuzzy decision analysis - IEEE SMC 9, n°1, 1-9
- /54/ Negoita C.V., "Management applications of systems theory" Birkhäuser Verlag, Basel 1979