



HAL
open science

Modèle non-linéaire d'un récupérateur d'énergie électromagnétique pour la marche humaine et résolution analytique approchée

Louis Verzellesi, Mohamed Hamdaoui, Foudil Mohri

► **To cite this version:**

Louis Verzellesi, Mohamed Hamdaoui, Foudil Mohri. Modèle non-linéaire d'un récupérateur d'énergie électromagnétique pour la marche humaine et résolution analytique approchée. 2024. hal-04563079v2

HAL Id: hal-04563079

<https://hal.science/hal-04563079v2>

Preprint submitted on 2 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèle non-linéaire d'un récupérateur d'énergie électromagnétique pour la marche humaine et résolution analytique approchée.

L. Verzellesi¹, M. Hamdaoui², F. Mohri³

¹LEM3, Université de Lorraine, France, louis.verzellesi@univ-lorraine.fr,

²LEM3, Université de Lorraine, France, mohamed.hamdaoui@univ-lorraine.fr,

³LEM3, Université de Lorraine, France, foudil.mohri@univ-lorraine.fr

Résumé — La récupération d'énergie durable pendant la marche humaine est un sujet qui prend de l'ampleur avec l'ubiquité des objets connectés, capteurs et autres dispositifs à électronique embarquée. L'objectif de ce travail est de présenter un modèle électromécanique non-linéaire couplé en deux dimensions d'un récupérateur d'énergie électromagnétique consistant en une bille se mouvant dans un tube muni d'une bobine de récupération. Les solutions analytiques approchées de ce modèle sont ensuite étudiées en linéaire avec une version adaptée de la « Variational Iteration Method » (VIM). Des expressions analytiques de la puissance moyenne récupérée sont fournies permettant l'optimisation du récupérateur.

Mots clefs — récolteur d'énergie, marche humaine, modèle non-linéaire, variational iteration method

1 INTRODUCTION

La puissance mécanique disponible lors de la marche humaine est relativement importante (2-20W). Cela a motivé la réalisation de multiples dispositifs de récupération d'énergie [1]. La marche humaine est composée de deux phases. La première, dénommée « stance phase », représente l'étape de repos où le pied ne bouge pas. Elle est initialisée par une attaque très forte du talon, porteuse de beaucoup d'énergie. La seconde phase, appelée « swing phase », est, à contrario, l'étape où le pied est en balancement au-dessus du sol. Parmi les premiers récupérateurs d'énergie à être adoptés, les récolteurs piézoélectriques figurent en bonne position [2]. Puis, viennent les récolteurs électromagnétiques qui développent eux aussi une puissance de sortie relativement élevée [3]. Par ailleurs, dans une optique d'optimisation, des récolteurs hybrides, à la fois électromagnétiques et piézoélectriques, ont aussi été développés par la suite combinant d'une manière originale les deux modes de récupération énergétique [4]. Cependant, les solutions proposées ont une faible bande passante, ne sont pas adaptées aux faibles fréquences caractéristiques de la marche et sont généralement trop volumineuses pour être incorporées dans une chaussure. Dans le présent travail, un modèle mathématique d'un récolteur d'énergie électromagnétique, constitué d'un tube dans lequel se meut un aimant sous l'action des mouvements de translation et de rotation du pied, est proposé. Lors de la mise en mouvement de l'aimant lors du balancement du pied, ce dernier est soumis à la *Force de Lorentz* et un courant apparaît par induction électromagnétique dans la bobine récupératrice. Des configurations similaires ont été proposées par plusieurs auteurs, dont Fan & al. [4]. Basé sur les travaux de Donoso & al. [5], [6], nous déterminons l'équation du mouvement décrivant le déplacement de la bille dans le tube ainsi qu'un modèle électrique permettant de calculer la puissance récupérée. La version linéarisée de cette équation consiste en une équation de Mathieu en régime forcé et amorti. L'équation de Mathieu est l'une des équations typiques de la théorie des vibrations non linéaires. Elle apparaît également en mathématiques appliquées et dans de nombreux domaines de l'ingénierie [7]. La forme de l'équation de Mathieu est celle d'une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre, qui diffère de celle correspondant à un oscillateur harmonique simple par l'existence d'un coefficient de rigidité périodique comme suit :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (d + \varepsilon \cos(t))x(t) = 0 \quad (1)$$

où d et ε sont des paramètres constants et x une fonction du temps. Ainsi, l'oscillateur harmonique simple est obtenu pour $\varepsilon = 0$, et le paramètre d correspond alors au carré de sa pulsation propre, c'est-à-dire $\omega_0 = \sqrt{d}$. Dans le but d'obtenir des expressions analytiques de la puissance moyenne récupérée, une version adaptée de la *Variational Iteration Method* (VIM) [8] est utilisée. Cette méthode est désormais largement employée par de nombreux chercheurs pour étudier des problèmes linéaires et non

linéaires et présente les mérites de la simplicité et de l'exécution facile. La VIM construit une suite récurrente $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge sous certaines conditions [9] vers la solution exacte à l'infini :

$$X_{n+1}(t) = X_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau, t) \left(\mathfrak{L}(X_n(\tau)) + \mathfrak{N}(X_n(\tau)) - \Gamma(\tau) \right) d\tau \quad (2)$$

où $\mathfrak{L}(x(t))$ et $\mathfrak{N}(x(t))$ sont les opérateurs respectivement linéaires et non-linéaires, $\Gamma(t)$ le terme forcing et $\lambda(\tau, t)$ le *multiplicateur de Lagrange*.

2 MODELE

Dans cette partie, nous allons détailler le modèle mathématique du récupérateur. Si la variable de dérivation est différente du temps t , la notation de Leibniz est retenue. On considère un repère absolu $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixé au sol ainsi qu'un repère relatif $(O_c, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ mobile situé sur le récolteur d'énergie (Figure 1) :

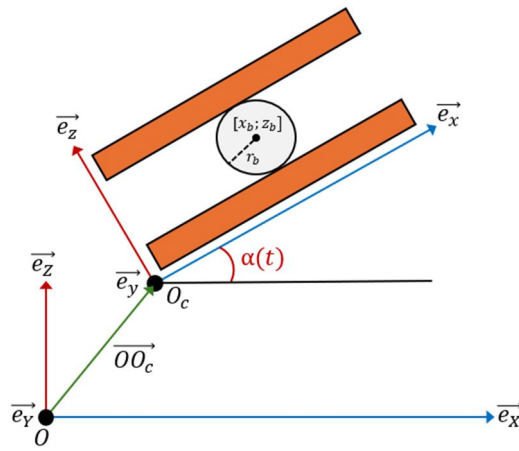


Figure 1 – Représentation des repères fixe et mobile.

L'angle $\alpha(t)$ représente l'angle de « swing ». Dans la chaussure se trouve un tube creux, indéformable et conducteur de longueur L_T aligné avec l'axe local x dont les dimensions sont connues. Une bille magnétique de masse m_b et de rayon r_b peut se mouvoir dans le tube et est repérée par sa coordonnée x_b . L'origine de l'axe des x est fixée au milieu du tube et est orienté vers les phalanges des pieds situés dans le plan de symétrie du pied. La position de la bille est donnée par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO_c} + x_b \vec{e}_x + r_b \vec{e}_z = X \vec{e}_x + Z \vec{e}_z \quad (3)$$

avec

$$X = X_c + x_b \cos(\alpha) - r_b \sin(\alpha) \quad (4)$$

$$Z = Z_c + x_b \sin(\alpha) + r_b \cos(\alpha) \quad (5)$$

les deux coordonnées étant reliées par la relation suivante après élimination de x_b

$$Z = Z_c + r_b \cos(\alpha) + \tan(\alpha)(X - X_c + r_b \sin(\alpha)) \quad (6)$$

Les relations (4) et (5) montrent que nous nous retrouvons avec un système composé d'un seul degré de liberté et de 3 données X_c, Z_c, α qui définissent le mouvement du pied. Le Lagrangien L est donné par :

$$L = E_c - E_p \quad (7)$$

Les énergies potentielle et cinétique E_p et E_c sont définies par :

$$E_p = m_b g Z = m_b g (Z_c + r_b \cos(\alpha) + \tan(\alpha)(X - X_c + r_b \sin(\alpha))) \quad (8)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_b (\dot{X}^2 + \dot{Z}^2) \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} m_b \left(\dot{X}^2 + (\dot{Z}_c - r_b \dot{\alpha} \sin(\alpha) + \frac{\dot{\alpha}}{\cos^2(\alpha)} (X - X_c + r_b \sin(\alpha)) + \tan(\alpha) (\dot{X} - \dot{X}_c - r_b \dot{\alpha} \cos(\alpha)))^2 \right)$$

g est l'accélération de la pesanteur. Dans un champ électromagnétique, la bille dans le tube conducteur est soumise à la force de freinage magnétique \vec{F}_m (courant de Foucault), à la force magnétique de la bobine de récupération \vec{F}_B et à la force de frottement solide \vec{F}_s (type de Coulomb). Elles sont données par les relations suivantes [5,6] :

$$\vec{F}_m = -k_m \dot{x}_b \vec{e}_x = -k_m \dot{x}_b (\cos(\alpha) \vec{e}_X + \sin(\alpha) \vec{e}_Z) \quad (10)$$

$$\vec{F}_B = -k_B I f(x_b) \vec{e}_x = -k_B I f(x_b) (\cos(\alpha) \vec{e}_X + \sin(\alpha) \vec{e}_Z) \quad (11)$$

$$\text{où } f(x_b) = \frac{1}{(a^2 + (b - x_b)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (b + l - x_b)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (12)$$

$$\vec{F}_s = -\mu_d m_b g \cos(\alpha) (2H_a(\dot{x}_b) - 1) \vec{e}_x \quad (13)$$

$$= -\mu_d m_b g \cos(\alpha) (2H_a(\dot{x}_b) - 1) (\cos(\alpha) \vec{e}_X + \sin(\alpha) \vec{e}_Z)$$

où k_m et k_B représentent l'amortissement induit par les courants de Foucault sur le mouvement de l'aimant, ainsi que a , b et l les dimensions de la bobine avec b la distance du haut de la bobine au point $x_b = 0$, l la longueur de la bobine, a le rayon d'une spire et I le courant passant dans la bobine. Dans (14), μ_d est le coefficient de frottement avec H_a la fonction de Heaviside. La bille est supposée rouler sans glissement dans le tube. En tenant compte de la relation (3), la force généralisée Q qui s'en suit s'exprime par [10] :

$$Q = (\vec{F}_m + \vec{F}_s + \vec{F}_B) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} = (\vec{F}_m + \vec{F}_s + \vec{F}_B) \cdot (\vec{e}_X + \tan(\alpha) \vec{e}_Z) \quad (14)$$

et l'équation de Lagrange s'exprime par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = Q \quad (15)$$

ce qui donne

$$m_b \ddot{X} + m_b \ddot{Z} \tan(\alpha) - m_b g \tan(\alpha) = Q$$

or, on sait que

$$\ddot{X} = \ddot{X}_c + \ddot{x}_b \cos(\alpha) - 2\dot{x}_b \dot{\alpha} \sin(\alpha) - x_b (\ddot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{\alpha}^2 \cos(\alpha)) - r_b (\ddot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha)) \quad (16)$$

$$\ddot{Z} = \ddot{Z}_c + \ddot{x}_b \sin(\alpha) + 2\dot{x}_b \dot{\alpha} \cos(\alpha) + x_b (\ddot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha)) - r_b (\ddot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{\alpha}^2 \cos(\alpha)) \quad (17)$$

ce qui nous donne pour le mouvement de la bille l'équation différentielle suivante

$$\ddot{x}_b + \dot{x}_b \frac{k_m}{m_b} + \mu_d g \cos(\alpha) (2H_a(\dot{x}_b) - 1) - x_b \dot{\alpha}^2 - r_b \ddot{\alpha} + \ddot{X}_c \cos(\alpha) + (\ddot{Z}_c + g) \sin(\alpha) + \frac{k_B}{m_b} f(x_b) I = 0 \quad (18)$$

La force électromotrice aux bornes de la bobine récupératrice est notée u . Afin de fermer le système (détermination du courant I), la bobine est représentée par une inductance L_i en série avec une résistance

R , le tout en parallèle avec un condensateur parasite de capacité C (Figure 2). En posant $x_b = x_1$ et $\dot{x}_b = x_2$ on a [5,6]

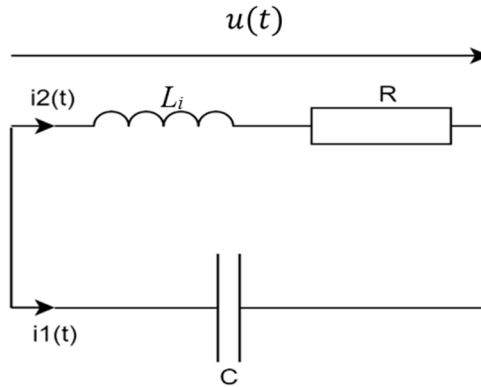


Figure 2 – Représentation du modèle électrique.

$$I = C \frac{du}{dt} + i_2 \quad (19)$$

$$u = k_B x_2 f(x_1) \quad (20)$$

$$\frac{du}{dt} = k_B \left(\frac{dx_2}{dt} f(x_1) + x_2^2 \frac{df}{dx_1}(x_1) \right) \quad (21)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L_i} (u - R i_2) = \frac{1}{L_i} (k_B x_2 f(x_1) - R i_2) \quad (22)$$

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) I(t) dt \quad (23)$$

Les équations (18), (22) peuvent se réécrire sous la forme de trois équations différentielles du premier ordre en tenant compte des relations (19), (20) et (21) :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (24a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{1 + C \frac{k_B^2}{m_b} f(x_1)^2} \left[\begin{aligned} & \frac{-k_m}{m_b} x_2 - \mu_a g \cos(\alpha) (2H_a(x_2) - 1) + x_1 \dot{\alpha}^2 + \tau \ddot{\alpha} - (\ddot{X}_c \cos(\alpha)) \\ & + (\ddot{Z}_c + g) \sin(\alpha) - \frac{k_B}{m_b} f(x_1) (x_3 + C k_B x_2 \frac{df}{dx_1}(x_1)) \end{aligned} \right] \quad (24b)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{L} (u - R x_3) = \frac{1}{L} (k_B x_2 f(x_1) - R x_3) \quad (24c)$$

où $i_2 = x_3$. Le système obtenu est fortement non-linéaire et ne peut être résolu de manière analytique. Dans le but d'établir des expressions analytiques de la puissance moyenne récupérée nous travaillerons dans le cadre de ce papier sur un modèle linéarisé.

3 LINEARISATION DU MODELE

Dans le but de linéariser le système d'équations (24 a-c), nous supposons que

$$f(x_b) = 1 \text{ et } i = \frac{u}{R} \quad (25)$$

Par ailleurs, il est supposé que ($L_i = C = \mu_d = 0$). L'équation (24b) prend alors la forme :

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-k_m}{m_b} x_2 + \underbrace{x_1 \dot{\alpha}^2}_{f1} + \underbrace{r_b \ddot{\alpha}}_{f2} - \underbrace{(\ddot{X}_c \cos(\alpha))}_{f3} + \underbrace{(\ddot{Z}_c + g) \sin(\alpha)}_{f4} - \frac{k_B}{m_b} I \quad (26)$$

Nous supposons que l'angle de rotation du pied $\alpha(t)$ mis en jeu lors de la marche est de la forme $\alpha_0 \sin(\omega t)$ [11]. Une force de rappel de type ressort correspondant au terme $m_b \omega_r^2 x_1$ a été ajoutée pour prendre en compte les conditions aux limites restreignant le déplacement de la bille à l'intérieur du tube conducteur. Certains travaux incluent d'emblé des forces de rappel plus complexes en incorporant des aimants intérieurs au tube conducteur [4]. Le terme $f1$ devient $\frac{1+\cos(2\omega t)}{2} x_1$ (π/ω périodique) constituant le terme d'excitation paramétrique. En adoptant les variables adimensionnées suivantes $x = \frac{x_1}{L_T}$, $\varphi = \omega t$, $x_c = \frac{X_c}{h}$, $Z_c = \frac{Z_c}{h}$ avec L_T la longueur du tube creux et h l'excursion du pied selon la verticale, l'équation (26) est réécrite sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + (\delta + \varepsilon \cos(2\varphi))x - \Gamma(\varphi) = 0 \quad (27)$$

avec

$$\delta = \frac{\omega_r^2}{\omega^2} - \frac{\alpha_0^2}{2}, \varepsilon = -\frac{\alpha_0^2}{2}, \xi = \frac{1}{2\omega m_b} \left(k_m + \frac{k_B^2}{R} \right), \varphi = \omega t$$

$$\Gamma(\varphi) = -\frac{r_b}{L_T} \alpha_0 \sin(\omega t) - \frac{h}{L_T} \left(\ddot{x}_c \cos(\alpha) + \left(\ddot{Z}_c + \frac{g}{h\omega^2} \right) \sin(\alpha) \right)$$

Les positions X_c et Z_c du pied sont respectivement supposées linéaire et sinusoïdale en fonction du temps. Le terme $f3$ disparaît, laissant place au terme $f4$ et $f2$ tous deux $2\pi/\omega$ périodiques. La fonction $\Gamma(\varphi)$ étant 2π -périodique, elle est donc développable en série de Fourier comme suit

$$\Gamma(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)$$

On supposera que $\delta > 0$ et $\xi > 0$.

4 METHODE VIM

La méthode VIM exprime l'équation sous la forme :

$$\mathfrak{L}(x(\varphi)) + \mathfrak{N}(x(\varphi)) = g(\varphi) \quad (28)$$

avec :

$$\mathfrak{L}(x(\varphi)) = \ddot{x}(\varphi) + 2\xi \dot{x}(\varphi) + \delta x(\varphi) \quad (29)$$

$$\mathfrak{N}(x(\varphi)) = \varepsilon \cos(2\varphi) x(\varphi) \quad (30)$$

où $\mathfrak{L}(x(\varphi))$ et $\mathfrak{N}(x(\varphi))$ sont les opérateurs respectivement linéaires et non-linéaires. Cette méthode construit une suite récurrente $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers la solution exacte à l'infini :

$$X_{n+1}(\varphi) = X_n(\varphi) + \int_0^\varphi \lambda(\tau, \varphi) \left(\mathfrak{L}(X_n(\tau)) + \mathfrak{N}(X_n(\tau)) - \Gamma(\tau) \right) d\tau \quad (31)$$

Afin de pouvoir appliquer la méthode VIM, il faut définir le *multiplicateur de Lagrange* $\lambda(\tau, \varphi)$ ainsi que $X_0(\varphi)$. Le multiplicateur $\lambda(\tau, \varphi)$ est obtenu en écrivant que la variation quelconque de X_{n+1} est

nulle soit $\Delta X_{n+1} = 0$, le terme $\bar{\aleph}(X_n(\tau))$ se comportant comme une constante, ce qui impose $\Delta \bar{\aleph}(X_n(\tau)) = 0$. Nous avons alors :

$$\Delta X_{n+1} = \Delta X_n + \Delta \left(\int_0^\varphi \lambda(\tau, \varphi) \left(\aleph(X_n(\tau)) + \bar{\aleph}(X_n(\tau)) - \Gamma(\tau) \right) d\tau \right), \quad (32)$$

le terme $\Delta \Gamma(\tau)$ s'annulant également car indépendant de X_n , l'équation (32) devient :

$$0 = \Delta X_n + \Delta \left(\int_0^\varphi \lambda(\tau, \varphi) \aleph(X_n(\tau)) d\tau \right) \quad (33)$$

Le terme $\aleph(X_n(\tau))$ est défini par (29) ce qui permet de déterminer $\lambda(\tau, \varphi)$. La formule d'intégration par parties nous permet d'écrire :

$$\int_0^\varphi \lambda(\tau, \varphi) \dot{X}_n(\tau) d\tau = \lambda(\varphi, \varphi) X_n(\varphi) - \lambda(0, \varphi) X_n(0) - \int_0^\varphi \dot{\lambda}(\tau, \varphi) X_n(\tau) d\tau \quad (34)$$

$$\int_0^\varphi \lambda(\tau, \varphi) \ddot{X}_n(\tau) d\tau = \lambda(\varphi, \varphi) \dot{X}_n(\varphi) - \lambda(0, \varphi) \dot{X}_n(0) - \dot{\lambda}(\varphi, \varphi) X_n(\varphi) + \dot{\lambda}(0, \varphi) X_n(0) + \int_0^\varphi \ddot{\lambda}(\tau, \varphi) X_n(\tau) d\tau \quad (35)$$

En injectant les équations (34) et (35) dans l'équation (33) et en remarquant que $\Delta X_n(0) = \Delta \dot{X}_n(0) = 0$ nous obtenons l'équation différentielle du 2nd ordre suivante avec conditions initiales connues :

$$\ddot{\lambda}(\tau, \varphi) - 2\xi \dot{\lambda}(\tau, \varphi) + \delta \lambda(\tau, \varphi) = 0 \quad (36)$$

$$\lambda(\varphi, \varphi) = 0, \dot{\lambda}(\varphi, \varphi) = 1 \quad (37)$$

La résolution de l'équation caractéristique associée nous donne trois cas à traiter qui dépendent de l'amortissement ξ et de δ :

$$\Delta_\lambda = 4(\xi^2 - \delta), \Omega = \frac{\sqrt{|\Delta_\lambda|}}{2} \quad (38)$$

$$\Delta_\lambda > 0, \lambda(\tau, \varphi) = e^{\xi(\tau-\varphi)} \cdot \frac{\sinh(\Omega(\tau-\varphi))}{\Omega} \quad (39)$$

$$\Delta_\lambda = 0, \lambda(\tau, \varphi) = (\tau - \varphi) e^{\xi(\tau-\varphi)} \quad (40)$$

$$\Delta_\lambda < 0, \lambda(\tau, \varphi) = e^{\xi(\tau-\varphi)} \cdot \frac{\sin(\Omega(\tau-\varphi))}{\Omega} \quad (41)$$

Le premier terme de la suite $X_0(\varphi)$ est défini par :

$$X_0(\varphi) = x(0) + \dot{x}(0)\varphi \quad (42)$$

avec $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ les conditions initiales pour $x(\varphi)$. Nous avons résolu l'équation sur trois itérations pour plusieurs ξ et δ différents (Figure 3). On a adopté

$$\Gamma(\varphi) = a_1 \sin(\varphi) + a_2 \cos(\varphi) \quad (43)$$

avec

$$a_1 = a_2 = 1, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

La pertinence de cette résolution a été comparée au solveur ode45. On peut constater que la VIM fournit une bonne approximation de la solution exacte dans les cas a), b) et d) alors que pour le cas c) des itérations supplémentaires sont nécessaires.

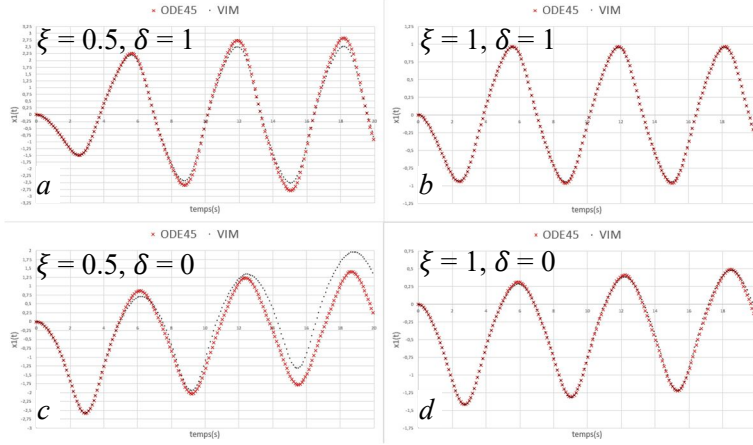


Figure 3 – Résultat de simulation de l'équation (29) pour plusieurs ξ et δ .

Différentes possibilités pour améliorer la convergence sont envisageables : modification du multiplicateur de Lagrange [12], l'utilisation d'approximant de Padé [13].

5 EXPRESSIONS ANALYTIQUES

Dans le but d'obtenir des expressions analytiques de la puissance moyenne récupérée, nous nous mettons dans le cas où $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0)$ un nombre réel quelconque. Nous considérons sans perte de généralité que $\Gamma(\varphi) = a_n \cos(n\varphi + \Phi)$ avec n un entier naturel et Φ un nombre réel. La solution est composée d'un transitoire et d'une partie stationnaire périodique. La puissance moyenne est obtenue en intégrant cette dernière sur un intervalle de longueur 4π . Les calculs analytiques ont été réalisés avec Mathematica.

$\Delta_\lambda > 0$:

$$X_1(\varphi) = X_{1t}(\varphi) + X_{1p}(\varphi) \quad (44)$$

$$X_{1t}(\varphi) = e^{-\xi\varphi} \left(A_1(\xi, \delta, \Phi, n, x(0), \varepsilon) \cosh(\Omega\varphi) + A_2(\xi, \delta, \Phi, n, a_n, x(0)) \sinh(\Omega\varphi) \right)$$

$$X_{1p}(\varphi) = A_3(\delta, x(0), \varepsilon) \cos(2\varphi) + A_4(\xi, \delta, x(0), \varepsilon) \sin(2\varphi) + A_5(\xi, \delta, \Phi, n, a_n) \cos(n\varphi) + A_6(\xi, \delta, \Phi, n, a_n) \sin(n\varphi)$$

avec

- $A_1(\xi, \delta, \Phi, n, x(0), \varepsilon) = x(0) \frac{(-4+\delta)(-4+\varepsilon+\delta)+16\xi^2}{(-4+\delta)^2+16\xi^2} + a_n \frac{(-n^2+\delta)\cos(\Phi)+2n\xi\sin(\Phi)}{n^4+\delta^2-2n^2(\delta-2\xi^2)}$,
- $A_2(\xi, \delta, \Phi, n, a_n, x(0)) = \frac{1}{\Omega} \left(x(0)\xi \left(1 + \frac{\varepsilon(4+\delta)}{(-4+\delta)^2+16\xi^2} \right) + a_n \frac{(n^2+\delta)\xi\cos(\Phi)+n(n^2-\delta+2\xi^2)\sin(\Phi)}{(n^2-\delta)^2+4n^2\xi^2} \right)$,
- $A_3(\delta, x(0), \varepsilon) = \varepsilon x(0)(4-\delta)$,
- $A_4(\xi, \delta, x(0), \varepsilon) = \frac{4\varepsilon(x(0)(-4+\delta)^2\xi+16x(0)\xi^3)}{(-4+\delta)^2+16\xi^2}$,
- $A_5(\xi, \delta, \Phi, n, a_n) = \frac{a_n}{n^4+\delta^2-2n^2(\delta-2\xi^2)} ((\delta-n^2)\cos(\Phi) + 2n\xi\sin(\Phi))$,
- $A_6(\xi, \delta, \Phi, n, a_n) = \frac{a_n}{(n^4+\delta^2-2n^2(\delta-2\xi^2))} (2n\xi\cos(\Phi) + (n^2-\delta)\sin(\Phi))$

où $X_1(\varphi)$ est l'expression de la position de la bille qui composée de $X_{1t}(\varphi)$ et $X_{1p}(\varphi)$ qui sont respectivement la réponse transitoire et permanente de $X_1(\varphi)$. Nous avons calculé la puissance moyenne par le biais de l'équation (23). Elle est de la forme :

$$P_{moy} = \frac{k_B^2}{4\pi R} \left(\frac{2a_n^2 n^2 \pi}{\delta^2 - 2(\delta - 2\xi^2)n^2 + n^4} + \frac{8e_2^2 \pi x(0)^2}{(-4 + \delta)^2 + 16\xi^2} \right) \quad (45)$$

$$\Delta_\lambda = 0$$

$$X_1(\varphi) = X_{1t}(\varphi) + X_{1p}(\varphi) \quad (46)$$

$$X_{1t}(\varphi) = e^{-\xi\varphi} (B_1(\xi, \delta, \varphi, x(0), \varepsilon) + B_2(\xi, \varphi, n, a_n) \cos(\Phi) + B_3(\xi, \varphi, n, a_n) \sin(\Phi))$$

$$X_{1p}(\varphi) = B_4(\xi, x(0), \varepsilon) \cos(2\varphi) + B_5(\xi, x(0), \varepsilon) \sin(2\varphi) + B_6(\xi, n, a_n) \cos(n\varphi + \Phi) + B_7(\xi, n) \sin(n\varphi + \Phi)$$

avec

- $B_1(\xi, \delta, \varphi, x(0), \varepsilon) = x(0) \frac{\delta(1+\xi\varphi)}{\xi^2} + \frac{\varepsilon(-4+\xi^2+\xi\varphi(4+\xi^2))}{(4+\xi^2)^2},$
- $B_2(\xi, \varphi, n, a_n) = a_n \frac{(n^2(-1+\xi\varphi)+\xi^2(1+\xi\varphi))}{(n^2+\xi^2)^2},$
- $B_3(\xi, \varphi, n, a_n) = a_n \frac{n(n^2\varphi+\xi(2+\xi\varphi))}{(n^2+\xi^2)^2},$
- $B_4(\xi, x(0), \varepsilon) = \frac{x(0)\varepsilon(-4+\xi^2)}{(4+\xi^2)^2},$
- $B_5(\xi, x(0), \varepsilon) = \frac{x(0)4\varepsilon\xi}{(4+\xi^2)^2},$
- $B_6(\xi, n, a_n) = a_n \frac{(n-\xi)(n+\xi)}{(n^2+\xi^2)^2},$
- $B_7(\xi, n) = \frac{-2n\xi}{(n^2+\xi^2)^2}$

La puissance moyenne obtenue est de la forme :

$$P_{moy} = \frac{k_B^2}{4\pi R} \left(\frac{8\varepsilon^2\pi x(0)^2}{(4+\xi^2)^2} + \frac{2a_n^2 n^2 \pi}{(n^2+\xi^2)^2} \right) \quad (47)$$

$$\Delta_\lambda < 0$$

$$X_1(\varphi) = X_{1t}(\varphi) + X_{1p}(\varphi) \quad (48)$$

$$X_{1t}(\varphi) = e^{-\xi\varphi} (C_1(\xi, \delta, \phi, n, x(0)) \cos(\Omega\varphi) + C_2(\delta, n, a_n) \cos(\Omega\varphi - \phi) + C_3(\xi, \delta, \phi, n, a_n) \cos(\Omega\varphi + \phi) + C_4(\xi, \delta, \phi, n, a_n, x(0), \varepsilon) \sin(\Omega\varphi))$$

$$X_{1p}(\varphi) = C_5(\xi, \delta, x(0)) \cos(2\varphi) + C_6(\xi, \delta, \varepsilon) \sin(2\varphi) + C_7(\xi, \delta, n, a_n) \cos(\phi + n\varphi) + C_8(\xi, \delta, n, a_n) \sin(\phi + n\varphi)$$

avec

- $C_1(\xi, \delta, \phi, n, x(0)) = x(0) \frac{(-4+\delta)(-4+\delta+x(0))+16\xi^2}{(-4+\delta)^2+16\xi^2} + \frac{2\xi n \sin(\phi)}{\delta^2-2(\delta-2\xi^2)n^2+n^4},$
- $C_2(\delta, n, a_n) = \frac{a_n (\Omega+n)}{2\Omega \delta+n(2\Omega+n)},$
- $C_3(\xi, \delta, \phi, n, a_n) = \frac{a_n \delta(\phi+n)-n(2\xi^2+n(n+\Omega))}{2\Omega \delta^2-2(\delta-2\xi^2)n^2+n^4},$
- $C_4(\xi, \delta, \phi, n, a_n, x(0), \varepsilon) = \frac{a_n 2\xi(\delta+n^2)\cos(\phi)}{2\Omega \delta^2-2(\delta-2\xi^2)n^2+n^4} + \frac{x(0)\xi \delta(-8+\delta+\varepsilon)+4(4+\varepsilon+4\xi^2)}{\Omega (-4+\delta)^2+16\xi^2},$
- $C_5(\xi, \delta, x(0)) = -x(0) \frac{(-4+\delta)x(0)}{(-4+\delta)^2+16\xi^2},$
- $C_6(\xi, \delta, \varepsilon) = -\frac{4\xi\varepsilon}{(-4+\delta)^2+16\xi^2},$
- $C_7(\xi, \delta, n, a_n) = -a_n \frac{\delta-n^2}{\delta^2-2(\delta-2\xi^2)n^2+n^4},$
- $C_8(\xi, \delta, n, a_n) = a_n \frac{2\xi n}{\delta^2-2(\delta-2\xi^2)n^2+n^4}$

$$P_{moy} = \frac{k_B^2}{4\pi R} \left(\frac{8\varepsilon^2 \pi x(0)^2}{(-4 + \delta)^2 + 16\xi^2} + \frac{2a_n^2 n^2 \pi}{n^4 + \delta^2 - 2n^2(\delta - 2\xi^2)} \right) \quad (49)$$

L'analyse de ces expressions révèle que la puissance moyenne est proportionnelle aux carrés de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation extérieure mais aussi au carré de l'amplitude de l'excitation paramétrique et suggèrent l'existence d'un couple (δ, ξ) pour lesquels cette puissance moyenne est maximale.

CONCLUSION

Le présent travail propose un modèle mathématique non-linéaire basée sur le formalisme de Lagrange pour un récupérateur d'énergie électromagnétique pour la marche humaine. Des expressions analytiques de la solution et de la puissance moyenne récupérée sont obtenues en utilisant une version adaptée de la VIM. Nous remarquons que pour certains couples (δ, ξ) , cette méthode converge difficilement. Une augmentation du nombre d'itérations permet d'améliorer cette convergence mais ne permet pas d'obtenir des expressions explicites de la puissance moyenne. Dans de futurs travaux, nous nous proposons d'utiliser des approches perturbatives de type « multiple scales » [14] ou encore « generalized averaging method » [15] pour traiter le modèle linéarisé ainsi que sa contrepartie non-linéaire.

REMERCIEMENTS

Ces travaux entrent dans le cadre d'une thèse CIFRE (n°2022/0014) du 1^{er} auteur.

REFERENCES

- [1]M. Cai, Z. Yang, J. Cao, et W.-H. Liao, « Recent Advances in Human Motion Excited Energy Harvesting Systems for Wearables », *Energy Technol.*, vol. 8, no 10, p. 2000533, oct. 2020, doi: 10.1002/ente.202000533.
- [2]N. S. Shenck, « A Demonstration of Useful Electric Energy Generation from Piez », p. 137.
- [3]K. Ylli, D. Hoffmann, A. Willmann, P. Becker, B. Folkmer, et Y. Manoli, « Energy harvesting from human motion: exploiting swing and shock excitations », *Smart Mater. Struct.*, vol. 24, no 2, p. 025029, févr. 2015, doi: 10.1088/0964-1726/24/2/025029.
- [4]K. Fan, S. Liu, H. Liu, Y. Zhu, W. Wang, et D. Zhang, « Scavenging energy from ultra-low frequency mechanical excitations through a bi-directional hybrid energy harvester », *Appl. Energy*, vol. 216, p. 8-20, avr. 2018, doi: 10.1016/j.apenergy.2018.02.086.
- [5]G. Donoso, C. L. Ladera, et P. Martín, « Magnet fall inside a conductive pipe: motion and the role of the pipe wall thickness », *Eur. J. Phys.*, vol. 30, no 4, p. 855-869, juill. 2009, doi: 10.1088/0143-0807/30/4/018.
- [6]G. Donoso, C. L. Ladera, et P. Martín, « Magnetically coupled magnet-spring oscillators », *Eur. J. Phys.*, vol. 31, no 3, p. 433-452, mai 2010, doi: 10.1088/0143-0807/31/3/002.
- [7]I. Kovacic, R. Rand, et S. Mohamed Sah, « Mathieu's Equation and Its Generalizations: Overview of Stability Charts and Their Features », *Appl. Mech. Rev.*, vol. 70, no 2, p. 020802, mars 2018, doi: 10.1115/1.4039144.
- [8]A.-M. Wazwaz, « The variational iteration method: A reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equations », *Comput. Math. Appl.*, vol. 54, no 7-8, p. 926-932, oct. 2007, doi: 10.1016/j.camwa.2006.12.038.
- [9]Z. M. Odibat, « A study on the convergence of variational iteration method », *Math. Comput. Model.*, vol. 51, no 9-10, p. 1181-1192, mai 2010, doi: 10.1016/j.mcm.2009.12.034.
- [10]A. L. Van et R. Bouzidi, *Mécanique de Lagrange: Une approche analytique avancée*. ISTE Group, 2019.
- [11]K. Fan, Z. Liu, H. Liu, L. Wang, Y. Zhu, et B. Yu, « Scavenging energy from human walking through a shoe-mounted piezoelectric harvester », *Appl. Phys. Lett.*, vol. 110, no 14, p. 143902, avr. 2017, doi: 10.1063/1.4979832.
- [12]X. Wang et S. N. Atluri, « A novel class of highly efficient and accurate time-integrators in nonlinear computational mechanics », *Comput. Mech.*, vol. 59, no 5, p. 861-876, mai 2017, doi: 10.1007/s00466-017-1377-4.

- [13] Lu, Junfeng, and Li Ma. "The VIM-Pade technique for strongly nonlinear oscillators with cubic and harmonic restoring force." *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control* 38.3-4 (2019): 1272-1278.
- [14] M. Belhaq, Z. Ghouli, et M. Hamdi, « Energy harvesting in a Mathieu–van der Pol–Duffing MEMS device using time delay », *Nonlinear Dyn.*, vol. 94, no 4, p. 2537-2546, déc. 2018, doi: 10.1007/s11071-018-4508-3.
- [15] Belhaq, M., and A. Fahsi. "Higher-order approximation of subharmonics close to strong resonances in the forced oscillators." *Computers & Mathematics with Applications* 33.8 (1997): 133-144.