



**HAL**  
open science

## Concentration des portefeuilles boursiers et asymétrie des distributions de rentabilités d'actifs

Christian Walter, Olivier Le Courtois

► **To cite this version:**

Christian Walter, Olivier Le Courtois. Concentration des portefeuilles boursiers et asymétrie des distributions de rentabilités d'actifs. *Journal de la Societe Française de Statistique*, 2012, 153 (2), pp.1-20. hal-04560285

**HAL Id: hal-04560285**

**<https://hal.science/hal-04560285>**

Submitted on 26 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

## Concentration des portefeuilles boursiers et asymétrie des distributions de rentabilités d'actifs

**Title:** Portfolio concentration and asymmetric returns

Olivier Le Courtois<sup>1</sup> et Christian Walter<sup>2</sup>

**Résumé :** Cet article porte sur le lien existant entre l'asymétrie des distributions de rentabilités d'actifs et la concentration des portefeuilles. Nous commençons par rappeler la logique à l'œuvre dans la théorie de la diversification dans le but de faire apparaître qu'elle repose sur une réduction du risque au seul moment d'ordre 2 et à l'application corrélative de la théorie des erreurs du XVIII<sup>e</sup> siècle. Nous exposons notamment la controverse ouverte par E. Fama en 1965 sur cette théorie des erreurs, pour faire apparaître qu'un changement dans le type d'aléa peut conduire à concentrer et non à diversifier. Ensuite, nous examinons comment l'inclusion dans le programme d'optimisation de la dissymétrie entre les gains et les pertes peut induire une propension à concentrer les portefeuilles. Nous présentons alors le modèle de Mitton et Vorkink [19], puis nous proposons ensuite une nouvelle approche dans l'esprit de ce modèle. Nous terminons par une application du modèle que nous proposons au marché américain, qui fait apparaître la grande différence de performance obtenue par un portefeuille classiquement diversifié, concentré selon les modèles existants, et concentré selon le modèle que nous proposons.

**Abstract:** This article develops on the link between the asymmetry of asset return distributions and the concentration of portfolios. We start by recalling the rationale behind the theory of diversification, in order to let appear that this theory relies on a reduction of risk viewed only at order 2 and on the related application of the theory of errors, as developed during the XVIII<sup>th</sup> century. We also expose the controversy opened by E. Fama in 1965 on this theory of errors, in order to let appear that a change in the type of underlying randomness can lead to the concentration and not the diversification of portfolios. Then, we examine how the inclusion in the optimization program of the asymmetry between gains and losses can lead to a propensity to concentrate. We recall the main aspects of the Mitton and Vorkink [19] model, and then we propose a new approach in the spirit of this model. We end up with an illustration of the latter framework on American data, letting appear important differences between the performance obtained with a classically diversified portfolio, a portfolio concentrated along existing models, and a portfolio concentrated along the model that we propose.

**Mots-clés :** Concentration, Asymétrie, Portefeuille, Co-asymétrie

**Keywords:** Concentration, Asymmetry, Portfolio, Co-asymmetry

**Classification AMS 2000 :** 91B28, 60K99, 91B16

---

<sup>1</sup> École de Management de Lyon et Centre d'analyse des risques financiers.

E-mail : [lecourtois@em-lyon.com](mailto:lecourtois@em-lyon.com)

<sup>2</sup> Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne et IAE

E-mail : [christian.walter@msh-paris.fr](mailto:christian.walter@msh-paris.fr)

## Introduction : l'idée de concentration

Dans un texte de 1942, à propos des règles de conduite à adopter lorsqu'on se trouve dans la situation de choisir une politique d'investissement d'un portefeuille, J. M. Keynes a ce commentaire radical :

“Je suis partisan de l'achat d'autant de titres d'une seule société que les conditions du marché le permettent. Supposer que faire passer la sécurité en premier consiste à détenir de petites quantités de nombreuses sociétés que je ne peux juger précisément faute d'informations, plutôt qu'une grosse part d'une seule entreprise sur laquelle je possède des informations précises, me semble être une parodie d'investissement”.

Une parodie de politique d'investissement : ainsi Keynes qualifie ce qui est appelé aujourd'hui la diversification d'un portefeuille. Pour Keynes, gérer un portefeuille de manière efficace revient donc à concentrer ses fonds et non à les diversifier. D'une certaine manière, c'est également ce qu'affirment des investisseurs professionnels aussi reconnus que Warren Buffet ou Benjamin Graham : gérer de manière optimale, c'est concentrer un portefeuille sur très peu de bonnes sociétés. C'est exactement le contraire de ce que propose la théorie dite “moderne” du portefeuille, introduite en 1952 par Markowitz, soit dix ans après l'assertion de Keynes.

Dans la période boursière actuelle où les risques extrêmes sont omniprésents, on voit immédiatement l'intérêt de la question soulevée : faut-il diversifier complètement son portefeuille, et donc répliquer un indice de marché, ou bien se porter vers d'autres approches ? La question contient sa réponse car investir dans un indice boursier n'est aucunement une protection en cas de crise (d'une présence de kurtosis) systémique, bien au contraire, et les fonds ou compagnies qui ont suivi cette voie sont actuellement dans les plus grandes difficultés.

La question théorique de la pertinence d'une concentration des portefeuilles n'a été que récemment examinée dans la recherche universitaire : plusieurs travaux (par exemple Kelly [15], Odean [20], Polkovnichenko [21], Goetzmann et Kumar [7]) ont été entrepris sur ce qui a été qualifié en langue anglaise de “sous-diversification” (*underdiversification*), c'est-à-dire en pratique la concentration du portefeuille sur un nombre de titres plus réduit que le nombre théorique optimal résultant d'une construction classique selon les critères espérance – volatilité. Le présent article examine comment l'asymétrie des actifs et des portefeuilles, et l'attitude des agents par rapport à cette asymétrie, est reliée à la concentration d'un portefeuille boursier. Pour le traitement de cet objectif, on commence par examiner les méthodes existantes avant de les étendre et d'en examiner l'impact concret lors de la gestion d'un portefeuille de marché typique. La nouvelle méthode que nous proposons permet de surperformer de 5% (ce qui n'est pas mince en finance) le marché américain sur les vingt précédentes années.

A titre d'illustration, en France, la compagnie d'assurance SMA BTP (Société mutuelle d'assurance du bâtiment et des travaux publics) a ainsi, et depuis de longues années, construit un processus d'investissement volontairement et explicitement sans référence à la diversification et à l'indexation au sens de la théorie du portefeuille. Cet exemple fait apparaître que, bien que prédominante dans les cadres conceptuels des régulateurs et des acteurs de la gestion professionnelle, la théorie de la diversification et de l'indexation systématique n'a pas été acceptée par tous les professionnels, et est même rejetée par un nombre de plus en plus grand d'entre eux. C'est l'objet de la présente étude, réalisée avec la collaboration active des équipes de gestion et d'actuariat de la SMA BTP<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Nous remercions tout particulièrement Hubert Rodarie, directeur général délégué de la SMA BTP et Philippe Desurmont, directeur général de SMA Gestion, pour leur engagement actif et leur soutien important dans ce projet

Le plan de cet article est le suivant. Dans une première partie, nous rappelons la logique à l'œuvre dans la théorie de la diversification, telle qu'on la trouve dans tous les textes (articles et manuels) de finance usuels, dans le but de faire apparaître qu'elle repose sur une réduction du risque au seul moment d'ordre 2 et à l'application corrélatrice de la théorie des erreurs du XVIII<sup>e</sup> siècle. On rappelle alors la controverse ouverte par E. Fama en 1965 sur cette théorie des erreurs, pour faire apparaître qu'un changement dans le type d'aléa peut conduire à concentrer et non à diversifier. Ensuite, l'on examine comment il est possible de produire une concentration par inclusion dans le programme d'optimisation de la dissymétrie entre les gains et les pertes. Nous présentons pour cela le modèle de Mitton et Vorkink [19], puis nous proposons ensuite une nouvelle approche dans l'esprit de ce modèle. Nous terminons par une application du modèle que nous proposons au marché américain, qui fait apparaître la grande différence de performance obtenue par un portefeuille classiquement diversifié, concentré selon les modèles existants, et concentré selon le modèle que nous proposons.

## 1. De la diversification à la concentration

Nous commençons par rappeler<sup>2</sup> comment la réduction du risque à la seule dimension du moment d'ordre 2 a conduit à concevoir l'idée classique de diversification comme une transposition à la gestion des portefeuilles de la théorie des erreurs du XVIII<sup>e</sup> siècle. Puis nous faisons apparaître sur un contre-exemple célèbre comment une modification de la loi des erreurs conduit à inverser la conclusion et à concentrer ses actifs pour réduire le risque du portefeuille. Enfin, nous réalisons un tour d'horizon de quelques méthodes contemporaines permettant de justifier la construction de portefeuilles concentrés.

### 1.1. Le raisonnement de la théorie des erreurs

On note  $w_i$  le poids du titre  $i$  dans le portefeuille et  $R$  le taux de rentabilité du portefeuille sur la période examinée :  $R = \sum_{j=1}^n w_j R_j$ . La décomposition de la variance du portefeuille est immédiate :

$$\text{var}(R) = \sum_i w_i^2 \text{var}(R_i) + \sum_{i \neq j} w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad (1)$$

Pour  $n$  actifs, il y a  $n$  termes de variance et  $n^2 - n = n(n-1)$  termes de covariance. On peut calculer la moyenne des variances des  $n$  actions, qui est :

$$\overline{\text{var}}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{var}(R_i)$$

ainsi que la moyenne des  $\frac{n(n-1)}{2}$  termes de covariance :

$$\overline{\text{cov}}_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \text{cov}(R_i, R_j)$$

---

de recherche. Pour plus d'informations sur les programmes de recherche, développement et gestion mis en oeuvre à la SMA BTP, se reporter aux documents SMABTP [28, 27].

<sup>2</sup> Voir Walter [30].

On exprime alors la variance du portefeuille en fonction de ces deux termes dans le cas d'un portefeuille équi pondéré, soit quand  $w_i = 1/n$  pour tout  $i$ . Partant de l'équation (1), il vient :

$$\text{var}(R) = \frac{1}{n^2} \left( \sum_i \text{var}(R_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(R_i, R_j) \right) = \frac{1}{n^2} \left( n \overline{\text{var}}_n + 2 \frac{n(n-1)}{2} \overline{\text{cov}}_n \right)$$

soit :

$$\text{var}(R) = \frac{1}{n} \overline{\text{var}}_n + \frac{n-1}{n} \overline{\text{cov}}_n \quad (2)$$

On voit que cette relation (2) définit une partition du risque (assimilé à la variance globale) d'un portefeuille entre la moyenne des causes propres aux titres (le risque spécifique des titres), et la cause moyenne commune à tous les titres (le risque lié aux facteurs communs de variations à tous les titres). On voit donc que, lorsque la notion de risque est réduite à la seule dimension de la variance, il apparaît naturellement une incitation à supprimer les causes dites spécifiques pour ne conserver que la seule cause commune, exprimée pour  $n$  actifs par  $\overline{\text{cov}}_n$ .

Plus précisément, lorsque le nombre d'actions devient grand, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(R) = \overline{\text{cov}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\text{cov}}_n \quad (3)$$

En effet, si l'on suppose que  $\text{var}(R_i)$  est borné pour tout actif  $i$ , alors  $\overline{\text{var}}_n$  est aussi borné, d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \overline{\text{var}}_n = 0$ .

Ceci montre que la variance totale d'un portefeuille équi pondéré converge vers la covariance moyenne des titres qui le composent. Cette quantité représente, dans le référentiel conceptuel du risque comme variance, un plancher de risque. Il s'agit d'un risque non réductible même après augmentation du nombre de titres dans le portefeuille. En revanche, si les titres étaient parfaitement indépendants, la variance totale du portefeuille serait nulle.

Cette idée de plancher de risque a été ensuite développée et simplifiée avec le modèle de marché de Sharpe [25]. Dans ce modèle, la relation postulée par Sharpe est :

$$R_i = a_i + b_i R_M + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, d \quad (4)$$

où  $R_M$  est la rentabilité du marché M, et où  $a_i$  et  $b_i$  sont des coefficients qui dépendent de l'action  $i$ . Le terme aléatoire  $\varepsilon_i$  spécifique à l'action  $i$  est tel que  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ , et  $\mathbf{E}(\varepsilon_i) = 0$  et  $\text{cov}(\varepsilon_i, R_M) = 0$  pour tout  $i$ . Avec ce modèle, la covariance entre deux actions  $i$  et  $j$  devient simplement :

$$\text{cov}(R_i, R_j) = b_i b_j \text{var}(R_M)$$

et la variance de toute action  $i$  se décompose comme :

$$\text{var}(R_i) = b_i^2 \text{var}(R_M) + \text{var}(\varepsilon_i) \quad (5)$$

c'est-à-dire comme la somme de deux termes qui correspondent respectivement à la variance produite par la cause commune des variations boursières et à la variance propre à chaque titre  $i$ . Cette décomposition de la variance par Sharpe rejoint et précise la partition du risque de Markowitz entre cause propre au titre et cause commune à tous les titres. Cette dernière décomposition est celle entre les risques dits "spécifique" "risque systématique", c'est-à-dire entre le risque lié aux titres et celui lié au facteur de variation commun à tous les titres.

Comme précédemment, si  $w_i = 1/n$ , la variance du portefeuille devient

$$\text{var}(R) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right)^2 \text{var}(R_M) + \text{var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)$$

soit

$$\text{var}(R) = \bar{b}^2 \text{var}(R_M) + \left( \frac{1}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n \text{var}(\varepsilon_i) \quad (6)$$

où l'on a posé  $\bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j$ .

En supposant classiquement que  $\text{var}(\varepsilon_i)$  est borné pour tout  $i$ , alors  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{var}(\varepsilon_i)$  est également borné, d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n \text{var}(\varepsilon_i) = 0$ . Quand le nombre d'actions devient grand, on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(R) = \bar{b}^2 \text{var}(R_M) \quad (7)$$

et l'on retrouve le résultat (3) de Markowitz.

Dans la réalité, il existe toujours une forme de dépendance, même faible. On peut alors supposer qu'une gestion efficace et non passive des titres conduit à choisir précisément des titres le plus faiblement corrélés possible, ce afin de se rapprocher d'une variance nulle. Dans une gestion active à l'intérieur du cadre conceptuel classique, il y a donc deux opérations distinctes à effectuer : d'une part, augmenter le nombre de titres, ce qui permet de diminuer le risque jusqu'au niveau plancher de la cause commune ; d'autre part, réduire l'effet de la cause commune par la sélection de titres non corrélés.

## 1.2. Une théorie des erreurs sans diversification

Il est connu que la théorie des erreurs a été contestée par Paul Lévy en 1924 en utilisant ce qu'il dénommait les "lois exceptionnelles" et que l'on appelle aujourd'hui les distributions  $\alpha$ -stables (sans moments d'ordre supérieur à  $\alpha$ ). Ce contre-exemple célèbre a ensuite été appliqué à la finance dans le cas d'un portefeuille par Fama [6] puis Samuelson [23] : dans le cas des distributions  $\alpha$ -stables, la théorie des erreurs se modifie dans ses conclusions. Ces premières études ont fait apparaître que, dans le cas de ces lois, la réduction du risque spécifique ne fonctionnait pas de manière simple, et que l'on pouvait donc avoir intérêt à concentrer ses lignes. L'article de 1965 de Fama concluait que

"[les résultats obtenus] ne doivent pas laisser supposer que la diversification est toujours un concept pertinent. Nous allons voir à présent que cette notion n'a un sens que pour une étroite bande de valeurs de l'exposant caractéristique  $\alpha$ ".

On présente ci-après le fonctionnement de la contre-argumentation de Lévy - Fama - Samuelson, c'est-à-dire les modifications résultant de l'usage de lois sans moments sur la notion de diversification.

Avec des lois  $\alpha$ -stables, le risque n'est plus mesuré par la variance mais par un paramètre d'échelle des fluctuations qui a le même rôle et que l'on notera par analogie  $\text{var}_\alpha$ . Chaque titre  $i$  de rentabilité  $R_i$  reste caractérisé par un couple rentabilité-risque mais le risque est mesuré par l'échelle  $\text{var}_\alpha(R_i)$ . Dans ce cas, la décomposition du risque (au sens de l'échelle des fluctuations)

généralise la décomposition classique (6) de la manière suivante :

$$\text{var}_\alpha(R) = \bar{b}^\alpha \text{var}_\alpha(R_M) + \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n \text{var}_\alpha(\varepsilon_i) \quad (8)$$

qui conduit pour un nombre  $n$  de titres augmentant de plus en plus à la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_\alpha(R) = \bar{b}^\alpha \text{var}_\alpha(R_M) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=1}^n \text{var}_\alpha(\varepsilon_i)$$

Trois cas se présentent selon la valeur de l'exposant caractéristique  $\alpha$ .

1. Cas  $\alpha > 1$

Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=1}^n \text{var}_\alpha(\varepsilon_i) = 0$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_\alpha(R) = \bar{b}^\alpha \text{var}_\alpha(R_M)$$

et le principe de diversification fonctionne, quoique la convergence vers zéro est ralentie : l'échelle des fluctuations propres à chaque titre a tendance à perdurer plus longtemps : l'effet individuel de chaque titre (son échelle propre d'amplitude) reste davantage présent dans le portefeuille. Il est donc nécessaire d'utiliser un plus grand nombre de titres pour parvenir à l'annulation des amplitudes spécifiques de chaque titre.

2. Cas  $\alpha = 1$

Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{var}_\alpha(\varepsilon_i) = \bar{\gamma}_\varepsilon$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_\alpha(R) = \bar{b} \gamma_M + \bar{\gamma}_\varepsilon$$

L'échelle des fluctuations du portefeuille ne décroît plus en fonction du nombre de titres. Le principe de diversification ne fonctionne plus, dans la mesure où l'adjonction d'un titre supplémentaire ne réduit pas pour autant l'échelle des fluctuations de la valeur du portefeuille.

3. Cas  $\alpha < 1$

Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=1}^n \text{var}_\alpha(\varepsilon_i) = \infty$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_\alpha(R) = \infty$$

et le principe de diversification est inversé. L'amplitude des fluctuations du portefeuille augmente au fur et à mesure que le nombre de titres augmente. Dans cette situation, le risque provient de l'adjonction de chaque nouveau titre entré en portefeuille. Plus on ajoute

de titres, et plus on court le risque de subir des fluctuations globales de grande amplitude. La sommation des échelles spécifiques conduit à une échelle globale plus grande que ce que l'on attend. Pour ces valeurs de l'exposant  $\alpha$ , on est donc conduit à concentrer son portefeuille sur peu de lignes, d'autant moins que  $\alpha$  est petit.

On voit sur ce contre-exemple que le raisonnement par la théorie des erreurs ne peut pas être utilisé systématiquement pour justifier la diversification : dans certains cas ( $\alpha > 1$ ) la diversification est inefficace à réduire le risque, dans d'autres ( $\alpha < 1$ ), elle est même néfaste, et il convient de concentrer ses fonds sur très peu de titres.

## 2. La concentration justifiée par l'asymétrie

Nous abordons à présent une justification particulière de la concentration d'un portefeuille sur quelques lignes, qui pourrait illustrer une intuition apparemment triviale : préférer les grands gains aux grandes pertes. Autrement dit la prise en compte de la dissymétrie entre les gains et les pertes, dans le sens d'une asymétrie positive des distributions de rentabilité. Après une revue de la littérature sur ce sujet, nous présentons un modèle permettant de construire des portefeuilles concentrés et présentant une asymétrie positive, puis nous décrivons de manière détaillée les implications pratiques de ce modèle. Enfin, nous proposons une extension de ce modèle et développons une illustration concrète sur le marché français.

### 2.1. Préférences des agents et asymétrie gains/pertes

Les premiers travaux sur la question des relations entre l'asymétrie gains/pertes, les préférences des investisseurs et la gestion de portefeuille datent du début des années 1970. L'idée de base est la suivante. Une fonction d'utilité quadratique permet de formaliser et donc de construire un critère moyenne-variance (moments d'ordres 1 et 2). Mais il s'agit d'un critère symétrique qui ne différencie pas les gains des pertes. Pour les différencier, il s'agit d'introduire une asymétrie, généralement mesurée par le moment d'ordre 3. D'où une fonction d'utilité cubique (nous verrons plus loin que les fonctions d'utilité cubiques ne sont pas le seul moyen de rendre compte de l'asymétrie). H. Levy [18] étudie ces fonctions d'utilité cubiques dans toute leur généralité et montre que ce type de fonction implique nécessairement un seuil de patrimoine à partir duquel tout individu devient *risk-taker*. Or ce comportement n'est pas nécessairement souhaitable (voire réaliste). C'est la raison pour laquelle, ensuite, Hanoch et Levy [9] ont examiné les conditions d'efficacité des critères quadratique et cubique. Une autre contribution fondamentale a été celle de Whitmore [31]. Dans un très court mais très utile article, Whitmore a montré que pour un agent dont la tolérance au risque augmente avec le niveau de patrimoine (ce qui est aujourd'hui une hypothèse standard) et qui possède donc une dérivée tierce de l'utilité positive (c'est-à-dire une préférence pour une asymétrie positive), un critère de dominance stochastique du troisième ordre doit être vérifié.

Jean [13, 14] a été l'un des premiers à proposer un modèle d'évaluation des actifs financiers intégrant l'asymétrie. Un aspect très important, sur lequel ont insisté Arditti et Levy [1], est l'importance de ne pas construire des critères qui ne prendraient en considération que les seules moyenne et asymétrie. En effet, il faut aussi inclure la variance comme terme modérateur, et un traitement approprié de l'impact de l'asymétrie ne peut faire l'impasse sur ce terme de variance.



Ce sont les articles de Rubinstein [22] et de Kraus et Litzenberger [17] qui, les premiers, sont crédités de la construction d'un CAPM à trois dimensions, c'est-à-dire avec prise en compte de l'asymétrie. Quelques années plus tard, Barone-Adesi [3], à partir du dernier de ces modèles, propose une analyse empirique de l'équilibre du marché en présence d'asymétrie. D'autres tests ont été menés ultérieurement par Harvey et Siddique [10]. Plus récemment encore, Athayde et Flôres [2] ont montré comment résoudre un programme d'optimisation sous contrainte de rentabilité et d'asymétrie dans un cadre multidimensionnel.

Dans une contribution très intéressante, Scott et Horvath [24] montrent que tout agent dont la satisfaction procurée par le gain ou l'accroissement de richesse serait sans limite (c'est-à-dire dont la dérivée première de l'utilité est toujours positive), non indifférent à la prise de risque (c'est-à-dire dont la dérivée seconde de l'utilité est toujours négative), et qui aurait enfin une attitude cohérente vis-à-vis du risque (c'est-à-dire dont les dérivées  $n$ -ièmes de la fonction d'utilité admettent des signes indépendants du niveau de la richesse) possède une fonction d'utilité dont les signes des dérivées  $n$ -ièmes alternent. Ce qui signifie que les dérivées impaires (première, troisième...) de la fonction d'utilité de cet agent seront positives (traduisant la satisfaction donnée par les gains, ou asymétrie positive...), et que les dérivées paires (seconde, quatrième...) de sa fonction d'utilité seront négatives (traduisant la préférence pour des fluctuations faibles et une régularité grande de leurs performances, autrement dit une faible variance et un coefficient d'aplatissement pas trop élevé). On remarquera que ces hypothèses tout à fait réalistes sont assez peu contraignantes. Ce résultat est donc d'une portée assez générale.

Une autre contribution fondamentale est celle de Hassett, Sears et Trennepohl [11]. Cette étude montre qu'il faut être particulièrement prudent lorsque l'on arrête le développement limité d'une fonction d'utilité espérée à l'ordre 3 : le fait de négliger les termes d'ordre 4 et ultérieur aboutit à des résultats qui sont très approximatifs, si ce n'est erronés.

Un des premiers articles qui aborde explicitement la relation entre asymétrie et diversification est celui de Simkowitz et Beedles [26]. A partir d'un modèle économétrique simple (erreurs à asymétrie positive), ces auteurs montrent que la diversification détruit l'asymétrie positive. La conclusion logique qui en résulte pour un investisseur qui chercherait à construire un portefeuille à asymétrie positive est de moins diversifier que ce qu'il aurait été conduit à faire en suivant le cadre classique. Ensuite, Conine et Tamarkin [4] ont obtenu une formule générique donnant le nombre optimum de titres en portefeuille en fonction des dérivées seconde et troisième de la fonction d'utilité et des valeurs prises par les moments et co-moments d'ordre deux et trois. Ce résultat, qui justifie la concentration des portefeuilles par l'asymétrie, est cependant soumis aux limitations mentionnées plus haut et mises en évidence par Hassett, Sears et Trennepohl [11]. Enfin la contribution de Mitton et Vorkink [19], qui est le point de départ de notre analyse, est décrite plus loin.

## **2.2. Gestion de portefeuille avec asymétrie**

Nous commençons par rappeler brièvement le cadre classique, puis nous discutons de l'introduction de l'asymétrie dans un tel cadre. La résolution en dimension 1 est explicitée. Nous concluons par une illustration dans le cadre d'un portefeuille à trois actifs.

### 2.2.1. Le modèle de Mitton et Vorkink (2007)

Mitton et Vorkink [19] ont proposé un modèle de choix de portefeuille dans lequel les préférences des investisseurs en fonction du critère moyenne – variance restent formalisées de manière usuelle, mais auxquelles a été ajoutée une préférence pour l’asymétrie, qui dépend de chaque investisseur. Cette prise en compte d’une recherche d’asymétrie différente selon chaque investisseur est ce qui distingue le modèle de Mitton et Vorkink de celui de Conine et Tamarkin [4] dans lequel elle était identique pour tous. L’équilibre du marché incorpore donc une hétérogénéité des agents, autrement dit on est dans une situation sans agent représentatif, ce qui s’inscrit dans un courant de recherche où l’absence d’agent représentatif a été explicitement modélisée pour rendre compte des prix observés sur le marché (voir par exemple Telmer [29], Heaton et Lucas [12] ou Constantidines et Duffie [5]).

Dans ce contexte, Mitton et Vorkink montrent qu’une forte recherche d’asymétrie peut produire une forte réduction de la diversification. Même si le portefeuille n’est pas optimal selon le critère moyenne – variance, le gain résultant de l’asymétrie compense la moindre optimalité : il apparaît une compensation entre le ratio de Sharpe et le niveau du coefficient d’asymétrie. Enfin, il semblerait que les portefeuilles les moins diversifiés soient ceux qui contiennent les titres au profil de rentabilité le plus asymétrique (voir Goetzmann et Kumar [7] pour une mise en évidence identique). Entre les portefeuilles les plus diversifiés et les moins diversifiés, l’écart de valeur du coefficient d’asymétrie est tel que cela semble indiquer un choix délibéré (ou une recherche délibérée) de titres à profil de rentabilité asymétrique, dans le but d’obtenir un portefeuille dont le profil de rentabilité soit également asymétrique. Que ce choix résulte d’une trop grande confiance par les investisseurs dans leur capacité à capter les hausses de marché ou d’un manque de réflexion sur les profils de risque optimaux (voir Odean [20] ou Grindblatt et Keloharju [8]), ou encore de tout autre chose, n’est pas un élément déterminant. On observe que ce choix a bien lieu : il s’agit d’en rendre compte et de mettre en évidence ses effets.

Plaçons-nous en dimension 1 et cherchons à répartir les fonds entre marché monétaire et fonds indicier (actif dit “risqué”) de rentabilité notée  $R$ . Soit  $x$  la proportion de la richesse investie en fonds indicier. Si la valeur initiale à investir est égale à  $V_0$ , décomposée en  $(V_0 - xV_0) + xV_0$ , la valeur finale du portefeuille est de :

$$V_1 = (V_0 - xV_0)(1 + r) + xV_0(1 + R) = V_0(1 + r) + xV_0(R - r)$$

On définit la rentabilité du portefeuille comme :

$$R_p = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{V_0r + xV_0(R - r)}{V_0} = r + x(R - r)$$

Les moments de la rentabilité  $R_p$  vérifient :

$$\begin{cases} \mathbf{E}[R_p] &= r + x(\mathbf{E}[R] - r) \\ \text{var}(R_p) &= x^2 \text{var}(R) \\ m_3(R_p) &= x^3 m_3(R) \end{cases}$$

Considérons le programme d’optimisation classique :

$$\max_{\{x\}} \left( \mathbf{E}[R_p] - \frac{1}{2\tau} \text{var}(R_p) \right)$$

où  $1/\tau$  est le coefficient d'aversion au risque. Ce programme se réexprime, en dimension 1, comme :

$$\max_{\{x\}} \left\{ r + x(\mathbf{E}[R] - r) - \frac{1}{2\tau} x^2 \text{var}(R) \right\}$$

ce qui revient à la condition du premier ordre :

$$\mathbf{E}[R] - r - \frac{1}{\tau} x \text{var}(R) = 0$$

d'où l'on tire la valeur de  $x$  :

$$x = \tau \frac{\mathbf{E}[R] - r}{\text{var}(R)} \quad (9)$$

En dimension  $d$ , la richesse s'exprime comme :

$$V_1 = V_0(1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle)(1 + r) + V_0 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{1} + \mathbf{R}) \rangle = V_0(1 + r) + V_0 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{R} - r\mathbf{1}) \rangle$$

et l'équivalent en écriture matricielle de (9) devient :

$$\mathbf{x} = \tau \Gamma^{-1} (\mathbf{E}[\mathbf{R}] - r) \quad (10)$$

qui donne les montants à investir sur chaque actif  $j$  sous la forme usuelle de Markowitz ou de Merton.

Par rapport à la résolution classique, Mitton et Vorkink [19] utilisent la fonction objectif suivante :

$$U(V) = E[V] - \frac{1}{2\tau} \text{var} V + \frac{1}{3\psi} m_3(V) \quad (11)$$

où  $m_3(V) = E\left((V - E(V))^3\right)$  est le moment centré d'ordre 3 (et non la skewness, comme indiqué dans leur article) de la distribution de la valeur du portefeuille et  $\psi$  est le coefficient de préférence pour l'asymétrie (voir Harvey et Siddique [10]).

Si l'on adapte le programme d'optimisation en optimisant sur  $R_p$ , on doit alors résoudre :

$$\max_{\{x\}} \left( E[R_p] - \frac{1}{2\tau} \text{var}(R_p) + \frac{1}{3\psi} m_3(R_p) \right) \quad (12)$$

### 2.2.2. Résolution approchée avec un actif risqué

Nous commençons par résoudre le programme (12) en dimension 1, c'est-à-dire dans le cas d'une répartition entre actif sans risque et actif risqué. Nous allons montrer que l'on peut parvenir à une résolution explicite. Nous cherchons donc à résoudre :

$$\max_{\{x\}} \left\{ r + x(E[R] - r) - \frac{1}{2\tau} x^2 \text{var}(R) + \frac{1}{3\psi} x^3 m_3(R) \right\} \quad (13)$$

qui conduit à la condition du premier ordre :

$$E[R] - r - \frac{1}{\tau} x \text{var}(R) + \frac{1}{\psi} x^2 m_3(R) = 0 \quad (14)$$

soit, en notant de manière simplifiée  $m_k$  pour  $m_k(R)$ , pour  $k = 2, 3$  :

$$x^2 - \frac{\psi m_2}{\tau m_3} x + \psi \frac{E[R] - r}{m_3} = 0$$

d'où :

$$x = \frac{\psi m_2}{2\tau m_3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\tau^2 m_3 (E[R] - r)}{\psi m_2^2}} \right)$$

que l'on peut écrire comme :

$$x = \frac{\psi m_2}{2\tau m_3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{\tau m_3}{\psi m_2} x^*} \right) \quad (15)$$

où  $x^*$  est le montant optimal selon le critère moyenne - variance obtenu en formule (9). Pour simplifier l'écriture, posons  $A = \tau m_3 / \psi m_2$ . On obtient :

$$x = \frac{1}{2A} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4Ax^*} \right)$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de l'expression précédente. On rappelle que

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

d'où il vient

$$x \simeq \frac{1}{2A} \left[ 1 \pm \left( 1 - 2Ax^* - 2A^2 x^{*2} \right) \right]$$

soit les deux solutions approchées suivantes :

$$x_1 \simeq x^* (1 + Ax^*) \quad (16)$$

et :

$$x_2 \simeq \frac{1}{A} - x^* (1 + Ax^*) \quad (17)$$

On remarque que cette dernière solution est instable. En particulier, quand  $m_3$  s'annule,  $\frac{1}{A}$  diverge, et donc  $x_2$  également. On ne retiendra donc que la première solution, que l'on écrira :

$$x = x_1 \simeq x^* (1 + km_3 x^*) \quad (18)$$

où  $k = \tau / \psi m_2 > 0$ .

On voit alors que trois cas se présentent :

1.  $m_3 = 0$  : pas d'asymétrie. Alors  $x = x^*$  : on retrouve le cadre classique.
2.  $m_3 > 0$  : queue de distribution étirée à droite. Alors  $x > x^*$  : on augmente le montant investi sur l'actif risqué, ce qui représente une concentration sur cet actif.
3.  $m_3 < 0$  : queue de distribution étirée à gauche. Alors  $x < x^*$  : on diminue le montant investi sur l'actif risqué, ce qui représente une concentration sur l'autre actif.

On observe donc avec (18) de manière directe qu'un  $m_3$  positif augmente le poids investi dans l'actif risqué, alors qu'un  $m_3$  négatif le diminue.

Si l'on souhaite exprimer le problème en fonction de  $S$  et non de  $m_3$ , on peut aussi écrire :

$$x = \frac{\psi m_2}{2\tau m_3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{\tau^2 m_3}{\psi \sigma^3} \frac{E[R] - r}{\sigma}} \right)$$

qui fait apparaître le coefficient d'asymétrie (ou *skewness*  $S$ ) de Pearson-Fisher défini comme le moment centré d'ordre 3 renormalisé par l'écart-type au cube :

$$S = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

d'où :

$$x = \frac{\psi m_2}{2\tau m_3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4 \tau \frac{\tau}{\psi} S \frac{E[R] - r}{\sigma}} \right)$$

Définissons le coefficient de prudence absolue (voir Kimball [16] pour une perspective générale sur la notion de prudence) comme  $\nu = \frac{\tau}{\psi}$ . Il vient :

$$x = \frac{1}{2\nu} \frac{m_2}{m_3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\nu S \frac{E[R] - r}{\sigma}} \right)$$

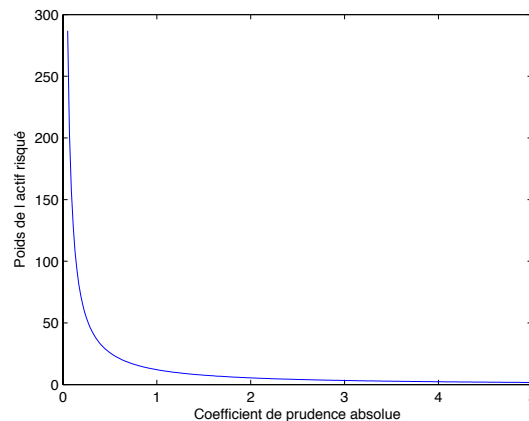


FIGURE 1. Evolution de la proportion d'actif risqué en fonction du coefficient  $\nu$  de prudence absolue.  $\tau = 2,5$ ,  $E[R] = 10\%$ ,  $r = 3\%$ ,  $m_2(R) = 100\%$ ,  $m_3(R) = -0,1$

On peut alors représenter (voir la figure 1) l'évolution de la proportion d'actif risqué en fonction du coefficient de prudence absolue  $\nu$ . Il apparaît sans surprise que, plus l'investisseur est prudent, et moins il investira dans l'actif risqué au profit de l'actif sans risque.

2.2.3. Résolution avec deux actifs risqués

Développons à présent la solution à deux actifs risqués et un actif sans risque. Soit donc un marché limité aux deux actifs risqués ( $d = 2$ ),  $\mathbf{R} = [R_1, R_2]$  le vecteur des rentabilités de ces deux actifs,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]$  le vecteur de leur rentabilité espérée, et  $\Gamma = [\sigma_{i,j}]_{i,j=1,2}$  la matrice de variance – covariance :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on peut construire les deux matrices  $\mathbf{m}_3^i$  de moments centrés d'ordre 3, pour  $i = 1, 2$  :

$$\mathbf{m}_3^i = \begin{bmatrix} m_3^{i,1,1} & m_3^{i,1,2} \\ m_3^{i,2,1} & m_3^{i,2,2} \end{bmatrix}$$

avec  $m_3^{i,j,k} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)(R_k - \mu_k)]$ . Chaque  $m_3^{i,j,k}$  est la valeur du coefficient d'asymétrie, non normé par l'écart type, de l'actif  $i$  par rapport aux actifs  $j$  et  $k$ . Ces matrices incluent donc une composante systématique de l'asymétrie, ainsi que les valeurs des coefficients de co-asymétrie issus des comoments.

Notons  $\mathbf{m}_1^P$ ,  $\mathbf{m}_2^P$ , et  $\mathbf{m}_3^P$  les moments d'ordre un, deux et trois du portefeuille. En écriture matricielle, pour obtenir les poids optimaux  $\mathbf{w}$  dans un marché de dimension  $d$ , on résout ainsi le programme d'optimisation :

$$\begin{cases} \max_{\{w\}} \mathbf{m}_1^P - \frac{1}{2\tau} \mathbf{m}_2^P + \frac{1}{3\psi} \mathbf{m}_3^P \\ \text{s.c.} \\ \sum_{i=1}^d w_i = 1 - w_0 \end{cases}$$

L'équivalent matriciel de (14), qui donne la condition d'atteinte du maximum, est :

$$E[\mathbf{R}] - r - \frac{1}{\tau} \Gamma \mathbf{x} + \frac{1}{\psi} \left[ \left( \sum_{i=1}^d x_i \mathbf{m}_3^i \right) \mathbf{x} \right] = 0$$

et n'a pas de solution analytique simple. On résout cette équation en prenant le jeu de paramètres suivant :

actif	$\mu$	$\sigma$
actif 1	10 %	20 %
actif 2	15 %	30 %
monétaire	3 %	0 %

La corrélation entre les actifs risqués est de  $\rho = 0,60$ . Les matrices des moments centrés d'ordre 3  $\mathbf{m}_3^i$  sont données par :

$$\mathbf{m}_3^1 = \begin{bmatrix} m_3^{1,1,1} & m_3^{1,1,2} \\ m_3^{1,2,1} & m_3^{1,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,005 \\ 0,005 & 0,005 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{m}_3^2 = \begin{bmatrix} m_3^{2,1,1} & m_3^{2,1,2} \\ m_3^{2,2,1} & m_3^{2,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 & 0,005 \\ 0,005 & 0,05 \end{bmatrix}$$

où l'on voit que l'actif risqué 2 est davantage asymétrique que l'actif risqué 1. On s'attend donc à trouver une surpondération en actif 2 par rapport à un modèle de diversification classique. On doit aussi vérifier que le modèle de Markowitz est obtenu en  $\frac{1}{\psi} = 0$

En choisissant comme coefficients psychologiques les valeurs

$$\tau = \frac{1}{3} \quad \psi = 1$$

on obtient les poids optimaux cherchés :

actif	$\mu$	$\sigma$	MV-opt.	MVS-opt.
actif 1	10 %	20 %	28,65 %	28,91 %
actif 2	15 %	30 %	32,99 %	35,79 %
monétaire	3 %	0 %	38,37 %	35,30 %

On observe bien une surpondération dans l'actif 2. L'introduction d'une nouvelle information, ici l'asymétrie des distributions, conduit à l'obtention d'un portefeuille non optimal au sens de Markowitz. De manière opérationnelle, si l'on investit plus dans les lignes les plus positivement asymétrique, et si l'on élimine les actions dont le poids est inférieur à un certain seuil critique, on aboutit bien à une concentration du portefeuille (ce sur quoi nous reviendrons plus loin dans cet article). Enfin, on observe que pour un coefficient de préférence à l'asymétrie positive  $\frac{1}{\psi}$  inférieur à un pourcent, le portefeuille obtenu est bien le portefeuille optimal selon Markowitz. Le tableau suivant présente les résultats obtenus lorsque l'asymétrie des actifs risqués est négative (on a pris :  $M1' = -M1$  et  $M2' = -M2$ ) :

actif	$\mu$	$\sigma$	MV-opt.	MVS <sup>-</sup> -opt.
actif 1	10 %	44 %	28,65 %	28 %
actif 2	15 %	54 %	32,99 %	31 %
monétaire	3 %	0 %	38,37 %	41 %

où l'on observe un repli sur l'actif sans risque et un investissement d'autant plus réduit dans les actifs risqués que ceux-ci sont d'autant plus négativement asymétriques.

### 2.3. Autres approches utilisant l'asymétrie

Nous présentons à présent quelques méthodes alternatives à celles développées ci-dessus.

#### 2.3.1. Asymétrie sans coasymétrie

Mitton et Vorkink font l'hypothèse selon laquelle les investisseurs considèrent non seulement l'asymétrie des rentabilités des actifs, mais aussi la coasymétrie entre ces rentabilités, ce qui complique singulièrement la résolution du programme d'optimisation (et le rend à la fois long à calculer et délicat à calibrer). On peut raisonnablement considérer que les investisseurs ne considèrent que la seule asymétrie, sans la coasymétrie. Dans ce cas, nous généralisons le programme d'optimisation précédent en dimension 1 :

$$\max_{\{x\}} \left\{ r + x(E[R] - r) - \frac{1}{2\tau} x^2 \text{var}(R) + \frac{1}{3\psi} x^3 m_3(R) \right\}$$

en un programme en dimension  $d$ . En supposant que seuls les termes d'asymétrie ont un effet sur la construction du portefeuille, l'utilité des termes de co-asymétrie apparaît nulle ou non pertinente. Cela donne alors :

$$\max_{\{x\}} \left\{ V_0(1+r) + \mathbf{x}' \cdot (E[\mathbf{R}] - r\mathbf{1}) - \frac{1}{2\tau} \mathbf{x}' \Gamma \mathbf{x} + \frac{1}{3\psi} \sum_{i=1}^d x_i^3 m_3(R_i) \right\}$$

Ce programme est la base d'un programme légèrement modifié que nous introduirons en section 2.3.3 et que nous testerons en section 2.4.

### 2.3.2. Les fonctions d'utilité cubiques

Rappelons que Mitton et Vorkink fondent leur approche sur une fonction d'utilité indirecte de la forme :

$$U(V) = \mathbf{E}[V] - \frac{1}{2\tau} \text{var}V + \frac{1}{3\psi} m_3(V) \quad (19)$$

où  $m_3(V)$  représente le moment centré d'ordre 3 de la distribution de la valeur du portefeuille et  $\psi$  est le coefficient de tolérance envers l'asymétrie. C'est ce montant  $U(V)$  qui est maximisé sous contraintes.

Il est important de ne pas confondre ce critère avec celui d'une utilité cubique : la formule précédente ne peut pas correspondre à une espérance d'utilité cubique. En effet, (19) peut se développer de la façon suivante :

$$\mathbf{E}[V] - \frac{1}{2} \lambda (\mathbf{E}[V^2] - \mathbf{E}[V]^2) + \frac{1}{6} \psi (E[V^3] - 3\mathbf{E}[V^2] \mathbf{E}[V] + 2\mathbf{E}[V]^3) \quad (20)$$

et il est clair que l'on ne peut pas trouver de fonction  $f(V)$  telle que l'expression (20) soit égale à  $\mathbf{E}[f(V)]$ . Donc, contrairement à ce qu'annoncent Mitton et Vorkink,  $U$  n'est pas une fonction d'utilité indirecte, mais une fonction objectif générale.

On pourra se reporter à Levy [18] pour une discussion sur les utilités cubiques. Pour ce type de fonction d'utilité,

$$U(V) = \alpha + \beta V + \gamma V^2 + \delta V^3$$

l'utilité espérée s'exprime comme :

$$\mathbf{E}[U(V)] = \alpha + \beta \mathbf{E}[V] + \gamma \mathbf{E}[V^2] + \delta \mathbf{E}[V^3] \quad (21)$$

que l'on peut comparer à l'expression (20) : il est impossible que les deux expressions coïncident.

On peut d'ailleurs réécrire l'expression (21) en fonction de la moyenne et des moments centrés d'ordre deux et trois selon :

$$E(U(V)) = \alpha + \beta m_1 + \gamma(m_2 + m_1^2) + \delta(m_3 + 3m_1(m_2 + m_1^2) - 2m_1^3) \quad (22)$$

où l'on voit là encore que l'expression (20) n'est pas celle d'une utilité cubique espérée de la richesse.

Finalement, Mitton et Vorkink proposent un critère permettant de choisir un portefeuille en tenant compte d'une certaine forme d'aversion au risque (perçu comme la variance) et d'une certaine préférence pour l'asymétrie. Tout en conservant cette intuition, il est possible de trouver d'autres formes possédant les mêmes caractéristiques, mais portant sur des quantités différentes. Nous en présentons un exemple ci-dessous.



### 2.3.3. Le troisième moment normalisé

Sachant que l'écart-type est le moment centré d'ordre 2 élevé à la puissance 1/2,

$$m_2^{1/2} = \mathbf{E} [(R - \mu)^2]^{1/2} \quad (23)$$

on peut aussi considérer les autres moments centrés d'ordre  $k$  élevés à la puissance  $1/k$ , ce qui rend ces quantités homogènes à un taux de rentabilité

$$m_k^{1/k} = \mathbf{E} [(R - \mu)^k]^{1/k} \quad (24)$$

En particulier, on peut donc inclure l'asymétrie dans un modèle de choix de portefeuille, non pas par le coefficient  $S$  ou par le troisième moment, mais par le troisième moment élevé à la puissance  $1/3$ . Kraus et Litzenberger [17] ont par exemple construit un CAPM à trois moments dans lequel l'asymétrie est exprimée ainsi.

Notons  $s_3 = m_3^{1/3}$  le troisième moment changé d'échelle. Dans le cas unidimensionnel (proportion  $x$  d'actif risqué), on a naturellement :

$$s_3(R_p) = x s_3(R)$$

Nous allons utiliser cette quantité comme un nouveau critère entrant dans les choix de portefeuille. A partir de l'expression (13) que l'on rappelle ci-dessous

$$\max_{\{x\}} \left\{ r + x(E[R] - r) - \frac{1}{2\tau} x^2 \text{var}(R) + \frac{1}{3\psi} x^3 m_3(R) \right\}$$

on remplace le moment  $m_3$  qui était pris en considération, par le moment changé d'échelle  $s_3$  :

$$\max_{\{x\}} \left\{ r + x(E[R] - r) - \frac{1}{2\tau} x^2 \text{var}(R) + \frac{1}{3\psi} x s_3(R) \right\} \quad (25)$$

pour constituer un nouveau programme d'optimisation.

La généralisation multidimensionnelle de cette formule n'est pas immédiate. Mais si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que l'investisseur pondère de manière linéaire la contribution d'asymétrie (vue au travers du terme  $s_3$ ) comme la rentabilité des titres et que, d'autre part, il est indifférent aux termes de co-asymétrie, alors cette généralisation se simplifie et devient en dimension  $d$  quelconque :

$$\max_{\{x\}} \left\{ V_0(1+r) + \mathbf{x}' \cdot (E[\mathbf{R}] - r\mathbf{1}) - \frac{1}{2\tau} \mathbf{x}' \Gamma \mathbf{x} + \frac{1}{3\psi} \mathbf{x}' \cdot s_3(\mathbf{R}) \right\} \quad (26)$$

Remarquons que cette manière d'introduire un critère de troisième ordre est différente d'un développement limité à l'ordre 3 d'une fonction d'utilité espérée. Mais, comme l'ont fait apparaître Hassett, Sears et Trennepohl [11], le fait de mener un développement limité à l'ordre 3 (classique dans la littérature) et de négliger les termes ultérieurs du développement aboutit généralement à des résultats faux ou fortement approximatifs.

Notons  $\varphi = 1/3\psi$ . La résolution du critère défini en (25) et (26) fournit les poids suivants :

1. En dimension 1 :

$$x = \tau \frac{\mathbf{E}[R] - r + \varphi s_3(R)}{\text{var}(R)} \quad (27)$$

2. En dimension  $d$  :

$$\mathbf{x} = \tau \Gamma^{-1} (\mathbf{E}[\mathbf{R}] - r + \varphi s_3(\mathbf{R})) \quad (28)$$

On voit que ce système de poids augmente la prime de risque par un terme proportionnel à l'asymétrie définie à travers  $s_3$ . Nous présentons ci-après une illustration de l'utilisation de ces poids dans le contexte de la gestion d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance sur le marché français.

#### 2.4. Une illustration sur le marché américain

Pour tester les modèles de portefeuilles présentés et faire apparaître la différence entre des modèles classiques et des modèles incluant la prise en considération de l'asymétrie, nous avons entrepris une étude de longue durée sur le marché américain pour l'ensemble des actions qui sont restées dans l'indice S&P 500 entre 1987 et 2006.

Le principe de l'analyse est le suivant. Chaque année en fin d'année, on compose un portefeuille selon l'une des méthodes indiquées plus loin. Puis, on calcule la performance de ce portefeuille sur l'année suivante en supposant que les poids des titres restent constants pendant l'année (pas de rééquilibrage du portefeuille au fil des mois). On recommence l'opération chaque année, pendant toute la durée de l'échantillon, soit jusqu'en 2005. On examine alors année après année les résultats obtenus, qui sont regroupés dans le tableau 1. On a supposé que le taux sans risque était de 0,01% par jour, que le coefficient de rejet de la volatilité était 2, et que le coefficient de préférence pour l'asymétrie (définie comme le moment d'ordre trois changée d'échelle) était de 100 000 (la taille importante de ce coefficient tient au fait qu'on travaille ici avec  $s_3$  et non  $m_3$ ).

La première colonne (M) du tableau 1 présente les rentabilités annuelles obtenues par des portefeuilles construits avec des poids de Merton (on a conservé les seuls poids positifs). La performance annuelle moyenne de ces portefeuilles sur la durée totale est alors de 14,46%.

Les deuxième et troisième colonnes présentent les rentabilités annuelles obtenues par des portefeuilles construits en prenant en compte l'asymétrie. Mais l'asymétrie n'est pas constante au cours du temps. Des titres qui ont eu davantage de hausses que de baisses pendant une année peuvent avoir tendance à baisser davantage l'année suivante, et l'asymétrie peut s'inverser. Si donc on investit sur des titres ayant une asymétrie positive (poids (28)), il est possible que l'on choisisse en réalité des titres qui auront une moins bonne performance l'année suivante. Cette considération est à l'origine du double calcul effectué : avec un signe positif et négatif devant le coefficient  $\varphi$ . Un signe négatif indiquant que, précisément, on préfère investir sur des titres qui ont présenté une asymétrie négative pendant la période passée, en espérant que, selon le principe d'inversion de l'asymétrie, on obtiendra une meilleure performance l'année suivante. Finalement :

1. La troisième colonne ( $A^+$ ) du tableau 1 présente les rentabilités annuelles obtenues en investissant selon le programme défini en (28), c'est-à-dire un critère d'asymétrie *ex post*. On voit que l'approche naïve qui consiste à penser que l'asymétrie passée est un bon indicateur d'asymétrie future, et donc à investir proportionnellement à l'asymétrie passée,

Année	M	A <sup>-</sup>	A <sup>+</sup>	d	A <sup>+</sup> +S
1988	14,26 %	12,40 %	14,02 %	13	43,91 %
1989	33,56 %	29,25 %	21,91 %	52	35,76 %
1990	-0,93 %	-6,65 %	2,43 %	38	-7,91 %
1991	37,12 %	40,65 %	32,13 %	68	38,08 %
1992	17,76 %	12,42 %	18,48 %	99	25,35 %
1993	9,78 %	10,89 %	12,81 %	73	27,00 %
1994	-0,77 %	0,7 %	0,07 %	52	20,05 %
1995	34,86 %	33,57 %	31,69 %	57	40,55 %
1996	15,68 %	18,24 %	20,35 %	51	26,18 %
1997	32,74 %	24,78 %	29,56 %	58	21,26 %
1998	13,93 %	16,96 %	15,60 %	59	28,12 %
1999	-1,89 %	6,03 %	4,56 %	64	25,48 %
2000	12,27 %	18,24 %	11,70 %	128	4,64 %
2001	2,64 %	3,85 %	6,10 %	135	3,25 %
2002	-10,26 %	-8,96 %	-15,08 %	54	-18,56 %
2003	23,00 %	29,97 %	24,58 %	97	28,31 %
2004	19,27 %	16,97 %	16,81 %	59	16,79 %
2005	10,02 %	6,22 %	8,93 %	48	17,53 %
2006	11,66 %	14,00 %	11,18 %	49	6,08 %
Bilan	14,46 %	14,71 %	13,84 %		20,10 %

TABLEAU 1. Performance de portefeuilles construits à partir du S&amp;P 500

produit une performance annuelle moyenne (13,84%) inférieure à celle obtenue avec l'approche mertonienne standard.

- La deuxième colonne (A<sup>-</sup>) du tableau 1 présente les rentabilités annuelles obtenues par des portefeuilles construits avec les poids qui résultent du programme modifié

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} (\mathbf{E}[\mathbf{R}] - r - \varphi s_3(\mathbf{R})) \quad (29)$$

qui est le programme (28) modifié, dans lequel le signe devant  $\varphi$  est inversé, c'est-à-dire un critère d'asymétrie *ex ante*. On voit que la performance annuelle moyenne obtenue est de 14,71%, soit une valeur légèrement supérieure à celle obtenue en se contentant d'une approche mertonienne standard.

Ce qui est en revanche problématique est de constater que, dans les deux cas, investir dans un portefeuille diversifié sur le S&P 500 en modifiant les poids en fonction de l'asymétrie produit des résultats très proches de l'investissement dans un portefeuille diversifié construit selon des critères plus classiques. On pourrait donc imaginer que la prise en compte de l'asymétrie n'apporte pas d'amélioration de la rentabilité du portefeuille.

Examinons alors ce que l'on obtient en modifiant la règle de placement. Au lieu de diversifier sur l'ensemble des titres de l'indice avec des poids modifiés comme auparavant, on décide de se limiter aux titres pour lesquels on a observé une asymétrie passée (mesurée toujours par le moment d'ordre 3 non renormalisée) supérieure à  $3 \cdot 10^{-4}$  (dans ce cas, le nombre de titres en portefeuille est donné en colonne d), ce qui revient à se concentrer sur les actions de plus forte asymétrie. En d'autres termes, on suppose qu'une asymétrie passée élevée peut représenter un bon indicateur d'asymétrie future (à l'inverse d'une asymétrie quelconque). La colonne (A<sup>+</sup> + S) présente les rentabilités annuelles obtenues avec des portefeuilles construits selon cette méthode

(les poids (28) appliqués au sous-ensemble d'actions à plus forte asymétrie). On voit que cette approche peut produire des rentabilités excédentaires fortes, et ceci de manière répétée sur de longues périodes. Mais du point de vue des risques pris, la comparaison des colonnes ( $A^+ + S$ ) et (M) fait apparaître que le portefeuille ( $A^+ + S$ ) ne subit des pertes que deux années sur les dix-neuf (1990 et 2002), alors que le portefeuille standard présente quatre années de rentabilités négatives. Donc le couple rentabilité - risque est nettement à l'avantage des portefeuilles concentrés.

Enfin, cette politique d'investissement produit une performance annuelle moyenne de 20,10% sur un horizon de dix-neuf ans, soit 5% de plus qu'une politique d'investissement standard. On observe aussi que les rentabilités annuelles qui résultent de cette politique de placement sont 11 fois sur 19 supérieures à celles d'une politique standard (en l'occurrence décrite par la colonne M). On peut donc conclure qu'il ne s'agit pas d'un artefact ni d'un hasard, d'une situation dans laquelle les deux politiques de placement produiraient des résultats aussi bons l'une puis l'autre, et où une année particulière serait la cause de l'excédent de performance observé.

## Conclusion

Afin de justifier une politique d'investissement non diversifiée, nous avons, après un retour sur la théorie des erreurs, présenté et illustré le modèle de Mitton et Vorkink [2007]. Puis, nous avons proposé une modélisation étendant cette approche afin de la rendre plus efficace du point de vue de la gestion réelle de titres. Cette extension a été rendue possible grâce à une investigation empirique approfondie menée avec les équipes de gestion et d'actuariat de la compagnie d'assurance SMA BTP. Les résultats obtenus ont été significatifs ; en particulier, il a été établi que la constitution de portefeuilles concentrés peut s'avérer particulièrement rentable en moyenne sur longue durée, et par ailleurs, il a été vérifié que les risques pris sur des horizons de long terme avec de la concentration ne sont pas plus élevés que des risques pris avec de la diversification.

En conclusion, nous pouvons considérer comme légitime d'envisager la concentration d'un portefeuille comme une conséquence de la présence d'asymétrie dans la structure des rentabilités des actifs, et de favoriser la concentration dans une politique de gestion pour en améliorer le couple rentabilité - risque.

## Références

- [1] F. D. ARDITTI et H. LEVY : Distribution moments and equilibrium : a comment. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(1):1429–1433, 1972.
- [2] G. M. de ATHAYDE et R. G. FLÔRES JR : Finding a maximum skewness portfolio - a general solution to three-moments portfolio choice. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28:1335–1352, 2004.
- [3] G. BARONE-ADESI : Arbitrage equilibrium with skewed asset returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20(3):299–313, 1985.
- [4] T. E. CONINE et M. T. TAMARKIN : On diversification given asymmetry in returns. *Journal of Finance*, 36(5):1143–1155, 1981.
- [5] G. CONSTANTINIDES et D. DUFFIE : Asset pricing with heterogeneous consumers. *Journal of Political Economy*, 104:219–240, 1996.
- [6] E. F. FAMA : The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, 38:34–105, 1965.
- [7] W. GOETZMANN et A. KUMAR : Why do individual investors hold under-diversified portfolios ? *Yale School of Management working paper*, 2004.
- [8] M. GRINBLATT et M. KELOHARJU : What makes investors trade ? *Journal of Finance*, 56(2):589–616, 2001.

- [9] G. HANOCH et H. LEVY : Efficient portfolio selection with quadratic and cubic utility. *Journal of Business*, 43(2):181–189, 1970.
- [10] C. HARVEY et A. SIDDIQUE : Conditional skewness in asset pricing tests. *Journal of Finance*, 55(3):1263–1295, 2000.
- [11] M. HASSETT, R. S. SEARS et G. L. TRENNEPOHL : Asset preference, skewness, and the measurement of expected utility. *Journal of Economics and Business*, 37:35–47, 1985.
- [12] J. HEATON et D. LUCAS : The importance of investor heterogeneity and financial market imperfections for the behavior of asset prices. *working paper, International Financial Services Research Center Sloan School of Management Massachusetts Institute of Technology*, 1995.
- [13] W. H. JEAN : The extension of portfolio analysis to three or more parameters. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6:505–515, 1971.
- [14] W. H. JEAN : More on multidimensional portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8:475–490, 1973.
- [15] M. KELLY : All their eggs in one basket : Portfolio diversification of us households. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 27:87–96, 1995.
- [16] M. KIMBALL : Precautionary saving in the small and in the large. *Econometrica*, 58:53–73, 1990.
- [17] A. KRAUS et R. H. LITZENBERGER : Skewness preference and the valuation of risky assets. *Journal of Finance*, 31(4):1085–1100, 1976.
- [18] H. LEVY : A utility function depending on the first three moments. *Journal of Finance*, 24(4):715–719, 1969.
- [19] T. MITTON et K. VORKINK : Equilibrium underdiversification and the preference for skewness. *Review of Financial Studies*, 20(4):1255–1288, 2007.
- [20] T. ODEAN : Do investors trade too much ? *American Economic Review*, 89:1279–1298, 1999.
- [21] V. POLKOVNICHENKO : Household portfolio diversification : A case for rank-dependant preferences. *Review of Financial Studies*, 18:1467–1502, 2005.
- [22] M. E. RUBINSTEIN : The fundamental theorem of parameter-preference security valuation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8(1):61–69, 1973.
- [23] P. A. SAMUELSON : Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6:41–49, 1965.
- [24] R. C. SCOTT et P. A. HORVATH : On the direction of preference for moments of higher order than the variance. *Journal of Finance*, 35(4):915–919, 1980.
- [25] W. SHARPE : A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, 9:277–293, 1963.
- [26] M. A. SIMKOWITZ et W. L. BEEDLES : Diversification in a three-moment world. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13:927–941, 1978.
- [27] SMA BTP : Eléments de réflexion sur la stratégie financière. *document interne*, 2004.
- [28] SMA BTP : Less can be more. méthode de gestion sma btp. *document interne*, 2004.
- [29] C. TELMER : Asset pricing puzzles and incomplete markets. *Journal of Finance*, 48(5):1803–1832, 1993.
- [30] C. WALTER : Le modèle linéaire dans la gestion des portefeuilles : une perspective historique. *Cahiers du centre d'analyse et de mathématiques sociales*, 163, 2004.
- [31] G. A. WHITMORE : Third-degree stochastic dominance. *American Economic Review*, 60:457–459, 1970.