



HAL
open science

Les multiensembles

Noël Bernard

► **To cite this version:**

Noël Bernard. Les multiensembles. Bulletin pour les sous-ensembles flous et leurs applications, 1981, 9, pp.4–10. hal-04559336

HAL Id: hal-04559336

<https://hal.science/hal-04559336>

Submitted on 25 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES MULTIENSEMBLES

Noël BERNARD
 Université Claude Bernard-Lyon I
 Séminaire de Mathématique Floue. (Prof. D. PONASSE)
 43, bd du 11 novembre 1918
 69622 VILLEURBANNE CEDEX

This paper is a shortened version of the thesis (1) presented in october: A Contribution to the Research of a Theory of Fuzzy Sets: Multiensembles. Two ways are possible: an axiomatic foundation given ex nihilo (2), or a step by step construction following the path opened by L.A.Zadeh. Here we study works done in this second way, finding out the main ideas and after criticism we propose a new construction following these ideas but rejecting most of arbitrary definitions.

Cet article est une présentation réduite de la thèse (1) soutenue en octobre: Contribution à la Recherche d'une Théorie des Ensembles Flous: Multiensembles. Deux démarches sont possibles: un fondement axiomatique ex nihilo (2), ou une construction pas à pas selon la voie ouverte par L.A.Zadeh. Nous étudions ici les travaux effectués dans cette seconde voie, dégagant les idées essentielles et après critique proposons une nouvelle construction représentant ces idées tout en rejetant au maximum les définitions arbitraires.

1- Retour sur l'Histoire des Ensembles Flous Classiques

Pour cet historique, nous nous repèrerons aux quatre schémas du diagramme 1. Le point de départ est la critique du schéma (1) dans lequel chaque partie d'un ensemble X est caractérisée par sa fonction caractéristique χ_A . L.A.Zadeh (13) a proposé de changer la table de vérité $\{0,1\}$ en introduisant des valeurs d'appartenance intermédiaires, aboutissant au schéma (2). Ceci a suscité un grand intérêt car on a trouvé possible de donner des équivalents à nombre de relations ensemblistes ($\subset, \cap, \cup, \dots$) grâce à la structure de treillis de $[0,1]$. Notons que ce cadre a conservé le quasi-monocle des travaux d'application.

Pourtant il est acquis presque dès l'origine qu'on peut sortir de ce cadre initial. On peut avec J.A.Goguen (4) remplacer $[0,1]$ par un treillis complet, ou tout ensemble ordonné à son choix (schéma (3)), et même s'affranchir de l'unicité de l'ensemble X de référence (schéma (4)), ce qui permet enfin de parler d'ensembles flous et d'en former une catégorie -notée Set_V par J.A.Goguen, VF par D.Ponasse (11)- pour les applications suivantes:

$$f: (A, a) \rightarrow (B, b) \quad \text{si} \quad f: A \rightarrow B \text{ et } b \circ F \triangleright a$$

Les idées essentielles jusqu'ici sont d'une part de permettre des degrés d'appartenance variés, d'autre part de reconstituer une théorie ressemblant à la théorie des ensembles sans s'intéresser d'abord à la notion d'élément. Les problèmes sont de trois ordres:

- Le caractère arbitraire de certaines définitions. Par exemple celle des applications floues: j'ai donné la plus fréquente, il y en a quatre autres dans le livre de C.V.Negoita et D.A.Ralescu (8) et même celle-ci est très critiquée. De même sont jugées arbitraires la complémentation, la réunion, ...

- L'inadéquation à l'utilisation: On a critiqué le caractère trop net de l'inclusion, des applications floues... ainsi que l'unicité de V alors que l'évaluation dépend de l'utilisateur.

- L'inadéquation à la formalisation mathématique, des propriétés curieuses ou non généralisables provenant de l'existence d'un plus petit élément 0, ou de la structure trop riche de $[0,1]$.

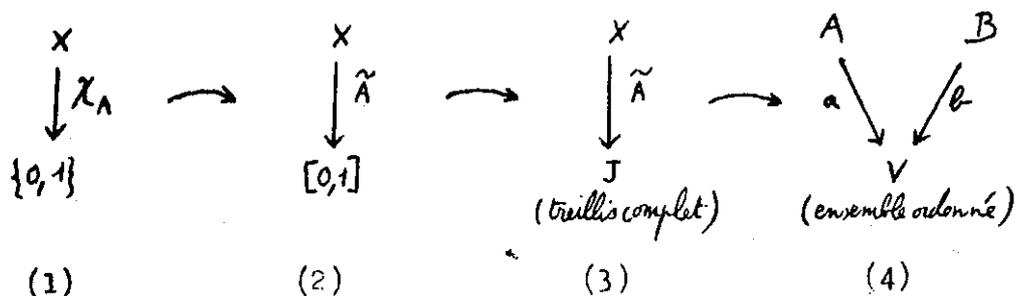


Diagramme 1

Le théorème de représentation de C.V.Negoita et D.A.Ralescu (8) établit dans le cas du schéma (3) l'isomorphisme du treillis des parties floues de X , muni de l'inclusion, au treillis suivant: un élément est une famille $(A_j)_{j \in J}$ de sous-ensembles de X vérifiant la condition

$$\forall L \subset J \quad A_{\bigvee L} = \bigcap_{l \in L} A_l$$

et l'ordre est l'inclusion respective des sous-ensembles de même indice. Ceci nous introduit à la notion multienssembliste de base où, pour J non forcément complet on considère les familles respectant la condition moins forte

$$\forall \{j, j'\} \subset J \quad j \leq j' \Rightarrow A_j \supset A_{j'}$$

Il n'y a plus d'isomorphisme, les deux points de vue divergent -sauf sur $[0,1]$ où ils ne sont pas départagés. Pour les constructions qui suivent j'ai choisi les multiensembles, mais une restriction d'hypothèses nous redonne à tout moment une étude possible dans le langage des ensembles flous.

2- L'Episode des Topos

A moins d'entreprendre une construction axiomatique complète d'une théorie des ensembles flous, la démarche à laquelle on est amené consiste à partir des définitions précédentes pour prolonger la généralisation jusqu'à obtenir une structure représentative de l'idée de flou. Dans les trois dernières années, beaucoup ont tenté d'exploiter la direction suivante: la généralisation n'était pas donnée d'abord mais le but à atteindre, pour lequel ensuite on adaptait les définitions, et ce but était de remplacer le topos des ensembles par un autre topos. De quoi s'agit-il?

Def.1. Un topos est une catégorie Ω :

- i - finiment complète
- ii - possédant des exponentielles
- iii- possédant un classificateur de sous-objets \mathcal{O}

"finiment complète" signifiant "complète pour les limites finies"; ii signifiant pour deux objets X et Y l'existence d'un objet X^Y et d'un morphisme

$e: YxX^Y \rightarrow X$ tel que pour tout morphisme $f: YxZ \rightarrow X$ existe $g: Z \rightarrow X^Y$ réalisant la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} YxX^Y & \xrightarrow{e} & X \\ (1_Y, \varepsilon) \uparrow & \nearrow f & \\ YxZ & & \end{array}$$

iii signifiant l'existence d'un morphisme $\omega: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{O}$ (où $\mathbb{1}$ est l'objet terminal de Ω) tel que tout sous-objet $B \rightarrow A$ est obtenu par un pullback

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{1} \\ \downarrow & & \downarrow \omega \\ A & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O} \end{array}$$

Or Ens est un topos avec $\mathcal{O} = \{0,1\}$ et la classification des parties de A par les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\chi_A} & \{0,1\} \end{array}$$

est la traduction exacte du schéma (1) (diagramme 1). D'où l'idée que remplacer $\{0,1\}$ par V quelconque reviendrait à changer le topos.

Malheureusement Set_V n'est pas un topos (3,12) dès que $V \neq \{0,1\}$. Une idée alors est de trouver un topos dont Set_V soit une sous-catégorie. Pour illustrer ceci, prenons $V = \mathbb{N}^{\text{Op}}$: alors tout ensemble flou s'identifie à la famille de ses niveaux de flou ordonnée en une série d'inclusions canoniques

$$A_0 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_2 \hookrightarrow \dots$$

De ce fait Set_V est identifiée à une sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles diachroniques (6) où les objets sont des familles de morphismes

$$A_0 \xrightarrow{t_0} A_1 \xrightarrow{t_1} A_2 \xrightarrow{t_2} \dots$$

et les morphismes sont des familles de morphismes fournissant des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \dots \\ f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & \\ B_0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Malheureusement cette catégorie n'est pas un topos contrairement à ce qu'affirme la littérature (elle ne possède pas d'exponentielles); cependant elle possède un classificateur de sous-objets.

Pour satisfaire certains logiciens (recherche d'une internalisation de la logique, dans une optique intuitionniste) il aurait été bon que l'on obtienne un topos -et que \mathfrak{J} soit une algèbre de Heyting. Dans l'optique qu'on va voir, la seule présence du classificateur de sous-objets me paraît utile: il s'agit de l'internalisation du topos, selon C.V.Negoita(7). Cet auteur utilise une telle notion pour une approche floue de la théorie des systèmes et de l'ontogenèse. Mais l'idée de prise en compte du

temps me semble représentée de façon plus riche par la notion de morphisme géométrique (foncteur possédant un adjoint à gauche exact à gauche) comme la présente F.W. Lawvere(5) en parlant d'ensembles continûment variables. Nous verrons en fin d'étude une présentation des multiensembles comme catégorie indexée, où ce concept prend toute sa généralité.

La tentative de plongement décrite ci-dessus s'est déroulée de la façon suivante: Eytan, comme Stefanescu, modifient les morphismes mais n'obtiennent pas un topos; la catégorie de Higgs est un topos mais n'a plus grand chose à voir avec les ensembles flous; la catégorie de Boyd, généralisant le procédé montré plus haut avec les ensembles diachroniques, est la catégorie des préfaisceaux sur V . Tout cela me paraît peu satisfaisant car les catégories obtenues finissent par avoir peu de rapport avec la problématique floue. Cependant Negoita et Stefanescu (9) semblent se contenter d'un plongement de $\text{Set}_{[0,1]}$ dans un topos (dont le classificateur de sous-objets \mathcal{O} n'est d'ailleurs pas un élément de $\text{Set}_{[0,1]}$) et développent une théorie de l'optimisation dans les topos.

3- Les Multiensembles

Comme dans les travaux décrits au paragraphe précédent, nous allons modifier les définitions classiques. Mais ce sera fait, non dans le but de particulariser le concept flou afin de le faire rentrer dans un moule donné à priori (la structure de topos), mais au contraire de le généraliser au maximum en abandonnant les hypothèses superflues. C'est pourquoi les définitions qui suivent seront d'abord données sans traiter le problème de l'existence. On trouvera en fin de paragraphe trois conditions répondant à ce problème.

Soit donnée pour tout ce qui suit une catégorie Ω , sous-catégorie de Ord_1 (ensembles ordonnés avec plus grand élément 1, et morphismes d'ordre), finiment complète. On supposera en fait que ses objets ont un produit inclus dans leur produit ensembliste, avec des projections surjectives. L'essentiel des idées floues réside dans:

Def.2. Un multiensemble A est une famille $(A_j)_{j \in J}$ d'ensembles, où $J \in |\Omega|$, satisfaisant à un ensemble Σ de conditions.

Σ contient toujours: (1) $\forall i \in J \quad \forall j \in J \quad i \leq j \Rightarrow A_i \supset A_j$.

Une fois donnés Ω et Σ , on obtient ainsi une classe de multiensembles qu'on notera \mathcal{M} . Un choix approprié donne pour \mathcal{M} les ensembles, ou les différentes définitions de (sous-)ensembles flous classiques. Le travail de référence montre que les définitions qui suivent, dans ces choix particuliers, soit coïncident avec celles déjà existantes, soit les généralisent.

L'inclusion se définit par

$$A \subset B \Leftrightarrow \exists \omega \in \Omega(J_A; J_B) \quad \forall j \in J_A \quad A_j \subset B_{\omega(j)}$$

On précise parfois ω -inclusion, notée $A \subset_{\omega} B$. On en tire une relation d'équivalence $A \sim B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$ que nous étudierons dans un moment: c'est la similitude. Une intersection d'une famille $(A^k)_{k \in K}$ de multiensembles est un multiensemble C tel que

$$\forall B \in \mathcal{M} \quad (\forall k \in K \quad (B \subset A^k) \Leftrightarrow B \subset C)$$

Une réunion se définit en renversant les inclusions. Intersections comme réunions, si elles existent, forment des classes de similitude. On définit de façon semblable des Id-intersections (en prenant partout des Id-inclusions)

pour des multiensembles de même échelle J associée.

Pour insatisfaisante qu'elle soit car trop nette et assez arbitraire, gardons dans cette étude la définition floue des singletons:

$S = \{x\}_J^j = (S_k)_{k \in J}$ où $S_k = \{x\}$ si $k \leq j$, $S_k = \emptyset$ sinon, avec la définition d'un élément (x, j) de A par $\{x\}_J^j \in A$. On dira qu'un multiensemble A est défini en extension par une famille \mathcal{J} de J -singletons, et on écrira $A = [(x, j)]_{\{x\}_j \in \mathcal{J}}$, lorsque A est l'Id-intersection des multiensembles Id-contenant tous les singletons de \mathcal{J} . On peut alors caractériser une ω -inclusion $A \subseteq_{\omega} B$ par l' ω -inclusion de tous les éléments de \mathcal{J} dans B . Notons qu'il y a toujours un problème d'existence. On peut aussi définir un produit par

$A \times B = [((x, y), (j, k))]_{\{x\}_j \in A \text{ et } \{y\}_k \in B}$
et une μ -relation de A vers B comme une partie $R \subseteq_{\mu} A \times B$.

Afin d'effectuer des restrictions de relations, définissons si $\omega \in \Omega(J, J_B)$ le multiensemble $B = (B_{\omega(j)})_{j \in J}$ et si $\omega \in \Omega(J_A, J)$ le multiensemble

$A = (\bigcup_{\omega(j)} A_j)_{k \in J}$ si tant est que soient ainsi définis de vrais multiensembles. Ceci permet alors de définir la restriction d'une μ -relation $R \subseteq_{\mu} A \times B$ à des Id-parties A' de A et B' de B comme étant

$$R \cap_{\mu}^{\text{Id}} A' \times B'$$

Considérer des restrictions à deux singletons nous conduit à la notion d'éléments en relation: on peut obtenir une définition assez naturelle de relation d'équivalence par exemple. Considérer la restriction à un singleton de A (et à B tout entier) permet d'appeler application de A dans B toute relation dont toutes ces restrictions sont des singletons: on associe alors à tout singleton S de A une image $R(S)$, singleton de B .

Toutes les constructions précédentes sont valables sous les seules hypothèses suivantes: La condition de "stabilité de \mathcal{M} sous Ω " (ST Ω) dit que toutes les familles de la forme A ou B sont dans \mathcal{M} ; la condition ST \cap dit que \mathcal{M} est stable pour les Id-intersections; la condition SING dit que tous les singletons sont dans \mathcal{M} . On trouve d'assez nombreux choix (Ω, \mathcal{E}) pour lesquels ces conditions sont satisfaites.

4- Agrégats

Nous avons vu la relation de similitude, $A \sim B$ consistant en leur inclusion réciproque. Un agrégat est une classe de similitude $\alpha = [A]$. Si dans la présentation des multiensembles, la multiplicité des échelles J permettait d'associer à chaque objet d'étude une échelle adaptée, l'idée est ici de prendre en compte la multiplicité des subjectivités: une échelle est en fait adaptée au couple (sujet, objet), et le passage à une classe d'équivalence dégage une réalité objective de son observation subjective. Les définitions suivantes, où $\alpha = [A]$, $\beta = [B]$, $\rho = [R]$ sont de bons passages au quotient

$$\begin{aligned} \alpha \subset \beta &\Leftrightarrow A \subset B \\ \alpha \cap \beta &= [C] \quad (\text{pour une intersection } C \text{ de } A \text{ et } B) \\ \alpha \cup \beta &= [C] \quad (\text{" " " " Réunion " " " "}) \\ \rho \text{ relation de } \alpha \text{ vers } \beta &\Leftrightarrow R \text{ relation de } A \text{ vers } B \end{aligned}$$

Le problème des applications est beaucoup plus ardu. Notons que dans la notion d'application multiensembliste intervient le morphisme μ tel que $R \subseteq_{\mu} A \times B$. On est donc amené à préciser: ρ est une (A, B, R, μ) -relation.

Mais pour définir une application ; il faudrait que "R est une application" passe au quotient. Or c'est faux en général, je ne l'ai obtenu que sous une condition EXT à peu près irréalisable en pratique, portant sur les singletons. Ceci me conforte dans l'idée que les définitions de ceux-ci sont à revoir. D'autant plus que même la condition EXT, si elle permet le passage au quotient, ne permet pas de définir une composition des applications.

5- Cas où Ω est Finiment Cocomplète: Catégorie Indexée

On peut trouver des cas où Ω soit à la fois finiment complète et finiment cocomplète. Un exemple en est la catégorie des algèbres de Heyting complètes, important car il contient la plupart des applications pratiques qui ont été faites, tout en répondant à bien des préoccupations logiques, et pour lequel les produits et coproduits ne sont autres que les produits ensemblistes. Notons d'ailleurs que pour cet exemple, si $\Sigma = \{(1)\}$ ou $\Sigma = \{ \forall K \subset J_A \quad A_{\vee K} = \bigcap_{k \in K} A_k \}$, sont vérifiées ST Ω , ST Ω , et SING, donc toutes les constructions des multiensembles et des agrégats (sauf les applications) sont possibles.

Sur la catégorie Ω^{Op} qui est finiment complète, on peut définir la notion de catégorie indexée (10), c'est-à-dire la donnée:

- pour tout $I \in |\Omega^{Op}|$ d'une catégorie A^I
- pour tout $\alpha \in \Omega^{Op}(J, I)$ d'un foncteur $\alpha^*: A^I \rightarrow A^J$
- avec - $Id_I^* = Id_{A^I}$
- $(\alpha \circ \beta)^* = \beta^* \circ \alpha^*$

Or on voit facilement que ces conditions sont vérifiées en prenant pour A^I la catégorie des I-ensembles et des Id_I -applications, pour lesquelles on définit une composition naturelle. (les produits sont ici remplacés par $A_{\times I} B = (A_i \times B_i)_{i \in I}$). Pour tout $\alpha \in \Omega^{Op}(J, I)$, c'est-à-dire $\alpha = \omega: I \rightarrow J$, nous posons $\alpha^*(A) = A_{\omega}$ et $\alpha^*(R) = R_{\omega}$.

Nous voyons donc, au moment de conclure cette étude, apparaître une structure. Celle-ci n'était pas recherchée a priori, elle vient en quelque sorte en prime du travail de simple généralisation effectué. Moins étudiée que celle de topos, elle n'est pas dépourvue d'intérêt, vis-à-vis de la problématique floue. Sur le plan des méthodes, elle fournit un procédé typique, ce qui justement faisait défaut jusqu'ici: il s'agit de la localisation, réglant le passage réciproque entre observation particulière et connaissance générale. Sur le plan des concepts, elle renouvelle l'idée de C.V. Negoita que le flou permet l'internalisation du temps. Il existe en effet dans les catégories indexées une généralisation de la notion de morphisme géométrique grâce à un théorème du foncteur adjoint, qui établit l'équivalence pour un foncteur indexé d'être continu (respect des limites) ou de posséder un adjoint à gauche. On rejoint finalement la notion d'ensembles continûment variables.

References

- 1 N. BERNARD Contribution à la recherche d'une théorie des ensembles flous: les multiensembles -thèse 3^o cycle Université C. Bernard-Lyon I, Lyon 1981
- 2 O. BOTTA & M. DELORME Construction d'un univers flou -Busefal n°2 1980
- 3 J. C. CARREGA Les catégories SetH et FuzH -Busefal n°6 1981
- 4 J. A. GOGUEN Concept representation in natural and artificial languages: axioms, extensions and applications for fuzzy sets -Int. Journ. of man-machine Studies 6 1974
- 5 F. W. LAWVERE Continuously variable sets; algebraic geometry = geometric logic -Logic Colloquium '73, Rose & Shepherdson ed. -North Holland 1975
- 6 S. MAC LANE Sets, topoi and internal logic in categories -Logic colloquium '73, Rose & Shepherdson ed. North Holland 1975
- 7 C. V. NEGOITA Fuzzy sets in topoi -Table ronde CNRS sur le flou, Lyon 1980
- 8 C. V. NEGOITA & D. A. RALESCU Applications of fuzzy sets to systems analysis -Birkhäuser Verlag, Basel 1975
- 9 C. V. NEGOITA & A. C. STEFANESCU A categorical approach to fuzzy optimisation -Busefal 7 1981
- 10 R. PARE & D. SCHUMACHER Abstract families and the adjoint functor theorems -Springer Lecture Notes 661 1978
- 11 D. PONASSE Ensembles et applications flous -Seminaire de mathématique floue, université C. Bernard, Lyon 79-80
- 12 D. PONASSE Remarques sur la catégorie Fuz(H) de M. Eytan -Busefal 6 1981
- 13 L. A. ZADEH Fuzzy sets -Inform. and control 12 1965