



HAL
open science

**LFA 2013 : Actes des 22èmes rencontres francophones
sur la Logique Floue et ses Applications, 10-11 octobre
2013, Reims, France**

Jean-Luc Marichal, Najib Essounbouli, Kevin Guelton

► **To cite this version:**

Jean-Luc Marichal, Najib Essounbouli, Kevin Guelton. LFA 2013 : Actes des 22èmes rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, 10-11 octobre 2013, Reims, France. 22èmes rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2013), pp.1–268, 2013. hal-04555890v2

HAL Id: hal-04555890

<https://hal.science/hal-04555890v2>

Submitted on 25 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LFA 2013

22^{èmes} rencontres francophones sur
la Logique Floue et ses Applications

Reims, 10-11 Octobre



**Actes des 22^{èmes} rencontres francophones sur la Logique Floue et
ses Applications, 10-11 octobre 2013, Reims, France**

Éditeurs :

Jean-Luc Marichal, Najib Essounbouli, Kevin Guelton

Avec le soutien de :



Préface

Les Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA) sont l'occasion pour les chercheurs de la communauté francophone, universitaires et industriels, de partager les avancées de leurs travaux et de renforcer leurs connaissances autour de la thématique de la théorie des sous-ensembles flous, laquelle s'est élargie aux théories de l'incertain que sont les théories des probabilités imprécises, de l'évidence, des possibilités, etc.

Ces rencontres offrent, chaque année, un lieu privilégié pour des débats fructueux, suscités par les travaux qui y sont présentés. Elles permettent aussi aux scientifiques, jeunes et expérimentés, de présenter des recherches novatrices et de recueillir les avis constructifs des spécialistes de la communauté.

Depuis sa création en 1995, la conférence LFA a visité Paris, Nancy, Lyon, Rennes, Valenciennes, La Rochelle, Mons, Montpellier, Tours, Nantes, Barcelone, Toulouse, Nîmes, Lens, Annecy, Lannion, Aix-les-Bains, Compiègne et Reims cette année. Cette édition contient une sélection de trente-cinq communications (parmi quarante-cinq articles soumis) couvrant assez largement l'ensemble des thématiques classiques et émergentes telles que l'intelligence artificielle, l'aide à la décision, la fouille de données, la classification, la robotique, la reconnaissance des formes et l'analyse de données. Parmi les sujets traités, sont particulièrement présentes cette année la commande floue et la fusion d'informations. Nous tenons par ailleurs à souligner la représentativité croissante de chercheurs provenant de pays tels que l'Algérie, le Maroc, la Tunisie ou encore le Luxembourg, et qui représentent plus de vingt pour cent des participants attendus lors de ces rencontres. Nous saluons avec reconnaissance leur contribution à faire de LFA un événement de la communauté scientifique francophone qui dépasse aujourd'hui significativement les frontières françaises.

Nous avons le plaisir d'accueillir deux conférences invitées. La première de ces conférences nous est proposée par Thierry-Marie Guerra, professeur en automatique à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis (UVHC) et directeur du Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique industrielles et Humaines (LAMIH, UMR CNRS 8201). Internationalement reconnu pour ses travaux sur le contrôle des systèmes non linéaires représentés par des modèles flous de type Takagi-Sugeno, il a intitulé sa conférence : Une petite histoire de la commande floue. Y voit-on plus clair ? La seconde de ces conférences nous est présentée par Christophe Marsala, professeur en informatique à l'Université Pierre et Marie Curie (UPMC) et membre du département Données et Apprentissage Artificiel (DAPA) du Laboratoire d'Informatique de l'Université Paris 6 (LIP6 UMR CNRS 7606). Spécialiste mondialement renommé de l'apprentissage et des systèmes flous, il a intitulé sa conférence : Apprentissage flou en environnement dynamique. Nous les remercions chaleureusement d'avoir accepté notre invitation.

Nous tenons à remercier aussi tous ceux qui ont contribué à ce que LFA 2013 soit une conférence de qualité : les auteurs pour la qualité scientifique de leurs contributions, les membres du comité de pilotage pour leurs avis éclairés, ceux du comité de programme pour la sélection attentive des articles et enfin les membres du comité d'organisation sans qui cette manifestation n'aurait pu avoir lieu.

Nous remercions l'Université de Reims Champagne-Ardenne, le CRESTIC et la société savante EUSFLAT pour leur soutien logistique ou financier. Enfin nous remercions l'AFIA, l'IEEE France Section, le GDR ISIS, le GDR MACS, le GDR I3 et la ROADEF pour leur soutien scientifique.

Jean-Luc Marichal

Président du comité de programme

Najib Essounbouli et Kevin Guelton

Présidents du comité d'organisation

Comité de pilotage

Bloch Isabelle (Télécom ParisTech, Paris)
Bouchon-Meunier Bernadette (LIP6, Paris)
Denoeux Thierry (Heudiasyc, Compiègne)
Dubois Didier (Irit, Toulouse)

Foulloy Laurent (Listic, Annecy)
Pivert Olivier (Irisa, Lannion)
Prade Henri (Irit, Toulouse)

Comité de programme

Président : Jean-Luc Marichal (RMATH, Univ. du Luxembourg)

Benamor Nahla (Larodec, Tunis)
Benferhat Salem (Cril, Lens)
Bisgambiglia Paul-Antoine (Univ. Corse, Corte)
Bloch Isabelle (Télécom ParisTech, Paris)
Bouchon-Meunier Bernadette (LIP6, Paris)
Buche Patrice (INRA, Montpellier)
Chadli Mohammed (MIS-UPJV, Amiens)
Charnomordic Brigitte (Inra, Montpellier)
Colot Olivier (Univ. Lille1, Lille)
Couceiro Miguel (LAMSADE, Paris)
De Caluwe Rita (Univ Ghent, Belgique)
De Runz Cyril (CReSTIC, Reims)
Delmotte François (LGI2A, Bethune)
Denoeux Thierry (Heudiasyc, Compiègne)
Destercke Sebastien (HeuDiasyC, Compiègne)
Djouadi Yassine (RIMA, USTHB, Alger, Algérie)
Dubois Didier (Irit, Toulouse)
Detyniecki Marcin (LIP6, Paris)
Elouedi Zied (LARODEC, ISG Tunis, Tunisie)
El Hajjaji Ahmed (MIS, Amiens)
Essounbouli Najib (CReSTIC, Reims)
Fargier Héléne (Irit, Toulouse)
Foulloy Laurent (Listic, Annecy)
Frélicot Carl (MIA, La Rochelle)
Galichet Sylvie (Listic, Annecy)
Godo Lluís (IIIA, Barcelone, Espagne)
Grabisch Michel (CES, Paris)
Grabot Bernard (LGP, Tarbes)
Guelton Kevin (CReSTIC, Reims)
Guerra Thierry-Marie (Lamih, Valenciennes)

Guillaume Serge (Cemagref, Montpellier)
Hadjali Allel (LIAS, Poitiers)
Hamzaoui Abdelaziz (CReSTIC, URCA)
Kacprzyk Janusz (Syst. Res. Inst., Varsovie, Pologne)
Labreuche Christophe (Thalès, Paris)
Laurent Anne (Lirmm, Montpellier)
Lesot Marie-Jeanne (LIP6, Paris)
Maaref Hichem (Univ. Evry)
Manamanni Noureddine (CReSTIC, Reims)
Marichal Jean-Luc (RMATH, Luxembourg)
Marsala Christophe (LIP6, Paris)
Martin Arnaud (Irisa, Lannion)
Marx Benoit (CRAN, Nancy)
Masson Mylène (Heudiasyc, Compiègne)
Mauris Gilles (Listic, Annecy)
Mokhtari Aicha (USTHB, Alger)
Montmain Jacky (EMA, Nîmes)
Oussalah Mourad (Univ. Birmingham, GB)
Pivert Olivier (Irisa, Lannion)
Prade Henri (Irit, Toulouse)
Quost Benjamin (HeuDiasyC, Compiègne)
Ramdani Mohammed (FST, Mohammadia)
Rifqi Maria (LIP6, Paris)
Rocacher Daniel (Irisa, Lannion)
Rombaut Michèle (Lis, Grenoble)
Roux Emmanuel (ESPACE-DEV IRD, Montpellier)
Sabbadin Régis (Inra, Toulouse)
Strauss Olivier (Lirmm, Montpellier)
Tsoukias Alexis (Lamsade, Paris)
Ughetto Laurent (Irisa, Rennes)

Comité d'organisation

Présidents: Essounbouli Najib, Guelton Kevin (CReSTIC, Reims)

Arcese Laurent (CReSTIC, Reims)
Chevrier Olivier (CReSTIC, Reims)
De Runz Cyril (CReSTIC, Reims)
Hamzaoui Abdelaziz (CReSTIC, Reims)
Lecasse Stéphane (CReSTIC, Reims)

Lenclume Ida (CReSTIC, Reims)
Manamanni Noureddine (CReSTIC, Reims)
Messai Nadhir (CReSTIC, Reims)
Vitry Géraldine (CReSTIC, Reims)

Table des matières

Conférences invitées

<i>Une petite histoire de la commande floue. Y voit-on plus clair ?</i>	
Thierry-Marie Guerra	3
<i>Apprentissage flou en environnement dynamique</i>	
Christophe Marsala	7

Théorie des possibilités

<i>Vision possibiliste de l'estimation du paramètre d'une loi binomiale</i>	
Gilles Mauris	9
<i>Probability-Possibility transformation: Inference study for min-based possibilistic networks</i>	
Yosra Ben Slimen, Raouia Ayachi, Nahla Ben Amor	17
<i>Les capacités qualitatives sont des possibilités imprécises</i>	
Didier Dubois, Henri Prade, Agnès Rico	25

Intelligence artificielle

<i>Preserving Interpretability in the Optimization of Fuzzy Systems: a Generic Algorithm in a Topological Framework</i>	
Ricardo de Aldama, Michaël Aupetit	33
<i>Modus Ponens Généralisé avec contrôle d'applicabilité de la règle</i>	
Marcin Detyniecki, Bernadette Bouchon-Meunier, Benjamin Moubêche	41
<i>La Logique Possibiliste Généralisée</i>	
Mohua Banerjee, Didier Dubois, Henri Prade, Steven Schockaert	49

Fusion d'informations

<i>Validation de systèmes d'aide à la décision en contexte incertain par analyse multicritère</i>	
Mireille Batton-Hubert, Guillaume Dupouy, Eric Chojnacki	57
<i>Processus de Décision Crédibiliste pour l'Alignement des Ontologies</i>	
Amira Essaid, Arnaud Martin, Grégory Smits, Boutheina Ben Yaghlane	59
<i>Logique possibiliste multi-agents, confiance, et arguments</i>	
Asma Belhadi, Faiza Khellaf-Haned, Henri Prade	67
<i>Interpolation spatiale floue en Sciences de l'Environnement : de la faisabilité technique à l'utilisation experte</i>	
Mireille Batton-Hubert, Aurelien Gentils	69

Systèmes d'information et bases de données

<i>Requêtes floues et SGBD relationnels : vers un couplage renforcé</i>	
Grégory Smits, Olivier Pivert, Thomas Girault	77
<i>Évaluation de réponses et guidage des apprenants dans un environnement d'apprentissage</i>	
Adil Haddi, A. Naji	85
<i>SYMPAS: A Database System for Managing Symbolic Preferences</i>	
Yazid Harizi, Allel Hadjali, Hamid Azzoune	95
<i>Projection extensionnelle pour la réduction d'un treillis de concepts formels flous</i>	
Hakim Radja, Yassine Djouadi	103

Classification, reconnaissance des formes et analyse de données

<i>Fusion d'Informations pour la Classification Multi-capteurs, Multi-cibles</i>	
Samir Hachour, François Delmotte, David Mercier, Eric Lefèvre	111
<i>Classification multi-label par fonctions de croyance</i>	

Roula Nassif, Sébastien Destercke, Mylène Masson	119
<i>Prédictions multilabel partielle: une première étude utilisant les KNN évidentiels</i>	
Rania Kallel, Sébastien Destercke, Boutheina Ben Yaghlane.....	127
<i>Optimisation de la paramétrisation pour la reconnaissance floue des signaux de parole</i>	
Ines Ben Fredj, Kais Ouni	129

Recherche opérationnelle, aide à la décision et aspects mathématiques

<i>Traitement de l'incertitude à l'aide des relations de préférence dans une méthode de décision multicritères</i>	
Amel Ennaceur, Zied Elouedi, Eric Lefevre	137
<i>Sur des classes de fonctions à seuil caractérisables par des contraintes relationnelles</i>	
Miguel Couceiro, Erko Lehtonen, Karsten Schölzel	145
<i>Fonctions d'agrégation barycentriquement associatives</i>	
Jean-Luc Marichal, Bruno Teheux	153

Commande

<i>Modélisation TS sous forme descripteur et commande d'un pendule inversé à deux roues</i>	
Benyamine Allouche, Laurent Vermeiren, Antoine Dequidt, Michel Dambrine	155
<i>Alternative SOS aux conditions LMI pour la synthèse de lois de commande non-PDC pour les modèles flous T-S</i>	
Chinh Cuong Duong, Kevin Guelton, Nouredine Manamanni	163
<i>Contrôleur flou Takagi-Sugeno pour une assistance à la conduite</i>	
Boussaad Soualmi, Chouki Sentouh, Jean-Christophe Popieul, Serge Debernard.....	171
<i>PI-flou avec une seule entrée pour la commande sans capteur mécanique du MAS exceptée de la rotation directe de Park</i>	
Abdesslam Lokriti, Issam Salhi, Said Doubabi	179
<i>Commande basée sur observateur des débits d'air d'un moteur diesel par l'approche floue de type T-S</i>	
Ines Abidi, Jérôme Bosche, Ahmed El Hajjaji	187
<i>Modélisation et Contrôle Flou du Système d'Air d'un Moteur Essence avec Turbocompresseur</i>	
Tran Anh Tu Nguyen, Jimmy Lauber, Michel Dambrine	195
<i>Commande floue décentralisée pour une classe de systèmes interconnectés en réseau</i>	
Chedia Latrach, Mourad Kchaou, Ahmed El Hajjaji, Abdelhamid Rabhi.....	203
<i>Commande Multi-Actionneurs du Châssis en Situations Critiques Par l'Approche Takagi-Sugeno</i>	
Hamid Dahmani, Olivier Pagès, Ahmed El Hajjaji	211
<i>Fuzzy logic techniques for Cybercars: a control and decision approach</i>	
Oriana Rojas Michelena, Joshué Pérez Rastelli, Fawzi Nashashibi	214
<i>Delay-Dependent Approach to Robust H^∞ control and Stabilization Analysis for Uncertain Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with State and Input Time-Delays</i>	
Fayçal Bourahala, Farid Khaber	225

Fouille de données

<i>Interprétation possibiliste d'une analyse de sentiments multicritère pour un système de recommandation sur le web</i>	
Abdelhak Imoussaten, Benjamin Duthil, François Trouset, Jacky Montmain.....	233
<i>Mesures d'adéquation entre vocabulaire expert et structure de données</i>	
Marie-Jeanne Lesot, Grégory Smits, Olivier Pivert.....	243
<i>Caractérisation de motifs graduels par des clauses du type "surtout si"</i>	
Amal Oudni, Marie-Jeanne Lesot, Maria Rifqi	251
<i>Données multidimensionnelles floues et Graphe de similarité</i>	
Afshan Nourizadeh, Frédéric Blanchard, Brigitte Delemer, Michel Herbin	259
Index par auteurs	267

Une petite histoire de la commande floue. Y voit-on plus clair ?

Thierry-Marie Guerra

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, LAMIH UMR CNRS 8201

Le mont Houy, 59313 Valenciennes, France, guerra@univ-valenciennes.fr

Résumé

Après avoir passé plus de 20 ans (déjà !) dans le domaine de la commande floue, je propose de faire un retour en arrière et de passer en revue plus de 30 ans de recherche dans ce domaine ; du début historique de la commande floue et des approches de type Mamdani (figure 1) aux développements plus récents basés sur les modèles de Takagi-Sugeno (ou quasi-LPV).

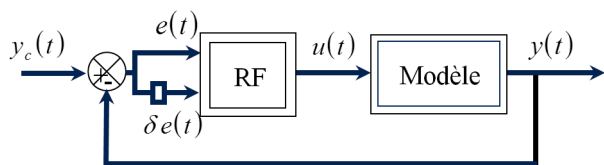


Fig. 1 : le régulateur flou « historique »

Ces travaux pionniers – malgré un succès certain en termes d’applications, plus de 5000 recensées en 1995 (Jamshidi 1995) – ont souffert du manque de propriétés mathématiques chères aux automaticiens disons « classiques » que sont par exemple la stabilité de la boucle, la robustesse paramétrique, les performances, qu’elles soient de type pôles de la boucle fermée ou H2, Hinf. En France dans les années 90 les automaticiens s’y sont intéressés. Notamment au travers d’un groupement Commande Symbolique et Neuro-mimétique du GDR MACS CNRS animé par les professeurs Laurent Foulloy et André Titli. Ce dernier a donné lieu à deux livres dans la collection IC2, Hermès éditeur en 2003.

L’évolution a principalement consisté en 2 parties distinctes. Premièrement, n’importe quelle technique basée sur un modèle non linéaire peut être appliquée sur un modèle flou : linéarisation par retour d’état, commande

prédictive, techniques basées sur l’inverse du modèle ... La seconde qui s’est avérée beaucoup plus riche est de disposer d’une commande qui profite de la structure floue du modèle. C’est principalement l’école japonaise – Takagi, Sugeno, Kang, Tanaka, Taniguchi ... qui en est à l’origine. Ils ont introduit et travaillé sur les modèles appelés couramment aujourd’hui Takagi-Sugeno (TS) illustrés ci-après :

If $z_1(t)$ is F_i^1 and ... and $z_p(t)$ is F_i^p

$$\text{Then } \begin{cases} x_i(t+1) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (1)$$

Munis d’une propriété d’approximateurs universels (Castro and Delgado, 1996), ils permettent de modéliser (Tanaka et Wang 2001, Taniguchi et al. 2001) et/ou d’identifier (Babuska 1998, Margaliot and Langholz, 2003, Gasso et al., 2001) de nombreux modèles non linéaires.

Les approches utilisent des fonctions dites de Lyapunov et le potentiel offert par la résolution de problèmes sous contraintes LMI (Linear Matrix Inequality). Ils rejoignent ainsi les outils historiques des automaticiens « classiques » et le flou perd un peu de son « âme ». On peut s’apercevoir maintenant que les communautés se rapprochent et que les publications se croisent.

En parallèle, la commande adaptative a connu un bel essor (Wang 1993). Elle suppose en général une forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{x}_n = f(x) + g(x)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2)$$

avec $x^T = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad \dots \quad x_1^{(n-1)}]$

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont connus une loi idéale est :

$$u = \frac{1}{g(x)} (-f(x) + y_m^{(n)} + k^T e) \quad (3)$$

avec y_m la référence à poursuivre.

Cette loi étant par essence inconnue, on peut soit l'approximer par un système flou (commande directe) soit approximer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ par 2 systèmes flous (commande indirecte).

Il est difficile d'évaluer quel est l'apport réel du « flou » dans toute cette littérature. Néanmoins il n'est pas négligeable. Aujourd'hui, il semblerait que les pays asiatiques sont les plus intéressés par ces approches (Chine, Taiwan, Corée du Sud, Japon). L'essence même du « flou » s'est perdue en cours de route et les notions d'incertain et d'imprécis ne sont plus exploitées.

Des pistes ont été testées avec plus ou moins de succès (à mes yeux) : neuro-flou, ensembles flous de type II, extension des approches par intervalles à des approches par ensembles flous ...

Enfin, quelques applications développées au cours des années au LAMIH seront présentées : pendule inversé, véhicule à 2 roues, moteur thermique, contrôle du rythme cardiaque

Quelques repères bibliographiques dans une production foisonnante :

- [1] R. Babuška, Fuzzy Modeling for Control, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1998.
- [2] Feng G., 2006. A Survey on Analysis and Design of Model-Based Fuzzy Control Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 14 (5), pp. 676-697.
- [3] Feng G., 2004. Stability analysis of discrete-time fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 12 (1), pp. 22-28.
- [4] Gasso K., Mourot G., Ragot J., 2001. Structure identification in multiple model representation: elimination and merging of local models, IEEE CDC, Orlando, FL, USA.
- [5] Guelton K., Bouarar T., Manamanni N., 2008. Fuzzy Lyapunov LMI based output feedback stabilization of Takagi-Sugeno systems using descriptor redundancy, IEEE World Congress on Computational Intelligence, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Hong Kong.
- [6] Guerra T.M., Vermeiren L., 2004. LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form, Automatica, 40 (5), pp. 823-829.
- [7] Hellendoorn H., Driankov D. (Eds.), Fuzzy Model Identification: Selected Approaches, Springer, Berlin, Germany, 1997.
- [8] Holmblad L.P., Ostergaard J.J., Control of a cement kiln by fuzzy logic, in: M.M. Gupta, E. Sanchez (Eds.), Fuzzy Information and Decision Processes, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 398-409.
- [9] Johansson M., Rantzer A., Arzen K., 1999. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 7, pp. 713-722.
- [10] Kruszewski A., Wang R., Guerra T.M., 2008. Non-quadratic stabilization conditions for a class of uncertain non linear discrete-time T-S fuzzy models: a new approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 53 (2), pp. 606-611.
- [11] Ma X.J., Sun Z.Q., He Y.Y., 1998. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 6 (1), pp. 41-50.
- [12] Mamdani E.H., Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems, Fuzzy Sets Systems 26 11 (1977) 1182-1191.
- [13] Mamdani E.H., Assilian S., An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, Internat. J. Man-Machine 13 Stud. 7 (1975) 1-13.
- [14] Margaliot M., Langholz G., 2003. A new approach to fuzzy modeling and control of discrete-time systems, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 11, pp. 486-494.
- [15] Oh S.-K., Pedrycz W., Rho S.-B., Ahn T.-C., Parameter estimation of fuzzy controller and its application to inverted pendulum, Eng. Applic. Artif. Intelligence 17 (1) (2004) 37-60.
- [16] Ordóñez R., Passino K.M., Stable multi-input multi-output adaptive fuzzy/neural control, IEEE Trans. Fuzzy Systems 7 21 (3) (1999) 345-353.
- [17] Rhee B.J., Won S., 2006. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design, Fuzzy Sets and Systems, 157 (9), pp.1211-1228.
- [18] Sala A., Ariño C., 2007. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem, Fuzzy Sets and Systems, 158, pp. 2671-2686.
- [19] Sala A., Guerra T.M., Babuska R., 2005. Perspectives of fuzzy systems and control, Fuzzy Sets and Systems, 156, pp. 432-444.
- [20] Takagi T., Sugeno M., 1985. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control, IEEE transaction on System Man and Cybernetics, 15 (1), pp.116-132.
- [21] Tanaka K., Wang H.O., 2001. Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach. John Wiley and Sons, New York.

- [22] Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O., 1998. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, (2), pp. 1-16.
- [23] Taniguchi T., Tanaka K., Wang H.O., 2001. Model construction, rule reduction and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 9 (4), pp. 525-537.
- [24] Tuan H.D., Apkarian P., Narikiyo T., Yamamoto Y., 2001. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 9 (2), pp. 324-332.
- [25] Wang L.X., Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems, IEEE Trans. Fuzzy Systems 1 (2) (1993) 146–154.
- [26] Yoneyama J., Nishikawa M., Katayama H., Ichikawa A., 2000. Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems, Fuzzy Sets and Systems, 111, pp. 253-266.

Biographie :



Thierry Marie Guerra est né à Mulhouse en 1963. Depuis 1999, il est professeur 61^{ème} section CNU à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (UVHC). Il a obtenu son doctorat en 1991 et son HDR en 1999. Il est actuellement directeur du Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et

d'Informatique industrielles et Humaines Unité Mixte de Recherche CNRS/UVHC 8201 (LAMIH site <http://www.univ-valenciennes.fr/LAMIH/>) composé de 95 E-C et personnel d'accompagnement à la recherche et de 80 docs et post docs.

A l'IFAC (International Federation of Automatic Control) il est vice-chair du comité technique TC 3.2 : « Computational Intelligence in Control » et membre du TC 7.1 : « Automotive Control ». Il est également Area Editor des revues internationales Fuzzy Sets and Systems et IEEE Transactions on Vehicular Technology. Ses principaux centres d'intérêt sont : la commande et l'observation des systèmes plus particulièrement les systèmes LPV, quasi-LPV ou Takagi-Sugeno, mais aussi le vin, le rock et la littérature. En termes applicatifs, il s'intéresse aux chaînes de traction – moteur thermique, motorisation hybride, pile à combustibles – et aux applications orientées vers les personnes à mobilité réduite (PMR).

Apprentissage flou en environnement dynamique

Fuzzy Learning in Dynamical Environment

Christophe Marsala

UPMC Univ Paris 06, UMR 7606

LIP6, 4 place Jussieu, 75005, Paris

Christophe.Marsala@lip6.fr

Résumé :

Les environnements dynamiques sont de plus en plus présent dans notre société et offrent de nouveaux défis pour l'apprentissage automatique.

Nous nous plaçons ici dans un domaine où les données d'apprentissage sont fournies séquentiellement, voire temporellement, en un flux continu. Dans de tels environnements, les données dynamiques qui permettent de constituer les bases d'apprentissage peuvent être de plusieurs formes : données temporelles provenant de séries chronologiques, ou données résultant de mesures périodiques du phénomène étudié. Par exemple, on peut citer une série d'articles publiés dans des journaux en ligne (chaque document est alors décrit au moyen des thématiques ou des mots qui le constituent et qui évoluent au fil de l'actualité).

Toutefois, les évolutions dynamiques de ces données ne sont pas uniques et peuvent conduire à différents traitements. Par exemple, en apprentissage supervisé, la dynamique peut produire différents effets selon que le flux de données apporte une plus grande précision sur les frontières entre les classes, ou que les limites entre les classes évoluent au fil du temps : elles peuvent alors se déplacer dans l'espace de description, apparaître ou disparaître (ce peut être le cas lorsque la description des données évolue dans le temps comme dans l'exemple des journaux en ligne) [1, 3, 5].

Ainsi, de telles évolutions (on parle de "concept drift" ou de "concept shift" par exemple) gagnent à être prises en compte grâce à des approches d'apprentissage automatique flou [2] et, en particulier, par des approches par arbres de décision flous [4].

Mots-clés :

Apprentissage automatique flou. Systèmes adaptatifs.

Abstract:

Dynamical environments are more and more present in our society and offer a challenge for fuzzy machine learning. We place ourselves in a domain where the training data are provided sequentially, in a flow. In such environments, dynamic data that make up evolving training sets can be of several forms : temporal data coming from time series, or data resulting from periodical measurements of a studied phenomenon that evolves over time as, for instance, a set of papers published on online newspapers (each paper is described by means of the topics or words that evolve over time in the description space).

However, dynamic evolutions of such data are not unique

and can lead to different ways to handle them. For instance, in supervised learning, dynamicity occurs either when the flow of data provide more precision on the boundaries between the classes, or when the boundaries between the classes change over time: they could move in the description space, appear, or disappear (it could be the case when the description of the data evolve over time as in the online newspaper example) [1, 3, 5].

Thus, such concept drifts or shifts have to be handled and fuzzy machine learning [2] offers adequate tools in that task. In particular, fuzzy decision tree based learning is a promising approach for that task [4].

Keywords:

Fuzzy Machine Learning, Evolving Systems.

Références

- [1] P. Domingos and G. Hulten. Mining high-speed data streams. In *Proceedings of the KDD'00 Conference*, pages 71–80, 2000.
- [2] E. Hüllermeier. Fuzzy sets in machine learning and data mining. *Applied Soft Computing*, 11(2) :1493–1505, March 2011.
- [3] E. Lughofer and P. Angelov. Handling drifts and shifts in on-line data streams with evolving fuzzy systems. *Applied Soft Computing*, 11(2) :2057 – 2068, 2011.
- [4] C. Marsala. Fuzzy decision trees for dynamic data. In *IEEE Symposium on Evolving and Adaptive Intelligent Systems - EAIS'2013*, IEEE Symposium Series on Computational Intelligence, page to appear, Singapore, Apr. 2013.
- [5] G. Widmer and M. Kubat. Learning in the presence of concept drift and hidden contexts. *Machine Learning*, 23 :69–101, 1996.

Vision possibiliste de l'estimation du paramètre d'une loi binomiale

Possibilistic view of binomial parameter estimation

Gilles Mauris

Laboratoire d'Informatique, Systèmes, Traitement de l'Information et de la Connaissance, LISTIC.
Polytech'Savoie, Domaine Universitaire, BP 80439, 74944 Annecy Le Vieux Cedex, France, mauris@univ-savoie.fr

Résumé :

Cet article s'intéresse aux fondements possibilistes de l'estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi binomiale. Nous montrons que les méthodes probabilistes usuelles consistent à obtenir des intervalles de confiance modélisant une incertitude *de dicto* à partir d'intervalles de dispersion modélisant l'incertitude *de re* des échantillons observés. Nous relient les différents types d'intervalles de dispersion à des distributions de possibilité *de re* équivalentes, qui par inversion donnent des distributions de possibilité *de dicto* correspondantes à l'empilement des intervalles de confiance du paramètre pour tous les niveaux. Les différents choix pour le centre des intervalles conduisent aux différentes méthodes existantes et une nouvelle que nous illustrons.

Mots-clés :

Théorie des possibilités, estimation de paramètre, loi binomiale, intervalles de dispersion et de confiance

Abstract:

This paper deals with the possibility roots of binomial parameter interval estimation. It shows that conventional probability methods consist to obtain confidence intervals representing *de dicto* parameter uncertainty from dispersion intervals representing *de re* uncertainty of observed samples. We relate the different types of dispersion intervals to equivalent *de re* possibility distributions those lead after inversion to *de dicto* possibility distributions corresponding to the stacking up of all confidence intervals at all levels. The different choice for the centre of the intervals corresponds to different existing methods and a novel one which are illustrated.

Keywords:

Possibility theory, binomial parameter estimation, dispersion intervals, confidence intervals.

1 Introduction

La première loi introduite en probabilités [1] est la loi de Jacques Bernoulli qui est une loi discrète fort simple, puisqu'elle ne peut prendre que deux valeurs 0 (échec) ou 1 (succès). Par convention on note p la probabilité que la variable prenne la valeur 1. Si l'on réitère n fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, et que nous

définissons la variable aléatoire S_n correspondant à la somme des succès, celle-ci suit une loi binomiale notée $Bin(n,p)$. Cette loi binomiale présente un intérêt considérable pour la statistique dans le sens où elle joue un rôle important dans bon nombre de problèmes pratiques de jugements à partir d'échantillons, *e.g.* contrôle du nombre de pièces défectueuses dans une production, tests médicaux et biologiques, analyses démographiques, sondages d'opinion, jeux, L'estimation du paramètre p de la loi binomiale, au-delà de son intérêt pratique, est de plus fondamentale dans la définition même de la probabilité. En effet, l'estimation de p est à la base de la justification de l'estimation d'une probabilité inconnue par la fréquence de réalisation observée sur un grand échantillon, et ce grâce à la loi faible des grands nombres établie par Jacques Bernoulli [1]. En conséquence, il est important de s'intéresser, aussi bien d'un point de vue théorique que pratique, à ce que peut proposer la théorie des possibilités [2][3] pour l'estimation du paramètre d'une loi binomiale. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cet article en considérant les approches probabilistes existantes sous un angle possibiliste, à partir de transformations probabilités/possibilités [4][5][6], identifiant les intervalles de dispersion d'une distribution de probabilité aux alpha-coupes d'une distribution de possibilité, pour ensuite proposer une nouvelle méthode d'estimation centrée sur la moyenne observée.

Dans un premier temps, nous reviendrons sur les notions de base des probabilités et des possibilités en mettant en avant le fait que l'estimation du paramètre p , qui est fixe mais inconnu, est caractérisée par une incertitude de type *de dicto* (car elle porte sur une

connaissance [7]) qui d'une manière ou d'une autre se déduit d'une incertitude de type *de re* (car elle porte sur le réel observé) issue des échantillons. Dans un deuxième temps, nous présenterons les approches les plus utilisées pour construire les intervalles de confiance du paramètre p d'une loi binomiale [8][9] en en proposant une vision possibiliste. Puis nous exposerons une nouvelle méthode basée sur des intervalles de dispersion asymétriques centrés sur la moyenne (qui est l'estimation la plus vraisemblable du paramètre)

Nous concluons sur le cadre unificateur proposé par la vision possibiliste des approches probabilistes existantes, ainsi que les nouvelles méthodes d'estimation qu'elles suggèrent.

2 Notions fondamentales

Dans cette section, nous présentons d'abord de manière intuitive les concepts fondamentaux de l'estimation d'une proportion déjà présents dans les travaux des pionniers. Puis nous en proposons des définitions modernes formelles pour finalement les relier à la notion de distribution de possibilités.

2.1 Phénomène de concentration d'une loi de probabilité

L'estimation du paramètre p de la loi binomiale est à la base de la justification de l'estimation d'une probabilité inconnue par la

fréquence observée $F_n = \frac{S_n}{n}$ sur un grand échantillon n , et ce grâce à la loi faible des grands nombres établie par Jacques Bernoulli dès l'origine des probabilités [1].

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Ce théorème traduit le phénomène de concentration de la loi de probabilité qui permet en statistique d'obtenir de l'information, voire des quasi-certitudes, à partir d'observations aléatoires. En effet le phénomène de concentration s'accroît quand n augmente. Dit autrement plus n augmente plus les fluctuations de F_n autour de p sont faibles. Considérons par exemple les variables

aléatoires $S_1 = \text{Bin}(25, 0.4)$, $S_2 = \text{Bin}(100, 0.4)$ et $S_3 = \text{Bin}(100, 0.8)$ représentées sur la figure 1.

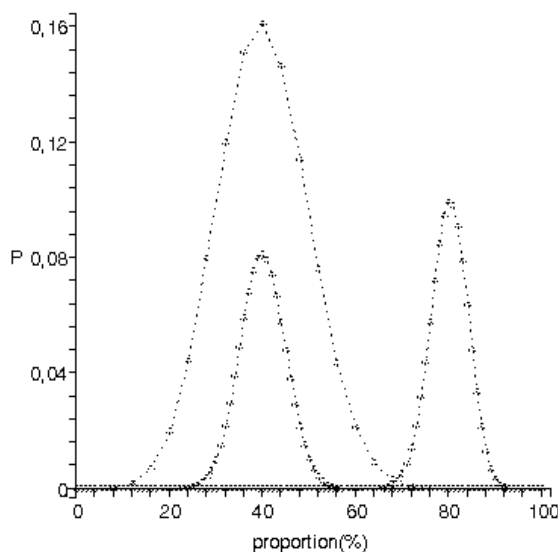


Figure 1. Illustration de la concentration d'une loi

Nous pouvons remarquer visuellement que $P(20\% \leq F_2 \leq 60\%) \approx 1$ et $P(70\% \leq F_3 \leq 90\%) \approx 1$

Ainsi, si avant d'observer une valeur de S_2 ou de S_3 , on parie qu'elle va tomber dans l'intervalle $[20, 60]$, on est presque sûr de gagner en misant sur S_2 et presque sûr de perdre en misant sur S_3 . Si nous modifions l'intervalle, par exemple $[35, 45]$, nous obtenons $P(35 \leq S_2 \leq 45) \approx 0.6$, et nous prenons un risque de se tromper en misant sur S_2 .

2.2 Incertitude *de re* et *de dicto*

Nous voyons à travers l'exemple précédent que la concentration de la probabilité sur un intervalle court (relativement à la longueur du support) permet de faire dans un sens direct de la prévision (généralement avec un certain risque) à partir des observations. Elle permet aussi en sens inverse de traiter des situations plus complexes, mais plus proches de problèmes réels, c'est-à-dire l'estimation d'un paramètre p fixe mais inconnu. Cette fois le problème est de déterminer p après avoir observé par exemple $S_{obs} = 40$ dans 100 tirages. Il est clair que $p = 0.4$ est fortement vraisemblable et que $p = 0.8$ l'est très peu (cette formulation correspond à la notion de

tests statistiques). Nous sommes donc très confiant dans le fait que $p \in [0.2; 0.6]$ (cette formulation correspond au concept d'intervalles de confiance). Plus la loi est concentrée plus les intervalles de dispersion sont étroits et plus les intervalles de confiance sont étroits. A la limite pour un nombre infini d'observations il n'y a plus de fluctuations de la proportion F_n (qui devient ainsi une distribution de Dirac), et on peut déduire avec complète certitude que F_n exprime la loi déterminée suivant laquelle l'événement se produit. Cette idée que le concept d'intervalle de confiance est relié à la concentration de la loi est en fait déjà présente (mais pas encore formalisée) dans l'œuvre de J. Bernoulli [1]. Ces considérations permettent de mettre le doigt sur un point fondamental : l'estimation du paramètre p , qui est fixe mais inconnu, est caractérisée par une incertitude de type *de dicto* (car elle porte sur une connaissance [7]) qui d'une manière ou d'une autre se déduit d'une incertitude de type *de re* (car portant sur le réel observé) issue des échantillons.

2.3 Définitions formelles des notions précédentes

Revenons tout d'abord sur la notion de variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) qui se définit comme $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto X$ telle que : $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ soit une partie au plus dénombrable de \mathbb{R} et que : $\forall x_k \in X(\Omega), A_k = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\}$ fait partie de la famille d'événements \mathcal{F} auxquels on peut attribuer une probabilité par P ; $X(\omega) = x_k$ est une réalisation de la variable aléatoire

L'application X permet de transporter la probabilité P de Ω sur \mathbb{R} : on considère les $P(X = x_k)$ comme des masses ponctuelles situées aux points x_k de la droite réelle. La probabilité d'une partie quelconque de \mathbb{R} est alors définie comme la somme de ses masses ponctuelles. On appelle loi de la variable aléatoire X la fonction d'ensemble P_X définie par : $p_k = P_X(\{x_k\}) = P(A_k) = P(X = x_k)$

Notons que deux variables aléatoires peuvent avoir même loi sans être égales.

Comme nous l'avons vu précédemment, Les réalisations d'une variable aléatoire fluctuent, ce qui peut aussi s'exprimer par le fait que les valeurs observées sont dispersées ; connaître les intervalles dans lesquelles elles sont contenues en grande partie est donc une information importante, d'où la notion d'intervalle de dispersion de niveau $1-\alpha$ ($\alpha \in [0,1]$) d'une variable aléatoire X défini comme tout intervalle de la forme $[G_X^{-1}(\beta), G_X^{-1}(\beta+1-\alpha)]$ où G_X^{-1} est la fonction inverse de la fonction de répartition de X (appelée aussi fonction quantile). Ces intervalles ne sont pas uniques, les différents choix possible pour $\beta \in [0,1]$ donnent lieu à différents types d'intervalles de dispersion : unilatéral inférieur ($\beta = 0$), unilatéral supérieur ($\beta = \alpha$), bilatéral ($\beta = \frac{\alpha}{2}$). Généralement ils

sont construits autour de points définissant une valeur « centrale » telle la moyenne, le mode, la médiane. Les intervalles de dispersion sont parfois également appelés intervalles de pari (comme illustré en 2.1) ou aussi intervalles de prévision, car comme un intervalle de dispersion de niveau $1-\alpha$ contient $(1-\alpha)\%$ des données, il y a $(1-\alpha)\%$ de chance qu'une donnée tirée de cette distribution tombe dans cet intervalle.

Si la variable aléatoire suit une loi binomiale $Bin(n,p)$, les intervalles de dispersion centrés sur p sont appelés dans les programmes de lycée intervalles de fluctuation. Notons que les intervalles de fluctuation n'existent pas forcément pour tous les niveaux (en raison du caractère discret des réalisations).

Pour conclure sur les intervalles de dispersion, soulignons la nature déterministe de ces intervalles (les bornes sont fixes) et la nature *de re* de l'incertitude qu'ils véhiculent, en effet ils sont un reflet de la fluctuations des observations (due au phénomène ou à la manière de l'observer). En conséquence augmenter le nombre d'observation ne réduit pas cette incertitude mais permet simplement

d'en avoir une représentation plus en accord avec la réalité observée.

La notion d'intervalles de confiance est elle beaucoup plus délicate car elle a pour but de définir l'incertitude d'un paramètre fixe mais inconnu, et donc correspond à une incertitude *de dicto* (sur la connaissance que l'on déclare sur p). Une difficulté mathématique provient du fait que quand la proportion p est inconnue, de quelle probabilité P pouvons nous munir l'espace $(\Omega_n = \{0,1\}^n, \mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n})$. En fait, nous ne

pouvons considérer que toute une famille $(P_p)_{p \in [0,1]}$ de lois de probabilité définie par

$$P_p(\{\omega\}) = p^{S_n(\omega)}(1-p)^{n-S_n(\omega)}$$

Nous obtenons ainsi ce que l'on appelle un modèle statistique : $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, (P_p)_{p \in [0,1]})$ avec pour chaque $p \in [0,1]$ la loi de S_n sous P_p qui suit une loi binomiale $Bin(n,p)$.

Nous pouvons alors définir les intervalles de confiance théoriques de la manière suivante.

Soient $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, (P_p)_{p \in [0,1]})$ un modèle statistique et

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon associé au modèle, on appelle intervalle de confiance de confiance théorique pour p de niveau de confiance au moins $1-\alpha$, tout intervalle fermé dont les bornes sont des variables aléatoires vérifiant [8]:

$$\inf_{p \in [0,1]} P_p(L(X) \leq p \leq U(X)) \geq 1-\alpha$$

Il est important de remarquer que la fonction

$$\inf_{p \in [0,1]} P_p \text{ définie sur } \mathcal{F}_n \text{ par } A \mapsto \inf_{p \in [0,1]} P_p(A) \text{ n'est}$$

pas en général une probabilité, c'est pour cela que l'on parle de niveau de confiance et pas de niveau de probabilité (nous verrons après que ce niveau peut être relié à la notion de nécessité/possibilité). Ensuite quand nous remplaçons la variable aléatoire X par sa réalisation on obtient pour p des intervalles de confiance réalisés ou numériques $([L(f_n), U(f_n)])$ (f_n est la proportion observée) dont les bornes sont déterministes, et l'événement $p \in [L(f_n), U(f_n)]$ est soit faux soit vrai, mais n'est pas l'objet de fluctuation et donc n'a pas de probabilité au sens fréquentiste. En fait l'intervalle de confiance

théorique est une procédure (ou un estimateur) qui, si on la réitère de manière infinie, a l'avantage de satisfaire un taux de succès au moins égal au niveau de probabilité. Par exemple il est possible de dire avant l'observation que pour 100 intervalles de confiance de niveau de 90% réalisés dans des conditions identiques, 90 contiendront le paramètre inconnu. Mais ce qui nous intéresse c'est d'avoir une information sur l'incertitude de p après l'observation, c'est-à-dire une fois obtenu un intervalle de confiance réalisé $p \in [L(f_n), U(f_n)]$. De fait cet intervalle de confiance réalisé véhicule une incertitude *de dicto*. Il nous paraît logique de transférer l'incertitude de l'intervalle de confiance théorique (i.e. le niveau de confiance) sur l'intervalle de confiance réalisé car la réalisation en elle même (en l'absence d'autres informations) ne change pas selon nous le degré de probabilité (subjectif ici mais identifié à la probabilité objective que l'intervalle aléatoire contienne le paramètre) de l'événement $p \in [L(f_n), U(f_n)]$. Ce transfert est cohérent avec l'idée de pari (évoqué précédemment) à la base des probabilités subjectives. Si nous sommes prêts à parier à 90 euros contre 10 euros qu'un intervalle aléatoire de niveau 90% contient le paramètre p inconnu, nous sommes également prêts à parier que le paramètre inconnu est dans l'intervalle réalisé à 90%. Nous retrouvons aussi l'idée de prévision véhiculé par un intervalle de confiance réalisé.

Pour conclure sur les intervalles de confiance, soulignons la nature aléatoire des intervalles théoriques (les bornes sont des variables aléatoires) et la nature *de dicto* de l'incertitude (obtenue par transfert) que véhiculent les intervalles de confiance réalisés, en effet ils sont un reflet de l'incomplétude de la connaissance de p qui provient du nombre limité et de la fluctuation des observations. En conséquence on peut espérer réduire cette incertitude sur la connaissance de p en augmentant le nombre d'observations.

Pour conclure sur cette sous-section, qui nous l'espérons aidera le lecteur à mieux comprendre les notions évoquées, signalons qu'au-delà des aspects notations et langage, un problème sérieux d'interprétation « probabiliste » subsiste au niveau des intervalles de confiance. Nous pensons comme nous l'exposons ci-après qu'une vision possibiliste de ces notions peut aider à mieux les comprendre et à réconcilier les points de vue historiques et actuels.

2.4 Liens avec les distributions de possibilités

Notions de base de la théorie des possibilités

Une distribution de possibilité π est (dans le contexte de grandeurs mesurables) une application de l'ensemble des parties de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ telle que : $\sup_{x \in R} \pi(x) = 1$. Un degré de possibilité $\pi(x)$ égal à 1 exprime l'absence de surprise sur le fait que la valeur x soit la valeur de la variable considérée. Une distribution de possibilité génère deux fonctions d'ensembles non-additives [4] : une mesure de possibilité Π et une mesure de nécessité N .

$$\forall A \subset R, \Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) \text{ et}$$

$$\forall A \subset R, N(A) = 1 - \Pi(\bar{A}) = \inf_{x \notin A} (1 - \pi(x))$$

La mesure de possibilité Π vérifie :

$$\forall A, B \subset R, \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$$

La mesure de nécessité N vérifie :

$$\forall A, B \subset R, N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$$

Une notion importante est la spécificité d'une distribution de possibilité qui renseigne sur sa qualité informative.

Définition: une distribution de possibilité π_1 est dite plus spécifique qu'une distribution π_2 (c'est à dire plus fine) si et seulement si : $\forall x \in R, \pi_1(x) \leq \pi_2(x)$.

Si $\pi(x) = 1$ pour une seule valeur de x et $\pi(y) = 0$ pour toutes les valeurs $y \neq x$, alors π est complètement spécifique (cas totalement précis); si $\pi(x) = 1$ pour toutes les valeurs x alors π est complètement non spécifique (cas

d'ignorance totale). En fait, un degré de possibilité peut être vu comme une borne supérieure d'un degré de probabilité. Plus précisément, à chaque distribution de possibilité π , on peut associer une famille non vide de mesures de probabilités $\mathcal{P}(\pi)$ dominées par la mesure de possibilité [4]:

$$\mathcal{P}(\pi) = \{P, \forall A, P(A) \leq \Pi(A)\}$$

Nous avons donc de cette manière un pont entre théorie des probabilités et théorie des possibilités.

Liens avec les intervalles de dispersion

Une distribution unimodale de possibilité π peut aussi être vue comme un ensemble d'intervalles emboîtés $[\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha]$ que sont les alpha-coupes de π : $[\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha] = \{x, \pi(x) \geq \alpha\}$.

Comme indiqué précédemment, pour une même distribution de probabilité et un même niveau de confiance, il est possible de construire différents types d'intervalles de dispersion suivant que l'une des bornes, ou le centre, ou un autre point de l'intervalle est imposé. Ainsi, un intervalle de dispersion peut être unilatéral supérieur ou inférieur, symétrique, centré sur la médiane,.... Il est dit optimum si son amplitude (la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure) est la plus petite parmi tous les intervalles de dispersion de même niveau. Dans tous les cas, une fois fixé le type, l'ensemble des intervalles de dispersion pour tous les niveaux de confiance forme un ensemble d'intervalles emboîtés. Et donc un sous-ensemble flou ayant une sémantique d'incertitude, c'est à dire vu comme une distribution de possibilités π en identifiant les α -coupes de π aux intervalles de dispersion de niveau $\beta = 1 - \alpha$. Cette approche a été utilisée dans nos travaux antérieurs [5][6], pour réaliser une transformation probabilité/possibilité.

Un résultat important est que pour toute variable aléatoire X ayant une fonction de répartition G , et pour tout point central c la distribution de possibilité définie par [6] :

$$\pi_x^{lc}(x) = G(x) + 1 - G(g(x)) = \pi_x^{lc}(g(x)) \text{ (avec}$$

$g : [-\infty, c] \rightarrow [c, +\infty]$ une application décroissante telle que $g(c) = c$ est unimodale de mode c et elle satisfait : $\forall A, \Pi_X^{lc}(A) \geq P_X(A)$

Si X est unimodale de densité f (i.e. strictement croissante avant le mode M et strictement décroissante après M) la distribution de possibilité optimale (au sens où elle est constituée des intervalles de dispersion optimaux, i.e. les plus courts) est obtenue par : $\forall x \in [-\infty, M], g(x) = \{y \geq M \mid p(x) = p(y)\}$.

Une nouvelle manière que nous proposons ici, pour construire une distribution de possibilité reliée aux intervalles de dispersion est :

$$\pi_x^{2c}(x) = \min\left(\frac{G(l(x))}{G(c)}, \frac{1-G(r(x))}{1-G(r(c))}, 1\right)$$

avec r et l des applications respectivement croissante et décroissante définies sur $[-\infty, c]$ et $[c, +\infty]$ et telles que $l(c) = r(c)$. La distribution de possibilité est unimodale de mode c et elle satisfait : $\forall A, \Pi_X^{2c}(A) \geq P_X(A)$.

Preuve: $\pi_x^{2c}(c) = 1$, si $A \supset c, \Pi_X^{2c}(A) = 1 \geq P_X(A)$; si

$$c \notin A, \sup(x \in A) < c \text{ alors } \pi_x^{2c}(x) = \frac{G(l(x))}{G(c)} \geq G(l(x))$$

car $G(c) < 1$ et donc $\Pi_X^{2c}(A) \geq P_X(A)$. Idem pour $\sup(x \in A) > c$.

Remarquons que si la distribution est symétrique autour de c (et $l(x) = r(x) = x$) :

$$\pi_x^{lc}(x) = \pi_x^{2c}(x) = \min(2G(x), 2(1-G(x))).$$

Liens avec les intervalles de confiance réalisés et les intervalles fiduciaires de Fisher

Les intervalles de confiance réalisés sont tels que $\inf_{p \in [0,1]} P_p(L(x) \leq p \leq U(x)) \geq 1 - \alpha$ c'est à dire

$$\inf_{p \in [0,1]} P_p([L(x), U(x)]) \geq 1 - \alpha, \text{ en conséquence}$$

le degré de confiance de l'intervalle de confiance réalisé est un degré de nécessité. Pour construire une distribution de possibilité, nous pouvons donc empiler les intervalles de confiance pour les tous les niveaux $\alpha \in [0,1]$. Si nous avons une famille d'intervalles de confiance réalisés emboîtés $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ $I_i \subset I_{i+1}, i = 1, \dots, m$, chaque I_i ayant un niveau de confiance λ_i défini comme un degré de nécessité alors l'expression de la distribution

de possibilités équivalent à cette famille est [10] (ce résultat s'étend au cas infini):

$$\pi_{X=x}(x) = \min_{i=1, \dots, m} \max(1 - \lambda_i, I_i(x)) \text{ où } I_i(x) \text{ est la}$$

fonction caractéristique de I_i . L'équation précédente exprime en fait la conjonction des distributions issues de chaque intervalle de confiance réalisé, et la distribution de possibilité correspond à la distribution la plus spécifique par rapport aux données disponibles. Une autre manière d'obtenir directement des intervalles de confiance déterministe est de considérer l'inférence de Fisher qui conduit aux intervalles fiduciaires [1]. L'idée de Fisher peut selon nous se traduire en considérant comme possible à un niveau donné toutes valeurs de p dont l'intervalle de dispersion à ce même niveau contient l'observation. Les intervalles fiduciaires sont donc clairement reliés par inversion aux intervalles de dispersion. Cette approche nous semble intellectuellement plus simple (que celle des intervalles de confiance réalisés). Dans de nombreuses situations (notamment pour les distributions croissantes avec le paramètre, ce qui est le cas pour la distribution binomiale) les intervalles de confiance réalisés sont égaux aux intervalles fiduciaires et donc nous ne creuserons pas plus avant ici les aspects controversés des inférences fréquentiste et fiduciaire.

3 Méthodes de construction des intervalles de confiance

Dans cette section nous rappelons d'abord quelques propriétés de la loi binomiale, puis nous présentons les méthodes les plus usuelles de construction des intervalles de confiance fiduciaires associées au paramètre p [9] sous l'angle possibiliste.

3.1 Propriétés de la loi binomiale

Nous noterons S_n la variable aléatoire associée à la répétition de n épreuves indépendantes et identiques de Bernoulli ayant une probabilité de succès p . S_n suit alors une loi binomiale $Bin(n, p)$ définie par : $P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Cette loi binomiale est asymétrique (sauf pour $p=0.5$) et a pour moyenne $E = np$. Si

$(n+1)p$ n'est pas entier la loi croît strictement sur $[0, \lfloor (n+1)p \rfloor]$ et décroît strictement sur $[\lfloor (n+1)p \rfloor, n]$. Elle a donc un seul mode $M = \lfloor (n+1)p \rfloor$, et la moyenne est égale au mode $E = M = np$. Si $(n+1)p$ est entier la loi croît strictement sur $[0, (n+1)p - 1]$ et décroît strictement sur $[(n+1)p, n]$; elle a donc deux modes $M = (n+1)p - 1$ et $(n+1)p$ et la moyenne $E = np \in [M - 1, M]$ n'est pas atteignable. Dans tous les cas la distance $|M - E| < 1$. La médiane est définie par $m = \lfloor np \rfloor$ ou $\lfloor np \rfloor \pm 1$. Le fait que les modes ou médianes n'ont pas la même expression pour toutes les valeurs de n et p est à l'origine de certains problèmes de monotonie après inversion des intervalles de dispersion.

3.2 Méthode de Wald-DeMoivre-Laplace

C'est la méthode dite standard qui est basée sur l'approximation par une loi normale de la loi binomiale (établie par Laplace sur la base de calculs de De Moivre). L'estimation \hat{p} (obtenue à partir des données) du paramètre p suit une loi normale $N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$, et donc $\hat{p} - p$ suit une loi normale de valeur moyenne nulle et d'écart type $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ (ici on a remplacé l'écart-type inconnu par son estimation, la méthode score de Wilson [10] garde le vrai écart-type). La variable aléatoire $\hat{p} - p$ constitue ce qui est appelé une fonction aléatoire pivotale car cette dernière ne dépend pas du paramètre inconnu p . A partir des intervalles de dispersion de cette fonction aléatoire pivotale, nous pouvons déduire facilement par inversion les intervalles de confiance de p . Notons que l'approximation par la loi normale est plus ou moins bonne et qu'elle ne garantit pas le niveau de confiance (cf. figure 2). Remarquons que c'est le fait qu'il n'existe pas de fonction pivotale (non asymptotique) pour les lois discrètes (alors que souvent elles existent pour les paramètres de lois continues) qui rend la construction d'intervalles de confiance plus difficile.

3.3 Méthode de Clopper Pearson

L'approche de Clopper-Pearson [9] consiste à inverser les intervalles de dispersion de type 2 avec pour centre la médiane. L'expression de la distribution de possibilité associée à une observation k (empilant les intervalles de confiance) est :

$$\pi^{CP}(p, k) = \min(2F_p(k/n), 2(1 - F_p(k/n)), 1)$$

Un point important est que cette distribution de possibilité est unimodale et continue mais elle n'est pas la plus spécifique. Pour améliorer la spécificité Blaker [9] a proposé d'inverser les intervalles de dispersion de type 1 qui sont discrets et inclus dans ceux de type 2 mais le mécanisme d'inversion peut (dans des situations assez peu fréquentes) donner une distribution de possibilité pour p qui n'est pas unimodale.

3.4 Méthodes de Wilson-Sterne, Crow et Clunies-Ross

Pour avoir l'information la plus spécifique, Wilson (1942) propose de considérer les intervalles de dispersion de type 1 autour du mode. Cette méthode est plus connue sous le nom de méthode de Sterne (1954) ou du minimum de vraisemblance [9]. En effet la distribution de possibilité pour p s'écrit

$$\pi^{St}(p, k) = F_p(k/n) + (1 - F_p(k'/n)), p \leq k/n$$

$$\pi^{St}(p, k) = F_p(k/n) + (1 - F_p(k''/n)), p \geq k/n$$

Cette approche conduit à une distribution discrète et ne garantit pas non plus d'avoir une distribution unimodale. Crow (1956) a proposé une modification qui empêche d'obtenir des intervalles disjoints après inversion mais elle aboutit à des intervalles de confiance non emboîtés. Clunies-Ross (1958) ont proposé simplement « de boucher les trous » entre les intervalles disjoints issus de l'inversion [9], conduisant ainsi à une distribution unimodale, mais qui en contrepartie est un peu moins spécifique.

3.5 Une « nouvelle » méthode

Dans le but d'avoir une distribution unimodale continue et construite autour de la moyenne observée (la valeur observée est l'estimation la plus vraisemblable du paramètre), nous

proposons d'inverser les intervalles de dispersion de type 2 autour de la moyenne. Nous obtenons ainsi l'expression suivante pour la distribution de possibilité.

$$\pi^{nouv}(p, k) = \min\left(\frac{2F_p(k/n)}{F_p(p)}, \frac{2(1-F_p(k/n))}{1-F_p(p)}, 1\right)$$

Les figures suivantes illustrent les cas où sur 10 tirages respectivement 8 et 5 succès ont été observés.

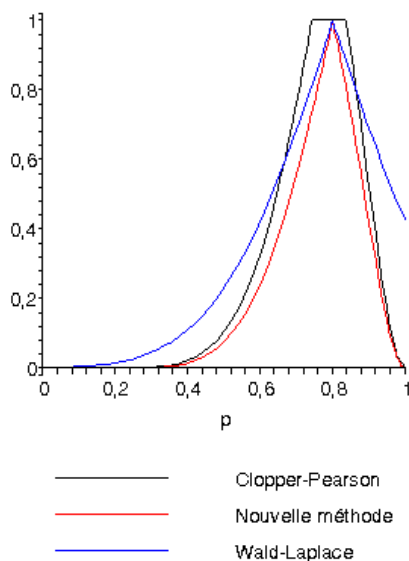


Figure 2. Distributions de possibilité pour 8 succès

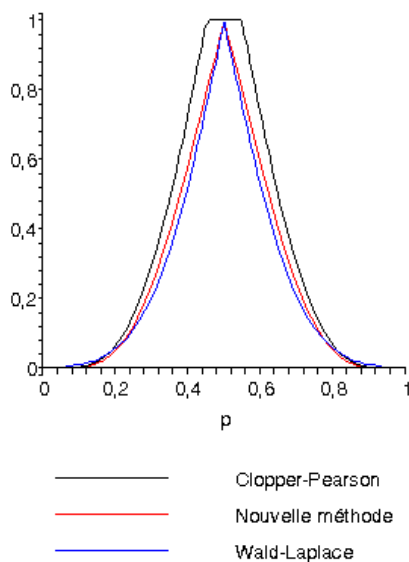


Figure 3. Distributions de possibilité pour 5 succès

4 Conclusion

Nous avons mis en évidence dans cet article la nature intrinsèquement possibiliste de l'estimation de paramètre par intervalles de confiance. Les méthodes probabilistes existantes reviennent à inverser les intervalles de dispersion construits autour de différents centres et qui peuvent être modélisés par une distribution de possibilité *de re*, pour obtenir une distribution de possibilité *de dicto* représentant les intervalles de confiance. Une nouvelle méthode basée sur une nouvelle transformation probabilité-possibilité centrée sur la moyenne observée d'une proportion d'une loi binomiale (qui correspond à l'estimation du maximum de vraisemblance) a été proposée. En perspective, l'approche bayésienne de l'estimation du paramètre d'une loi binomiale pourrait également être intégrée dans le cadre possibiliste proposé.

Références

- [1] A. Hald, *A History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713-1935*, Springer-Verlag, 2008, 175 pages.
- [2] L.A. Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1, No1, 1978, pp. 3-28.
- [3] D. Dubois, H. Prade, *Théorie des possibilités : application à la représentation des connaissances en informatique*, Edition Masson, 1985.
- [4] D. Dubois, H. Prade and S. Sandri, "On possibility/probability transformations", in: *Fuzzy Logic*, 1993, pp. 103-112.
- [5] G. Mauris, V. Lasserre and L. Foulloy, "A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement", *Int. Journal of Measurement*, Vol. 29, No 3, March 2001, pp. 165-177.
- [6] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris and H. Prade, "Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets and probabilistic inequalities", *Reliable Computing*, Vol. 10, No 4, 2004, pp. 273-297.
- [7] M. Boudot, "Probabilité et logique de l'argumentation selon Jacques Bernoulli", Dans *Philosophie et Logique*, Presses de l'Université Paris Sorbonne, 2009, pp. 15-37.
- [8] P. Tassi, *Méthodes Statistiques*, Economica, 3^{ème} Edition, Paris, 2004.
- [9] L. Brown, T. Tony Cai, A. DasGupta, "Interval estimation for a binomial proportion", *Statistical Science*, Vol. 16, No 2, 2011, pp. 101-133.
- [10] D. Dubois, H. Prade, "When upper probabilities are possibility measures", *Fuzzy Sets and Systems* 49, 1992, pp. 65-74.

Transformation probabilité-possibilité : Etude de l'inférence pour min-based possibilistic networks

Probability-Possibility transformation : Inference study for min-based possibilistic networks

Y. Ben Slimen

R. Ayachi

N. Ben Amor

yosra.benslimen@gmail.com

raouia.ayachi@gmail.com

nahla.benamor@gmx.fr

LARODEC, Institut Supérieur de Gestion Tunis 41 Avenue de la liberté, 2000 Le Bardo, Tunisie

Résumé :

La transformation probabilité-possibilité est une transformation purement mécanique d'un support probabiliste vers un support possibiliste et vice versa. Dans ce papier, nous appliquons les transformations les plus connues sur des modèles graphiques i.e. réseaux Bayésiens en réseaux possibilistes et vice versa. On montre que les transformations existantes ne sont pas appropriées pour transformer les réseaux Bayésiens en ceux possibilistes, puisqu'elles ne conservent pas l'information incorporée par les distributions jointes. C'est pourquoi, nous proposons deux nouvelles propriétés de cohérence applicables, exclusivement, pour la transformation des modèles graphiques. L'étude expérimentale montre l'impact de ces transformations sur les résultats de la propagation.

Mots-clés :

Transformation probabilité-possibilité, Réseaux Bayésiens, Réseaux possibilistes.

Abstract:

Probability-possibility transformation is a purely mechanical transformation of probabilistic support to possibilistic support and vice versa. In this paper, we apply the most common transformations to graphical models, i.e., Bayesian into possibilistic networks. We show that existing transformations are not appropriate to transform Bayesian networks to possibilistic ones since they cannot preserve the information incorporated in joint distributions. Therefore, we propose new consistency properties, exclusively useful for graphical models transformations. The experimental study highlights the impact of these transformations on inference results.

Keywords:

Probability-Possibility transformation, Bayesian networks, Possibilistic networks.

1 Introduction

Graphical models are important tools proposed for an efficient representation and analysis of uncertain information. The success of graphical representations is due to their capacity of representing and handling independence rela-

tionships, which have been proved to be crucial for an efficient management and storage of the information. Moreover, graphical models allow a local representation and reasoning easily supported by human mind. Bayesian networks [14] are studied under the broader class of probabilistic graphical models. For instance, the standard probability theory has proved its efficiency when all numerical data are available. But, this theory is not suitable when dealing with the case of total ignorance. This is particularly true in probabilistic Bayesian networks when missing data do not allow any valid treatment. So, when experts are unable to provide exact numerical values to quantify different links between variables, it would be better to switch to non-classical networks such as *possibilistic networks* [14]. These latter are the marriage between possibility theory and graph theory. In real world, we have a huge number of possibilistic benchmarks that facilitates experts and researchers' work. However, while possibilistic networks are widely used in practice, possibilistic benchmarks are too rare. In such situation, researchers who work with possibilistic networks face two choices: either they create new possibilistic benchmarks which is costly, or they work with random networks which may affect the quality of their results due to the limits of randomness. Therefore, our idea is to exploit existing probabilistic benchmarks, and transform them to possibilistic ones, especially that the interest of *probability-possibility*

transformation grew rapidly and is still growing to this day. These graphical models, which share the same graphical component i.e. Directed Acyclic Graph (DAG), are quantified using different distributions (i.e., probability distributions in the case of Bayesian networks and possibility ones in the case of possibilistic networks). Recently, the inference topic in possibilistic networks has been explored using compilation techniques [1]. It has been shown that the qualitative setting of possibility theory goes beyond the probabilistic framework and the quantitative possibilistic framework since it takes advantage of specific properties of the minimum operator. So, our objective in this paper is to study the possibility of switching from one model to another in order to reason in an efficient way.

This paper is organized as follows: Section 2 presents most common transformations. Section 3 presents some basics of Bayesian and possibilistic networks. Section 4 studies the particular case of transforming Bayesian networks into possibilistic ones. Section 5 presents the experimental study that aims to follow the impact of such transformation on the possibilistic network inference results.

2 Probability-Possibility Transformation

Possibility theory introduced by Zadeh [15] and developed by Dubois and Prade [6] lies at the crossroads between fuzzy sets, probability and non-monotonic reasoning. The basic building block in possibility theory is the notion of *possibility distribution* [6]: let $V = \{X_1, \dots, X_N\}$ be a set of state variables whose values are ill-known such that $D_1 \dots D_n$ are their respective domains. $\Omega = D_1 \times \dots \times D_N$ denotes the universe of discourse, which is the cartesian product of all variable domains in V . Vectors $\omega \in \Omega$ are often called *realizations* or simply “states” (of the world). In what follows, we use x_i to denote possible instances of X_i . The agent’s knowledge about the value of the x_i ’s can be encoded by a possibility distribu-

tion $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ where $\pi(\omega) = 1$ means that ω is totally possible and $\pi(\omega) = 0$ means that ω is an impossible state. It is generally assumed that there exist at least one state ω which is totally possible, π is then said to be *normalized*. We denote by $\top(\pi)$ the set of totally possible states in π . From π , one can compute, for any event $A \subseteq \Omega$, the possibility measure $\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega)$ that evaluates to which extend A is *consistent* with the knowledge represented by π . The particularity of the possibilistic scale is that it can be interpreted twofold: either in an *ordinal* manner, when the possibility degree reflects only an ordering between the possible values, so the *minimum* operator is used to combine different distributions, or, in a *numerical* manner, so possibility distributions are combined using the *product* operator.

Several researchers tackle different bridges between probability and possibility theory. When we deal with those transformations, two cases can be distinguished, those relative to subjective probabilities [8] and those relative to objective ones. In this paper, we focus on these latter which were used in several practical problems such as: *constructing a fuzzy membership function from statistical data* [12], *combining probabilities and possibilities information in expert systems* [10] and *reducing the computational complexity* [7]. Roughly speaking, transforming probabilistic distributions to possibilistic ones, denoted by $p \rightarrow \pi$, is useful when weak source of information makes probabilistic data unrealistic or to reduce the complexity of the solution or to combine different types of data. However, transformation from possibilistic distributions to probabilistic ones, denoted by $\pi \rightarrow p$, is useful in the case of decision making. Interestingly enough, when transforming $p \rightarrow \pi$, some information is lost because we transform point value probabilities to interval values ones. In contrast, $\pi \rightarrow p$ adds information to some possibilistic incomplete knowledge.

2.1 Consistency principle

In order to describe different transformations, several properties, called *consistency principle*, were proposed in literature. We retain, in particular, three of them:

Zadeh consistency principle. Zadeh [15] defined the probability-possibility consistency principle such as "*a high degree of possibility does not imply a high degree of probability, and a low degree of probability does not imply a low degree of possibility*". The degree of consistency between p and π is defined by: $C(\pi, p) = \sum_{i=1..n} \pi_i * p_i$. Zadeh [15] pointed out that $C(\pi, p)$ is not a precise law or a relationship between possibility and probability distributions. It is an approximate formalization of the heuristic connection stating that lessening the possibility of an event tends to lessen its probability but not vice-versa.

Klir consistency principle. The concept of consistency condition was redefined by Klir [11]. Assume that the elements of Ω are ordered in such a way that $p_i > 0$ and $p_i \geq p_{i+1}$, $\forall i = \{1..n\}$. Any transformation should be based on these assumptions:

- *A scaling assumption* that forces each value π_i to be a function of p_i/p_1 (where $p_1 \geq \dots \geq p_n$).
- *An uncertainty invariance assumption* according to which p and π must have the same amount of uncertainty.

- *Consistency condition:* $\pi_i \geq p_i$ stating that what is probable must be possible, so π can be seen as an upper-bound of p .

Dubois and Prade [5] gave an example to show that the scaling assumption of Klir may sometimes lead to violation of the consistency principle. The second assumption is also debatable because it assumes that possibilistic and probabilistic information measures are commensurate.

Dubois and Prade consistency principle. Dubois and Prade defined the consistency principle, differently, using these assumptions [4]:

- *Consistency condition:* $P_i < \Pi_i$, $\forall i = \{1..n\}$.

- *Preference preservation:* Assuming that π has the same form as p , then $\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$, $p(\omega_1) > p(\omega_2) \Rightarrow \pi(\omega_1) > \pi(\omega_2)$ and $p(\omega_1) = p(\omega_2) \Rightarrow \pi(\omega_1) = \pi(\omega_2)$.

- *Maximum specificity:* Let π_1 and π_2 be two possibility distributions, then π_2 is more specific than π_1 iff: $\forall \omega \in \Omega$, $\pi_2(\omega) \leq \pi_1(\omega)$.

2.2 Probability-Possibility transformation rules

Several transformation rules are proposed in literature. We present the most common ones, namely: *Klir transformation* (KT), *Optimal transformation* (OT), *Symmetric transformation* (ST) and *Variable transformation* (VT).

Klir Transformation (KT). Assume that the elements of Ω are ordered in such a way that: $\forall i = \{1..n\}$, $p_i > 0$, $p_i \geq p_{i+1}$ and $\pi_i > 0$, $\pi_i \geq \pi_{i+1}$ with $p_{n+1} = 0$ and $\pi_{n+1} = 0$. Klir has considered the principle of uncertainty preservation under two scales [11]:

- *The ratio scale:* $p \rightarrow \pi$ and $\pi \rightarrow p$, named the normalized transformations, are defined by:

$$\pi_i = \frac{p_i}{p_1}, \quad p_i = \frac{\pi_i}{n \sum_{i=1}^n \pi_i} \quad (1)$$

- *The log-interval scale:* $p \rightarrow \pi$ and $\pi \rightarrow p$ are defined by:

$$\pi_i = \left(\frac{p_i}{p_1}\right)^\alpha, \quad p_i = \frac{\pi_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum_{i=1}^n (\pi_i)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (2)$$

where α is a parameter that belongs to the open interval $]0, 1[$.

Optimal Transformation (OT). proposed by Dubois and Prade [4] and also called "Asymmetric Transformation", is defined as follows:

$$\pi_i = \sum_{j/p_j \leq p_i} p_j, \quad p_i = \sum_{j=1}^n \frac{\pi_j - \pi_{j+1}}{j} \quad (3)$$

OT is optimal because it gives the most specific possibility distribution i.e. that loses less information [7], and it's asymmetric since the two formulas in Equation (3) are not converse.

Sandri et al. [7] suggested a *Symmetric Transformation* (ST) that needs less computation but it is quite far from the optimum. It is defined by:

$$\pi_i = \sum_{j=1}^n \min(p_i, p_j) \quad (4)$$

Variable Transformation (VT). It's a $p \rightarrow \pi$ transformation proposed by Mouchaweh et al. [13] and expressed as follows: assume that the elements of Ω are ordered in such a way that: $\forall i \in \{1..n\}, p_i > 0, p_i \geq p_{i+1}$ and $\pi_i > 0, \pi_i \geq \pi_{i+1}$ with $p_{n+1} = 0$ and $\pi_{n+1} = 0$, then:

$$\pi_i = \left(\frac{p_i}{p_1}\right)^{k \cdot (1-p_i)} \quad (5)$$

where k is a constant belonging to the interval: $0 \leq k \leq \frac{\log p_n}{(1-p_n) \cdot \log(\frac{p_n}{p_1})}$.

Bouguelid [3] proposed VT_i , which is an improvement of VT, to make it as specific as OT. So, a parameter k_i is set for each π_i . Formally: $\forall i \in \{1..n\}$,

$$\pi_i = \left(\frac{p_i}{p_1}\right)^{k_i \cdot (1-p_i)} \quad (6)$$

where k_i belongs to the interval: $0 \leq k_i \leq \frac{\log(p_i + p_{i+1} + \dots + p_n)}{(1-p_i) \cdot \log(\frac{p_i}{p_1})}, \forall i \in \{2..n\}$.

Table 1 summarizes characteristics of KT, OT, ST, VT and VT_i . For each transformation, it is mentioned if it deals with discrete (D) and/or continuous case (C) and if it respects consistency principle (Cs), preference preservation (PP) and maximum specificity (MS). Clearly, OT and VT_i are the most interesting rules in the discrete case for $p \rightarrow \pi$.

Table 1: Summary of transformations

TR	$p \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow p$	Properties				
			D	C	Cs	PP	MS
KT	×	×	×	×		×	
OT	×	×	×	×	×	×	×
ST	×	×	×	×	×	×	
VT	×		×			×	
VT_i	×		×		×	×	×

3 Basics on Bayesian and possibilistic networks

Bayesian networks [14] are powerful probabilistic graphical models for representing uncertain knowledge. Studying the possibilistic counterpart of Bayesian networks leads to two variants, namely: min-based possibilistic networks corresponding to the ordinal interpretation of the possibilistic scale and product-based possibilistic networks corresponding to the numerical interpretation [2]. It is well-known that product-based possibilistic networks are close to Bayesian networks since they share the same features (essentially the product operator) with almost the same theoretical and practical results [2]. This is not the case for min-based possibilistic networks due to the particularities of the min operator (e.g. the idempotency). Over a set of N variables $V = \{X_1, \dots, X_N\}$, Bayesian networks (denoted by BN) and possibilistic networks (denoted by ΠG_{\otimes} where $\otimes = \min$ in the ordinal setting, and $\otimes = *$ in the numerical one) share the same two components:

- A *graphical component* composed of a DAG, $\mathcal{G} = (V, E)$ where V denotes a set of *nodes* representing variables and E a set of *edges* encoding links between nodes.

- A *numerical component* that quantifies different links. Uncertainty of each node X_i is represented by a local normalized conditional probability or possibility distribution in the context of its parents (denoted by U_i). Conditional uncertainty distributions should respect the normalization constraint for each variable $X_i \in V$, where u_i is a possible instance of U_i , expressed by:

$$\forall u_i, \sum_{x_i} P(x_i | u_i) = 1, \quad \max_{x_i} \Pi(x_i | u_i) = 1, \quad (7)$$

Given a Bayesian network BN on N variables, we can compute its joint probability distribution by the following chain rule :

$$p(X_1, \dots, X_N) = \ast_{i=1..N} P(X_i | U_i) \quad (8)$$

In a similar manner, the joint possibility distribution of a possibilistic network ΠG_{\otimes} is defined

by the \otimes -based chain rule expressed by:

$$\pi_{\otimes}(X_1, \dots, X_N) = \otimes_{i=1..N} \Pi(X_i | U_i) \quad (9)$$

where $\otimes = \min$ for the ordinal setting and $\otimes = *$ for the numerical one.

One of the most interesting treatments that can be applied for possibilistic networks is to evaluate the impact of a certain event on the remaining variables. Such process, called *inference*, consists on computing a-posteriori possibility distributions of each variable X_i given an evidence e .

Example .1 Let us consider the Bayesian network and the possibilistic network depicted by Figure .1(a) and Figure .1 (b), respectively (sharing the same DAG). The joint distributions of BN and ΠG_{\otimes} using Equations (8) and (9) are presented in Table 2.

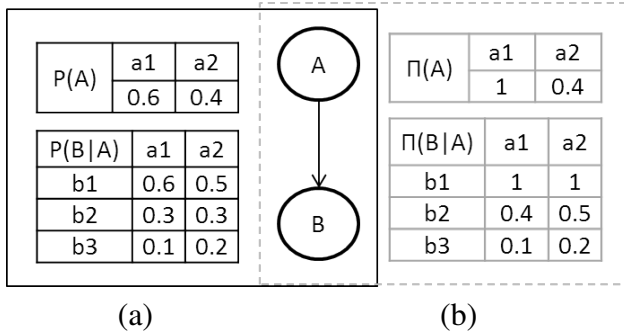


Figure 1: A Bayesian network (a) and a possibilistic network (b).

Table 2: Joint distributions of BN and ΠG_{\otimes} .

A	B	p	π_*	π_{\min}
a ₁	b ₁	0.36	1	1
a ₁	b ₂	0.18	0.4	0.4
a ₁	b ₃	0.06	0.1	0.1
a ₂	b ₁	0.2	0.4	0.4
a ₂	b ₂	0.12	0.2	0.4
a ₂	b ₃	0.08	0.08	0.2

4 Transformation from Bayesian to possibilistic networks

Probability-possibility transformations can be useful to study the coherence between probabilistic and possibilistic frameworks and, more precisely, the consistency of derived distributions. Our idea consists in applying such transformations from Bayesian networks to possibilistic networks and interpreting their behavior

on joint distributions. Formally, using existing transformations, we can define transformation from Bayesian to possibilistic networks in a local manner as follows:

Definition .1 Let BN be a Bayesian network and p be its joint distribution. Let TR be a transformation rule. Let $BNto\Pi N$ be the function that transforms BN into ΠN_{\otimes}^{TR} using TR under the setting \otimes s.t. $\otimes = \{*, \min\}$. Let $PDto\Pi D$ be the function that transforms a probability distribution into a possibilistic one using TR. Formally, ΠN_{\otimes}^{TR} is the transformation of BN using TR if, $\forall X_i \in V$,

$$\Pi(X_i | U_i) = PDto\Pi D(P(X_i | U_i), TR) \quad (10)$$

$$\Pi N_{\otimes}^{TR} = BNto\Pi N(BN, TR, \otimes) \quad (11)$$

Example .2 Table 3 depicts the transformation of conditional tables of the Bayesian network of Figure .1 (a) using KT, OT, ST, VT and VT_i .

Table 3: Transformation of conditional distributions

$\Pi(A)$		Π^{KT}	Π^{OT, VT_i}	Π^{ST}	Π^{VT}
a ₁		1	1	1	1
a ₂		0.66	0.4	0.8	0.4
$\Pi(B A)$		Π^{KT}	Π^{OT, VT_i}	Π^{ST}	Π^{VT}
b ₁	a ₁	1	1	1	1
b ₂	a ₁	0.5	0.4	0.7	0.5
b ₃	a ₁	0.16	0.1	0.3	0.1
b ₁	a ₂	1	1	1	1
b ₂	a ₂	0.6	0.5	0.8	0.27
b ₃	a ₂	0.4	0.2	0.6	0.2

This local transformation does not ensure the same results as a global one. In other words, the transformation of the joint distribution underlying the initial Bayesian network is not equivalent to the transformation of its local conditional distributions, which can affect the inference results. Let π_p^{TR} be the transformation of the joint distribution encoded by a Bayesian network BN using the transformation TR and let π_{\otimes}^{TR} be the joint distribution relative to ΠN_{\otimes}^{TR} obtained using Definition 1. The following example illustrates the problem described above.

Example .3 Table 4 presents the transformation of global distributions of the Bayesian network of Figure .1 (a) and of the resulted possibilistic network ΠN_{\otimes} using *KT*, *OT*, *ST*, *VT* and *VT_i*. As depicted in Table 4, if we are in

Table 4: Possibility distributions using different transformations

A	B	p	KT	OT, VT _i	ST	VT
π_p^{TR}						
a ₁	b ₁	0.36	1	1	1	1
a ₁	b ₂	0.18	0.5	0.44	0.8	0.38
a ₁	b ₃	0.06	0.16	0.06	0.36	0.06
a ₂	b ₁	0.2	0.55	0.64	0.84	0.45
a ₂	b ₂	0.12	0.33	0.26	0.62	0.19
a ₂	b ₃	0.08	0.22	0.14	0.46	0.09
π_*^{TR}						
a ₁	b ₁	0.36	1	1	1	1
a ₁	b ₂	0.18	0.5	0.4	0.7	0.5
a ₁	b ₃	0.06	0.16	0.1	0.3	0.1
a ₂	b ₁	0.2	0.66	0.4	0.8	0.4
a ₂	b ₂	0.12	0.4	0.2	0.64	0.108
a ₂	b ₃	0.08	0.26	0.08	0.48	0.08
π_{min}^{TR}						
a ₁	b ₁	0.36	1	1	1	1
a ₁	b ₂	0.18	0.5	0.4	0.7	0.5
a ₁	b ₃	0.06	0.16	0.1	0.3	0.1
a ₂	b ₁	0.2	0.66	0.4	0.8	0.4
a ₂	b ₂	0.12	0.6	0.4	0.8	0.27
a ₂	b ₃	0.08	0.4	0.2	0.6	0.2

a numerical setting, the values of π_p^{TR} are different from those of π_*^{TR} and, if we deal with an ordinal setting, the order between π_p^{TR} and π_{min}^{TR} is not preserved, as well. For instance, for the transformation *ST*, more precisely for a_1b_2 and a_2b_2 , we can see that $0.8 > 0.62$ while $0.7 < 0.8$. It is also the case of *VT* for a_1b_2 and a_2b_1 . Suppose, now, that we have the evidence $B = b_2$, then for π_p^{ST} we have $a_1 > a_2$ while the same evidence implies $a_2 > a_1$ for π_{min}^{ST} . This means that, considering π_{min}^{ST} as the consistent transformation of the initial Bayesian network and using it to infer evidence can lead to erroneous results.

The question that may arise is the following: Do all transformations suffer from the problem of information loss? The answer can be found in the following example.

Example .4 Let us consider the BN of Figure .4 (a) such that $p > q$. This implies that $p > 0.5$

and $q < 0.5$, which in its turn implies that $0.5p > 0.5q > 0.25$. Table 5 shows the joint distributions where $x < 1$, $y < 1$ and $z < 1$ in both ordinal and numerical settings and *TR* can be any transformation (i.e. *KT*, *OT*, *ST*, *VT* and *VT_i*). We start by interpreting product-based

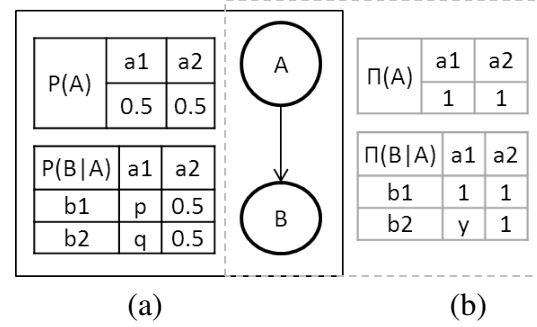


Figure 2: A Bayesian network BN (a) and its transformation into a possibilistic network ΠN_{\otimes} (b).

Table 5: Joint distributions

A	B	p	π_p^{TR}	π_*^{TR}	π_{min}^{TR}
a ₁	b ₁	0.5p	1	1	1
a ₁	b ₂	0.5q	x	y	y
a ₂	b ₁	0.25	z	1	1
a ₂	b ₂	0.25	z	1	1

networks which only rely on numerical values. It is obvious, from columns 4 and 5 of Table 5, that there is a loss of information since values of π_p^{TR} and π_*^{TR} are different. When we deal with min-based networks, the focus is only on the order induced by values. In fact, the order of π_p^{TR} of the initial network BN (Figure 2 (a)) is $\{a_1b_1 > a_1b_2 > (a_2b_1 = a_2b_2)\}$, while the order relative of π_{min}^{TR} of the possibilistic network is $\{(a_1b_1 = a_2b_1 = a_2b_2) > a_1b_2\}$. We can see that the transformation does not preserve the order.

Following this problem, we propose two new properties. The first one (resp. the second one), presented in Definition 2 (resp. Definition 3), is applicable for transforming Bayesian networks into min-based possibilistic networks (resp. product-based possibilistic networks).

These properties should be seen as extensions of Dubois and Prade Consistency principle described above.

Definition .2 Let TR be a transformation rule used in order to transform a Bayesian network BN into a min-based possibilistic network ΠN_{min}^{TR} . Let p be the joint distribution relative to BN computed using Equation (8) and π_p^{TR} be its transformation by TR . Let π_{min}^{TR} be the joint distribution relative to ΠN_{min}^{TR} using Equation (9) (s.t $\otimes = min$). Let $\delta(\pi_p^{TR})$ and $\delta(\pi_{min}^{TR})$ be the order underlying π_p^{TR} and π_{min}^{TR} , respectively. Then TR is said to be consistent iff:

$$\delta(\pi_p^{TR}) = \delta(\pi_{min}^{TR}) \quad (12)$$

and

$$\top(\pi_p^{TR}) = \top(\pi_{min}^{TR}) \quad (13)$$

Definition .3 Let TR be a transformation rule used in order to transform a Bayesian network BN into a product-based possibilistic network ΠN_*^{TR} . Let p be the joint distribution relative to BN computed using Equation (8) and π_p^{TR} be its transformation by TR . Let π_*^{TR} be the joint distribution relative to ΠN_*^{TR} using Equation (9) (s.t $\otimes = *$). Then TR is said to be consistent iff:

$$\pi_p^{TR} = \pi_*^{TR} \quad (14)$$

Regarding the ordinal setting, since the order of p is the same of π_p^{TR} due to *Preference preservation* condition, then, p and π_{min}^{TR} should have the same order to preserve the information of the two networks. Regarding the numerical setting, TR should preserve exactly the same possibility measures for all events in π_p^{TR} and π_*^{TR} .

We point out that Equation (13) is respected by all existing transformations. So, using those latter, we maintain at least the normalized values in both ordinal and numerical settings but we lose the information encoded by joint distributions.

5 Experimental study

The objective of the proposed experimental study is to understand the impact of the gap observed when using existing transformations from Bayesian networks to possibilistic networks on inference results. In fact, one of the most interesting treatments that can be applied for possibilistic networks is to evaluate the impact of a certain event on the remaining variables. Such process can be achieved using inference algorithms consisting on computing a-posteriori possibility distributions of each variable given an evidence e .

The experimentation is based on 100 random BNs. For each BN, we generate the DAG structure and the conditional probability distributions randomly by varying three parameters: number of nodes (from 4 to 10), their cardinalities (from 2 to 4) and the maximum number of parents (from 1 to 3). Then, we generate randomly the evidence e and a variable of interest X_i . The experimentation protocol can be summarized as follows:

- For each generated Bayesian network, we compute its global probability joint distribution p using the chain rule (Equation 8).
- We transform p into a possibilistic joint distribution π_p . Among existing transformations, we use Optimal Transformation (Equation 3) since it respects Dubois and Prade consistency principle presented above.
- From π_p , we compute the marginal distribution $\Pi_{joint}(X_i | e)$ using min-based conditioning [6].
- We transform the Bayesian network BN into a min-based possibilistic network ΠN_{min} using OT.
- Once ΠN_{min} is computed, we apply possibilistic Junction Tree propagation algorithm [9] in order to compute $\Pi(X_i | e)$.
- We compute the marginal distributions of the variable of interest X_i .
- Finally, we compare the values of $\Pi_{joint}(X_i | e)$ and $\Pi(X_i | e)$ and also the order underlying them.

The experimentation highlights an interesting

result showing that, for 85% of cases, the order behind $\Pi(X_i | e)$ is equal to the one corresponding to $\Pi_{joint}(X_i | e)$. This means that in the case of min-based possibilistic networks, we can use OT even if the obtained possibilistic network is different from the network generated from the joint possibility distribution. This corresponds exactly to the spirit of the ordinal setting of possibility theory since only the order induced by distributions is important. Our method can be an approximation of propagation for min-based possibilistic networks. It relies on the junction tree approach, which is sensible to clusters size. It is interesting to improve inference time of 85% of cases by considering, for instance, compilation-based inference approaches for min-based possibilistic networks.

6 Conclusion

Our objective in this paper is to study the transformation of Bayesian networks into possibilistic networks using existing transformations proposed in literature. We found out that switching from one model to another does not preserve the information incorporated in joint distributions (either numerical values for ΠN_* or the order induced by values for ΠN_{min}). Such result allows us to conclude, at first sight, that such transformations are inappropriate in the case of graphical models. However, by following the impact of those transformations on the inference results, for the case of min-based possibilistic networks, the experimentation shows that the order induced by marginal distributions are conserved in both of the networks i.e. the initial Bayesian network and the obtained possibilistic one, in most of the cases, which is in harmony with the spirit of qualitative setting of possibility theory since only the order induced by distributions is important. In our future work, we will take advantage of compilation techniques for min-based possibilistic networks in order to make inference faster. We will propose two new transformations respecting the properties we proposed in order to transform Bayesian networks into possibilistic networks (product-based and min-based).

References

- [1] R Ayachi, N Ben Amor, and S Benferhat. Possibilistic local structure for compiling min-based networks. In *SMPS*, pages 479–487, 2012.
- [2] C. Borgelt, J. Gebhardt, and R. Kruse. Possibilistic graphical models. In *Proceedings of the International School for the Synthesis of Expert Knowledge*, 1998.
- [3] M. S. Bouguelid. *Contribution à l'application de la reconnaissance des formes et la théorie des possibilités au diagnostic adaptatif et prédictif des systèmes dynamiques*. PhD thesis, Université de Reims Champagne-Ardenne, décembre 2007.
- [4] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris, and H. Prade. *Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets, and Probabilistic Inequalities*. Reliable Computing, 2004.
- [5] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [6] D. Dubois and H. Prade. *Possibility theory: An approach to computerized, Processing of uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.
- [7] D. Dubois, H. Prade, and S. Sandri. *On possibility/probability transformations*. Fuzzy Logic, 1993.
- [8] D. Dubois, H. Prade, and P. Smets. A definition of subjective possibility. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48:352–364, June 2008.
- [9] P. Fonck. *Réseaux d'inférence pour le raisonnement possibiliste*. PhD thesis, Université de Liège Faculté de sciences, 1994.
- [10] G. J. Klir. Probability-possibility transformations: a comparison. *Int J General Systems*, 21:291–310, 1992.
- [11] G. J. Klir. Information-preserving probability-possibility transformations: recent developments. *Fuzzy Logic*, pages 417–428, 1993.
- [12] M. S. Mouchaweh. Diagnosis in real time for evolutionary processes using pattern recognition and possibility theory. *Invited paper in International Journal of Computational Cognition*, pages 79–112, 2004.
- [13] M. S. Mouchaweh, M. S. Bouguelid, P. Billaudel, and B. Riera. Variable probability-possibility transformation. *25th European Annual Conference on Human Decision-Making and Manual Control (EAM'06)*, pages 417–428, September 2006.
- [14] J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1988.
- [15] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:3–28, 1978.

Les capacités qualitatives sont des possibilités imprécises

Qualitative capacities as imprecise possibilities

Didier Dubois¹

Henri Prade¹

Agnès Rico²

¹ IRIT, CNRS Université de Toulouse, France

² ERIC, Université de Lyon, France

118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 09, {dubois, prade}@irit.fr

43 bld du 11 novembre, 69100 Villeurbanne, agnes.rico@univ-lyon1.fr

Résumé :

Cet article étudie les capacités qualitatives définies sur un ensemble totalement ordonné muni d'une fonction de renversement de l'ordre. En nous inspirant du rôle joué par les probabilités pour les capacités quantitatives, nous cherchons à savoir si les capacités qualitatives peuvent être considérées comme des ensembles de mesures de possibilité. Plus précisément nous montrons que toute capacité qualitative est caractérisée par une classe de mesures de possibilité. De plus, les bornes inférieures de cette classe sont suffisantes pour reconstruire la capacité et leur nombre en caractérise la complexité. Nous présentons aussi un axiome généralisant la maxitivité des mesures de possibilité qui permet d'identifier le nombre de mesures de possibilité nécessaires à la reconstruction de la capacité. Cet axiome va aussi nous permettre de faire un lien entre les mesures de possibilité et la logique modale.

Mots-clés :

Capacité, mesure de possibilité, logique modale.

Abstract:

This paper studies the structure of qualitative capacities defined on a finite totally ordered scale equipped with an order-reversing map. More specifically, we investigate the question whether these qualitative set-functions can be viewed as classes of simpler set-functions, typically possibility measures, paralleling the situation of quantitative capacities with respect to imprecise probability theory. We show that any capacity is characterized by a non-empty class of possibility measures having the structure of an upper semi-lattice. The lower bounds of this class are enough to reconstruct the capacity, and their number is characteristic of its complexity. We introduce a sequence of axioms generalizing the maxitivity property of possibility measures, and related to the number of possibility measures needed for this reconstruction. In the Boolean case, capacities are closely related to non-regular multi-source modal logics and their neighborhood semantics.

Keywords:

Capacity, possibility measure, modal logic

1 Introduction

Une mesure floue (ou capacité) qualitative est une fonction d'ensemble monotone à valeurs dans un ensemble totalement ordonné. Dans ce contexte il est impossible d'utiliser des structures additives comme les probabilités, ou la transformée de Möbius comme dans le cadre des fonctions de croyance. Cependant il semble que beaucoup de notions quantitatives ont une contrepartie dans le cadre qualitatif en remplaçant les probabilités par les mesures de possibilité. Par exemple la construction des fonctions de croyance introduite par Dempster [6] a été appliquée aux mesures de possibilité [11, 12, 21] pour définir les possibilités et nécessités inférieures et supérieures. Les possibilités supérieures et les nécessités inférieures sont respectivement des possibilités et des nécessités ; ce qui n'est pas le cas pour les possibilités inférieures et les nécessités supérieures. Voir aussi sur ce thème, [18] pour l'analogie avec les fonctions de croyance, et [5] pour le lien avec la cohérence au sens de De Finetti.

Une question naturelle est alors de déterminer les capacités (qualitatives) qui définissent une famille de mesures de possibilité, par analogie avec la situation dans la théorie des probabilités imprécises de Walley [22]. Cette question a été abordée dans [7], en partant du travail pionnier de Banon [2]. De plus, il a été montré que certains ensembles de mesures de

possibilité jouent un rôle similaire à celui des ensembles convexes de mesures de probabilité dans la théorie de Walley [22]. Par ailleurs rappelons que les mesures de possibilité peuvent être raffinées par des mesures de probabilité [9, 10].

Le but de ce papier est de montrer que les axiomes de maxitivité et de minitivité de la théorie des possibilités peuvent être généralisés pour définir des familles de capacités qualitatives de complexité croissante. De plus ces propriétés vont permettre d'étendre aux capacités le lien déjà connu entre la théorie des possibilités et la logique modale.

2 Les capacités vues comme des possibilités imprécises

Soit S un ensemble fini et L un ensemble fini totalement ordonné muni d'une fonction ν qui renverse l'ordre. 1 (resp. 0) est l'élément maximum (resp. minimum) de L . Une capacité est une fonction d'ensemble $\gamma : 2^S \rightarrow L$, croissante pour l'inclusion, et telle que $\gamma(\emptyset) = 0$; $\gamma(S) = 1$. Dans la théorie des possibilités l'information disponible est représentée par une distribution de possibilité $\pi : S \rightarrow L$. La valeur $\pi(s)$ est la possibilité que s soit l'état actuel du monde. L'information précise correspond au cas où $\exists s^*, \pi(s^*) = 1$, et $\forall s \neq s^*, \pi(s) = 0$, tandis que l'ignorance complète est représentée par la distribution $\pi^?$ telle que $\forall s \in S, \pi^?(s) = 1$. La mesure de possibilité associée à une distribution π est la capacité $\Pi(A) = \max_{s \in A} \pi(s)$.

γ^c est la capacité conjuguée de γ , définie par $\gamma^c(A) = \nu(\gamma(A^c)), \forall A \subseteq S$ avec A^c le complémentaire de A . La conjuguée d'une mesure de possibilité s'appelle une mesure de nécessité : $N(A) = \nu(\max_{s \notin A} \pi(s)) = \min_{s \notin A} N(S \setminus \{s\})$.

Certaines capacités quantitatives g peuvent être représentées par un ensemble convexe de probabilités : $\mathcal{P}(g) = \{P, P(A) \geq g(A), \forall A \subseteq S\}$, par exemple, si g est une capacité convexe ou une fonction de croyance. On retrouve les pro-

possibilités cohérentes inférieures dans le sens de Walley [22] car on peut montrer que dans ces deux cas, $g(A) = \min\{P(A) : P \in \mathcal{P}(g)\}$. Dans le cadre qualitatif est-il possible d'avoir une construction similaire en remplaçant les mesures de probabilité par les mesures de possibilité ?

2.1 Possibilités et nécessités imprécises

Pour commencer rappelons quelques propriétés de $\mathcal{R}(\gamma) = \{\pi : \Pi(A) \geq \gamma(A), \forall A \subseteq S\}$ l'ensemble des distributions de possibilité dont la possibilité associée Π domine γ . Cet ensemble n'est jamais vide car il contient toujours $\pi^?$. De plus $\pi^?$ en est l'élément maximal.

Soit σ une permutation des $n = |S|$ éléments de S . Le $i^{\text{ème}}$ élément de la permutation est noté $s_{\sigma(i)}$ et $S_\sigma^i = \{s_{\sigma(i)}, \dots, s_{\sigma(n)}\}$. On définit alors la distribution de possibilité π_σ^γ par :

$$\forall i = 1, \dots, n, \pi_\sigma^\gamma(s_{\sigma(i)}) = \gamma(S_\sigma^i)$$

Pour toute permutation σ la mesure de possibilité Π_σ^γ associée à π_σ^γ appartient à $\mathcal{R}(\gamma)$ et $\forall A \subseteq S, \gamma(A) = \min_\sigma \Pi_\sigma^\gamma(A)$ [2]. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 1 $\forall \pi \in \mathcal{R}(\gamma), \pi(s) \geq \pi_\sigma^\gamma(s), \forall s \in S$ avec σ une permutation de S .

Preuve : Soit σ la permutation induite par π , i.e., $\sigma(i) \geq \sigma(j)$ ssi $\pi(s_i) \leq \pi(s_j)$. Nous avons $\Pi(S_\sigma^i) = \pi(s_i) \geq \gamma(S_\sigma^i) = \pi_\sigma^\gamma(s_i), \forall i = 1, \dots, n$. ■

Ce résultat montre que $\mathcal{R}(\gamma) = \{\pi, \exists \sigma, \pi \geq \pi_\sigma^\gamma\}$. Mais toutes les $n!$ distributions de possibilité π_σ^γ ne sont pas des éléments minimaux de $\mathcal{R}(\gamma)$. Par exemple, si $\gamma = \Pi$, l'élément minimum est unique et c'est π .

Réciproquement, pour tout ensemble de distributions de possibilité \mathcal{T} , $\gamma(A) = \min_{\pi \in \mathcal{T}} \Pi(A)$ est une capacité et $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}(\gamma)$. Si \mathcal{T} contient des distributions de possibilité non comparables, \mathcal{T} est l'ensemble des éléments les plus spécifiques

de $\mathcal{R}(\gamma)$. Par ailleurs, $\gamma(A) = \max_{\pi \in \mathcal{T}} \Pi(A)$ est une mesure de possibilité dont la distribution est $\pi^{\max}(s) = \max_{\pi \in \mathcal{T}} \pi(s)$ [13].

$\mathcal{R}_*(\gamma)$, l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{R}(\gamma)$, est un ensemble fini de distributions de possibilité dont aucune n'est plus spécifique que les autres. La complexité de γ est mesurée par son nombre d'éléments. Toute capacité peut donc être vue comme une mesure de possibilité inférieure : $\gamma(A) = \min\{\Pi(A), \pi \in \mathcal{R}_*(\gamma)\}$. Ce résultat est similaire à celui des capacités convexes qui sont vues comme des probabilités inférieures [22].

De manière duale en passant par la conjuguée, les capacités peuvent aussi être décrites comme des nécessités supérieures. A partir de γ on peut donc définir deux ensembles de mesures de possibilités : $\mathcal{R}(\gamma)$ et $\mathcal{R}(\gamma^c)$. Les possibilités qui dominent γ^c sont les conjuguées des mesures de nécessité dominées par γ : $\gamma(A) = \max\{N(A), \pi \in \mathcal{R}_*(\gamma^c)\}$. De plus on génère des mesures de nécessité maximales dominées par γ : $\mathcal{R}^*(\gamma) = \mathcal{R}_*(\gamma^c)$. Une des deux représentations ($\mathcal{R}_*(\gamma)$ ou $\mathcal{R}_*(\gamma^c)$) peut être plus simple que l'autre. Par exemple si γ est une mesure de nécessité induite par la distribution π , alors $\mathcal{R}^*(\gamma) = \{\pi\}$ tandis que $\mathcal{R}_*(\gamma)$ contient plusieurs distributions dont π . Comme $\Pi(A) \geq N(A) = \Pi^c(A)$, il semble plus naturel d'approcher N par en dessous et Π par au dessus. Plus généralement si γ est telle que $\gamma(A) \geq \gamma^c(A), \forall A \subseteq S$, alors $\mathcal{R}_*(\gamma)$ est plus naturel que $\mathcal{R}_*(\gamma^c)$.

2.2 Les axiomes de minitivité et de maxitivité généralisés

Pour toute capacité γ , il existe au moins un entier n et n mesures de nécessité telles que $\gamma(A) = \max_{i=1}^n N_i(A)$. Nous allons montrer que cette propriété est liée à l'axiome de n -adjonction : $\forall A_i, i = 1, \dots, n+1$,

$$\min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) \leq \max_{1 \leq i < j \leq n+1} \gamma(A_i \cap A_j).$$

Lorsque $n = 1$, la 1-adjonction est : $\min(\gamma(A), \gamma(B)) \leq \gamma(A \cap B)$. Comme γ est monotone croissante, les capacités 1-adjonctives sont les mesures de nécessité.

Considérons les mesures 2-adjonctives.

Proposition 2 $\min(\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C)) \leq \max(\gamma(A \cap B), \gamma(B \cap C), \gamma(A \cap C)), \forall A, B, C$, ssi il existe deux mesures de nécessité distinctes telles que $\forall A, \gamma(A) = \max(N_1(A), N_2(A))$.

Preuve :

\Leftarrow Supposons $\gamma(A) = \max(N_1(A), N_2(A))$. Sans perdre de généralité on peut supposer l'existence de sous-ensembles distincts A, B et C tels que $N_1(A) \geq N_2(A), N_1(B) \geq N_2(B), N_2(C) \geq N_1(C)$ avec au moins une inégalité stricte (sinon γ est une mesure de nécessité). On a alors $\min(\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C)) = \min(N_1(A), N_1(B), N_2(C))$ et $\gamma(A \cap B)$ s'exprime comme

$$\max[\min(N_1(A), N_1(B)), \min(N_2(A), N_2(B))].$$

Soit en développant $\gamma(A \cap B)$:

$$\min[\max(N_1(A), N_2(A)), \max(N_1(A), N_2(B)),$$

$$\max(N_1(B), N_2(A)), \max(N_1(B), N_2(B))].$$

Par construction $N_1(A) \geq N_2(A), N_1(B) \geq N_2(B)$

ce qui entraîne $\gamma(A \cap B) = \min(N_1(A), N_1(B)) =$

$\min(\gamma(A), \gamma(B)) \geq \min(\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C))$ alors

$$\max(\gamma(A \cap B), \gamma(A \cap C), \gamma(B \cap C)) \geq \min(\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C)).$$

\Rightarrow Supposons que $\gamma(A) = \max_{i=1}^3 N_i(A)$.

Nous pouvons trouver trois ensembles distincts

A, B, C tels que $\min(\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C)) = \min(N_1(A), N_2(B), N_3(C))$ et vérifiant

$\min(\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C)) > \max[\gamma(A \cap B),$

$\gamma(A \cap C), \gamma(B \cap C)]$. Par exemple on peut choisir

A, B, C tels que $\gamma(A) = N_1(A)$ et $\gamma(A') = 0, \forall A' \subset A$,

$\gamma(B) = N_2(B)$ et $\gamma(B') = 0, \forall B' \subset B$,

$\gamma(C) = N_3(C)$ et $\gamma(C') = 0, \forall C' \subset C$. Nous

avons donc $\max(\gamma(A \cap B), \gamma(B \cap C), \gamma(A \cap C)) = 0$.

■.

Remarque : Si $\gamma(A) = \max(N_1(A), N_2(A))$, nous pouvons avoir $\min(\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C)) < \max(\gamma(A \cap B), \gamma(B \cap C), \gamma(B \cap C))$. En effet il est suffisant d'avoir $\gamma(C) < \gamma(A \cap B)$, ce qui est différent du cas $n = 1$.

Dans le cas général nous avons :

Proposition 3 $\forall A_i, i = 1, \dots, n+1$,
 $\min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) \leq \max_{i \neq j} \gamma(A_i \cap A_j)$ ssi il existe
 n mesures de nécessité distinctes telles que
 $\forall A, \gamma(A) = \max_{j=1}^n N_j(A)$.

Preuve : \Leftarrow Supposons que $\forall A, \gamma(A) = \max_{j=1}^n N_j(A)$, on a alors $\min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) = \min_{i=1}^{n+1} \max_{j=1}^n N_j(A_i) = \min_{i=1}^{n+1} N_{j_i}(A_i)$ avec $N_{j_i}(A_i) \geq N_k(A_i), \forall k \neq j_i, k$ variant de 1 à n et i de 1 à $n+1$. Au moins deux indices j_i pour i variant de 1 à $n+1$ sont égaux car j ne prend que n valeurs distinctes. Sans perdre de généralité supposons que $j_1 = 1 = j_2$, i.e., $\min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) = \min(N_1(A_1), N_1(A_2), \min_{i=3}^{n+1} N_{j_i}(A_i))$.

On a donc $\gamma(A_1 \cap A_2) = \max_{i=1}^n N_i(A_1 \cap A_2) = \max_{i=1}^n \min(N_i(A_1), N_i(A_2))$. De plus $N_1(A_1) \geq N_k(A_1)$ et $N_1(A_2) \geq N_k(A_2)$ pour tout k de 2 à n , donc $\min(N_1(A_1), N_1(A_2)) \geq \min(N_k(A_1), N_k(A_2))$ pour k de 2 à n . Nous avons donc

$$\gamma(A_1 \cap A_2) = \min(N_1(A_1), N_1(A_2)) = \min(\gamma(A_1), \gamma(A_2)) \geq \min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i).$$

\Rightarrow Pour la réciproque la démonstration est la même que celle faite pour le cas $n=3$. ■

Dans les résultats précédents les mesures de nécessité peuvent être remplacées par les mesures de possibilité et on peut affaiblir la maxitivité. Plus précisément on aura l'axiome dual de n -**max-dominance** : $\forall A_i, i = 1, \dots, n+1$,

$$\max_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) \geq \min_{1 \leq i < j \leq n+1} \gamma(A_i \cup A_j)$$

et la proposition suivante

Proposition 4 $\forall A_i, i = 1, \dots, n+1$,
 $\max_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) \geq \min_{i \neq j} \gamma(A_i \cup A_j)$ ssi il existe
 n mesures de possibilité distinctes telles que
 $\gamma(A) = \min_{i=1}^n \Pi_i(A)$.

Remarque : Le concept de n -adjonction semble jouer dans le cadre qualitatif un rôle similaire à la n -super-modularité.

2.3 Les ensembles focaux qualitatifs

La transformée inférieure de Möbius d'une capacité qualitative γ est une fonction $\gamma_{\#}$:

$2^S \rightarrow L$ définie par $\gamma_{\#}(E) = \gamma(E)$ si $\gamma(E) > \max_{B \subsetneq E} \gamma(B)$ et 0 sinon. Comme γ est monotone, la condition $\gamma(E) > \max_{B \subsetneq E} \gamma(B)$ peut être remplacée par $\max_{x \in E} \gamma(E \setminus \{x\})$. On note $\mathcal{F}^\gamma = \{E, \gamma_{\#}(E) > 0\}$, qu'on appelle la famille des éléments (ou ensembles) focaux de γ .

Comme la transformée qualitative de Möbius d'une mesure de possibilité est sa distribution de possibilité, $\gamma_{\#}$ apparaît comme la généralisation de la notion de distribution de possibilité sur l'ensemble des parties de S . De plus elle contient l'information minimale nécessaire pour reconstruire la capacité γ [14, 9], car $\gamma(A) = \max_{E \subseteq A} \gamma_{\#}(E)$. Cette équation fait apparaître la similarité entre les capacités qualitatives et les fonctions de croyance [19] : l'addition est remplacée par le max et $\gamma_{\#}$ joue le rôle de la fonction de masse (la transformée de Möbius de la fonction de croyance) [15].

Notons γ_λ la capacité booléenne : $\gamma_\lambda(A) = 1$ si $\gamma(A) \geq \lambda > 0$, et 0 sinon. Si la capacité γ est n -adjonctive, le nombre maximal des éléments focaux de γ_λ est borné par n . En effet, puisque $\gamma(A) = \max_{i=1}^n N_i(A)$, l'ensemble des éléments focaux de γ_λ contient au plus n sous-ensembles E_i tels que

$$N_i(A) \geq \lambda \iff E_i \subseteq A.$$

Par ailleurs, si E est un élément focal de γ , définissons la mesure de nécessité N_E par $\forall A \neq S, N_E(A) = \gamma_{\#}(E)$ si $E \subseteq A$ et 0 sinon. Alors $\gamma(A) = \max_{E \in \mathcal{F}^\gamma} N_E(A)$. Considérons toutes les chaînes de sous-ensembles emboîtés dans \mathcal{F}^γ . Chacune d'elles définit une mesure de nécessité N_i . Si une capacité est n -adjonctive, cela signifie qu'il y a exactement n chaînes d'ensembles focaux dans \mathcal{F}^γ . Remarquons enfin que dans le cas extrême où les éléments de \mathcal{F}^γ sont des singletons, chaque mesure de nécessité N_E est aussi une mesure de possibilité ; alors γ est une mesure de possibilité.

Dans [7], il est montré que la transformée de Möbius qualitative permet de trouver les distributions de possibilité les plus spécifiques domi-

nant γ en sélectionnant un élément dans chaque ensemble focal.

2.4 n -adjonction et k -maxitivité

Une capacité est k -maxitive ssi ses ensembles focaux ont au plus k éléments [17, 14]. Nous allons montrer qu'il existe une connection entre la k -adjonction et la k -maxitivité. Commençons par regarder le lien entre les ensembles focaux d'une capacité et de sa conjuguée.

Proposition 5 *Soit γ une capacité booléenne et $\mathcal{F}^\gamma = \{E_1, \dots, E_k\}$ ses ensembles focaux ; alors $\mathcal{F}^{\gamma^c} = \min_{\subseteq} \{\{s_1, \dots, s_k\}, s_i \in E_i, i = 1 \dots, k\}$, où \min_{\subseteq} choisit les plus petits ensembles au sens de l'inclusion.*

Preuve : Nous avons $\mathcal{F}^{\gamma^c} = \min_{\subseteq} \{A, \gamma^c(A) = 1\}$. Or $\gamma^c(A) = 1$ ssi A contient un ensemble de la forme $\{s_1, \dots, s_k\}, s_i \in E_i, i = 1 \dots, k$. En effet, $\gamma^c(A) = 1 \iff \gamma(A^c) = 0 \iff \forall E \in \mathcal{F}^\gamma, E \not\subseteq A^c$ donc $\gamma^c(A) = 1 \iff \forall E \in \mathcal{F}^\gamma, E \cap A \neq \emptyset$. On peut donc écrire $\gamma^c(A) = 1 \iff \forall E \in \mathcal{F}^\gamma, \exists s_E \in E \cap A \iff \exists F = \{s_E : E \in \mathcal{F}^\gamma\}, F \subseteq A$, où pour chaque ensemble focal E de γ , s_E est choisi dans E . ■

Donc si une capacité booléenne est k -adjonctive (elle a k ensembles focaux), alors sa conjuguée est k -maxitive.

Les éléments s_E choisis dans les ensembles focaux E ne sont pas nécessairement distincts si les éléments focaux se chevauchent. Par exemple si $\mathcal{F}^\gamma = \{E_1, E_2\}$ avec $E_1 = \{s_0, s_1, s_3\}, E_2 = \{s_0, s_2, s_4\}$, alors les éléments focaux de la conjuguée sont les plus petits éléments de la famille $\{\{s_0\}\} \cup \{\{s_0, s_i\}, i = 1, \dots, 4\} \cup \{\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_4\}, \{s_3, s_2\}, \{s_3, s_4\}\}$, i.e., $\mathcal{F}^{\gamma^c} = \{\{s_0\}\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_4\}, \{s_3, s_2\}, \{s_3, s_4\}\}$.

$(\gamma^c)^c = \gamma$ entraîne la propriété suivante :

Proposition 6 $c(c(\mathcal{F}^\gamma)) = \mathcal{F}^\gamma$ où $c(\mathcal{F}^\gamma)$ est la transformation de \mathcal{F}^γ vers \mathcal{F}^{γ^c}

Par exemple si $\mathcal{F}^\gamma = \{A, B\}$, alors $\mathcal{F}^{\gamma^c} = \{\{s\} : s \in A \cap B\} \cup \{\{s_A, s_B\} : s_A \in A \setminus B, s_B \in B \setminus A\}$. Reconstruisons les éléments de \mathcal{F}^γ à partir de \mathcal{F}^{γ^c} . Chaque ensemble \mathcal{F}^γ doit contenir $A \cap B$. Supposons que nous choisissons $s_A \in \{s_A, s_B\}$. Ce choix couvre tous les ensembles focaux $\{s_A, s\}, s \in B \setminus A$. Cela nous empêche de choisir le prochain élément dans $B \setminus A$. Donc le choix suivant se trouve dans A . Ainsi l'ensemble focal A est construit.

Regardons le cas général. Dans la suite \mathcal{F}_β^γ est l'ensemble des éléments focaux A de γ tels que $\gamma(A) = \beta$. Une preuve similaire à celle de la proposition 5 entraîne le résultat suivant :

Proposition 7 *Soit γ une capacité et $\mathcal{F}^\gamma = \{E_1, \dots, E_k\}$. Alors, $\gamma^c(A) = 1$ ssi $\forall i = 1 \dots, k : E_i \cap A \neq \emptyset$. De plus, $\mathcal{F}_1^{\gamma^c} = \min_{\subseteq} \{\{s_1, \dots, s_k\}, s_i \in E_i, i = 1 \dots, k\}$.*

Proposition 8 *A est un élément focal de γ^c tel que $\gamma_\#^c(A) = \nu(\alpha) > 0$ si et seulement si c'est un élément minimal de l'ensemble $\{E = \{s_E : \gamma_\#(E) > \alpha\}, E \cap F = \emptyset$ pour un certain $F \in \mathcal{F}_\alpha^\gamma\}$, avec $s_E \in E$.*

Preuve : $\gamma_\#^c(A) = \nu(\alpha)$ signifie que A est un ensemble minimal tel que $\gamma^c(A) = \nu(\alpha)$.

$\gamma^c(A) = \nu(\alpha) \neq 0, 1$ ssi $\forall E, \gamma_\#(E) > \alpha$ implique $E \cap A \neq \emptyset$ et $\exists E, E \cap A = \emptyset$ tel que $\gamma_\#(E) = \alpha$. En effet, $\gamma^c(A) \geq \nu(\alpha)$ ssi $\gamma(A^c) \leq \alpha$ ssi $\forall E, \gamma_\#(E) > \alpha$ implique $E \not\subseteq A^c$. De plus $\gamma^c(A) = \nu(\alpha)$ est vraie s'il existe un ensemble focal $E \subseteq A^c$ tel que $\gamma_\#(E) = \alpha$. ■

Nous pouvons donc construire la transformée qualitative de Möbius d'une capacité à partir de celle de sa conjuguée. Il est facile de voir que dans le cas général, si une capacité a k éléments focaux sa conjuguée sera k -maxitive, car les plus grands éléments focaux γ^c sont obtenus en choisissant un élément dans chaque élément focal de γ .

Il reste la question de savoir comment construire les n distributions de possibilité

telles que γ est n -adjonctive en termes de m distributions de possibilité telles que γ est m -max-dominante. Par exemple une mesure de nécessité N est 1-adjonctive par rapport à sa distribution de possibilité π , elle est aussi n -max-dominante par rapport à n mesures de possibilité avec n le nombre d'éléments focaux emboîtés de la mesure de nécessité N . Plus précisément les ensembles distincts $A_{\alpha_i} = \{s : \pi(s) \geq \alpha_i\}$ sont tels que $N_{\#}(A_{\alpha_i}) = \nu(\alpha_{i+1})$, avec $\alpha_1 = 1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > \alpha_{n+1} = 0$. Alors $N = \min_{i=1}^n \Pi_i$, avec $\pi_i(s) = \nu(\alpha_{i+1})$, $\forall s \in A_{\alpha_i}$ et 1 sinon.

3 Un point de vue logique modale sur les capacités

Dans cette section nous allons montrer que les résultats précédents suggèrent une nouvelle sémantique pour des logiques modales générales. Considérons un langage propositionnel \mathcal{L} ayant des variables booléennes $\{a, b, c, \dots\}$ et des connecteurs $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$. Soit S l'ensemble des interprétations de ce langage. Etant données une proposition $p \in \mathcal{L}$, une mesure de nécessité N sur S dont la distribution de possibilité est π , $\Box p$ représente $N(A) \geq \lambda > 0$, avec $A = [p] \subseteq S$ l'ensemble des modèles de p . $\Box p$ correspond à la mesure de nécessité booléenne dont la distribution de possibilité est la fonction caractéristique de $E = \{s | \pi(s) > \nu(\lambda)\}$.

Considérons un langage propositionnel de niveau supérieur \mathcal{L}_{\Box} défini par $\forall p \in \mathcal{L}, \Box p \in \mathcal{L}_{\Box}$, et si $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\Box}$, alors $\neg\phi \in \mathcal{L}_{\Box}$, et $\phi \wedge \psi \in \mathcal{L}_{\Box}$. Les variables de \mathcal{L}_{\Box} sont alors $\{\Box p : p \in \mathcal{L}\}$. $\Diamond p$ est une notation simplifiée de $\neg\Box\neg p$. Alors $\Diamond p$ modélise $\Pi(A) \geq \nu(\lambda)$ où Π est la conjuguée de N . Cela définit un fragment très élémentaire de la logique modale KD connue sous le nom de MEL [1]. En effet les axiomes suivants sont vérifiés

- (K) : $\vdash \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.
- (N) : $\vdash \Box p$ si p est une tautologie ($\vdash p$).
- (D) : $\vdash \Box p \rightarrow \Diamond p$.

Ces axiomes impliquent la forme booléenne de

l'axiome de minitivité, soit l'axiome (C) : $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$.

Un modèle pour une formule $\phi \in \mathcal{L}_{\Box}$ est un ensemble non vide $E \subseteq S$. L'ensemble E est compris comme l'état épistémique d'un agent. La satisfaction des formules de MEL est alors définie de la façon suivante pour $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\Box}$:

- $E \models \Box p$, si et seulement si $E \subseteq [p]$;
- $E \models \neg\phi$, si et seulement si $E \not\models \phi$;
- $E \models \phi \wedge \psi$, si et seulement si $E \models \phi$ et $E \models \psi$;
- alors, $E \models \Diamond p$ si et seulement si $E \cap [p] \neq \emptyset$.

Pour tout ensemble $\Gamma \cup \{\phi\}$ de \mathcal{L}_{\Box} -formules, ϕ est une conséquence sémantique de Γ , notée $\Gamma \models \phi$, lorsque pour chaque épistémique E , $E \models \Gamma$ implique $E \models \phi$. Si N est une mesure de nécessité booléenne induite par E , on lui associe une interprétation classique de \mathcal{L}_{\Box} , de la forme $\bigwedge_{p \in \mathcal{L} : N([p])=1} \Box p \wedge \bigwedge_{p \in \mathcal{L} : N([p])=0} \neg\Box p$.

En utilisant le même langage $\models \Box p$ peut aussi représenter $\gamma([p]) \geq \lambda > 0$ pour toute capacité qualitative γ . $\Box p$ correspond alors à la capacité booléenne définie par $\gamma_{\lambda}(A) = 1$ si $\gamma([p]) \geq \lambda > 0$ et 0 sinon. On peut alors vérifier les axiomes suivants [8] :

- (RE) : $\vdash \Box p \equiv \Box q$ lorsque $\vdash p \equiv q$.
- (RM) : $\vdash \Box p \rightarrow \Box q$, lorsque $\vdash p \rightarrow q$.
- (N) : $\vdash \Box p$ si $\vdash p$; (P) : $\vdash \Diamond p$, si $\vdash p$.

C'est une logique modale non régulière. Plus précisément c'est un fragment de la logique modale monotone EMN [4], où les modalités ne s'appliquent qu'aux propositions. Sa sémantique habituelle est basée sur les voisinages (familles de sous-ensembles de mondes possibles ayant certaines propriétés). Cette logique ne satisfait pas les axiomes K, C et D. Cette logique modale est le point de vue logique naturel des capacités qualitatives. En effet, toute interprétation classique de \mathcal{L}_{\Box} satisfaisant les axiomes précédents définit et est définie par une capacité booléenne β . De plus elle est de la forme $\bigwedge_{p \in \mathcal{L} : \beta([p])=1} \Box p \wedge \bigwedge_{p \in \mathcal{L} : \beta([p])=0} \neg\Box p$.

Nous pouvons alors traduire la propriété de n -adjonction dans le cadre de la logique modale (lire [8] pour le cas $n = 2$). Soit n le plus petit entier pour lequel $\gamma(A) = \max_{i=1}^n N_i(A)$. En notant $\Box_i p$ pour $N_i([p]) \geq \lambda > 0$, il est clair que $\gamma([p]) \geq \lambda > 0$ représente $\Box p \equiv \bigvee_{i=1}^n \Box_i p$, où les \Box_i sont des KD modalités. Par dualité, $\Diamond p$ veut dire $\neg \Box \neg p$, et on a alors $\Diamond p \equiv \bigwedge_{i=1}^n \Diamond_i p$. On peut écrire alors l'axiome de n -adjonction dans le cadre logique :

$$(n\text{-C}) : \vdash (\bigwedge_{i=1}^{n+1} \Box p_i) \rightarrow \bigvee_{i \neq j=1}^{n+1} \Box (p_i \wedge p_j)$$

Cela implique que si les $p_i, i = 1 \dots, n+1$ sont mutuellement inconsistants alors $\vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n+1} \Box p_i$. Cette propriété montre qu'on ne peut pas avoir $\gamma([p_i]) \geq \lambda > 0$ pour tout $i = 1 \dots, n+1$.

La sémantique de la logique EMNP+ n -C peut s'exprimer de deux façons :

- Sous la forme de n états épistémiques (sous-ensembles de S) : $(E_1, \dots, E_n) \models \Box p$ si $\exists i \in [1, n], E_i \models \Box_i p$. Par construction, E_1, \dots, E_n sont les ensembles focaux de la capacité booléenne définie par $\gamma_\lambda(A) = 1$ si $\gamma([p]) \geq \lambda > 0$ et 0 sinon.
- En termes de voisinage : ce sont les sous-ensembles non vides \mathcal{N} de 2^S tels que $\mathcal{N} \models \Box p$ si et seulement si $[p] \in \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \models \Diamond$ si et seulement si $[\neg p] \notin \mathcal{N}$.

Pour une KD modalité, il est clair que $\mathcal{N} = \{A, N(A) \geq \lambda\} = \{A | A \supseteq E\}$ pour un ensemble non vide $E \subseteq S$ (\mathcal{N} est un filtre propre). Pour une modalité EMNP $\mathcal{N} = \{A, \gamma(A) \geq \lambda > 0\} \neq 2^S$ est fermé pour l'inclusion et non vide. Pour une modalité EMNP+ n -C, $\mathcal{N} = \{A, \gamma(A) \geq \lambda > 0\}$ est l'union de n filtres propres de la forme $\{A, N_i(A) \geq \lambda\} = \{A | A \supseteq E_i\}$.

Dans le cas extrême où les ensembles (E_1, \dots, E_n) sont des singletons, la modalité $\Box p$ vérifie la distributivité par rapport à la disjonction : $\vdash \Box (p \vee q) \equiv \Box p \vee \Box q$ (mais non par rapport à la conjonction), ainsi que l'opposé de l'axiome D : $\vdash \Diamond p \rightarrow \Box p$. En d'autres termes, les modalités de nécessité et de possibilité sont échangées. Nous sommes

ramenés à la logique MEL en échangeant les modalités de base \Box et \Diamond . En fait, cet échange des modalités est une simple instance d'une question plus générale, considérée dans la section précédente, celle de calculer les éléments focaux d'une capacité à partir de ceux de sa conjuguée. Cela revient au niveau sémantique à la transformation d'une logique basée sur les états épistémiques de k agents dans la situation duale d'une logique multi-sources associée à un ensemble d'agents dont la connaissance a une imprécision limitée (i.e., où chaque état épistémique met en jeu au plus k mondes possibles).

4 Conclusion

Nous avons étudié la représentation des capacités prenant des valeurs sur une échelle finie totalement ordonnée par une famille de distributions de possibilité qualitatives. Il se trouve que toute capacité peut être vue soit comme une mesure de possibilité inférieure soit comme une mesure de nécessité supérieure par rapport à deux familles distinctes de distributions de possibilité. Cette remarque a conduit à proposer une généralisation des propriétés de maxitivité et de minitivité en théorie des possibilités, offrant ainsi une classification des capacités qualitatives en termes de niveaux croissants de complexité et de généralité, basée sur le nombre minimal de distributions de possibilité dont on a besoin pour les représenter. En particulier, on a montré qu'une intégrale de Sugeno est une intégrale possibiliste inférieure [7]. Le calcul d'une intégrale de Sugeno est simplifié pour des capacités k -adjonctives ou k -max dominantes. De plus, l'étude des relations entre les ensembles focaux d'une capacité et ceux de sa conjuguée a mis en évidence les liens entre capacités k -adjonctives et k -maxitives. Enfin, on a montré un lien entre les capacités qualitatives et les logiques modales non-régulières, qui généralisent les logiques modales de type KD au même sens où les capacités généralisent les mesures de nécessité.

De nombreuses directions de recherche s'ouvrent à partir de ces résultats :

- Du côté de la logique, on peut reconsidérer l'étude des logiques modales non-régulières à la lumière d'une sémantique basée sur les capacités. Le fait que cela conduit à des disjonctions d'opérateurs de nécessité de type KD rappelle le cadre épistémique de Belnap [3], et les logiques paraconsistantes. Le fait qu'un cas extrême de logique EMN revient à une logique modale similaire à celles de type KD où possibilité et nécessité sont échangées reflète le fait que dans le bitreillis de Belnap, les valeurs épistémiques représentant l'information contradictoire et l'absence d'information jouent des rôles symétriques.
- On peut aussi vouloir évaluer la quantité d'information (ou l'incertitude) contenue dans une capacité qualitative [16]. Dans [7], la distribution de possibilité maximumment spécifique dominant une capacité a été étudiée et s'avère être la contrepartie de la fonction de contour des fonctions de croyance pour les capacités qualitatives. Ceci peut suggérer une approche basée sur la comparaison des fonctions de contour.
- Une contrepartie qualitative de l'ordre informationnel basé sur la spécialisation des fonctions de croyance (inclusion d'ensembles focaux), ainsi que de la règle de combinaison de Dempster, a été proposée dans [18]. Ces recherches doivent être poursuivies dans le cadre de techniques de fusion d'information qualitative allant au delà de celles basées sur la théorie des possibilités.

Références

- [1] M. Banerjee, D. Dubois. A simple modal logic for reasoning about revealed beliefs. In : Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2009), C. Sossai, G. Chemello (Eds.), Springer, LNAI 5590, p. 805-816, 2009.
- [2] G. Banon, Constructive decomposition of fuzzy measures in terms of possibility and necessity measures. *Proc. VIth IFSA World Congress*, São Paulo, Brazil, vol. I, p. 217-220, 1995.
- [3] Belnap N.D. How a computer should think. In : Ryle G (ed.) *Contemporary Aspects of Philosophy*. Oriel Press, Boston, pp 30-56, 1977.
- [4] B.F. Chellas, *Modal logic : an Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980
- [5] G. Coletti, R. Scozzafava, and B. Vantaggi. Inferential processes leading to possibility and necessity. *Information Sciences*, 245 : 132-145, 2013.
- [6] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38 : 325-339, 1967.
- [7] D. Dubois. Fuzzy measures on finite scales as families of possibility measures. Proc. European Society For Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-LFA), Aix-Les-Bains, July 2011.
- [8] D. Dubois. Reasoning about ignorance and contradiction : many-valued logics versus epistemic logic. *Soft Computing*, 16 (11), p. 1817-1831, 2012.
- [9] D. Dubois, H. Fargier. Making discrete Sugeno integrals more discriminant, *Int. J. of Approximate Reasoning*, 50, 880-898, 2009.
- [10] D. Dubois, H. Fargier. Capacity refinements and their application to qualitative decision evaluation. In C. Sossai, G. Chemello (Eds.) *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2009)*, Verona (Italy), LNAI 5590, pages 311-322, Springer, 2009.
- [11] D. Dubois, H. Prade. Upper and lower possibilities induced by a multivalued mapping, Proc. *IFAC Symp. on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis*, Marseille, Jul. 19-21, 1983, 174-152.
- [12] D. Dubois, H. Prade. Evidence measures based on fuzzy information, *Automatica*, 21, 547-562, 1985
- [13] D. Dubois, H. Prade : Aggregation of possibility measures, In : J. Kacprzyk, M. Fedrizzi (eds.) : *Multiperson Decision Making using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, Kluwer, Dordrecht, 55-63, 1990.
- [14] M. Grabisch. On the representation of k -decomposable measures *Proc. 7th IFSA world Congress*, vol. 1, pages 478-483, Prague, 1997.
- [15] M. Grabisch. The Moebius transform on symmetric ordered structures and its application to capacities on finite sets. *Discrete Math*, 287 :17-34, 2004.
- [16] J.-L. Marichal, Marc Roubens : Entropy of Discrete Fuzzy Measures. *Int. J. of Uncert., Fuzziness and Knowledge-Based Syst.* 8(6) : 625-640, 2000.
- [17] R. Mesiar, k -order pan-discrete fuzzy measures, *Proc. 7th IFSA world Congress*, vol. 1, pages 488-490, Prague, 1997.
- [18] H. Prade, A. Rico. Possibilistic Evidence. European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2011), Vol. LNAI 6717, Weiru Liu (Eds.), Springer, p. 713-724, 2011.
- [19] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, 1976.
- [20] D. Schmeidler. *Core of exact games I*. *J. Math. Analysis and Appl.*, 40, 214-225, 1972.
- [21] E. Tsiporkova, B. De Baets : A General Framework for Upper and Lower Possibilities and Necessities. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 6(1) : 1-34, 1998.
- [22] P. Walley. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, 1991.

Preserving Interpretability in the Optimization of Fuzzy Systems: a Generic Algorithm in a Topological Framework

R. de Aldama¹ *

M. Aupetit¹

¹ CEA-LIST

CEA, LIST, Laboratoire Analyse de Données et Intelligence des Systèmes,
Gif-sur-Yvette F-91191, France ;
ricardo.de.aldama@iscpif.fr, michael.aupetit@cea.fr

Résumé :

Nous proposons un formalisme mathématique pour analyser l'interprétabilité d'une partition floue, ainsi qu'un algorithme générique pour la préserver pendant le processus d'optimisation du système flou. L'approche est assez souple et il aide à automatiser le processus d'optimisation. Certains outils sont empruntés au domaine de la topologie algébrique.

Mots-clés :

système flou, partition floue, interprétabilité, optimisation

Abstract:

We present a mathematical framework to analyze the interpretability of a fuzzy partition and a generic algorithm to preserve it during the optimization of the fuzzy system. This approach is rather flexible and it helps to highly automatize the optimization process. Some tools come from the field of algebraic topology.

Keywords:

fuzzy system, fuzzy partition, interpretability, optimization, tuning

1 Introduction

Fuzzy ruled based systems have found many real-world applications. One of their appealing features is that in most cases they are easily interpretable by humans. However, when used to tackle complex problems, there is often need to make use of automatic optimization methods that improve the original system (cf. [2]). These automatic methods have a drawback: It may entail important losses in the interpretability of the system, in particular in the fuzzy partitions. The goal of this paper is to deal with this loss of inter-

pretability.

Let us say that the fuzzy system under study is composed of rules of the form “If x_1 is A_1 and \dots x_n is A_n , then y is B ”, where x_i and y are linguistic variables and A_i and B are predicates. These predicates have their numeric counterparts: The fuzzy sets which formalize their meaning. If these rules are fixed and we adjust the parameters determining the fuzzy sets, the process is usually called *tuning* or *parametric optimization*. If we adjust the number of rules, the space of functions to which the fuzzy sets belong, or some other high-level components of the fuzzy system, the process is usually called *structural optimization* or *learning*. The work presented in this paper concerns the case of parametric optimization.

Although there is no standard definition for the notion of interpretability of a fuzzy system, we can distinguish, following [1, 3], two levels of interpretability: That of fuzzy partitions and that of rule analysis. In this paper we deal with the problem of preserving the interpretability of the fuzzy partitions during the process of parametric optimization. We can divide this work in two parts: Firstly we provide a mathematical framework in which the concept of interpretability may be formalized, and secondly we provide a generic algorithm that takes as input a fuzzy system and a function to optimize (that measures the quality of a fuzzy system) and gives as output an optimized fuzzy system that pre-

*Current address: Télécom ParisTech - TSI, CNRS LTCI, 46 rue Barrault, F-75634 Paris Cedex 13.

serves interpretability.

Thanks to this formalization the process of optimizing will be, in our view, much more painless for the user than in previous approaches. In particular it may be carried out not only by experts in optimization of fuzzy systems as usual, but also by users that are just experts in the problem-specific domain and whose knowledge in fuzzy theory may be limited.

In our approach we do not fix a priori the notion of interpretability. The mathematical framework that we propose is problem-independent and sufficiently generic to let the user establish which configuration he wants to preserve during the optimization process. The essential point is the formalization of the notion of interpretability in topological and geometrical terms. Its preservation implies some particular constraints on the acceptable solutions for the optimization problem. In the generic algorithm that we propose, the codification and verification of these constraints is automatically done.

The geometric and topological analysis begins with a fuzzy system that the user considers interpretable. The domain of each variable is partitioned in such a way that the relative order of the different membership functions is constant on each region. These regions, and the order relations associated to them, will determine the geometric and topological constraints that will be taken into account during the optimization. In order to codify this information, a key role is played by homology groups. We make use of these well-known algebraic objects, which are able to capture a very significant part of the topology of a space and are well-suited for computer calculations. There exist several implementations to compute different homology groups. The reader interested in more details may consult for instance [5, 6, 8].

2 A topological framework for the analysis of interpretability

2.1 The main idea

What we propose in this paper is not an absolute definition of interpretability, but rather a framework in which the actual definition, which will strongly depend on the user, can be expressed. We may talk then, given a user U , of *interpretability relative to U* . Our approach is strongly focused on topology: Our viewpoint is that the properties of the fuzzy partition that the user requires to be preserved are essentially of a topological nature.

Let us say a user defines a fuzzy partition such as the one on Figure 1. It seems reasonable to consider that the user requires the optimization process to preserve, at least, the order of the terms. This order, though not explicitly formalized, underlies the solution we usually find in the literature: To strongly constrain the possible variations of the membership functions, in order to obtain very similar configurations as the original one (as in Figure 1).

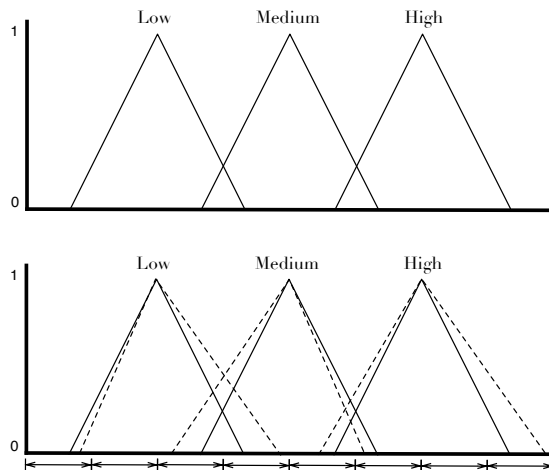


Figure 1: Example of a fuzzy partition and some possible constraints on it.

Some difficulties may arise if we try to define an order in a case such as that of Fig-

ure 2. In more general cases, such as those of 2-dimensional variables, the concept of order may not even make any sense. However, there are always some basic properties that the user wants to preserve to be able to attach some meaning to the system. In our approach, these properties have a topological nature and are locally determined by the values of the different membership functions. In particular, we think that the relative order of these values is crucial.

The main idea is to partition the numeric domain of the variable into regions in which the relative order of the membership functions is constant, such as in Figure 2.

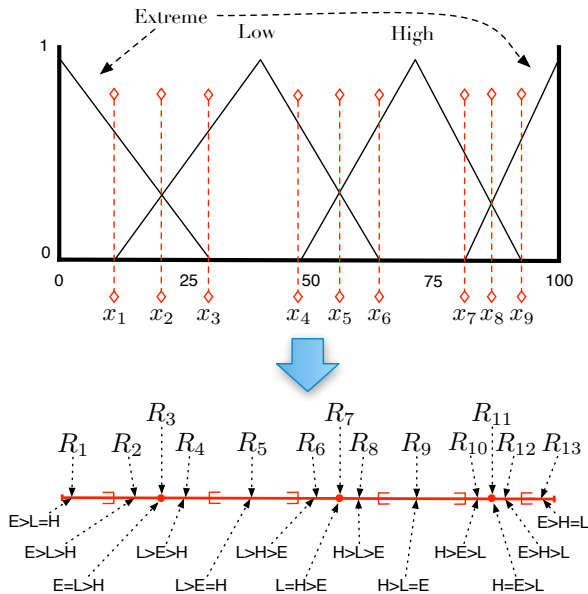


Figure 2: Decomposition of the domain in regions R_i in which the relative order of the membership functions is constant. We suppose that the domain of the variable is the interval $[0, 100]$.

Some properties of this partition will be required to be preserved during the optimization process. Examples of such properties could be:

- There is a region R_2 in which the relation $\text{Extreme} > \text{Low} > \text{High}$ holds, with

neighbors R_1 and R_3 , such that in R_1 we have $\text{Low} = \text{High} < \text{Extreme}$, and in R_3 we have $\text{Extreme} = \text{Low} > \text{High}$.

- The value 50 belongs to the region R_6 that verifies $\text{Low} > \text{High} > \text{Extreme}$.

The rest of the section will be devoted to make this main idea more precise. In particular, we will present two key notions: The *geometric* and *topological signatures*.

2.2 Notation and definitions

The definitions concerning fuzzy systems, such as linguistic variable, membership function, etc. are standard (see for instance [7]). We consider that the numeric domains associated to each linguistic variable are equipped with a natural topology (as it is the case with \mathbb{R}^n).

- Let Ω be the set of possible fuzzy systems under consideration, and let $A = A_1 \times \dots \times A_n$ (typically $A \subseteq \mathbb{R}^n$) be the domain of the parameter vector that we consider as determining a fuzzy system. A solution to our optimization problem will be then an element $\bar{a} \in A$.
- We denote by $\omega : A \rightarrow \Omega$ the map that determines a fuzzy system $\omega(\bar{a})$ from the parameter vector \bar{a} . In particular ω determines every membership function of the system.
- We denote by V the set of all linguistic variables and we suppose it is the same for every $\omega \in \Omega$. We denote by Dom_v the domain of a linguistic variable $v \in V$.

2.3 Geometric signature

Let $\omega \in \Omega$ be a fuzzy system and $v \in V$ a linguistic variable. The *geometric signature* of ω relative to v , that we denote by $\mathcal{G}_\omega(v)$, is

a mathematical object that captures all the potentially interesting properties of the partition induced by ω on Dom_v . It provides the regions in which the relative order of the different membership functions is constant, and together with each region, its corresponding order.

As an illustration, consider that for a certain $\omega \in \Omega$ and $v \in V$, Figure 2 represents the partition induced by ω on Dom_v . In this case $\mathcal{G}_\omega(v)$ is the map that associates to $i \in \{1, \dots, 13\}$ the region R_i , together with the corresponding order relation on terms. For instance:

- $\mathcal{G}_\omega(v)(1)$ is the region R_1 , i.e. the interval $[0, x_1]$, together with the order **Extreme** > **Low** = **High**.
- $\mathcal{G}_\omega(v)(3)$ is the region R_3 , i.e. the point $\{x_2\}$, together with the order **Extreme** = **Low** > **High**. In practice, regions of low dimension (0 in this case) may be ignored.

In some cases the user might consider certain “dummy” functions $Dom_v \rightarrow [0, 1]$ to code particular constraints, such as interactions between membership functions. For instance, to deal with strong partitions we might consider the constant function 1 and the function $\sum_i \mu_i(x)$ (where μ_i represents the i -th membership function).

The *geometric signature* of ω , denoted by \mathcal{G}_ω , is the map that associates $\mathcal{G}_\omega(v)$ to $v \in V$.

2.4 Topological signature

The *topological signature* of ω relative to v , that we denote by $\mathcal{T}_\omega(v)$, is a weaker concept than that of the geometric signature, i.e. for $\omega, \eta \in \Omega$, if $\mathcal{G}_\omega(v) = \mathcal{G}_\eta(v)$ then $\mathcal{T}_\omega(v) = \mathcal{T}_\eta(v)$. It codes the topological information contained in $\mathcal{G}_\omega(v)$. The *topological signature* of ω is the map that associates $\mathcal{G}_\omega(v)$ to $v \in V$. We denote by \mathcal{T}_ω .

In the field of computational topology, the use of homology groups is widely spread to deal with the topology of a space. We will not provide here any definition concerning homology theory, since it is out of the scope of this paper; nevertheless we should say that these groups are topological invariants of algebraic nature, that capture an important part of the topological information of a space and are well-suited from an algorithmic viewpoint. The reader interested may consult for instance [5], a standard reference in algebraic topology, or [6, 8] for an approach more focused on computational aspects.

We can propose then to code the topological signature in terms of these homology groups, that we denote by H_N for $N \in \mathbb{N}$. Let $v \in V$ and consider $\omega, \eta \in \Omega$ such that ω induces a partition on Dom_v composed of regions R_1, \dots, R_n and η induces a partition on Dom_v composed of regions S_1, \dots, S_n . Then we say that $\mathcal{T}_\omega(v)$ and $\mathcal{T}_\eta(v)$ are equal if there is a n -permutation σ such that:

1. the order on terms corresponding to R_i is the same as that of $S_{\sigma(i)}$ for $i = 1, \dots, n$, and moreover
2. $H_n(\bigcup_{k \in K} S_{h(k)}) \approx H_n(\bigcup_{k \in K} R_k)$ for each $K \subseteq I$ and $n \in \mathbb{N}$.

The homology groups are characterized by some integers, namely the *Betti numbers* and the *torsion coefficients*; they will be stored and used as topological signature. However, we should say that this is a general-purpose coding; in practice there may be different ways to implement the notion topological signature, depending mostly on the nature of Dom_v . In some cases the computation of these homology groups may not be necessary and a much more efficient coding can be devised.

To illustrate the notion of topological signature, consider that for a certain $\omega \in \Omega$ and

$v \in V$, Figure 2 represents the partition induced by ω on Dom_v . In this case, $\mathcal{T}_\omega(v)$ provides for each $i \in \{1, \dots, 13\}$ the the order on terms corresponding to the region R_i , and for each $K \subseteq \{1, \dots, 13\}$ the topological information of $\bigcup_{i \in K} R_i$. For instance, if we consider $K = \{4, 5\}$, $\mathcal{T}_\omega(v)$ codes the fact that $R_4 \cup R_5$ is connected, and if we consider $K = \{1, 6, 9\}$ the fact that $R_1 \cup R_6 \cup R_9$ is composed of three connected components. Essentially, $\mathcal{T}_\omega(v)$ codes the following information:

1. There are 13 regions R_i (each one being a connected set),
2. the order on terms corresponding to R_1 is Extreme > Low = High, that of R_2 is Extreme > Low > High, etc.
3. R_1 is neighbor of R_2 , R_2 is neighbor of R_1 and R_3 , etc.

Hence if we consider another $\eta \in \Omega$ whose decomposition of Dom_v is given by regions S_1, \dots, S_M , then $\mathcal{T}_\eta(v) = \mathcal{T}_\omega(v)$ iff $M = 13$, and for some permutation σ we have:

1. The order on terms corresponding to $S_{\sigma(1)}$ is Extreme > Low = High, that of $S_{\sigma(2)}$ is Extreme > Low > High, etc.
2. $S_{\sigma(1)}$ is neighbor of $S_{\sigma(2)}$, $S_{\sigma(2)}$ is neighbor of $S_{\sigma(1)}$ and $S_{\sigma(3)}$, etc.

3 User interactions: An operational definition of interpretability

As we have already mentioned, we do not provide an absolute definition of interpretability, but rather, given a user U , a conceptual and operational framework to deal with interpretability relative to U . The goal of this section is to show how we can define and manipulate this interpretability relative

to U , relying on the notions presented in Section 2 and, importantly, on some interactions with U . We should mention that the interactions we present here seem to us flexible enough to cover most part of needs; however, other interactions could be consider.

Our base hypothesis is that the notion of interpretability has essentially a topological flavor. An oversimplified version of this hypothesis would be :

Assumption 1. *If a user U considers $\omega \in \Omega$ to be interpretable, then there is no $\eta \in \Omega$ considered as interpretable by U and such that $\mathcal{T}_\eta \neq \mathcal{T}_\omega$.*

Assumption 1 is slightly stronger than the actual assumption we make, however it synthesizes quite clearly the main idea of our approach. We want to provide an operational definition of interpretability relative to U . For this we need, of course, some interaction with U . Since we are talking about interpretability in the context of the optimization of a fuzzy system, we suppose that there exists at least one $\omega_0 \in \Omega$ that is interpretable relative to U and that U is capable of describing it, i.e. providing a parameter vector $\bar{a} \in A$ such that $\omega(\bar{a}) = \omega_0$.

This is the slightest interaction with U that our method needs. However, if we want to make our method more flexible, we can allow U to provide more information. Next we present the two other kind of interactions we may consider.

Relaxation of the topological conditions

This is basically a relaxation of Assumption 1. Once U has provided a $\omega_0 \in \Omega$ that he considers to be interpretable, one could consider that for a solution $\bar{a} \in A$ to be acceptable, i.e. such that $\omega(\bar{a})$ is interpretable relatively to U , \bar{a} must satisfy $\mathcal{T}_{\omega(\bar{a})} = \mathcal{T}_{\omega_0}$. Instead, we may let the user relax this condition: He could omit, if he wishes, some of the topological conditions imposed by \mathcal{T}_{ω_0} . Typically it

may consist in merging different regions and requiring a relaxed order on terms; in this case the relaxed order should be compatible with the order of the merged regions (see example in Figure 5). This notion of compatibility could be easily formalized in terms of the lattice of partial orders on terms.

Addition of geometric conditions Conversely U may strengthen the conditions for a solution to be considered interpretable. This extra conditions are of a geometric rather than topological nature. This will allow U to specify the regions to which certain points should belong. If we consider again Figure 2, U may want to include the condition “ $0 \in R_1$ ”, that is “0 should belong to the region indexed by 1”, or more precisely “0 should belong to the region whose corresponding order on terms is $\text{Extreme} > \text{Low} = \text{High}$, that is neighbor of other region (namely R_2) whose corresponding order is $\text{Extreme} > \text{Low} > \text{High}$, that is neighbor of etc. ”. It is clear that we can codify these kind of conditions in terms of the point 0 and the signature \mathcal{T}_{ω_0} .

4 Algorithm

We present here the different parts of a generic algorithm that fulfills our purpose: To optimize a given fuzzy system while preserving its interpretability. In Figure 3 we can see a scheme of this algorithm, but rather than explaining it in its more abstract form, we prefer to focus in the explanation of a particular example. The generic case will easily be induced from this description.

Let us consider a certain fuzzy system ω_0 modeling a 2-dimensional problem and in which only one linguistic variable v is involved. For instance there may be some rules involving the terms **East**, **West** and **Center** that are used to activate some procedures: We could imagine a fuzzy controller that produces policy decisions (e.g. public trans-

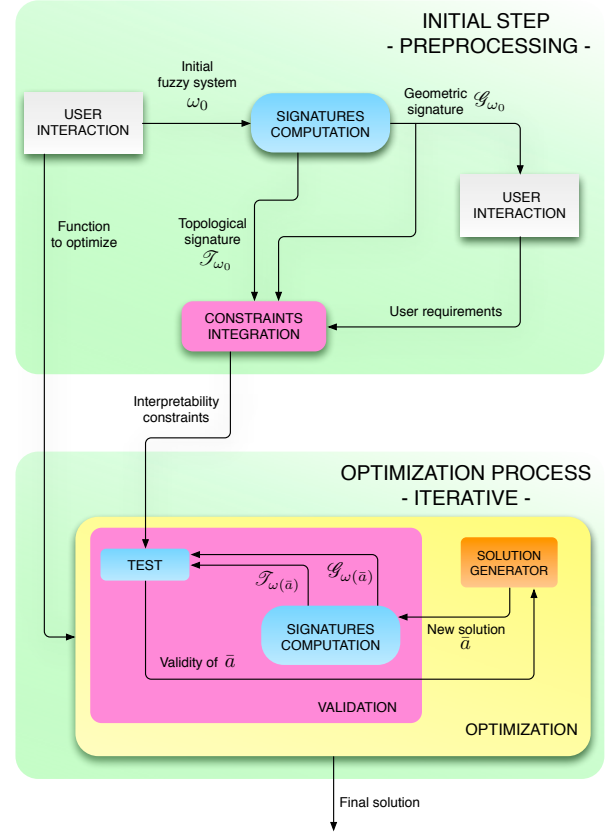


Figure 3: Scheme of the algorithm.

ports, taxes, etc.) for towns in a certain area, following rules of the type “If town T is in region **East** then apply policy P to T ”. An example of the membership functions associated to **East**, **West** and **Center** can be found in Figure 4.

Let us say a user U considers ω_0 as interpretable and wants to optimize it using a performance function f .

Preprocessing

Step 0. The user gives ω_0 and f as input.

Step 1. The first part of the algorithm consists in computing the geometric signature, that is the regions in which the order of terms is constant. Let $\mu_{\text{West}}, \mu_{\text{Center}}, \mu_{\text{East}} : \text{Dom}_v \rightarrow [0, 1]$ be the membership functions corresponding to the terms **West**, **Center** and **East**. The domain is discretize and each

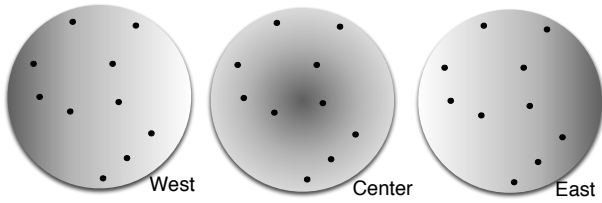


Figure 4: Example of three membership functions associated to a 2-dimensional variable. Darker colors represent values closer to 1. The black dots represent towns.

function is evaluated on each point of the grid. This evaluation induces a label for each point, e.g. a point x gets the label **West** < **East** < **Center** if $\mu_{\text{West}}(x) < \mu_{\text{East}}(x) < \mu_{\text{Center}}(x)$. Then we can explicitly compute the regions (maximal connected components with the same label) by using, for instance, the method described in [4].

Step 2. At this point comes the second interaction with U (apart from Step 0): The regions are presented to him (we can omit regions of dimension 0 and 1) and then he can, first relax the topological conditions that will be imposed to the acceptable (interpretable) solutions, and afterwards impose some geometric conditions. In Figure 5 we can see an example in which U , only interested in the function with highest value, decides to relax the topological conditions by merging the regions that share the same highest-valued function; he also imposes the geometric conditions “town X must belong to the region in which the value of **West** is the biggest” and “town Y must belong to the region in which the value of **Center** is the biggest”.

Step 3. No other interaction with U is needed, since he has just operationally defined what he considers as interpretable: This definition is essentially contained in the right side of Figure 5 (in Figure 6 we can find examples of interpretable and not-interpretable solutions). This information is then coded in terms of homology groups, fol-

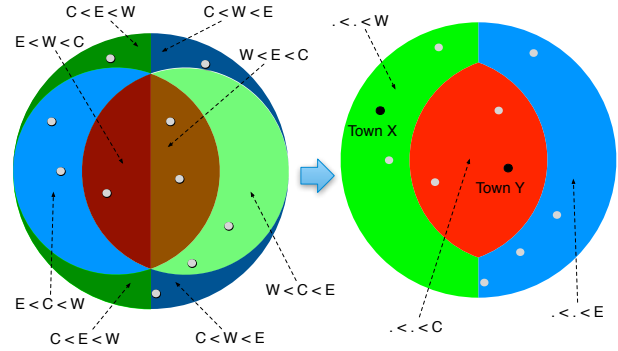


Figure 5: Regions induced by the functions in Figure 4. On the right side, a relaxation of the topological conditions and the addition of two geometric conditions: Since only the highest-valued functions are relevant, some labels are merged; moreover town X must belong to the region in which μ_{West} is the highest-valued function and town Y to the region in which μ_{Center} is the highest-valued function.

lowing the explanations of Section 2 and using for instance the algorithms presented in [6].

Optimization process

Step 4. This well-coded information, as well as the function f and ω_0 , is given as an input to an optimization algorithm, and is interpreted as a constraint C on the (signatures of the) solutions. This optimization algorithm may be of different types (e.g. metaheuristic or exact) depending on the nature of f . As it is the case for any iterative optimization algorithm, it should contain a “solution generator” module. This module may have different ways of dealing with constraints. The most basic option would be to test C for each solution that it generates and to use the result of the test to generate a new solution. Another option would be to do some kind of pre-processing, in which the acceptable domain is approximated, and then to only generate valid solutions. In any case we will need to iterate a process similar to Step 1 and Step 3:

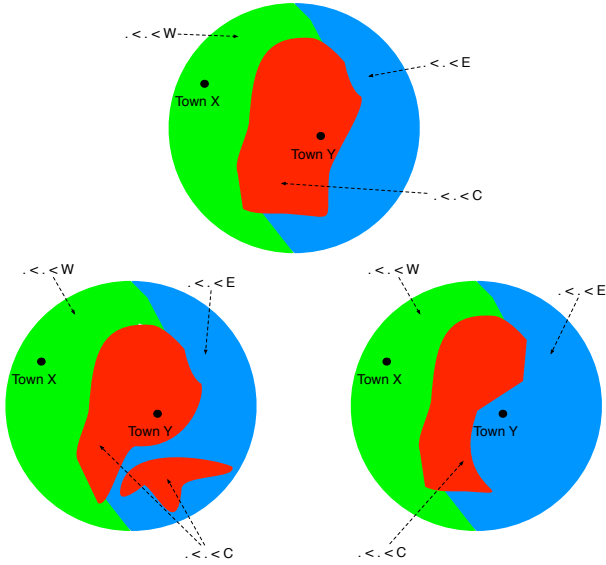


Figure 6: The top figure corresponds to a possible configuration of a solution that is acceptable. The bottom figures correspond to unacceptable configurations: The left one does not satisfy the topological conditions since the region whose highest-valued function is μ_{Center} is disconnected; the right one does not satisfy the geometric conditions since town Y does not belong to the region whose highest-valued function is μ_{Center} .

Given $\bar{a} \in A$, compute $\mathcal{G}_{\omega(\bar{a})}$ and $\mathcal{I}_{\omega(\bar{a})}$, and use them to test if \bar{a} satisfies C . This will ensure that the final solution is interpretable relative to U .

5 Conclusion

We have presented a generic method to deal with the loss of interpretability in fuzzy partitions during the optimization of a fuzzy system. It relies essentially on topological concepts and tools, which confers a solid mathematical foundation, and makes use of different well-known algorithms in computational topology. Our definition of interpretability is not absolute, but rather relative to each user, who implicitly defines the notion by means of some specific interactions. That makes this approach quite flexible. Moreover the

method can be uniformly applied in many situations without the need of an expert in optimization of fuzzy systems. The next step is to fully implement the algorithm and to validate it by user-testing.

References

- [1] José M. Alonso, Serge Guillaume, and Luis Magdalena. Un indice d'interprétabilité des bases de règles floues. In *Rencontres LFA francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA)*, Toulouse, 2006.
- [2] Oscar Cordón, Francisco Herrera, Frank Hoffmann, and Luis Magdalena. *Genetic fuzzy systems: evolutionary tuning and learning of fuzzy knowledge bases*. World Scientific Publishing Company, 2002.
- [3] J.V. de Oliveira. Semantic constraints for membership function optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 29(1):128–138, 1999.
- [4] MB Dillencourt, H Samet, and M Tamminen. A General Approach to Connected-Component Representations Labeling for Arbitrary Image Representation. *Journal of the ACM (JACM)*, 39(2):253–280, 1992.
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] Tomasz Kaczynski, Konstantin Mischaikow, and Marian Mrozek. *Computational homology*, volume 157 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [7] G J Klir and B Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. Prentice Hall New Jersey, 1995.
- [8] Afra Zomorodian. *Topology for computing*, volume 16. Cambridge University Press, 2005.

Modus Ponens Généralisé avec contrôle d'applicabilité de la règle

Generalized Modus Ponens with control of rule's applicability

M. Detyniecki¹

B. Bouchon-Meunier¹

B. Moubêche²

¹ Laboratoire d'Informatique de Paris VI, Université Pierre et Marie Curie

² ENS Cachan, Département de Mathématiques

¹ 4, place Jussieu, 75 005 Paris, France - marcin.detyniecki@lip6.fr - bernadette.bouchon-meunier@lip6.fr

² 61, avenue du Président Wilson, 94 230 Cachan, France - benjamin.moubêche@ens-cachan.fr

Résumé :

Dans la formulation du Modus Ponens Généralisé (MPG) rien n'empêche de faire un raisonnement avec une observation disjointe de la prémisse. Même si les conclusions obtenues, dans ce cas, ont été interprétées par plusieurs auteurs, peu de travaux se sont penchés sur un contrôle de l'applicabilité de la règle.

Dans cet article, nous étudions une inférence basée sur un Modus Ponens Généralisé (MPG) avec contrôle de l'applicabilité en utilisant une conjonction entre l'observation et la prémisse. Nous constatons que cette nouvelle formulation du MPG, dans le cadre de la logique floue dite de Zadeh-Gödel et en conséquence avec utilisation d'une vraie implication, donne exactement les mêmes résultats que ceux obtenus par l'inférence de Mamdani. En d'autres termes, on obtient une nouvelle interprétation de l'inférence de Mamdani dans un cadre logique, au lieu de la considérer comme une représentation graphique d'une fonction décrite comme une disjonction de points flous (i.e. interprétation classique).

Par ailleurs, cette nouvelle formulation ouvre la voie à de nouvelles méthodes d'inférence qui ont un esprit similaire à celle de Mamdani, mais présentent de nouvelles caractéristiques particulières.

Mots-clés :

Modus Ponens Généralisé, Inférence de Mamdani, Implications, Incertitudes

Abstract:

Even if the Generalized Modus Ponens (MPG) has been studied and interpreted by several authors, little work has been done on controlling the applicability of the rule. In fact, in its formulation nothing prevents from applying the formula even when the observation is disjoint from the premise.

In this paper we study an inference based on the Generalized Modus Ponens (MPG) with control of the applicability by a conjunction between the observation and the premise. We find that this new formulation of the MPG, in the Zadeh-Gödel fuzzy logic framework and thus using a real implication infers the same conclusions as those obtained by Mamdani's inference. In other words, we obtain a new interpretation of Mamdani's inference inside a logical framework instead of considering it as a graph of a function described as a disjunction of fuzzy points (i.e. the classical interpretation).

In addition, this new formulation opens the way up to new methods of inference that are similar in spirit to Mamdani's, but with novel particularities.

Keywords:

Generalized Modus Ponens, Mamdani Inference, Implications, Uncertainty

1 Introduction

Dans la formulation du Modus Ponens Généralisé (MPG) rien n'empêche de faire un raisonnement avec une observation disjointe de la prémisse. Même si les conclusions obtenues, dans ce cas, via les différentes inférences ont été interprétées par plusieurs auteurs [11, 14], peu de travaux se sont penchés sur un contrôle de l'applicabilité de la règle.

Dans la littérature, deux grands modes d'inférence se confrontent [13] : le Modus Ponens Généralisé (MPG) proposé par Zadeh [10] et l'inférence de Mamdani [4], sur laquelle s'appuie une grande partie des contrôleurs flous [9].

Une des grandes différences qui apparaît par la simple observation des formulations est que l'inférence de Mamdani permet de conclure à partir d'hypothèses en utilisant une *pseudo-implication*, dont il est bien connu [12] qu'elle ne répond pas aux critères des implications [5].

Il est bien connu que la commande floue regarde l'inférence de Mamdani comme une description disjonctive des points du graphe de la fonction de commande alors que les autres autres inférences se réfèrent à une description

conjonctive.

Dans ce papier nous rappelons ces deux modes d'inférence. Ensuite, nous focalisons notre attention sur le comportement du Modus Ponens Généralisé quand la règle ne s'applique pas (i.e. lorsque l'observation et la prémisse sont disjointes).

Ces observations nous amènent à introduire, en section 3, une formulation du MPG intégrant l'applicabilité de la règle, pour laquelle nous explicitons quelques propriétés. Nous constatons que l'inférence de Mamdani est *équivalente* à un Modus Ponens Généralisé avec contrôle d'applicabilité de la règle. Pour finir, nous illustrons comment cette nouvelle formulation ouvre la voie à des méthodes d'inférence qui ont des caractéristiques proches de celle de Mamdani, tout en reposant sur des "vraies" implications.

2 Inférences approximatives

2.1 Le Modus Ponens Généralisé

Le Modus Ponens classique permet de tirer des conclusions à partir de règles pré-établies. Ainsi, à partir d'une implication $A \Rightarrow B$ ("Si le feu est rouge, alors je m'arrête") et de la donnée de la prémisse A ("le feu est rouge"), on peut déduire la proposition B ("je m'arrête").

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \rightarrow B \quad (1)$$

Dans le cadre général, les observations sont proches de la prémisse A et tiennent compte de la certitude que l'on peut leur accorder. Il est donc important de pouvoir utiliser l'implication pour une donnée qui n'est pas nécessairement A , ce qui conduit au raisonnement approximatif introduit par Zadeh [10]. Le Modus Ponens Généralisé permet d'exploiter l'implication proposée pour une prémisse proche de A , notée A' , pour inférer une autre conclusion B' , dont la fonction d'appartenance se calcule à l'aide de la formule :

$$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T(f_{A'}(x), I_R(x, y)) \quad (2)$$

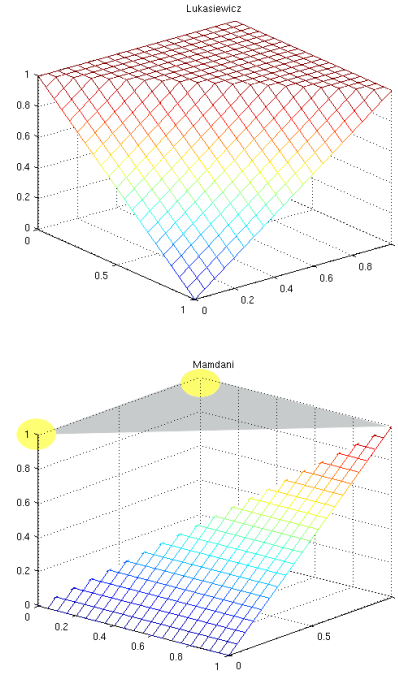


Figure 1: Implication de Łukasiewicz, en haut, et le *min*, opérateur utilisé par Mamdani à la place de l'implication, en bas.

où T représente une t-norme et I_R une implication floue.

Cette équation correspond à une extension à des ensembles flous de la proposition :

$$A' \wedge (A \Rightarrow B) \rightarrow B' \quad (3)$$

2.2 Inférence de Mamdani

Proposé par Mamdani en 1974, pour contrôler la vitesse d'un moteur [4], le contrôleur de Mamdani se base sur des règles d'inférence, pour déduire des informations observées, des décisions de régulation [9]. La première étape, appelée fuzzification, consiste à récupérer les données d'observations et les traduire en sous-ensembles flous. Ces observations vont ensuite être confrontées au jeu de règles qui régit le contrôleur. C'est durant cette phase que l'inférence de Mamdani est généralement mise en oeuvre. On obtient ainsi des conclusions propres à chaque règle, que l'on agrège disjonctivement. L'ensemble final est ensuite traduit en

une valeur réelle, qui sera généralement l'abscisse du centre de gravité de cet ensemble. Cette dernière étape s'appelle la défuzzification. Ce type de contrôleur est souvent employé lors de la conception de systèmes régulés.

L'inférence, qui permet le calcul de l'ensemble B' se fait de la manière suivante :

$$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} (\min(f_{A'}(x), \min(f_A(x), f_B(y)))) \quad (4)$$

On remarque, comme d'autres auteurs l'ont fait auparavant [12], que cette formule correspond au cas général (2) en choisissant le *min* comme t-norme et en remplaçant l'implication par le *min* également.

Pourtant il est bien connu que le *min* n'est pas une implication, mais une conjonction.

2.3 Gestion des valeurs de vérité

Si l'on s'intéresse au comportement de ces deux opérateurs logiques (conjonction et implication), on observe que dans le cas booléen le comportement diffère quand la prémisse est FAUSSE. La conjonction donne toujours un résultat FAUX et l'implication un résultat VRAI, comme présenté sur la Figure 1. En logique floue, c'est principalement la zone où la deuxième variable est supérieure à la première (zone grisée sur la Figure 1) qui va différer. Au lieu de donner une valeur forte à l'implication, le résultat sera faible (ou nul).

Il se trouve que cette situation arrive surtout quand l'observation A' est très différente (voire disjointe) de A . En effet, dans ce cas, il existe un point dans l'univers où la prémisse est FAUSSE et l'observation est VRAIE. Donc, comme vu précédemment dans le cas du MPG l'implication sera VRAIE tandis que dans l'inférence de Mamdani la conjonction correspondante sera FAUSSE.

Dans le cas flou, en fonction de la combinaison t-norme/implication choisie pour le Modus Ponens Généralisé (2), les incertitudes et imprécisions ne sont pas gérées de la même

Tableau 1: Exemples d'opérateurs compatibles [1] pour le Modus Ponens Généralisé et pour le MPG avec applicabilité.

t-norme	Implications compatibles
Łukasiewicz	Łukasiewicz Kleene-Dienes Wilmott Brouwer-Gödel Rescher-Gaines
<i>min</i>	Brouwer-Gödel Rescher-Gaines

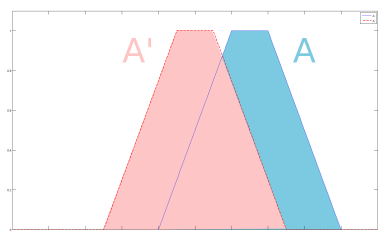
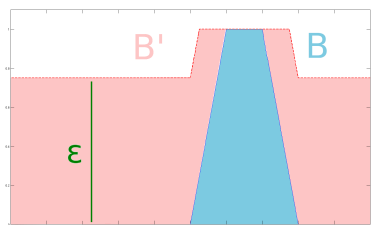
manière [1]. Mais toutes les combinaisons ne sont pas possibles. Plusieurs contraintes peuvent être imposées pour le choix des opérateurs. Classiquement, seule la compatibilité, avec le Modus Ponens Classique, est demandée, c'est-à-dire que l'on impose de retrouver B lorsque $A = A'$. Les combinaisons possibles [1] sous cette contrainte sont répertoriées dans le tableau 1.

La plupart des combinaisons compatibles vont placer un palier d'incertitude ε (Figure 2(b)), si bien que dans le cas limite où les deux ensembles A et A' sont disjoints, tout l'univers de la conclusion aura un degré d'appartenance variant 1.

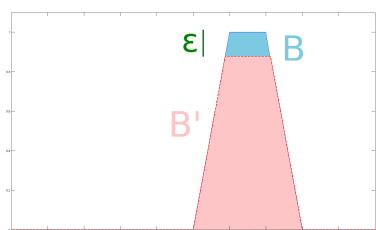
À l'inverse, l'inférence de Mamdani, comme définie en section 2.2, prend l'écart entre A et A' en diminuant la valeur maximale de l'ensemble (Figure 2(c)); si bien que dans le cas disjoint, on aura cette fois une valeur 0 pour tout l'ensemble d'arrivée.

2.4 Comportement du MPG quand la règle ne s'applique pas

Les différences décrites précédemment ont des conséquences qui vont au-delà des interprétations données à ces comportements. En particulier, le fait d'utiliser une conjonction plutôt qu'une implication a des conséquences sur l'agrégation de règles. Et tout parti-

(a) Observation A' et prémisses A 

(b) MPG avec t-norme et implication de Łukasiewicz



(c) Inférence de Mamdani

Figure 2: Gestion des incertitudes : on compare les résultats obtenus par les deux inférences étudiés dans un cas simple où A et A' ne sont pas identiques.

culièrement quand la règle ne devrait pas s'appliquer (i.e. quand l'observation et la prémisse sont disjointes).

L'utilisation d'une vraie implication (i.e. du MPG) impose un certain nombre de contraintes pour la création d'un système d'inférence ou d'un contrôleur, expliquées par de nombreux auteurs [11, 14].

Une des caractéristiques du MPG est que, si les ensembles A et A' ont des supports disjoints (ou *presque*), la conclusion inférée dépend exclusivement (ou *fortement*) de l'univers de définition de la conclusion. Ce comportement rend non seulement l'interprétation du sous-ensemble obtenu délicate, mais en cas de défuzzification [7], la valeur sera for-

tement influencée par l'univers de définition. Par exemple, considérons une règle dont la conclusion est un sous-ensemble flou de valeurs d'angle qui varient entre 45° et 90° . Si la mesure observée est telle que la règle ne s'applique qu'à la marge (i.e. observation et prémisse sont presque disjointes), on obtiendra tout l'univers (de 0° à 360°) avec un degré *proche* de 1 (i.e. totale ignorance), avec un MPG. Une défuzzification par centre de gravité donnera un résultat proche de 180° , qui se trouve loin du sous-ensemble conclusion de la règle.

On pourrait argumenter que le problème provient du fait qu'on ne doit pas défuzzifier en présence d'une "totale ignorance". Quelle est alors la limite? À partir de quel moment de cohérence observation-prémisse peut-on défuzzifier?

Une autre conséquence, connue de longue date [11], du comportement du MPG en présence d'observations et de prémisses disjointes, est que la fusion des conclusions doit être conjonctive. En effet, une agrégation disjonctive ferait que la conclusion d'une règle qui ne s'applique pas (ignorance totale) domine toute autre conclusion.

Malheureusement un contexte conjonctif empêche de modéliser des options alternatives. En effet, on peut simplement imaginer que deux règles se déclenchent avec la même observation et donnent des conclusions disjointes. La fusion conjonctive force la cohérence et donne des solutions qui malheureusement masquent les alternatives.

Comme ces comportements sont fortement liés à l'applicabilité de la règle, nous proposons de contrôler le MPG par une conjonction entre la prémisse et l'observation.

3 MPG avec applicabilité de la règle

Nous proposons une nouvelle formulation du Modus Ponens Généralisé, avec applicabilité de

la règle, dans le cadre suivant :

$$(A \wedge A') \wedge (A \Rightarrow B) \rightarrow B' \quad (5)$$

Cette formulation est compatible avec le Modus Ponens, puisque l'on retrouve (1) lorsque $A = A'$.

Nous proposons d'étendre cette formulation au cas des sous-ensembles flous, en mesurant l'applicabilité de la règle par l'évaluation de la compatibilité entre la prémisse A et l'observation A' par l'intermédiaire d'une conjonction T_2 :

$$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T_1(T_2(f_A(x), f_{A'}(x)), I_R(x, y)) \quad (6)$$

La compatibilité [1] avec le Modus Ponens classique, mentionnée précédemment, restreint le choix de T_2 au *min*. En effet, si on souhaite avoir $B' = B$ quand $A' = A$, alors la t-norme T_2 doit être idempotente, forçant ainsi le choix du *min*. Nous obtenons comme formulation pour le Modus Ponens Généralisé avec applicabilité de la règle :

$$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T(\min(f_A(x), f_{A'}(x)), I_R(x, y)) \quad (7)$$

3.1 Propriétés

Pour une t-norme T et une implication I_R quelconques, la formulation proposée (7) présente plusieurs propriétés notables :

- Propriété 1 : Si la prémisse et l'observation sont disjointes ($A \cap A' = \emptyset$), alors la conclusion est l'ensemble vide ($B' = \emptyset$).

Preuve :

Si A et A' sont disjoints, alors $\forall x \min(f_A(x), f_{A'}(x)) = 0$, qu'on remplace dans (7).

Cette propriété traduit le comportement souhaité du MPG avec applicabilité quand la règle ne s'applique pas : on obtient l'ensemble vide.

- Propriété 2 : Si l'observation est égale à la prémisse ($A' = A$), alors la conclusion obtenue par MPG avec applicabilité est identique à la conclusion de la règle ($B' = B$), si la t-norme T et l'implication I_R sont compatibles pour le MPG.

Preuve :

Par hypothèse $\forall x \min(f_A(x), f_{A'}(x)) = f_{A'}(x)$, que l'on introduit dans (7) pour retrouver le MPG (2). Si T et I_R sont compatibles, alors pour $A' = A$ on trouve $B' = B$.

T-norme et implication compatibles : De la Propriété 2, découle que si la t-norme T et l'implication I_R sont compatibles pour le MPG, alors elles le sont aussi pour le MPG avec applicabilité de la règle.

Donc, les opérateurs compatibles pour le MPG avec applicabilité de la règle, sont ceux compatibles pour le MPG (Tableau 1).

- Propriété 3 : Si l'observation est incluse dans la prémisse ($A' \subset A$), alors le MPG et le MPG avec applicabilité sont équivalents.

Preuve :

Par hypothèse $\forall x \min(f_A(x), f_{A'}(x)) = f_{A'}(x)$, que l'on introduit dans (7) pour retrouver le MPG (2).

Notons que, quand l'observation est plus précise que la prémisse ($A' \subset A$), pour *la plupart* des couples T et I_R compatibles, la conclusion obtenue par le MPG classique (et donc par le MPG avec applicabilité) est égale à la conclusion de la règle ($B' = B$). Ceci traduit le fait que même si on a une observation plus précise on ne peut pas conclure quelque chose de plus précis que la conclusion de la règle.

- Propriété 4 : Si l'observation contient la prémisse ($A' \supset A$) et la t-norme T et l'implication I_R sont compatibles, alors la conclusion obtenue par MPG avec applicabilité est égale à la conclusion de la règle ($B' = B$)

Preuve :

Par hypothèse $\forall x \min(f_A(x), f_{A'}(x)) =$

$f_A(x)$, que l'on introduit dans (7). On retrouve la formulation du MPG pour $A' = A$, et donc $B' = B$, car T et I_R sont compatibles.

Notons que cette propriété n'est pas vérifiée par les différentes variantes du MPG, mais elle l'est par l'inférence de Mamdani.

3.2 Comparaison avec l'inférence de Mamdani

Le MPG avec applicabilité de la règle, comme défini dans la section 3, offre le choix d'un certain nombre de combinaisons d'opérateurs T et I_R compatibles (voir Tableau 1). Il se trouve que si on prend comme paire les opérateurs dits de Gödel (i.e. (8) et (9)), alors le MPG avec applicabilité est équivalent à l'inférence de Mamdani.

$$T_{Gödel}(x, y) = \min(x, y) \quad (8)$$

$$I_{Gödel}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

Ces deux opérateurs correspondent à l'extension au flou [17] de la logique intuitionniste introduite par Gödel [15]. Notons aussi que l'implication $I_{Gödel}$ est le résidu de la t-norme : \min .

– **Théorème 1** : Le MPG avec applicabilité dans le cadre de la logique floue dite de Gödel est équivalente à l'inférence de Mamdani

Preuve :

L'équation (7) du MPG avec applicabilité dévient dans le cadre de la logique de Gödel :

$$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{ \min(\min(f_A(x), f_{A'}(x)), I_{Gödel}(x, y)) \}$$

En appliquant la formulation (9) de l'implication de Gödel on obtient :

$$f_{B'}(y) = \max\{ \sup_{x \in X_1} \{ \min(f_A(x), f_{A'}(x), 1) \}, \sup_{x \in X_2} \{ \min(f_A(x), f_{A'}(x), f_B(y)) \} \}$$

où $X_1 = \{x \in X \mid f_A(x) \leq f_B(y)\}$ et $X_2 = \{x \in X \mid f_A(x) > f_B(y)\}$.

Quand on a $f_A(x) \leq f_B(y)$, on obtient :

$$\min(f_A(x), f_{A'}(x), 1) = \min(f_A(x), f_{A'}(x), f_B(y))$$

Ce qui implique dans l'équation précédente :

$$f_{B'}(y) = \max\{ \sup_{x \in X_1} \{ \min(f_A(x), f_{A'}(x), f_B(y)) \}, \sup_{x \in X_2} \{ \min(f_A(x), f_{A'}(x), f_B(y)) \} \}$$

Nous retrouvons ainsi la formulation de l'inférence de Mamdani (4).

3.3 Discussion

Les propriétés présentées dans la section 3.1 font du MPG avec applicabilité de la règle une formulation intéressante de plusieurs points de vue. Du côté pratique, la Propriété 1 implique que si aucune règle ne s'applique, alors on conclut à l'ensemble vide. A ce moment la question de la défuzzification, qui pose dans ce cas problème pour le MPG, ne se pose plus.

La propriété 4 traduit le fait que si on observe quelque chose de proche mais plus imprécis que la prémisse, on ne peut conclure que ce qu'indique la règle. Ceci est imposé par le fait qu'on ne se prononce pas sur les valeurs de l'univers de conclusion où le degré d'appartenance de B est nul.

Les similarités entre le MPG et le MPG avec applicabilité de la règle sont concrétisées par les propriétés 2 et 3. Les deux propriétés affirment que ces deux modes d'inférence sont équivalents quand l'observation est proche mais moins imprécise que la prémisse.

3.4 Nouvelles inférences

Il est communément admis que la seule propriété nécessaire pour déclarer une formulation du MPG comme viable, est la comptabilité avec le Modus Ponens classique [1] [13]. Nous introduisons ainsi plusieurs nouvelles formulations qui méritent d'être étudiées, puisqu'elles proposent des variantes de la méthode d'inférence la plus populaire dans le monde des applications, l'inférence de Mamdani.

Par exemple, si l'on choisit Łukasiewicz comme t-norme et Kleene-Dienes comme implication, on obtient la formule suivante :

$$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \max(\min(f_A(x), f_{A'}(x)) \\ + \max(1 - f_A(x), f_B(y)) - 1, 0)$$

Par construction, cette forme du MPG avec applicabilité vérifie les propriétés de la section 3.1, en particulier le fait que, si la règle ne s'applique pas, alors la conclusion inférée soit l'ensemble vide. La Figure 3(a) illustre son comportement lorsque A et A' sont définis comme sur la Figure 2(a). On note que par rapport à une inférence de Mamdani, ce Modus Ponens Généralisé avec contrôle de l'applicabilité trouve un ensemble B' plus précis.

Si l'on choisit l'implication de Wilmott, avec la t-norme de Łukasiewicz, on obtient la formulation suivante :

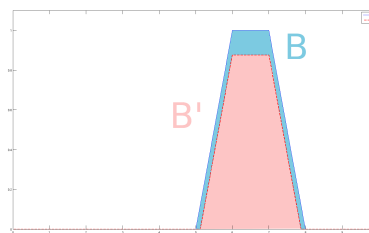
$$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \max(\min(f_A(x), f_{A'}(x)) \\ + \max(1 - f_A(x), \min(f_A(x), f_B(y))) - 1, 0)$$

Encore une fois cette forme du MPG vérifie toutes les propriétés énoncées. Comme l'illustre la Figure 3(b), elle permet de trouver un ensemble B' plus précis que B , mais avec cette fois, une incertitude plus grande.

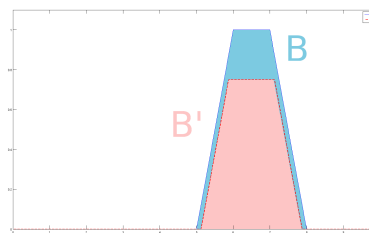
Conclusion

Dans la formulation du Modus Ponens Généralisé (MPG) rien n'empêche de faire un raisonnement avec une observation disjointe de la prémisse. Même si les conclusions obtenues, dans ce cas, via les différentes inférences ont été interprétées par plusieurs auteurs, peu de travaux se sont penchés sur un contrôle de l'applicabilité de la règle.

Dans cet article nous avons montré qu'une inférence basée sur un Modus Ponens Généralisé (MPG) avec contrôle de l'applicabilité, dans le cadre de la logique de Gödel étendue au flou, est équivalent à l'inférence proposé par Mamdani pour son fameux contrôleur. L'applicabilité de la règle est ici traduite par une conjonction entre l'observation et la prémisse. Le cadre logique de Gödel



(a) Avec t-norme de Łukasiewicz et l'implication de Kleene-Dienes



(b) Avec la t-norme de Łukasiewicz et l'implication de Wilmott.

Figure 3: Illustration du comportement du MPG avec applicabilité, dans des cas non-équivalents à l'inférence de Mamdani. On utilise les même règle et observation que pour la Figure 2.

impose comme conjonction le *min* et comme implication le résidu de cet opérateur.

Par ailleurs, cette nouvelle formulation ouvre la voie à de nouvelles méthodes d'inférence qui ont les mêmes caractéristiques essentielles que l'inférence de Mamdani, mais présentent d'autres caractéristiques nouvelles. Dans l'avenir nous étudierons plus en détail ces variantes.

Références

- [1] B. Bouchon-Meunier. *La logique floue et ses applications*. Addison-Wesley, 1995.
- [2] D. Dubois, H. Prade. *Combination of fuzzy information in the framework of possibility theory*. In M.A. Abidi and R.C. Gonzalez, editors, *Data Fusion in Robotics and Machine Intelligence*, pages 481-505. Academic Press, Inc., Boston, 1992.
- [3] E.H. Mamdani, S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7 :1-13, 1975.
- [4] E.H. Mamdani. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proceedings of IEEE*, vol 121, no12, pp 1585-1588, 1974.
- [5] J. Fodor. On fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, vol 42, Iss 3, pp 293-300, 1991.

- [6] B. Moser, M. Navara. Fuzzy controllers with conditionally firing rules, *IEEE Transactions of fuzzy systems*, vol. 10, No. 3, pp. 340-348, Jun 2002
- [7] M.M. Saha, J. Izykowski, E. Rosolowski. *Fault Location on Power Networks*. Springer, pp. 373-375, 2009.
- [8] T. Terano, K. Asai, M. Sugeno. Applied fuzzy systems. *Academic Press, Inc., Boston*, 1994.
- [9] C. Marsala, B. Bouchon-Meunier (eds.), Traitement de données complexes et commande en logique floue, *Hermès*, 2003.
- [10] L.A. Zadeh. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, part 3. *Information Sciences*, vol. 9. pp. 43-80, 1976.
- [11] B. Bouchon-Meunier, D. Dubois, L. Godo and H. Prade. Fuzzy sets and possibility theory in approximate and plausible reasoning. *Fuzzy Sets in Approximate reasoning and Information Systems* (Bezdek, J. Dubois, D. Prade, H., Eds) : Kluwer, Boston, Mass., The Handbooks of Fuzzy Sets, 15-190, 1999.
- [12] J.F. Baldwin, N.C.F. Guild, Modelling controllers using fuzzy relations, *Kybernetes*, Vol. 9, Issue 3, pp. 223 - 229, 1980.
- [13] D. Dubois, H. Prade. Fuzzy rules in knowledge-based systems. *The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science*, 1992, Volume 165, 45-68, 1992.
- [14] D. Dubois, H. Prade, L. Ughetto. A new perspective on reasoning with fuzzy rules. *International Journal of Intelligent Systems*, V. 18 N. 5, p. 541-567, 2003.
- [15] K. Gödel, Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Comptes rendus à l'Académie de Sciences*, Vienne, vol. 69, pp. 65-66, 1932.
- [16] J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch filozoficzny* vol 5, pp. 170-171, 1920.
- [17] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Dordrecht : Kluwer, 1998.

La Logique Possibiliste Généralisée

Generalized Possibilistic Logic

M. Banerjee¹

D. Dubois²

H. Prade²

S. Schockaert³

¹ Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, mohua@iitk.ac.in

² IRIT, Université Paul Sabatier, Toulouse, dubois@irit.fr, prade@irit.fr

³ School of Computer Science & Informatics, Cardiff University, Wales, UK, s.schockaert@cs.cardiff.ac.uk

Résumé :

Nous présentons un cadre logique minimal qui permet de raisonner avec des formules booléennes qualifiées par des bornes inférieures de degrés de nécessité ou de possibilité. Il s'agit d'un langage propositionnel enchâssé dans un autre qui qualifie les propositions du premier. La version tout-ou-rien de ce cadre correspond à une logique épistémique élémentaire MEL dont la syntaxe est un fragment de la logique modale KD, et dont un fragment permet de capturer les logiques tri-valuées de Łukasiewicz et de Kleene. Sa sémantique se décline en termes de sous-ensembles d'interprétations du langage propositionnel. La version valuée de cette logique épistémique généralise la logique possibiliste et sa sémantique est en termes de familles de distributions de possibilité. Nous montrons la complétude de cette logique par rapport à cette sémantique possibiliste.

Mots-clés :

Théorie des possibilités, logique épistémique, logique tri-valuée

Abstract:

We present a minimal logical setting for reasoning with Boolean formulas annotated with lower bounds of necessity or possibility degrees. It is in fact a standard propositional language embedded into another one, whose role is to express beliefs about propositions of the former. The all-or-nothing version of this setting corresponds to a simplified epistemic logic MEL, whose syntax is a fragment of the modal logic KD. A fragment of MEL is enough to capture three-valued logics of Łukasiewicz and Kleene. Its semantics can be expressed in terms of subsets of interpretation of the inner propositional language. The graded version of this epistemic logic generalizes possibilistic logic as well, and its semantics is in terms of sets of possibility distributions. We show the completeness of this logic w.r.t. this possibilistic semantics.

Keywords:

Possibility theory, epistemic logic, three-valued logic

1 Introduction

Il y a trois approches logiques pour formaliser l'incertitude due au manque d'informations et la notion de croyance subjective induite :

- La logique tri-valuée de Kleene [14] où on introduit une troisième valeur de vérité en plus

de *vrai* et *faux*, et qui veut dire *inconnu* ; cette logique est vérifonctionnelle et se définit par des tables de vérité pour la négation (involutive) et la conjonction (le minimum).

- La logique épistémique introduite par Von Wright et Hintikka qui utilise le formalisme de la logique modale, la modalité de nécessité $\Box\alpha$ représentant la connaissance ou la croyance dans la proposition α . Elle s'appuie sur une sémantique de Kripke à base de relations d'accessibilité [12].
- La logique possibiliste, dont la syntaxe utilise des conjonctions de paires (α, a) formées d'une proposition booléenne α et d'un poids a , souvent sur $]0, 1]$ qui représente une borne inférieure du degré de nécessité de α au sens de la théorie des possibilités, interprété comme un degré de certitude [4].

Toutes ces approches semblent aborder des questions similaires (l'inconnu, la croyance, l'incertitude) il est naturel de leur chercher un cadre commun. C'est le but de cet article. On montre que ce qui différencie ces approches c'est leur pouvoir expressif. On propose un cadre général pour les prendre en compte toutes et pour les situer les unes par rapport aux autres. Plus précisément, on peut voir la logique tri-valuée comme moins expressive que la logique épistémique. Si on ne considère pas l'introspection, le langage de la logique épistémique peut être simplifié et sa sémantique se décline en termes de distributions de possibilité tout ou rien. Le langage de la logique possibiliste peut être étendu à des négations et des disjonctions de paires (α, a) . On obtient alors un langage dont la sémantique est celle de la

théorie des possibilités et qui peut exprimer la logique tri-valuée, la logique épistémique simplifiée, et la logique possibiliste. Notre approche s'inspire de celle esquissée par Hájek [11] dans son livre (p. 211 *et seq.*) et dans [10]. Elle en diffère car nous utilisons des modalités de croyance pondérées, tandis que ces auteurs utilisent un prédicat flou comme symbole modal. On présente d'abord la version tout ou rien (MEL [1]) de la logique possibiliste généralisée en montrant comment on prouve sa complétude sans le recours aux relations d'accessibilité. On rappelle des résultats récents qui montrent que la logique tri-valuée de Kleene peut être vue comme un fragment de MEL. Dans la section suivante, on décrit le formalisme de la logique possibiliste généralisée introduite dans [7]. Dans la dernière section avant la conclusion, on donne une nouvelle preuve de complétude plus simple que celle de [9].

2 La logique épistémique simplifiée

On considère un langage classique \mathcal{L} propositionnel, avec k variables propositionnelles, p_1, \dots, p_k . On note α, β, \dots les formules de \mathcal{L} obtenues avec les connecteurs booléens \neg, \wedge, \vee usuels. Pour tout ensemble $\mathcal{B} \cup \{\alpha\}$ de formules de \mathcal{L} , $\mathcal{B} \vdash_{LP} \alpha$ signifie que α est une conséquence syntaxique classique de \mathcal{B} en logique propositionnelle PL. Dans cette section, on construit un autre langage dans lequel un agent peut exprimer qu'il croit ou qu'il ignore certaines propositions de \mathcal{L} [1].

2.1 Syntaxe

L'idée principale de la syntaxe est d'encapsuler chaque formule α de \mathcal{L} dans une modalité notée \Box . On construit alors de nouvelles variables logiques de la forme $\Box\alpha$ qui expriment que l'agent croit que α est vrai. On sépare complètement les propositions de \mathcal{L} qui concernent le monde réel et les propositions précédées du symbole \Box , qui décrivent l'état épistémique d'un agent. Les formules épistémiques, notées ϕ, ψ, \dots

forment un langage propositionnel \mathcal{L}_\Box engendré récursivement à partir d'un ensemble $At = \{\Box\alpha : \alpha \in \mathcal{L}\}$ de formules atomiques définies à partir des formules du langage \mathcal{L} , et à l'aide des connecteurs booléens \neg, \wedge :

$\Box\alpha \in \mathcal{L}_\Box$, si $\alpha \in \mathcal{L}$;

$\neg\phi \in \mathcal{L}_\Box$, $\phi \wedge \psi \in \mathcal{L}_\Box$, si $\phi, \psi \in \mathcal{L}_\Box$.

La modalité du possible est $\Diamond\alpha := \neg\Box\neg\alpha$.

On appelle les formules de \mathcal{L}_\Box des *formules épistémiques* car elles se réfèrent à l'état épistémique d'un agent, par opposition aux *formules ontiques* $\alpha \in \mathcal{L}$ qui se réfèrent au monde réel. Dans le langage \mathcal{L}_\Box , un agent peut déclarer qu'il est certain que la proposition α est vraie (sous la forme $\Box\alpha$) mais aussi :

- qu'il n'a pas d'argument en défaveur de α , sous la forme $\Diamond\alpha$;
- qu'il ignore si α est vrai ou faux, sous la forme $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$;
- qu'il sait si α est vrai ou faux, mais refuse de révéler sa croyance, sous la forme $\Box\alpha \vee \Box\neg\alpha$.

Dans la suite Γ représente un ensemble de formules de \mathcal{L}_\Box déclarées par l'agent, et \mathcal{B} un ensemble de formules de \mathcal{L} .

Dans cette approche, les modalités \Box et \Diamond ne s'appliquent qu'aux formules du langage propositionnel \mathcal{L} , contrairement aux logiques modales usuelles qui les enchâssent [13].

2.2 Axiomes

Le fait de pouvoir exprimer des croyances dans \mathcal{L}_\Box suggère d'adopter les axiomes du système modal KD , à savoir :

Axiomes :

(LP) : (i) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$;

(ii) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \mu)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \mu))$;

(iii) $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$;

(K) : $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$;

(N) : $\Box\alpha, \forall\alpha$ tel que $\vdash_{LP} \alpha$;

(D) : $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$.

Règle d'inférence :

(MP) $\{\phi, \phi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$.

(LP) indique que cette logique doxastique, nommée MEL, est une logique proposition-

nelle. Selon l'axiome K , si l'agent croit qu'une proposition se déduit d'une autre, il croit que cette dernière est vraie, dès qu'il croit que la première l'est. L'axiome D considère que la certitude est plus forte que la plausibilité, une contrepartie de l'inégalité entre fonctions de croyance et de plausibilité de Shafer, ou mesures de nécessité et de possibilité [4]. L'axiome N suppose que pour l'agent toutes les tautologies sont vraies. La notion de conséquence syntaxique à partir d'un ensemble Γ de formules (notée \vdash_{MEL}) est définie de façon classique.

Le langage de MEL est un fragment de ceux de KD45 ou de S5 (sa partie subjective). Les logiques modales sont souvent définies en partant de la syntaxe la plus générale qui étende LP, et en ajoutant des axiomes (tels **4**, **5**) pour la simplifier. Ici on prend le parti opposé et on construit le plus simple langage épistémique à partir de LP. En fait, MEL peut se voir comme une logique propositionnelle standard avec des variables propositionnelles spécifiques construites à partir d'un autre langage propositionnel. Par construction, la déduction dans MEL est la déduction dans LP sur le langage induit par le vocabulaire At , avec des axiomes supplémentaires :

$$\Gamma \vdash_{MEL} \phi \iff \Gamma \cup \{K, N, D\} \vdash_{LP} \phi,$$

où $\{K, N, D\}$ sont toutes les instances des axiomes K, N, D . En particulier le théorème de la déduction est valide dans MEL.

Calculer les conséquences de Γ permet de mieux cerner l'état de connaissances de l'agent à partir de son témoignage, en construisant toutes les formules qu'il pourrait affirmer sans ajouter plus d'information. En fait, MEL est un fragment du système modal normal KD avec un langage restreint. En effet, $\Gamma \vdash_{MEL} \phi$, si et seulement si $\Gamma \vdash_{KD} \phi$, pour tout ensemble $\Gamma \cup \{\phi\}$ de formules de MEL.

2.3 Sémantique

Une valuation booléenne, est une application $w : PV \rightarrow \{0, 1\}$, avec $PV := \{p_1, \dots, p_k\}$.

Ces valuations (interprétations) forment l'ensemble \mathcal{V} . Pour une formule $\alpha \in \mathcal{L}$, $w \models \alpha$ veut dire que w satisfait (est un modèle de) α , c.-à-d., $w(\alpha) = 1$ (vrai). On note $[\alpha]$, l'ensemble des modèles de α . Donc $2^{\mathcal{V}} = \{[\alpha] : \alpha \in \mathcal{L}\}$.

Nous suivons verbatim la définition de Hintikka pour évaluer les formules $\Box\alpha$: “ α est vrai dans tous les mondes possibles compatibles avec les croyances de l'agent”¹, et on note E l'ensemble de ces mondes. Un état épistémique est donc vu comme un ensemble de valuations propositionnelles (en fait leur disjonction). Chacune d'elles représente un état du monde possible pour l'agent. On suppose de plus que E est non-vide (sinon l'agent est incohérent).

La satisfaction des formules épistémiques est définie récursivement ainsi :

- $E \models \Box\alpha$, ssi $E \subseteq [\alpha]$, $\forall \alpha \in At$.
- $E \models \neg\phi$, ssi $E \not\models \phi$.
- $E \models \phi \wedge \psi$, ssi $E \models \phi$ et $E \models \psi$.

C'est la sémantique *épistémique* de MEL. $E \models \Box\alpha$ veut dire que si l'état épistémique de l'agent est E , il croit que α est vrai. En voyant la fonction caractéristique de E comme une distribution de possibilité, il est clair que $E \models \Box\alpha$ peut s'écrire $N([\alpha]) = 1$ au sens de la mesure de nécessité basée sur E . De même, $E \models \Diamond\alpha$, ssi $E \cap [\alpha] \neq \emptyset$: Il y a au moins un état du monde possible pour l'agent, où α est vrai, soit $\Pi([\alpha]) = 1$ au sens de la mesure de possibilité basée sur E . De plus, $E \models \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$ correspond à l'ignorance quant à α , car alors $E \cap [\alpha] \neq \emptyset$, $E \cap [\alpha]^c \neq \emptyset$. Cette information est non-triviale sur l'état épistémique de l'agent, même si elle ne dit rien sur l'état du monde.

On note $\mathcal{E}(\phi) = \{E \neq \emptyset : E \models \phi\}$ l'ensemble des modèles épistémiques de la formule $\phi \in \mathcal{L}_{\Box}$. Si Γ est un ensemble de formules épistémiques, $E \models \Gamma$ veut dire $E \models \phi$, pour tout $\phi \in \Gamma$. On note $\mathcal{E}(\Gamma)$ l'ensemble des modèles épistémiques de la base de

¹Article Epistemic Logic, Stanford Encyclopedia of Philosophy, <http://plato.stanford.edu/entries/logic-epistemic/index.html>.

croyances Γ . On peut alors définir une inférence sémantique :

Définition 1 Pour tout ensemble $\Gamma \cup \{\phi\}$ de formules épistémiques, ϕ est conséquence sémantique de Γ , noté $\Gamma \models_{MEL} \phi$, si $\forall E \neq \emptyset, E \models \Gamma$ implique $E \models \phi$ (autrement dit : $\mathcal{E}(\Gamma) \subseteq \mathcal{E}(\phi)$).

2.4 Complétude

On peut aussi utiliser la sémantique propositionnelle standard, car \mathcal{L}_\square est aussi un langage propositionnel. Un modèle standard d'une formule épistémique est une interprétation v de \mathcal{L}_\square , une application de At dans $\{0, 1\}$. Notons \mathcal{V}_\square l'ensemble de ces valuations. On peut définir une inférence sémantique standard : $\Gamma \models_{LP} \phi$ avec ces valuations. La logique propositionnelle qui utilise le langage \mathcal{L}_\square , les axiomes (LP) et le modus ponens (MP) est saine et complète relativement à cette sémantique standard.

Pour la logique MEL, on doit se restreindre aux interprétations standard v qui respectent les axiomes K, D, et N, soit un sous-ensemble de \mathcal{V}_\square noté \mathcal{V}_{MEL} . Pour montrer la complétude de MEL il suffit de montrer que les interprétations standard de \mathcal{V}_{MEL} sont en bijection avec les états épistémiques $\{E : \emptyset \neq E \subseteq \mathcal{V}\}$ et que la sémantique épistémique est équivalente à la sémantique classique restreinte à \mathcal{V}_{MEL} .

A toute valuation $v \in \mathcal{V}_\square$, on peut attacher une fonction d'ensemble booléenne $g_v : 2^{\mathcal{V}} \rightarrow \{0, 1\}$ telle que :

$$g_v([\alpha]) := v(\square\alpha), \square\alpha \in At.$$

qui constitue une représentation de l'incertitude. Dans le cas de MEL, on peut définir exactement le type de mesure d'incertitude induite par ces valuations. On vérifie aisément que :

1. Si $v \in \mathcal{V}_\square$ satisfait l'axiome N, alors $g_v(\mathcal{V}) = 1$.
2. Si $v \in \mathcal{V}_\square$ satisfait l'axiome D alors $\forall A \subseteq \mathcal{V}, g_v(A) \leq 1 - g_v(A^c)$, et donc $g_v(\emptyset) = 0$ si N est supposé en plus.

3. Si $v \in \mathcal{V}_\square$ satisfait les axiomes K et N, alors $\forall A, B \subseteq \mathcal{V}$:
 $g_v(A \cap B) = \min(g_v(A), g_v(B))$.

Le dernier résultat, à savoir que g_v est une mesure de nécessité, ne fait qu'exprimer que K et N impliquent l'équivalence entre $\square(\alpha \wedge \beta)$ et $\square\alpha \wedge \square\beta$ en logique modale KD.

A tout $v \in \mathcal{V}_{MEL}$, on associe l'état épistémique

$$E_v := \{w \in \mathcal{V} : g_v(\mathcal{V} \setminus \{w\}) = 0\}.$$

Par définition de E_v , on vérifie que :

- (i) Puisque g_v est une mesure de nécessité, E_v est unique et non-vide, et $v(\square\alpha) = 1$ ssi $E_v \subseteq [\alpha]$.
- (ii) $v \models_{LP} \phi$ ssi $E_v \models \phi$ (sémantique épistémique).

Pour toute valuation classique de \mathcal{L}_\square (qui vérifie les axiomes K, D, N), on peut donc définir un état épistémique unique. Inversement, tout état épistémique E induit une valuation du langage modal \mathcal{L}_\square comme suit :

$$v_E(\square\alpha) := \begin{cases} 1 & \text{si } E \subseteq [\alpha]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient donc la complétude de MEL par rapport à la sémantique épistémique en vertu de la complétude de la logique propositionnelle :

Théorème 1 $\Gamma \vdash_{MEL} \phi \iff \Gamma \models_{MEL} \phi$.

On voit donc que la logique modale KD restreinte au langage épistémique \mathcal{L}_\square peut être vue comme la logique de la théorie des possibilités tout ou rien, soit la plus élémentaire logique de l'information incomplète.

2.5 Situation de la logique de Kleene

La logique tri-valuée de Kleene utilise le même langage \mathcal{L} que LP, mais elle considère trois valeurs de vérité ordonnées $V > I > F$ qui peuvent s'interpréter comme *vrai*, *inconnu* et *faux*, respectivement. On note t une valuation de PV dans $\{F, I, T\}$. On définit alors les connecteurs de négation $-$ et de conjonction \square et de disjonction \sqcup comme ceux de Zadeh :

1. $-F = V, -V = F, -I = I$ (involution)
2. $t(\alpha \sqcap \beta) = \min(t(\alpha), t(\beta))$
3. $t(\alpha \sqcup \beta) = \max(t(\alpha), t(\beta))$

Néanmoins, ces valeurs de vérité ont un relent épistémique : *inconnu* s'oppose à *certain que vrai* et *certain que faux* et les valeurs $\{F, I, T\}$ renvoient à la connaissance d'un agent sur des propositions en fait booléennes. Si α et β couvrent l'étendue des possibles, leur disjonction devrait être vraie même si elles sont inconnues ($t(\alpha) = t(\beta) = I$), et pourtant $t(\alpha \sqcup \beta) = I$ [3]. Pour résoudre ce paradoxe, on peut plonger la logique de Kleene dans MEL comme expliqué dans [2]. Rappelons ces résultats.

En accord avec le sens de la modalité \square , on peut traduire en MEL les affirmations « $t(p) = V$ » par $\vdash \square p$, « $t(p) = F$ » par $\vdash \square \neg p$, et donc « $t(p) = I$ » par $\vdash \neg \square p \wedge \neg \square \neg p$ pour une variable propositionnelle p . Plus généralement, déclarer une proposition α vraie dans la logique de Kleene, c'est dire que $t(\alpha) = V$. On peut traduire toute affirmation de ce type en MEL par la procédure suivante [2] :

- Mettre α sous la forme d'une conjonction de clauses en forme normale négative : $\alpha = \bigwedge_{i=1}^{q_\alpha} \bigvee_{j=1}^{q_i} l_{ij}$ avec $l_{ij} = p_k$ ou $\neg p_k$ (littéral).
- La traduction de $t(\alpha) = V$ dans MEL est la formule $\bigwedge_{i=1}^{q_\alpha} \bigvee_{j=1}^{q_i} \square l_{ij}$ (en remplaçant la négation – par \neg dans l_{ij}).

On remarque que cette traduction n'utilise qu'une partie du langage \mathcal{L}_\square : on ne met le symbole \square que devant des littéraux, et on n'utilise pas la négation \neg de \mathcal{L}_\square . Il est montré dans [2] que ce fragment \mathcal{L}_\square^K de \mathcal{L}_\square capture exactement la logique de Kleene. En particulier $t(\ell_1 \sqcup \ell_2) = 1$ veut dire $\square \ell_1 \vee \square \ell_2$ et non $\square(\ell_1 \vee \ell_2)$, ce qui résout le paradoxe si $\ell_1 = \neg \ell_2$. La logique de Kleene ne peut pas exprimer $\square(\ell_1 \vee \ell_2)$.

Une valuation t en logique de Kleene est isomorphe à un modèle partiel en logique propositionnelle. Il suffit de poser $w(p) = 1$ si $t(p) = V$, et $w(p) = 0$ si $t(p) = F$. On a donc un état épistémique de la forme $E_t = [\bigcap_{i:t(p_i)=V} p_i \bigcap \bigcap_{i:t(p_i)=F} \neg p_i]$, qu'on peut qualifier de rectangulaire. Si B est une base de

connaissances en logique de Kleene, $B \models_K \beta$ veut dire que si $t(\alpha) = V, \forall \alpha \in B$ alors $t(\beta) = V$. Soit $\mathcal{T}(B)$ la traduction de B en MEL avec la procédure ci-dessus. On a montré [2] que $B \models_K \beta$ si et seulement si $\mathcal{T}(B) \vdash_{MEL} \mathcal{T}(\beta)$ si et seulement si $\forall t, E_t \models \mathcal{T}(B) \Rightarrow E_t \models \mathcal{T}(\beta)$. Ce résultat indique bien que la logique de Kleene ne permet de modéliser que certaines formes d'information incomplète.

Ces résultats ont été étendus à la logique trivaluée de Łukasiewicz [2] qui correspond au fragment de \mathcal{L}_\square où on ne met le symbole \square que devant des littéraux.

3 Logique possibiliste

Dans sa forme de base, la logique possibiliste [4] représente des connaissances propositionnelles plus ou moins certaines, sous la forme de paires (α, a) où α est une formule propositionnelle de \mathcal{L} et $a \in]0, 1]$ un degré de certitude positif. Sa sémantique s'exprime en termes de distributions de possibilité, qui sont des applications π de l'ensemble de toutes les interprétations propositionnelles \mathcal{V} dans $[0, 1]$. Pour chaque valuation $w \in \mathcal{V}$, le degré $\pi(w)$ exprime à quel point w est *plausible*, c.-à-d. à quel point il est compatible avec la connaissance disponible. Elle raffine la notion d'état épistémique booléen (en indentifiant E au noyau $\{w : \pi(w) = 1\}$). Etant donné une distribution de possibilité π , les mesures associées de possibilité Π et de nécessité N évaluent à quel point respectivement une proposition est possible et nécessaire :

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha) &= \sup\{\pi(w) \mid w \models \alpha\} \\ N(\alpha) &= 1 - \Pi(\neg\alpha) = \inf\{1 - \pi(w) \mid w \models \neg\alpha\} \end{aligned}$$

On évalue les formules possibilistes (α, a) sur les interprétations du langage \mathcal{L} , à l'aide de la distribution de possibilité la moins spécifique telle que $N(\alpha) \geq a$ [4]. On utilise les axiomes de la logique propositionnelle avec un degré de nécessité 1, et le modus ponens pondéré : $\{(\alpha, a), (\neg\alpha \vee \beta, b)\} \vdash (\beta, \min(a, b))$.

La logique possibiliste ne prend en compte que

des ensembles de formules pondérées de la forme (α, a) , soit des conjonctions d'assertions de la forme $N(\alpha) \geq a$. Dans certaines applications, on peut avoir besoin de relier de telles assertions en utilisant des connecteurs propositionnels différents. En programmation logique, par exemple, une règle (sans négation) telle que $p_1, \dots, p_n \rightarrow q$, reliant des variables propositionnelles, signifie intuitivement que chaque fois que p_1, \dots, p_n sont connues comme vraies, on doit accepter q comme vraie également. Cela pourrait être exprimé en utilisant des mesures de nécessité et l'implication matérielle sous la forme $\neg(N(p_1) \geq 1) \vee \dots \vee \neg(N(p_n) \geq 1) \vee (N(q) \geq 1)$ [8]. Cette proposition ne peut pas être exprimée en logique possibiliste. On le peut dans MEL sous la forme $\neg\Box p_1 \vee \dots \vee \neg\Box p_n \vee \Box q$. Mais dans MEL, les mesures de nécessité sont tout ou rien.

4 Logique possibiliste généralisée

La logique possibiliste généralisée (LPG) [7] étend la logique possibiliste au sens où des énoncés de la forme (α, a) peuvent être combinés en utilisant n'importe quel connecteur propositionnel, plutôt que seulement la conjonction. Elle généralise donc aussi la logique MEL avec des modalités valuées.

4.1 Syntaxe et sémantique

Pour mettre en évidence que la sémantique de la LPG est basée sur la théorie des possibilités, on utilise dans cet article une notation légèrement différente de la syntaxe usuelle en logique modale, et de celle dans [6, 7, 8], où la notation est proche de celle de la logique possibiliste. Nous améliorons ainsi la lisibilité par rapport à ces derniers articles tout en soulignant le lien avec la logique modale. Soit $\Lambda = \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1\}$, où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble des degrés de certitude considérés ; $\Lambda^+ = \Lambda \setminus \{0\}$. Si $a \in \Lambda^+$ on note $p(a)$ la valeur précédant a dans l'échelle. Les formules bien formées en logique possibiliste généralisée forment le langage propositionnel \mathcal{L}_{\Box}^k défini comme suit :

- Si α est une formule propositionnelle ontique et $a \in \Lambda^+$, alors $\mathbf{N}_a(\alpha) \in \mathcal{L}_{\Box}^k$.
- Si ϕ et ψ sont des formules bien formées, alors $\neg\phi \in \mathcal{L}_{\Box}^k$ et $\phi \wedge \psi \in \mathcal{L}_{\Box}^k$.

Intuitivement, $\mathbf{N}_1(\alpha)$ signifie qu'on est complètement certain que α est vrai, tandis que $\mathbf{N}_a(\alpha)$ avec $a < 1$ signifie qu'il y a une information qui suggère que α est vrai, et que rien ne suggère que c'est faux (c.-à-d., on considère plus plausible que α soit vrai que α soit faux). $\mathbf{N}_1(\alpha)$ correspond à $\Box\alpha$ dans MEL. Les atomes de \mathcal{L}_{\Box}^k sont donc de la forme $At^k = \{\mathbf{N}_a(\alpha) : \alpha \in \mathcal{L}; a \in \Lambda^+\}$.

Notons qu'il faut $k \geq 2$ (au moins trois niveaux de certitude) pour pouvoir distinguer entre certitude complète et certitude partielle. Formellement, un agent affirmant $\mathbf{N}_a(\alpha)$ est dans un état épistémique π tel que $N(\alpha) \geq a > 0$. En conséquence, $\neg\mathbf{N}_a(\alpha)$ équivaut à $N(\alpha) \leq p(a)$, qui signifie que $\Pi(\neg\alpha) \geq 1 - p(a) \in \Lambda^+$; syntaxiquement on écrit $\Pi_b(\neg\alpha)$ avec $b = 1 - p(a)$.

La sémantique de la LPG est définie en termes de distributions de possibilité normalisées (c.-à-d., t.q. $\exists w \pi(w) = 1$) sur les interprétations propositionnelles, où les degrés de possibilité sont restreints à Λ . Au lieu d'évaluer de façon graduelle les formules possibilistes (α, a) sur les interprétations w du langage \mathcal{L} [4], on peut choisir de les évaluer de façon tout ou rien sur les distributions de possibilité construites sur \mathcal{V} [6, 7]. Une distribution de possibilité π est un modèle (épistémique) de :

- $\mathbf{N}_a(\alpha)$ (soit (α, a) en logique possibiliste usuelle) ssi $N(\alpha) \geq a$, où N est la mesure de nécessité induite par π ;
- $\phi_1 \wedge \phi_2$ ssi π est un modèle de ϕ_1 et de ϕ_2 ;
- $\neg\phi_1$ ssi π n'est pas un modèle de ϕ_1 .

De manière naturelle, π est appelé modèle d'un ensemble Γ de formules de la LPG, ce qui s'écrit $\pi \models \Gamma$ si c'est un modèle de chacune des formules de cet ensemble. On écrit $\Gamma \models_{LPG} \phi$, pour un ensemble Γ de formules en LPG et ϕ une formule en LPG, ssi chaque modèle de Γ est aussi un modèle de ϕ . On dit qu'un modèle possibiliste π est booléen si $\pi(w) \in \{0, 1\}$ pour chaque monde possible w .

On considère l'axiomatisation suivante [9], qui étend celle de MEL [1].

- (LP)
 (K) : $\mathbf{N}_a(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\mathbf{N}_a(\alpha) \rightarrow \mathbf{N}_a(\beta))$;
 (N) : $\mathbf{N}_1(\alpha), \forall \alpha$ tel que $\vdash_{LP} \alpha$;
 (D) : $\mathbf{N}_a(\alpha) \rightarrow \mathbf{\Pi}_1(\alpha), \forall a \in \Lambda^+$;
 (AF) : $\mathbf{N}_{a_1}(\alpha) \rightarrow \mathbf{N}_{a_2}(\alpha)$, si $a_1 \geq a_2$.
 et la règle du modus ponens.

Dans (D), $\mathbf{\Pi}_1(\alpha)$ exprime $\neg \mathbf{N}_b(\neg \alpha), \forall b > 0$. On voit que quand a est fixé on obtient une copie de MEL (si on utilise $\mathbf{N}_a(\alpha) \rightarrow \neg \mathbf{N}_a(\neg \alpha)$ pour (D)). On récupère le modus ponens de la logique possibiliste et une règle hybride supplémentaire déjà suggérée en [5] :

Lemme 1 Les règles d'inférence suivantes peuvent être établies :

- $\{\mathbf{N}_{a_1}(\alpha), \mathbf{N}_{a_2}(\alpha \rightarrow \beta)\} \vdash \mathbf{N}_{\min(a_1, a_2)}(\beta)$
- $\{\mathbf{\Pi}_{a_1}(\alpha), \mathbf{N}_{a_2}(\alpha \rightarrow \beta)\} \vdash \mathbf{\Pi}_{a_1}(\beta)$
 si $a_2 > 1 - a_1$

Preuve: La première est obtenue en utilisant (AF) sur les deux prémisses (en les affaiblissant au niveau $\min(a_1, a_2)$), obtenant ainsi $\mathbf{N}_{\min(a_1, a_2)}(\alpha) \rightarrow \mathbf{N}_{\min(a_1, a_2)}(\beta)$ par modus ponens sur **K** et $\mathbf{N}_{\min(a_1, a_2)}(\alpha \rightarrow \beta)$, et à nouveau le modus ponens. La seconde est obtenue en établissant $\mathbf{N}_{1-p(a_1)}(\neg \alpha)$ à partir de $\mathbf{N}_{a_2}(\alpha \rightarrow \beta)$ et de $\mathbf{N}_{1-p(a_1)}(\neg \beta)$ (en réécrivant $\alpha \rightarrow \beta$ sous la forme $\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$). On doit cependant supposer $1 - p(a_1) \leq a_2$, soit $a_1 + a_2 > 1$, afin d'affaiblir $\mathbf{N}_{a_2}(\alpha \rightarrow \beta)$ en $\mathbf{N}_{1-p(a_1)}(\alpha \rightarrow \beta)$. Si $1 - p(a_1) > a_2$, (AF) ne fournit que $\mathbf{N}_{a_2}(\neg \alpha)$, dont la négation est plus faible que la prémisse $\mathbf{\Pi}_{a_1}(\alpha)$.

Le caractère sain de l'inférence syntaxique ne pose pas de problème à établir.

Proposition 1 (Correction) Soit Γ une théorie en LPG, c.-à-d., un ensemble de formules de la LPG ϕ peut être dérivée de Γ par modus ponens et à partir des axiomes (LP, K, N, D, AF). Alors on a bien que $\Gamma \models_{LPG} \phi$.

4.2 Complétude de la LPG

Pour la complétude, on procède comme dans le cas tout ou rien. Une valuation classique de \mathcal{L}_{\square}^k est une application $v : \mathbf{N}_a(\alpha) \in \Lambda^k \mapsto v(\mathbf{N}_a(\alpha)) \in \{0, 1\}$. L'axiome (AF) impose que si $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1$ et $0 < b \leq a$ alors $v(\mathbf{N}_b(\alpha)) = 1$. On peut alors définir une fonction d'ensemble g_v sur \mathcal{V} comme suit

$$g_v([\alpha]) = \max\{a : v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1\}$$

avec la convention $g_v([\alpha]) = 0$ si $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 0, \forall a > 0$. Les autres axiomes de LPG imposent les contraintes suivantes à la fonction g :

- L'axiome (N) implique $g_v(\mathcal{V}) = 1$.
- Pour l'axiome (D), $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1$ implique $v(\mathbf{N}_a(\neg \alpha)) = 0, \forall a > 0$. Donc, si $g_v([\alpha]) = a > 0$, alors $g_v([\neg \alpha]) = g_v([\bar{\alpha}]) = 0$. En particulier, $g_v(\emptyset) = 0$.
- Pour l'axiome K, notons que si $\alpha \vdash \beta$, il implique $\vdash \mathbf{N}_a(\alpha) \rightarrow \mathbf{N}_a(\beta)$, en vertu de l'axiome (N). Donc $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1$ implique $v(\mathbf{N}_a(\beta)) = 1$ et donc g_v est monotone croissante avec l'inclusion.
- On peut écrire l'axiome K comme suit : $\mathbf{N}_a(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\mathbf{N}_a(\alpha) \rightarrow \mathbf{N}_a(\alpha \wedge \beta))$. Si $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1$ et $v(\mathbf{N}_a(\beta)) = 1$, on a donc $v(\mathbf{N}_a(\alpha \rightarrow \beta)) = 1$; mais (K) implique $v(\mathbf{N}_a(\alpha \wedge \beta)) = 1$. Donc $g_v([\alpha \wedge \beta]) \geq \min(g_v([\alpha]), g_v([\beta]))$.

On conclut donc que la fonction g_v est une mesure de nécessité à valeurs sur Λ . Elle est définie complètement par une distribution de possibilité normalisée π_v . Il y a donc une bijection entre les valuations classiques de \mathcal{L}_{\square}^k qui satisfont les axiomes (K, N, D, AF) et les distributions de possibilité à valeurs sur Λ .

Proposition 2 (Complétude) Soit $\Gamma \cup \{\phi\} \subset \mathcal{L}_{\square}^k$ une théorie en LPG. $\Gamma \models_{LPG} \phi$ si et seulement si ϕ peut être dérivé de Γ par modus ponens et à partir des axiomes (LP, K, N, D, AF).

Preuve: $\Gamma \vdash_{LPG} \phi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{K, N, D, AF\} \vdash_{LP} \phi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{K, N, D, AF\} \models_{LP} \phi$ (complétude de

la logique propositionnelle), si et seulement si $\Gamma \models_{LPG} \phi$ (en utilisant la bijection entre distributions de possibilité et les valuations classiques de \mathcal{L}_{\square}^k qui satisfont les axiomes (K, N, D, AF)).

5 Conclusion

Cet article fait donc la synthèse entre plusieurs logiques de l'information incomplète et montre le rôle central d'une sémantique en termes de distributions de possibilité. La logique possibiliste généralisée permet de couvrir toutes ces approches. Ces résultats organisent le paysage des diverses logiques dans ce domaine. Le cadre de la LPG est très expressif, mais sa complexité [9] est celle de S5 et dépend de k . Parmi les applications envisageables, la programmation logique offre des perspectives intéressantes. Un programme logique P de type ASP ne contient que des règles de la forme

$$r_1, \dots, r_s, \text{not } p_1, \dots, \text{not } p_m \rightarrow q_1 \oplus \dots \oplus q_n$$

et des faits de la forme $r_1 \oplus \dots \oplus r_n$ où r_i, p_j, q_k sont des variables propositionnelles, \oplus est une disjonction, et $\text{not } r_i$ est une négation faible évoquant l'ignorance relative à la vérité de l'atome r_i . Pearce [15] a montré comment généraliser ce formalisme en le capturant dans une logique à cinq valeurs de vérité, la valeur médiane exprimant l'ignorance. Dans [8], on a montré comment la LPG avec une échelle Λ à trois niveaux ($k = 2$) peut exprimer, sous une forme plus facile à interpréter, les faits : $\mathbf{N}_1(r_1) \vee \dots \vee \mathbf{N}_1(r_n)$ et les règles comme suit :

$$\neg \mathbf{N}_1(r_1) \vee \dots \vee \neg \mathbf{II}_1(\neg p_m) \vee \mathbf{N}_1(q_1) \vee \dots \vee \mathbf{N}_1(q_n).$$

Notons que puisque l'échelle de possibilité possède trois niveaux, $\neg \mathbf{II}_1(\neg p_m)$ n'est pas équivalent à $\mathbf{N}_1(p_m)$, mais à $\mathbf{N}_{1/2}(p_m)$, ce qui capture la particularité de la négation faible en ASP. Voir [9] pour une étude de la traduction de la logique à 5 valeurs de Pearce en LPG, dans le même style que celle de la logique de Kleene rappelée plus haut. Dans le futur, on peut reconsidérer les nombreuses sémantiques

multivaluées en programmation logique et dans les bases de données avec valeurs nulles, ainsi que certaines logiques multi-agents [6], dans le cadre de la LPG.

Références

- [1] M. Banerjee et D. Dubois. A simple modal logic for reasoning about revealed beliefs. In : *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty* (ECSQARU 2009), C. Sossai, G. Chemello (Eds.), Springer, LNAI 5590, p. 805–816, 2009.
- [2] D. Ciucci et D. Dubois. Three-valued logics for incomplete information and epistemic logic. In *Proc. 13th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA)*, Springer, LNAI 7519, 147–159, 2012.
- [3] D. Dubois. On ignorance and contradiction considered as truth-values. *Logic Journal of the IGPL*, 16(2) :195–216, 2008.
- [4] D. Dubois, J. Lang, et H. Prade. Possibilistic logic. In D. Nute D. Gabbay, C. Hogger J. Robinson, editor, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.
- [5] D. Dubois et H. Prade. Resolution principles in possibilistic logic. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 4(1), 1-21, 1990.
- [6] D. Dubois et H. Prade. Toward multiple-agent extensions of possibilistic logic. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, London, 187–192, 2007.
- [7] D. Dubois et H. Prade. Generalized possibilistic logic. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Scalable Uncertainty Management*, Springer, LNCS 6929, 428–432, 2011.
- [8] D. Dubois, H. Prade, et S. Schockaert. Règles et métarègles en théorie des possibilités. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 26 :63–83, 2012.
- [9] D. Dubois, H. Prade, et S. Schockaert. Stable models in generalized possibilistic logic. In *Proceedings of the 13th Inter. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, Rome, June 10-14, 2012*.
- [10] P. Hájek, D. Harmančova, F. Esteva, P. Garcia, et L. Godo. On modal logics for qualitative possibility in a fuzzy setting. In R. Lopez de Mantaras et D. Poole, editors, *Int. Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 278–285. Morgan Kaufmann, 1994.
- [11] P. Hájek. *The Metamathematics of Fuzzy Logics*. Kluwer Academic, 1998.
- [12] J. Y. Halpern, R. Fagin, Y. Moses, et M.Y. Vardi. *Reasoning About Knowledge*. MIT Press (Revised paperback edition), 2003.
- [13] G. E. Hughes et M. J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1968.
- [14] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1952.
- [15] D. Pearce. Equilibrium logic. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 47 :3–41, 2006.

Validation de systèmes d'aide à la décision en contexte incertain par analyse multicritère

M. Batton-Hubert¹

G. Dupouy²

E. Chojnacki³

¹² Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

³ Institut de Radioprotection et de Sureté Nucléaire

Ecole Nationale Supérieure des Mines, EMSE-FAYOL, CNRS UMR6158, LIMOS, F-42023 Saint-Etienne

batton@emse.fr, dupouy@emse.fr,

Institut de Radioprotection et de Sureté Nucléaire, F-13115 Saint-Paul-Lez-Durance eric.chojnacki@irsn.fr

Résumé :

Ces travaux s'intéressent à la validation d'un outil et de son système de connaissance associé, dans le cadre d'une évaluation de risques industriels ou environnementaux. Ces systèmes composés de plusieurs sources de connaissance (experts, bases de données, modèles numériques,...) doivent pouvoir être comparés et dans le meilleur des cas, un ordonnancement par rapport à un objectif de validation opérationnelle doit être proposé. Une approche de type analyse multicritère est proposée sur des critères de validation issues de la métrologie. Ces premiers résultats montrent la difficulté de construire une échelle de référence ou d'utilité pour deux modes de représentation de l'incertain, de types probabiliste et possibiliste. Un critère d'informativité est particulièrement développé utilisant l'entropie de Shannon et sa déclinaison à des distributions discrètes de possibilité.

Mots-clés :

Analyse multicritère, possibilité, incertitude, validation

1 Contexte

La gestion du risque, dans des contextes industriels ou environnementaux (risque de pollution, risque d'inondation...), requière de prendre des décisions dans le cadre de systèmes complexes d'aide à la décision. Ces systèmes s'appuient sur une caractérisation du risque qui nécessite une grande quantité d'information. Ces informations sont généralement manipulées par différents opérateurs comme des modèles numériques, des systèmes à base de cas, des outils d'analyse multicritères, utilisant des sources de données hétérogènes plus ou moins

fiables comme des données historiques, des informations issues de l'expertise. La mise en œuvre de ces systèmes d'aide à la décision pour l'évaluation d'un risque se base sur ces différentes sources d'information de nature différente car l'obtention de ce calcul du risque n'est pas exacte, (manque de connaissance). L'incomplétude de l'information disponible est compensée par des avis d'experts, appuyés sur leurs connaissances théoriques ou empiriques. L'évaluation du risque, et les décisions qui en découlent, ne repose plus alors uniquement sur la nature du processus, mais également sur les hypothèses et l'arbitrage fait par les experts. La décision est la résultante d'une synthèse des connaissances, partiellement subjectives, qu'il convient de valider. Cette validation nécessite dans un premier temps de formaliser de manière générique les étapes d'un processus de décision, dans un cadre qui intègre le plus d'élément possible l'état réel des connaissances. Ces étapes constituent la base de la validation opérationnelle [3] qui propose les différentes étapes de la transformation de connaissance nécessaire lors d'un processus d'aide à la décision. Dans ce contexte, on se propose de s'intéresser à la première étape de recueil du modèle formel proposé : soit, à la prise en compte des différentes sources d'information nécessaires à la quantification des variables étudiées du système concerné. Il s'agit alors de pouvoir hiérarchiser les différentes sources d'information par rapport à

une qualification de l'opérationnalité du système d'aide à la décision au regard de la connaissance disponible. Une approche d'optimisation multicritère est proposée à partir de critères qui permettent de prendre en compte différents modèles de l'imperfection de la connaissance.

2 Analyse multicritère en validation opérationnelle

On dispose d'un ensemble A de propositions de sources différentes pour quantifier une variable aléatoire réelle X . Ces propositions peuvent être formalisées sous la forme de distributions de probabilité ou de distributions de possibilité. Ces distributions sont autant d'informations que l'on souhaite qualifier et comparer en l'absence de référent absolu. Cette exigence correspond à système décisionnel multi-acteurs, et une approche multicritère est privilégiée dans cette étape [5]. On cherche à construire un pré-ordre (partiel ou total) selon un ou plusieurs critères.

Il s'agit de construire successivement un référent soit une métrique, une fonction d'utilité qui permet de définir des critères sur des sources de données pouvant être représentées par des fonctions de densité de probabilité, de densité de possibilités voir d'autres formalismes de l'information (fonctions de croyance). En effet, on peut considérer que des sources de données peuvent être des scalaires ou de vecteurs entachés d'erreur, de type variable aléatoire (comme un paramètre d'entrée ou une variable d'entrée à un modèle de type EDP d'écoulements) à laquelle est associée une probabilité ; l'avis d'expert recueilli comme une confiance sur un intervalle de valeurs est formalisé sous forme une distribution de possibilités concernant la plausibilité et la nécessité de la grandeur estimée.

Deux critères, inspirés de travaux de [1] [2] sont envisagés :

- Informativité : quelle quantité d'information est apportée par une source d'information ?

- Calibration : en supposant disposer de référents connus, la source d'information est-elle fidèle ?

L'informativité cherche à évaluer la quantité d'information apportée par une source. La théorie de l'information de Shannon, propose d'évaluer l'information apportée par une distribution de probabilité p . La divergence de Kullback-Leibler [4] retenue permet de mesurer la dissimilarité entre deux distributions de probabilité (dont une loi uniforme). Une généralisation du critère d'informativité est proposée dans un cadre possibiliste notamment pour des distributions discrètes de possibilité, l'informativité $I(\pi)$ est alors estimée. Une informativité $I(p)$ est également calculable. Ceci permet alors de comparer deux types de sources ; une distribution de probabilité p et une distribution de possibilité π par rapport à ce critère. Un deuxième critère, dit de *calibration* peut être construit sur la base de ces distributions probabilistes et possibilistes. Cependant ces deux critères conduisent à une difficulté de construction du pré-ordre : en effet, il est difficile d'ignorer la dépendance que peuvent avoir ces deux critères *a priori* dans un choix final. Il est donc indispensable dans l'étape suivante de voir comment cette dépendance peut être résolue : soit en la supprimant, soit en essayant de voir comment une fonction de préférence peut être construite, ou bien être introduite dans la méthode d'agrégation finale.

Références

- [1] T. Bedford, T. R. Cooke, R. *Probabilistic risk analysis : foundations and methods*. Cambridge University Press.2001
- [2] R. Cooke. *Experts in uncertainty*. Oxford University Press.1991
- [3] IMdR, Projet P09-2 : *Validation et représentativité d'un réseau bayésien en analyse des risques et sûreté de fonctionnement*. Rapport de l'Institut de Maitrise des Risques (IMdR), 2011.
- [4] S. Kullback, R.A Leibler,. On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1 :79-86,1951
- [5] B. Roy. *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Hermès Science.1985

Processus de Décision Crédibiliste pour l'Alignement des Ontologies

Credibilistic Decision Process for Ontology Matching

Amira Essaid^{1,2}

Arnaud Martin²

Grégory Smits²

Boutheina Ben Yaghlane³

¹ LARODEC, Université de Tunis, ISG Tunis, Tunisie

² IRISA, Université de Rennes1, Lannion, France

³ LARODEC, Université de Carthage, IHEC Carthage, Tunisie

¹ 41, Rue de la Liberté, cité Bouchoucha, 2000 Le Bardo, essaid.amira@yahoo.fr

² BP 3021, 22302 Lannion Cedex, { Arnaud.martin, gregory.smits }@univ-rennes1.fr

³ Carthage Présidence 2016, boutheina.yaghlane@ihec.rnu.tn

Résumé :

L'appariement est une tâche primordiale pour aboutir à la gestion de l'hétérogénéité sémantique d'ontologies distribuées et ainsi assurer leur interopérabilité entre les différents systèmes les utilisant. Cette mise en correspondance consiste principalement à détecter des relations sémantiques entre les entités de deux ontologies par application de méthodes d'alignement fondées sur des mesures de similarité. L'emploi de mesures de différentes natures fait inévitablement apparaître des conflits. Nous proposons dans cet article de gérer ce conflit à l'aide de la théorie des fonctions de croyance.

Mots-clés :

Appariement des ontologies, mesure de similarité, théorie des fonctions de croyance, conflit.

Abstract:

Ontology matching is one of the most important tasks to mitigate the effect of semantic heterogeneity and to assure the interoperability between the different systems that use them. The matching consists in detecting the semantic relations between entities of two ontologies and thus by the application of different techniques which are based on similarity measures. Using these measures can lead to conflicting alignments. We propose in this paper to manage the conflict using the Dempster-Shafer theory.

Keywords:

Ontology matching, similarity measure, belief function theory, conflict

1 Introduction

Pour faire face à l'émergence d'applications basées sur l'exploitation conjointe de sources de données distribuées dont le format est difficilement interprétable par des machines, la notion du *web sémantique* a été introduite [2]. Cette nouvelle génération du web tend à faciliter l'intégration et l'interopérabilité de sources de données entre différentes applications. Le

web sémantique repose essentiellement sur l'utilisation d'*ontologies* décrivant la structure et la sémantique des données contenues dans les documents web. Toutefois, il n'existe pas d'ontologie partagée de référence pour chaque contexte applicatif, mais plusieurs ontologies développées indépendamment les unes des autres et couvrant souvent partiellement le contexte applicatif concerné. L'utilisation de ce genre de données repose donc sur une étape de résolution de l'hétérogénéité sémantique des sources à travers l'appariement des ontologies [5]. Cet appariement vise à trouver des correspondances entre les entités de deux ontologies. Ces entités peuvent être des concepts, des propriétés ou encore des instances. L'ensemble des correspondances appelé *alignement* peut être traité de différentes manières en fonction des besoins des applications. Une exploitation possible d'un tel alignement consiste à fusionner les deux ontologies pour obtenir une nouvelle ontologie. Le résultat de l'appariement peut aussi conduire à la génération de règles de raisonnement pour l'interprétation des ontologies appariées. La découverte manuelle des correspondances sémantiques entre deux ontologies est une tâche coûteuse en temps, inefficace et pouvant conduire à des erreurs [7]. Dans [5], les auteurs recensent les différentes méthodes existantes et les principaux défis sous-jacents à cette tâche d'appariement : la robustesse et l'évolutivité. La robustesse concerne le fait

que les erreurs mineures ne doivent pas avoir un impact sur le résultat de l'alignement et l'évolutivité quantifie la capacité de ces techniques à s'exécuter en un temps raisonnable, même en présence d'ontologies volumineuses [14]. Ces méthodes reposent essentiellement sur l'exploitation de mesures de similarité. Individuellement, aucune mesure de similarité permet d'obtenir un alignement parfait. Dans ce travail, nous émettons l'hypothèse qu'en exploitant la complémentarité de différentes mesures de similarité, un alignement de meilleure qualité serait obtenu. Cependant, combiner plusieurs méthodes conduit souvent à la nécessité de gérer des conflits d'alignements, conflits que nous proposons de gérer à l'aide de la théorie des fonctions de croyance [3], théorie reconnue comme un outil robuste dans la combinaison de jugements incertains.

Nous tenons à préciser que l'approche exposée dans cet article est une description détaillée de trois étapes essentielles à l'obtention d'un ensemble d'alignements. Ces derniers feront l'objet, dans des travaux futurs, de construction d'une nouvelle ontologie incertaine à partir de deux ontologies appariées. Les trois étapes de notre approche sont :

1. Appariement des ontologies : Au cours de cette étape, nous utilisons trois méthodes d'appariement qui donneront pour chaque entité de l'ontologie source sa correspondante dans l'ontologie cible.
2. Modélisation dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance : Les alignements obtenus au cours de l'étape précédente seront modélisés dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance et les résultats d'alignement seront combinés par application de la règle conjonctive normalisée.
3. Prise de décision : En s'appuyant sur la formalisation du conflit obtenue lors de l'étape de combinaison, un processus de décision permettra d'identifier les alignements les plus crédibles.

Cet article est une amélioration de l'approche

proposée dans [4] où nous nous sommes limités à la description des bases théoriques de notre approche à la différence de cet article où nous proposons une meilleure modélisation et nous exposons les résultats d'appariement obtenus sur des données réelles. Le reste de l'article est organisé comme suit : La section 2 présente les principes et techniques d'appariement. La section 3 est dédiée aux notions de base de la théorie des fonctions de croyance. Nous présentons dans la section 4 notre approche de modélisation des alignements dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance pour ainsi conclure et donner les différentes perspectives dans la section 5.

2 Appariement des ontologies

2.1 Notions de base

Gruber définit une ontologie comme étant une spécification explicite d'une conceptualisation [6]. En effet, pour un domaine de discours, une ontologie est un modèle abstrait qui est défini dans un langage interprétable par une machine et qui met en évidence un ensemble de concepts et des relations entre ces concepts. Une ontologie est composée essentiellement :

- de *concepts* ou *classes* qui décrivent une collection d'objets pour un domaine particulier. Ces concepts sont organisés selon une hiérarchie taxinomique,
- d'*individus* qui représentent les instances de classe,
- de *relations* explicitant les liens établies entre les individus,
- d'*attributs* qui décrivent les propriétés des individus d'une classe,
- et d'*axiomes* permettant d'inférer de nouvelles connaissances.

L'appariement des ontologies apparaît comme une étape indispensable pour assurer la réconciliation entre ontologies hétérogènes et leur interopérabilité sémantique vis-à-vis des différentes applications. Le processus d'appariement prend en entrée deux ontologies O_1 et O_2 [5] et produit un ensemble de corres-

pondances entre les entités des deux ontologies appariées. Une correspondance est un 5-uplet :

$$\langle id, e_1, e_2, r, n \rangle$$

- *id* : identifiant de la correspondance.
- e_1 et e_2 : entités tel que e_1 appartient à une ontologie source O_1 et e_2 appartient à une ontologie cible O_2 . Ces entités peuvent être des concepts, des propriétés ou encore des instances.
- r est une relation entre les entités (équivalence, disjonction, subsomption), où seule l'équivalence est étudiée dans notre approche.
- n est une mesure de confiance obtenue par application d'une mesure de similarité.

2.2 Les techniques d'appariement

Dans [5], les auteurs dressent un état de l'art complet des différentes méthodes d'appariement et notamment des mesures de similarité utilisables pour établir les correspondances entre les entités. Ces méthodes peuvent être qualifiées :

- de *terminologiques*, en comparant chaînes de caractères formées à partir des noms, des labels ou encore des commentaires des entités.
- de *structurelles*, où l'information structurelle des entités, i.e. les relations qui existent entre les entités (subsomption, rang, domaine, ...), est exploitée pour créer les correspondances. Ces méthodes reposent soit sur la structure interne des entités (cardinalité, transitivité, multiplicité, ...), soit sur leur structure externe, c'est-à-dire la position des entités dans la hiérarchie de l'ontologie.
- d'*extensionnelles*, lorsqu'elles exploitent les instances des concepts pour établir des similarités.
- de *sémantique*, lorsqu'elles s'appuient sur la sémantique de la théorie des modèles afin de justifier les résultats de l'alignement. Ces méthodes déductives sont souvent précédées d'une étape de prétraitement et exploitent les instances associées à une entité pour définir

son contexte et l'interpréter.

3 La théorie des fonctions de croyance

3.1 Formalisme

La théorie des fonctions de croyance, également appelée théorie de Dempster-Shafer [3] [8], est fondée sur la manipulation de fonctions de masse. Une fonction de masse représente une évaluation quantitative des connaissances sur un problème donné. En effet, pour un problème donné, on définit un cadre de discernement Θ comme étant un ensemble fini de toutes les hypothèses possibles exhaustives et exclusives. Une fonction de masse est décrite sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de Θ , noté 2^Θ . Cette fonction de masse ou masse élémentaire de croyance est décrite par :

$$m(\emptyset) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1 \quad (2)$$

Les éléments A tel que $m(A) > 0$ sont appelés les éléments focaux.

3.2 Combinaison

En présence d'informations imparfaites (incertaines, imprécises et/ou incomplètes), la fusion se présente comme une solution pour obtenir une information plus pertinente et plus fiable. La théorie des fonctions de croyance est un outil intéressant et robuste de fusion de données. En effet, elle repose sur la possibilité de construire, pour un même cadre de discernement, une fonction de masse unique par combinaison des différentes fonctions de masses élémentaires issues de plusieurs sources d'informations distinctes et indépendantes et ceci en vue d'une prise de décision. Il existe un grand nombre de règles de combinaison [13], nous nous limitons dans cet article à la présentation de la règle conjonctive normalisée proposée par Dempster [3]. Pour deux fonctions de masse m_1 et m_2 et

pour tout $A \in 2^\Theta$, $A \neq \emptyset$, cette règle conjonctive normalisée est définie par :

$$m_{1 \oplus 2}(A) = \frac{1}{1-k} \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \times m_2(C) \quad (3)$$

où $k = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \times m_2(C)$ est souvent considérée comme une mesure de conflit entre les sources. Cependant cette normalisation par $1-k$ masque le conflit et a été introduite pour rester en monde fermé (toutes les hypothèses possibles du problème appartiennent au cadre de discernement Θ et $m(\emptyset) = 0$).

3.3 La prise de décision

Au regard de l'information obtenue suite à la combinaison des informations issues des différentes sources, on souhaitera le plus souvent désigner l'hypothèse la plus vraisemblable. D'une façon générale, comme présentée dans [12], les fonctions de décision (plausibilité, crédibilité, probabilité pignistique) prennent la décision sur les singletons du cadre de discernement.

– Maximum de crédibilité : la crédibilité (*bel*) représente le degré de croyance minimal apporté à un sous ensemble de 2^Θ . Elle mesure à quel point les informations données par une source soutiennent A. Cette fonction est définie pour tout $A \in 2^\Theta$ et à valeurs dans $[0, 1]$ par :

$$bel(A) = \sum_{B \subseteq A, B \neq \emptyset} m(B) \quad (4)$$

Le maximum de crédibilité consiste à retenir l'hypothèse la plus crédible. En d'autres termes, cette fonction de décision permet de retenir la meilleure hypothèse tout en donnant le minimum de chances à chacune des disjonctions. C'est un critère de décision pessimiste.

– Maximum de plausibilité (*pl*) : La plausibilité représente la croyance maximale affectée à un sous-ensemble de 2^Θ . Elle mesure à quel point les informations données par une

source ne se contredisent pas. Cette fonction est définie pour tout $A \in 2^\Theta$ et à valeurs dans $[0, 1]$ par :

$$pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B) \quad (5)$$

Le maximum de plausibilité consiste à retenir l'hypothèse la plus plausible. En effet, cette fonction de décision permet de retenir la meilleure hypothèse tout en donnant le maximum de chances à chacun des singletons. C'est un critère de décision optimiste.

– Probabilité pignistique : Dans [9], Smets propose un compromis entre les deux règles de décision précédemment citées. En effet, la probabilité pignistique est une mesure qui permet d'équirépartir la masse placée sur chaque hypothèse différente d'une hypothèse singleton, sur les hypothèses qui la composent.

$$betP(X) = \sum_{A \in 2^\Theta, X \in A} \frac{m(A)}{|A|(1-m(\emptyset))} \quad (6)$$

où $|A|$ est la cardinalité de A. Prendre la décision en appliquant le maximum de la probabilité pignistique revient à choisir l'hypothèse singleton la plus probable.

Cependant, il est possible de prendre une décision sur les unions des singletons tel est le cas de la règle de décision proposée par Apriou [1]. En effet, elle permet de pondérer les règles de décision précédemment citées par une fonction qui rassemble toutes les préférences a priori relatives à la décision escomptée. Elle est décrite pour $\forall A \in 2^\Theta$ par :

$$A = \underset{X \in 2^\Theta}{argmax} (m_d(X)pl(X)) \quad (7)$$

où m_d est une masse définie par :

$$m_d(X) = K_d \lambda_X \left(\frac{1}{|X|^r} \right) \quad (8)$$

r est un paramètre appartenant à $[0, 1]$ permettant de choisir une décision allant du choix d'un singleton ($r = 1$) à l'indécision totale ($r = 0$). La valeur λ_X permet d'intégrer le manque de connaissance sur l'un des éléments X de 2^Θ . La constante K_d est un facteur de normalisation.

4 Processus de Décision Crédibiliste

Le processus de décision crédibiliste proposé dans cet article est illustré sur deux ontologies O_1 et O_2 , relatives à l'organisation de conférences¹.

4.1 Etape 1 : Appariement des ontologies

La mise en correspondance de deux ontologies est effectuée à l'aide de techniques terminologiques d'appariement à savoir les distances de Levenshtein, Jaro et Hamming. Ce sont des méthodes qui, comme décrites précédemment, comparent les chaînes de caractères sans pour autant tenir compte des relations existantes entre les entités.

- **Distance de Levenshtein** : Elle est égale au nombre minimal d'opérations de suppression, d'insertion ou de substitution de caractères nécessaires pour la transformation d'une chaîne en une autre.
- **Distance de Jaro** : Elle mesure le nombre et l'ordre des caractères communs entre deux chaînes de caractères.
- **Distance de Hamming** : Elle mesure le nombre de positions au niveau desquelles les deux chaînes de caractères diffèrent.

La figure 1 montre un extrait des correspondances établies entre une ontologie source O_1 et une ontologie cible O_2 selon une mesure de similarité. Rappelons que dans un processus d'appariement, on désigne aléatoirement une ontologie de référence pour laquelle on essaie de chercher pour chacune de ses entités sa correspondante dans une ontologie cible. On observe que l'entité *ConferenceMember* de l'ontologie O_1 est appariée aux entités *Conference* et *Conference_fees* de l'ontologie O_2 .

Par application des méthodes terminologiques d'appariement présentées précédemment, on

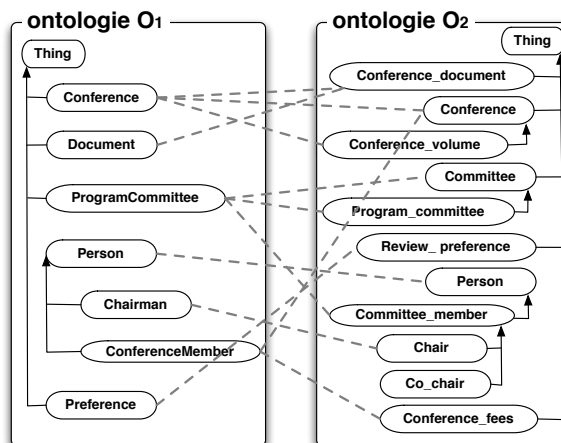


Figure 1 – Appariement entre deux ontologies pour une méthode donnée

aboutit à un ensemble de correspondances possibles. Pour limiter le nombre d'alignements considérés, un seuil de filtrage sur le degré de similarité a été défini empiriquement. Pour illustrer l'absence fréquent de consensus entre les méthodes d'appariement utilisées pour une même entité de O_1 , le tableau 1 montre les appariements privilégiés pour chacune des trois méthodes considérées en prenant *ConferenceMember* comme entité de départ de l'ontologie source O_1 .

Tableau 1 – Résultats d'appariement de l'entité $e_1 = \textit{ConferenceMember}$ de O_1 avec des entités de O_2

méthode	$e_2 \in O_2$	n
Levenshtein	<i>Conference_fees</i>	0.687
Jaro	<i>Conference</i>	0.516
Hamming	<i>Conference</i>	0.625

4.2 Etape 2 : Modélisation dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance

Les résultats d'appariement de l'étape précédente seront modélisés dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance.

– *Cadre de discernement* : il sera composé de

1. <http://oaei.ontologymatching.org/2013/conference/index.html>

toutes les entités de l'ontologie cible O_2 appariées à une entité de O_1 par au moins une des méthodes d'appariement considérées. Si l'on reprend l'illustration d'appariement de la figure 1, le cadre de discernement Θ est composé de toutes les entités de O_2 à l'exception de *Thing* et *Co_chair*.

- *Sources d'information* : Chaque correspondance établie par une méthode d'appariement sera considérée comme une information dont la source est l'application d'une méthode d'appariement sur l'entité de O_1 concernée par la correspondance.
- *Les fonctions de masse* : Parmi l'ensemble des correspondances établies, on ne conserve que celle où l'entité source $e_1 \in O_1$ a un appariement de proposée pour toutes les méthodes d'appariement considérées. Une fois les correspondances retenues, on construit pour chaque source sa propre fonction de masse. La mesure de similarité obtenue pour une correspondance suite à l'application d'une méthode d'appariement est interprétée comme une masse. Vu que la somme des masses de croyance pour une source donnée doit être égale à 1, une masse sera affectée à l'ignorance totale.

Reprenons les résultats du tableau 1. Ce tableau montre les informations de trois différentes sources que nous désignons par $S_{lev}^{e_1}$, $S_{jaro}^{e_1}$ et $S_{hamming}^{e_1}$, où $e_1 = ConferenceMember$. Selon $S_{lev}^{e_1}$, la masse associée à la correspondance avec *Conference_fees* de O_2 , notée $m_{S_{lev}^{e_1}}(Conference_fees) = 0.687$ est donc $m_{S_{lev}^{e_1}}(\Theta) = 1 - 0.687 = 0.313$. Pour cet exemple restreint aux correspondances privilégiées partant de e_1 pour les trois méthodes, les trois fonctions de masse sont les suivantes :

- $m_{S_{lev}^{e_1}}(Conference_fees) = 0.687$ et $m_{S_{lev}^{e_1}}(\Theta) = 0.313$,
- $m_{S_{jaro}^{e_1}}(Conference) = 0.516$ et $m_{S_{jaro}^{e_1}}(\Theta) = 0.484$,
- $m_{S_{hamming}^{e_1}}(Conference) = 0.625$ et $m_{S_{hamming}^{e_1}}(\Theta) = 0.375$.

- *Combinaison* : Au cours de cette étape, les fonctions de masse des trois sources seront combinées par application de la règle conjonctive normalisée. On obtient alors une masse pour chaque entité $e_2 \in O_2$ candidate à un appariement avec une entité $e_1 \in O_1$ donnée. Pour notre exemple où $e_1 = ConferenceMember$, on obtient les masses combinées suivantes :

- $m_{comb}^{e_1}(Conference_fees) = 0.2849$,
- $m_{comb}^{e_1}(Conference) = 0.5853$,
- $m_{comb}^{e_1}(\Theta) = 0.1298$.

4.3 Prise de décision

Une fois que nous avons tenu compte de toutes les informations provenant des différentes sources, l'étape de décision s'impose. Cette étape nous permettra de décider sur l'entité de l'ontologie cible à appairier avec chacune des entités de l'ontologie source. Au cours de cette étape de décision on va pouvoir décider par exemple si on doit appairier l'entité *ConferenceMember* à l'entité *Conference_fees* ou à l'entité *Conference* ou bien encore établir une indétermination. Dans ce cas, les correspondances concurrentes doivent être maintenues. Rappelons qu'à l'issue de l'étape précédente, nous avons obtenu les résultats suivants par application de la règle conjonctive normalisée :

- $m_{comb}^{e_1}(Conference_fees) = 0.2849$,
- $m_{comb}^{e_1}(Conference) = 0.5853$,
- $m_{comb}^{e_1}(\Theta) = 0.1298$.

La règle de décision, à savoir le maximum de la probabilité pignistique, considère que le meilleur correspondant pour *ConferenceMember* de l'ontologie source est l'entité *Conference* de l'ontologie cible. Par application de la règle de décision proposée par Appriou, on obtient un résultat imprécis, c'est-à-dire une disjonction entre *Conference_fees* et *Conference* ($Conference_fees \cup Conference$), ce qui se traduit par le fait qu'on pourra appairier *ConferenceMember* de l'ontologie source avec soit *Conference_fees* ou *Conference*.

5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons proposé un processus de décision dans le cadre de l'appariement des ontologies. Cette approche se déroule principalement en trois étapes où nous étions amenés tout d'abord à chercher les alignements entre les entités de deux ontologies par application des méthodes terminologiques. Ensuite, nous avons procédé à la modélisation des résultats dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance. La dernière étape consiste à prendre une décision quant au correspondant de chaque entité de l'ontologie source et ceci par application des règles de décision.

Comme perspectives à ce travail, nous envisageons tout d'abord d'utiliser d'autres méthodes d'appariement tenant compte des différents aspects sémantiques et structurels des entités à appairer et aussi de se fonder sur les résultats de décision pour construire une ontologie incertaine. Le passage à l'échelle du cadre de discernement important pour les ontologies nécessitera de développer des approches efficaces de décision sur l'espace puissance.

Références

- [1] A. Appriou. Approche générique de la gestion de l'incertain dans les processus de fusion multisenseur. *Traitement du Signal*, 22, 307- 319, 2005.
- [2] T. Berners-Lee, J. Hendler, O. Lassila. The semantic web. *Scientific American*, 284 : 34 - 43, 2001.
- [3] A. Dempster. Upper and Lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38 : 325 - 339, 1967.
- [4] A. Essaid, B. Ben Yaghlane, A. Martin. Gestion du conflit dans l'appariement des ontologies. *Atelier Graphes et Appariement d'Objets Complexes, Extraction et Gestion des Connaissances (EGC)*, 50 - 60, 2011.
- [5] J. Euzenat, P. Shvaiko. *Ontology Matching*. Springer-Verlag, 2007.
- [6] T.R. Gruber. A translation approach to portable ontology specifications. *Knowledge Acquisition Journal*, 5(2) : 199 - 220, 1993.
- [7] N. F. Noy, M. A. Musen. Prompt : algorithm and tool for automated ontology merging and alignment. *In Proceeding of Seventeenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2000)*, 2000.
- [8] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [9] P. Smets : Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty. *Uncertainty in Artificial Intelligence*, 5, 29 -39, 1990.
- [10] P. Smets. Belief functions : The disjunctive rule of combination and the generalized bayesian theorem. *International Journal of Approximate Reasoning*, 9(1) : 1-35, 1993.
- [11] P. Smets, R. Kennes. The Transferable Belief Model. *Artificial Intelligence*, 66 : 191- 234, 1994.
- [12] P. Smets. Decision making in the TBM : the necessity of the pignistic transformation. *International Journal of Approximate Reasoning* 38, 133 - 147, 2005.
- [13] P. Smets. Analyzing the combination of conflicting belief functions. *Information Fusion*, 8(4) : 387 - 412, 2007.
- [14] X. Su. Semantic enrichment for ontology mapping. *Norwegian University of Science and Technology*, 2004.

Logique possibiliste multi-agents, confiance, et arguments

Multiple agent possibilistic logic, trust and arguments

Asma Belhadi¹

Faiza Khellaf-Haned¹

Henri Prade²

¹ LRIA, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Algérie
BP 32 El Alia 16111 Bab Ezzouar, Alger, hanedfaiza@yahoo.com

²IRIT, CNRS & Université de Toulouse, France

118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 09, prade@irit.fr

Résumé :

Quand un agent reçoit une information d'un autre agent, la façon dont il intègre éventuellement cette information dépend de son propre état de croyance initial, de la confiance / défiance qu'il a vis-à-vis de l'autre agent, et éventuellement des arguments que l'autre agent peut apporter à l'appui de son affirmation, et de la manière dont ces arguments rencontrent les croyances du premier agent. Nous cherchons à représenter ce processus complexe de révision dans le cadre de la logique possibiliste.

Mots-clés :

logique possibiliste, révision de croyances, fusion d'information, confiance, argumentation.

Abstract:

When an agent receives a piece of information from an other agent, the way he is going to take it into account depends on his own state of beliefs, on his trust / distrust with respect to the other agent, and possibly on the arguments that the other agent can produce for supporting his claim, and how these arguments interact with the beliefs of the first agent. We study how to represent this complex revision process within the setting of possibilistic logic.

Keywords:

possibilistic logic, belief revision, information fusion, trust, argumentation.

1 Introduction

Il existe une littérature considérable sur la révision de croyances (un processus asymétrique où la priorité est donnée à l'information entrante) et sur la fusion d'information (un processus symétrique d'intégration de l'information provenant de plusieurs sources d'information en parallèle), dans différents cadres de représentation des connaissances.

La logique possibiliste en associant des propositions avec des niveaux de certitude offre un cadre pondéré à la combinaison de l'information qui autorise différentes opérations

d'agrégation [4, 1]. Un cadre étendu permet de prendre en compte les croyances mutuelles de groupe d'agents [6]. Des informations de niveau méta sur la capacité des sources à fournir des informations toujours correctes et éventuellement complètes peuvent y être prises en compte [5]. Le processus de transmission de l'information au travers de plusieurs agents a été récemment analysé dans des cadres de logique modale et de fonctions de croyance [2, 3] et peut se transposer en logique possibiliste. Par ailleurs, l'idée de décôte ("discounting") de la confiance dans l'information fournie par une source quelque peu douteuse est ancienne ; elle a été récemment enrichie en prenant en compte la compétence des sources et leur propension à dire la vérité [9] dans le cadre des fonctions de croyance.

La réception par un agent d'une information qui rentre en conflit avec ses croyances est souvent affaire d'argumentation de la part de l'autre agent qui l'informe. Des travaux ont comparé les processus de révision et d'argumentation, montré leur complémentarité, prenant aussi en compte des règles par défaut dans l'argumentation [8, 7]. La confiance (et la défiance) peuvent elles-mêmes être argumentées [10]. Nous discutons maintenant comment ces différents aspects peuvent être pris en compte et intégrés dans le cadre de la logique possibiliste.

2 Esquisse d'une approche unifiée

Considérons une proposition p . L'agent a peut être (plus ou moins) certain que p est vrai, ou que p est faux, ou encore ne pas savoir si p est

vrai, ou si p est faux. Sa confiance dans les dires de l'agent b peut être plus ou moins grande, (ou au contraire, il peut douter de ses dires avec un niveau de défiance plus ou moins grand), il peut aussi avoir une information imprécise, voire nulle, sur cette confiance / défiance. On peut aussi envisager que a considère que p est plus ou moins possible, sans qu'il n'ait aucune certitude sur p , i.e., sans qu'il ne sache rien de la possibilité de $\neg p$.

Supposons que a croit p (à un certain degré α), que b affirme que p est faux (avec un certain degré de certitude β), et que a a confiance au niveau γ en b . Les deux premières informations correspondent à des formules standards de la logique possibiliste associées à des agents : $(p, \alpha/a)$ et $(\neg p, \beta/b)$. La dernière peut s'écrire sous la même forme, $(b, \gamma/a)$, en assimilant a, b à des propositions ; ce qui conduit par inférence à $(\neg p, \min(\beta, \gamma)/a)$. On voit qu'on n'est pas dans une situation de révision classique, qui donne la priorité à l'information entrante. Selon les valeurs relatives de α et de $\min(\beta, \gamma)$, a va continuer à croire p , ou se mettre à croire que p est faux (avec un degré de certitude affaibli par rapport à β). Si $\alpha = \min(\beta, \gamma)$, a se retrouve dans un état de doute absolu où p et $\neg p$ lui apparaissent chacun complètement possibles. Notons qu'un tel mécanisme simple de "discounting" et de gestion de l'incohérence par niveau ne modifie pas la confiance de a par rapport à b , si b va à l'encontre des croyances de a , ni ne la rend plus imprécise. On n'y modélise pas non plus la simple défiance.

L'agent b peut énoncer un (ou plusieurs) argument(s) à l'appui de son affirmation, c'est-à-dire un ensemble minimal cohérent de propositions qui impliquent $\neg p$. Certains composants de l'argument considéré peuvent être partagés par a , d'autres inconnus de a . Si l'argument de b comporte des éléments qui contredisent les croyances de a , cela amènera a à affaiblir la possibilité de $\neg p$ de manière d'autant plus forte que les croyances contredites de a seront fortes.

On voit que les processus de "révision", de prise

en compte (et d'évolution) de la confiance, et d'évaluations de la force des arguments sont étroitement liés.

3 Conclusion

La présentation du travail en cours montrera comment ces différents aspects peuvent être articulés dans le cadre de la logique possibiliste.

Références

- [1] S. Benferhat, D. Dubois, H. Prade. From semantic to syntactic approaches to information combination in possibilistic logic. In : Aggregation and Fusion of Imperfect Information. (B. Bouchon-Meunier, eds.), Physica-Verlag, 141-161, 1998.
- [2] L. Cholvy. How strong can an agent believe reported information ? Proc. 11th Europ. Conf. on Symb. and Quantit. Appr. to Reas. with Uncert. (ECSQA-RU'11), (Weiru Liu, ed.), Belfast, June 29-July 1, LNCS 6717, Springer, 386-397, 2011.
- [3] L. Cholvy. Collecting information reported by imperfect information sources. In : Advances in Computational Intelligence, Part III, Proc. 14th Inter. Conf. on Inform. Process. and Manag. of Uncert. in Knowledge-Based Syst. (IPMU'12), (S. Greco et al., eds.), Catania, July 9-13, vol. CCIS 299, Springer, 501-510, 2012.
- [4] D. Dubois, J. Lang, H. Prade. Dealing with multi-source information in possibilistic logic. Proc. of the 10th Europ. Conf. on Artificial Intelligence (ECAI'92), Vienna, Austria, Aug. 3-7, 1992, Wiley, New York, 1992, 38-42
- [5] D. Dubois, H. Prade. Valid or complete information in databases - A possibility theory-based analysis. In : Database and Expert Systems Applications (Proc. of the 8th Int. Conf. DEXA'97, Toulouse, France, Sept. 1997) (A. Hameurlain, A. M. Tjoa, eds.), LNCS1308, Springer, 603-612, 1997.
- [6] D. Dubois, H. Prade. Toward multiple-agent extensions of possibilistic logic. Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'07), London, July 23-26, 187-192, 2007.
- [7] M. Falappa, G. Kern-Isberner, G. Simari. Belief revision and argumentation theory. In : Argumentation in Artificial Intelligence (I. Rahwan, G. Simari, eds.), Springer, 341-360, 2009.
- [8] F. Paglieri, C. Castelfranchi. Revising beliefs through arguments : Bridging the gap between argumentation and belief revision in MAS. In : Proc. ArgMAS, (I. Rahwan, P. Moraitis, C. Reed, eds.), LNCS 3366, Springer, 78-94, 2004.
- [9] F. Pichon, D. Dubois, T. Denœux. Relevance and truthfulness in information correction and fusion. Int. J. of Approximate Reasoning, 53, 159-175, 2012.
- [10] H. Prade. A qualitative bipolar argumentative view of trust. Proc. 1st Int. Conf. on Scalable Uncertainty Management (SUM 2007), Washington, DC, Oct. 10-12, (H. Prade, V. S. Subrahmanian, eds.), Springer, LNAI 4472, Springer, 268-276, 2007.

Interpolation spatiale floue en Sciences de l'Environnement : de la faisabilité technique à l'utilisation experte

M. Batton-Hubert¹

A. Gentils²

^{1,2} Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

Ecole Nationale Supérieure des Mines, EMSE-FAYOL, CNRS UMR6158, LIMOS, F-42023 Saint-Etienne
batton@emse.fr, gentils@emse.fr

Résumé :

La génération de champs scalaires spatiaux, interpolés à partir de données géo localisées ayant une évaluation floue reste significative sur deux aspects : la génération du champ continu de valeurs floue d'une part, et de la pertinence des résultats dans le cadre de l'utilisation d'experts. En effet, plusieurs techniques ont été explorées dont le krigeage flou mais peu de choses sont retranscrites concernant la génération d'un champ à partir de données possibilistes et de la connaissance exploitable en sortie. Deux nouveaux algorithmes sont proposés et appliqués à des données environnementales, de champs d'estimation de la profondeur du substratum pour l'étude de nappe aquifère pour essayer d'évaluer la pertinence de la connaissance spatiale produite.

Mots-clés :

Interpolation spatiale floue, possibilités, estimation de champ de profondeurs de substratum

1 Introduction

L'interpolation floue est un problème qui a été abordée sous plusieurs angles depuis les années 1970, mais pour lequel il existe peu de solutions satisfaisantes. Le type d'incertitude ou d'imprécision que le modèle doit prendre doit être précisé. [5] distingue trois types d'imprécisions possibles : sur la localisation, sur les données, et sur les interactions spatiales entre les données. Seule l'imprécision sur la donnée Z est considérée, le problème de la localisation des points de mesure n'est pas pris en compte. On supposera alors que le point de mesure en $\mathbf{x} [x,y,z]$ est connu à une erreur estimée. L'interpolation ou l'estimation spatiale en présence d'incertain se heurte à un problème conceptuel : en toute rigueur, il est difficile d'obtenir un modèle d'interpolation ou d'estimation précis à partir de données imprécises. En présence de données

imprécises, l'ensemble des données compatibles avec les informations disponibles contient plus d'un élément. Supposons que l'on souhaite construire un modèle d'interpolation précis qui corresponde à l'ensemble des éléments admissibles. Un tel modèle se basant sur les données disponibles sera différent selon les données précises choisies. Le modèle doit par conséquent être également imprécis et cela implique que l'on introduise un second niveau d'incertitude. Un tel modèle devrait donner en chaque point \mathbf{x} de l'espace non pas une distribution de possibilité sur les valeurs de Z mais sur les distributions de possibilité sur Z admissibles¹ en \mathbf{x} . L'interpolation et l'estimation spatiale sont basées sur des distances entre les points de l'espace, et entre les valeurs de Z . Il existe de nombreux modèles de distance entre les données de type distribution de possibilité. Certains renvoient une distance réelle précise d'autres une distance sous forme d'une distribution de possibilité, ou des distances sous forme d'intervalle. Deux approches sont envisagées dans cette étude :

1. une approche combinant du krigeage avec un algorithme de type Monte-Carlo afin de reconstituer en chaque \mathbf{x} une distribution de possibilité par tirage aléatoire,
2. une approche adaptant l'algorithme de soft kriging proposée par [3], ce qui permet de borner la distribution de possibilité en tout point de l'espace.

¹ Distributions admissibles au sens où elles sont compatibles avec des valeurs supports et noyaux voisins: soit l'enveloppe de l'opérateur de type $\cup (min)$

On présentera successivement ces deux techniques d'interpolation spatiale en présence d'incertitude (section 2), et leur mise en application sur cas test (section 3). L'application à l'estimation d'un champ de profondeurs de substratum (section 4) pour l'étude de nappe aquifère permettra d'aborder le problème de l'adéquation entre ce type de formalisme et de la prise en compte de données imprécises dans le cadre d'expertise en Géosciences.

2 Estimateurs flous sur de données possibilistes

Soit une zone géographique S dans laquelle on souhaite évaluer une grandeur z . On dispose de n points de mesure x_i avec $i = 1, \dots, n$, pour lesquels on connaît une distribution de possibilité de la valeur z : $\pi_i(z)$. On cherche à estimer la distribution de possibilité π_x en tout point $x \in S$ à partir des π_i .

2.1 Éléments sur les possibilités

La théorie des possibilités introduite par [6] fournit un cadre méthodologique pour traiter l'information imprécise z [2]. Une distribution de possibilité peut être vue comme une superposition d'intervalles emboîtés de valeurs du paramètre incertain où chaque intervalle correspond à un degré de confiance [1]. Une mesure de possibilité sur un ensemble X est une fonction Π sur 2^X , prenant ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné généralement $Z = [0; 1]$, tel que :

$$\Pi(\emptyset) = \min Z \text{ et } \Pi(X) = \max Z$$

avec :

$$\Pi(\cup_{i=1..k} A_i) = \max_{i=1..k} \Pi(A_i) \quad \forall (A_i)_{i=1..k} \in 2^X$$

On peut construire une mesure de possibilité à partir d'une distribution de possibilité π sur X . Réciproquement une mesure de possibilité Π sur X induit une distribution de possibilité : $\forall x \in X, \pi(x) = \Pi(\{x\})$. Une distribution de possibilité peut être représentée par l'ensemble

de ses α -coupes π_α définies par tout $\alpha \in]0,1]$ par $\pi_\alpha = \{x \in X | \pi(x) \geq \alpha\}$. Si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ alors $\pi_\beta \subset \pi_\alpha$. La coupe de niveau $\alpha=1$ est appelé noyau, la coupe de niveau $\alpha=0$ est appelé support.

2.2 Construction de l'estimateur

L'opérateur d'interpolation sur des données floues représentées par des distributions de possibilité permet de fournir soit des données floues avec des distributions de possibilités ou des ensembles flous basiques, soit des d'intervalles, voire éventuellement des données précises. Il semble plus pertinent de rechercher un résultat qui soit une distribution de possibilité pour éviter de perdre de l'information. Si l'on interpole des distributions de possibilités en utilisant des α -coupes une caractéristique importante pour l'estimateur est la cohérence du résultat tel que qu'en chaque point les α -coupes de rang supérieur soient incluses dans les α -coupes de rang inférieur ; l'opérateur croissant préservera l'emboîtement α -coupes.

2.3 Krigeage par échantillonnage aléatoire

En krigeage, les méthodes existantes souffrent de la complexité de l'application du krigeage à une distribution de possibilité [4]. L'idée d'utiliser une méthode de krigeage par échantillonnage aléatoire de type Monte-Carlo pour calculer l'interpolation de distributions de possibilité est suggérée par [4]. En présence d'incertitude, le principe consiste à utiliser un échantillonnage de type Monte-Carlo, pour kriger un grand nombre de profils de valeurs admissibles, puis leur appliquer un estimateur local précis, et en déduire un estimateur possibiliste en un point donné. L'avantage de cette approche est qu'il n'est pas nécessaire de construire un modèle de krigeage qui puisse traiter des données possibilistes (variogramme flou) contrairement à [5]. La méthode de krigeage par échantillonnage aléatoire proposée ici repose sur un principe relativement simple : il s'agit de générer un

grand nombre de tirages aléatoires sélectionnant z_i^k des valeurs entre les bornes des supports des distributions de possibilité, puis de kriger chaque tirage, afin d'extraire de l'ensemble des tirages une distribution de possibilité résultante. Une distribution de possibilité ne contient pas d'information supplémentaire sur la probabilité d'occurrence des différentes valeurs. Tous les points de possibilité non nulle ont *a priori* la même probabilité d'occurrence, tandis que les points de possibilité nulle ont une probabilité d'occurrence égale à zéro.

Le krigeage réalisé pour chaque tirage aléatoire k , consiste à faire l'estimation en un point x , à partir des différentes valeurs $z^k(x_i)$ sur les i points de mesure : soit à chaque tirage k une valeur $\hat{z}^k(x)$. Pour déterminer la possibilité associée en ce point $\hat{z}^k(x)$, on associe à la valeur obtenue par krigeage la possibilité minimale des points interpolés, soit la confiance minimale associée cette valeur. On obtient alors la valeur par le $k^{ième}$ tirage pour chaque point x_i , et $\pi_i(z^k(x_i)) = \pi_i^k$ la possibilité associée :

$$\pi(\hat{z}^k(x)) = \min_i(\pi_i^k) \quad (1)$$

Les K échantillons obtenus en un point x vont permettre de reconstruire une distribution de possibilité en ce point. Pour chaque valeur z , la valeur de la possibilité $\pi(z(x))$ est la valeur maximale des possibilités $\pi(\hat{z}^k(x))$ soit :

$$\pi_x(z(x)) = \max \left[\pi(\hat{z}^k(x)) \mid \hat{z}^k(x) = z(x), \forall k \in K \right] \quad (2)$$

$\pi(z(x))$ est une estimation de la possibilité interpolée à partir des n échantillons de possibilités associés aux points x_i .

2.4 Algorithmes prudent d'interpolation floue

Algorithme 3: Krigeage par échantillonnage aléatoire

Données : n points x_i et leurs distributions de possibilité associées $\pi_i(z)$

```

 $a_i = \inf_z \text{supp}(\pi_i);$ 
 $b_i = \sup_z \text{supp}(\pi_i);$ 
pour  $1 \leq k \leq K$  faire
    Tirer  $n$  valeurs  $z_i^k \in [a_i, b_i];$ 
     $\pi_i^k = \min_i \pi_i(z_i^k);$ 
    pour tous les  $x \in \mathcal{S}$  faire
         $\hat{z}_x^k = \text{krig}(z_i^k, x);$ 
         $\pi(z_x^k) = \pi_i^k;$ 
    fin
fin
/* On récupère l'enveloppe convexe */
pour tous les  $x, z$  faire
     $\pi_x(z) = \max_{z_x^k = z} \pi(z_x^k);$ 
fin

```

Figure 1 – Algorithme méthode de krigeage par échantillonnage aléatoire

Le *soft kriging* introduit par [3] cherche à pouvoir prendre en compte dans l'interpolation des intervalles, des indications sur la confiance relative sur la probabilité d'occurrence des valeurs d'un intervalle. Le principe de calcul de l'interpolation en présence d'incertitude proposé par [3] est de travailler non plus sur des valeurs de la grandeur z à interpoler, mais sur des fonctions indicatrices $ind(x, z)$ qui permettent de représenter mathématiquement si la valeur z est inférieure ou supérieure, à la mesure au point x : lorsque $z > Z(x)$, $ind(x, z) = 1$; lorsque $z \leq Z(x)$, $ind(x, z) = 0$.

Dans le cas où la mesure en x est un intervalle $[Z_-(x), Z^+(x)]$, on a également : lorsque $z > Z^+(x)$, $ind(x, z) = 1$; lorsque $z \leq Z_-(x)$, $ind(x, z) = 0$; et lorsque $Z_-(x) < z \leq Z^+(x)$ la fonction la fonction $ind(x, z)$ n'est pas définie.

Données : n points x_i et les valeurs mesurées en ces points $Z(x_i)$

```

/*  $Z(x_i)$  peut être un réel ou un intervalle */
Données : Une discrétisation  $I_z = \{z_k\}$  des valeurs possibles pour  $z$ 
/* Création des fonctions  $ind(x_i, z_k)$  */
si  $Z(x_i) \leq z_k$  alors  $ind(x_i, z_k) = 0$ 
sinon si  $Z(x_i) > z_k$  alors  $ind(x_i, z_k) = 1$ 
sinon  $ind(x_i, z_k) = NA$ 
pour tous les  $z_k \in I_z$  faire
    Kriger les fonctions  $ind(x, z_k)$  (en faisant attention au cas où toutes les valeurs sont  $NA$ );
     $F_x^*(z_k) = \sum_{ind(x_i, z_k) \neq NA} \lambda_n(x, z_k) \cdot ind(x_i, z_k);$ 
     $z_k^*(x) = \text{moyenne des } z(x_i) \in [z_k, z_{k+1}] \text{ proches de } x;$ 
fin
 $z^*(x) = \sum_{k=0}^K z_k^*(x) \cdot [F_x^*(z_{k+1}) - F_x^*(z_k)];$ 

```

Figure 2 – Algorithme *soft kriging* selon [3]

Il convient d'adapter cet algorithme (Figure 2.) aux distributions de possibilité et notamment pour la plage de valeurs correspondant à l'intérieur de l'intervalle où il ne peut statuer. Une proposition d'un algorithme prudent d'interpolation floue est fournie (Figure 3.): la première étape consiste à tirer une collection de α -coupes pour chaque distribution de possibilité afin de travailler sur intervalles puis utiliser les mesures précises pour prendre en compte les mesures imprécises. Il faut donc adapter la valeur z' (Figure 2.). Cette valeur est une valeur moyenne des z précis sur un voisinage du calcul du point x : elle doit être remplacée par un intervalle soit une borne inférieure et une borne supérieure. Le principe de l'algorithme (Figure 3.) est le suivant : pour chaque α et en chaque point de mesure x_i on calcule une α -coupe $[z_-(x_i, \alpha), z^+(x_i, \alpha)]$. Ces α -coupes sont agrégées sur chaque voisinage V_x du point x selon :

$$(3) \quad \begin{cases} z_-(x, \alpha) = \min_{x_i \in V_x} z_-(x_i, \alpha) \\ z^+(x, \alpha) = \max_{x_i \in V_x} z^+(x_i, \alpha) \end{cases}$$

Algorithme 5: Algorithme prudent d'interpolation floue

```

Données : n points  $x_i$  et leurs distributions de possibilité associées  $\pi_i(z)$ 
On définit les  $\alpha$  pour lesquels les  $\alpha$ -coupes seront déterminées;
/* Pour chaque valeur  $\alpha$  on aura une  $\alpha$ -coupe en chaque point de mes
 $x_i$ , qui fournira un intervalle pour l'interpolation
 $[z_-(x_i, \alpha), z^+(x_i, \alpha)]$ ;
pour tous les  $\alpha$  faire
    pour tous les  $x_0 \in S$  faire
        /* On travaille sur un voisinage  $V_0$  de  $x_0$ :
         $z_-(x_0, \alpha) = \min_{x \in V_0} z_-(x, \alpha)$ ;
         $z^+(x_0, \alpha) = \max_{x \in V_0} z^+(x, \alpha)$ ;
    fin
fin
    
```

Figure 3 – Algorithme prudent d'interpolation floue

3 Application sur cas test

3.1 Construction d'un cas test

On souhaite, à partir de distributions de possibilités connues en certains points d'une surface S , *constituant* une perception incertaine de la valeur z de la surface en ces points, reconstruire les fonctions de possibilité

associées à chaque point de l'espace. Une surface analytique pour une valeur salaire z est générée puis bruitée, sur laquelle un ensemble n points est choisi (Figure 4.). La génération des distributions de possibilité est obtenue à partir du bruit, qui utilise un tirage aléatoire de loi normale centrée et de variance 5%. Les distributions de possibilité sont construites autour de ces valeurs bruitées, de type triangulaire, de support de longueur égale à 10% de l'intervalle des valeurs et d'un noyau ne contenant qu'un élément.

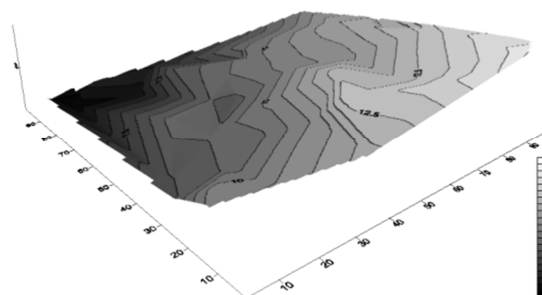


Figure 4 – Cas test : plan incliné de valeurs bruitées échantillonnées en n points ; pour chaque point i , construction d'une distribution de possibilité triangulaire.

Ce cas test est utilisé pour les deux algorithmes proposés.

3.2 Résultats obtenus pour le krigage par échantillonnage flou

Les résultats de l'algorithme de *krigage par échantillonnage flou* montrent qu'il est difficile de reconstituer l'enveloppe convexe de la distribution de possibilité. La densité de points n'est pas suffisante quel que soit le nombre de tirages aléatoires réalisés (cas : 1000 et 5000 itérations – Tableau 1). Une limite est que, pour chaque point et à chaque tirage est recalculé le krigage: plus le nombre de points augmente plus le temps de calcul augmente. D'autre part, la distribution de possibilité serait l'enveloppe des points obtenus par tirage de Monte-Carlo or avec 5000 points on n'obtient aucun point ayant une valeur de possibilité de 0,35. Pour obtenir un point de valeur de possibilité de 1 il faut avoir en entrée que des points ayant cette valeur : la

probabilité que ces conditions soient réunies, est fonction du nombre de points et du ratio noyau/support. Dans le cas étudié on a une probabilité de $(\frac{1}{2})^{20} \cong 10^{-6}$. Il est donc difficile de décrire l'enveloppe extérieure de la distribution de possibilité en un temps CPU raisonnable.

3.3 Résultats obtenus pour l'algorithme prudent d'interpolation floue

Les résultats de l'algorithme prudent d'interpolation floue montrent qu'il est possible de construire une distribution de possibilité de l'ensemble de valeurs de z en tout point x .

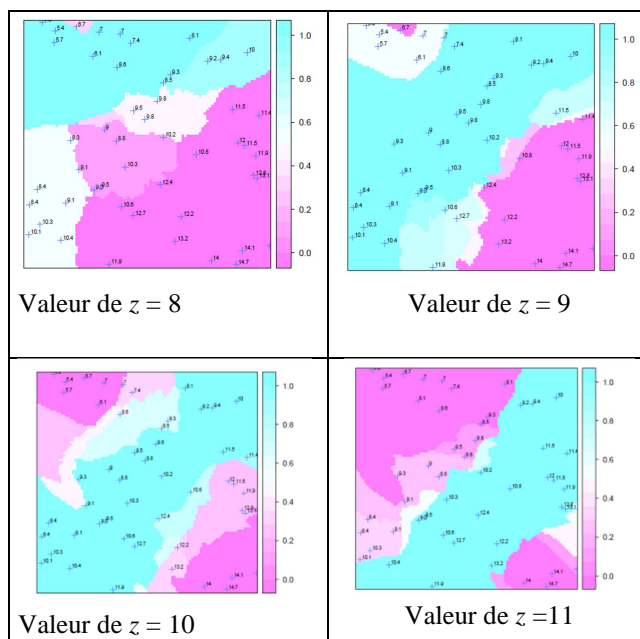
Tableau 1 – Krigage par échantillonnage aléatoire au point x de coordonnées (50,50) avec 1000 et 5000 itérations.

Test avec 1000 itérations	Test avec 5000 itérations

L'objectif étant de représenter un champ continu, la représentation cartographique des résultats n'est pas aisée. Nous avons choisi de représenter des cartes de possibilités pour des valeurs de z fixées, en chaque point la valeur de la possibilité associée à une valeur donnée z est affichée (Tableau 2.).

L'interprétation des résultats obtenus ne peut se faire sans considérer une plage de valeurs possibles de z successivement: en effet la carte de valeurs de possibilité pour un z donné identifie les secteurs potentiels de valeurs possibles z plus ou moins proche de 1.

Tableau 2 – Interpolation floue par indicatrice avec 8 voisins pour différentes valeurs de Z . Les 50 points de mesure sont indiqués par des croix (dont la valeur précise est également fournie ici), les 10 α -coupes ont été calculées sur une grille de 10000 points. Le dégradé de couleur (ordonnée) correspond à la valeur de $\pi(x)$ en tout point x .



Une iso valeur de $z = 10$ selon une diagonale coin-gauche bas vers coin-haut droit connue à la construction du cas test, conduit à des valeurs de possibilité proches de 1 pour des z comprises entre 9 et 11 (Tableau 2.). Ce qui est concordant par rapport aux hypothèses. Ceci permet de fournir une information imprécise mais selon une répartition spatiale; ceci reste difficile à utiliser comme champ de données continues pour des surfaces *a priori* mal connues mais réellement précises (voir exemple suivant). Cependant pour un expert en géosciences cherchant à faire un échantillonnage, cela permet l'aide au choix de points de mesure. Pour un point donné x sa distribution de possibilité selon les valeurs possibles z a été construite, et pour chaque valeur pour une valeur de possibilité, la confiance $(1-\alpha)$ en cette valeur z .

4 Application à un champ de profondeurs du substratum

En hydrogéologie, les écoulements sont modélisés par les équations de Darcy, résolues par des codes de type éléments finis ou différences finies. Dans tous les cas, des données sur la géométrie de l'aquifère comme la hauteur de nappe et profondeur du substratum sont nécessaires. Cette information est souvent mal connue et pose des problèmes de recouvrements de surfaces lors d'interpolation de données de sondage de profondeur d'une part, et de la hauteur piézométrique d'autre part, qui n'ont pas de réalité physique : la nappe aquifère ne peut se localiser au-dessous du substratum imperméable. L'imprécision sur les données de la profondeur du substratum impose à l'expert en fonction de sa connaissance du phénomène local, de faire des choix sur les valeurs possibles de la profondeur. On se propose de représenter cette information par une valeur floue et plus précisément associer une distribution de possibilité en chacun des points x_0 et appliquer l'algorithme *prudent d'interpolation floue* à ce jeu de données.

Les données sources utilisées sont des données de sondage fournissant une cote z . Une fonction de distribution autour des valeurs possibles est construite en chacun ces points (Figure 5.)

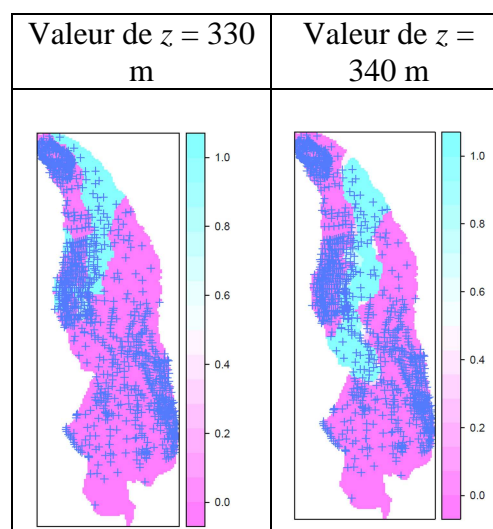


Figure 5 – Localisation des points d'échantillonnage de profondeur du substratum

On remarquera que l'échantillonnage est non uniformément réparti sur l'espace considéré ce qui aura un effet sur l'interpolation floue.

Tableau 3 – Interpolation floue par indicatrice avec 8 voisins pour différentes valeurs de z .

Les 1144 points de mesure sont indiqués par des croix, les 10 α -coupes ont été calculées sur une grille de 10000 points.



Les résultats montrent (Tableau 3.) qu'il existe un zonage longitudinale de la répartition des valeurs z de valeurs de possibilité les plus grandes, ce qui correspond effectivement à une structuration selon à un axe N-NE S-SE du substratum identifiée. On peut alors raisonnablement penser que pour l'hydrogéologue, expert du site, en disposant pour une valeur de z donnée, de la possibilité de cette valeur z pour un point donné ou pour une zone donnée, il pourrait conforter ou infirmer ses hypothèses sur la répartition spatiale de la profondeur du substratum. Il peut alors choisir une enveloppe de référence qu'il juge satisfaisante pour construire le modèle numérique de terrain nécessaire aux modèles d'écoulements hydrodynamiques.

5 Interprétation et discussion

Quelques éléments sont à retenir de cette étude. L'algorithme *prudent d'interpolation floue* permet d'obtenir une distribution de possibilité floue bien que sensible à la répartition de points supports néanmoins vrai

pour toute forme d'interpolation. L'un des inconvénients de cette méthode est : si l'on suppose deux points proches l'un de l'autre centrés sur une même valeur, mais dont l'un est moins précis, c'est le point le moins imprécis qui sera utilisé dans l'interpolation. L'intégration de fonctions de pondération pourraient permettre de prendre en compte la (dis)similarité pouvant exister dans les méthodes de krigeage, ceci permettrait d'intégrer le critère de corrélation spatiale lié à la distance entre deux points et non à la position spatiale absolue du point.

Le choix de l'opérateur d'interpolation répond en premier lieu au type de données possibilistes : cela revient à considérer que dès lors qu'une valeur x a une possibilité $\pi(x)$ de 1 sur l'un des points supports, la valeur pour le point interpolé sera possible automatiquement. D'autres stratégies moins conservatrices mais plus précises peuvent être également envisagées tout en prenant en compte le fait que le résultat doit définir un ensemble commun pour le support (celui-ci ne pouvant être vide). Les deux tests envisagés montrent la faisabilité technique de l'interpolation floue sur des distributions de possibilité mais montrent la nécessité de se poser la pertinence de la représentation cartographique unique et l'appropriation de cette forme d'information pour une aide à la décision.

Pour l'appropriation, la représentation plus aisée est de fournir la distribution de possibilité estimée au point x_0 mais ceci ne donne plus une visualisation spatiale du résultat. Pour tenter de répondre au problème de la prise en main de ces résultats, une représentation sur une carte des valeurs de Z pour une valeur de possibilité donnée (par exemple 1, 0.9, 0.8...) également pourrait être envisagée également. Mais ceci ne contribue que partiellement à l'appropriation par l'expert de cette information imprécise. Son usage pour l'aide à la décision, demeure une question ouverte.

Références

- [1] C. Baudrit. *Représentation et propagation de connaissances imprécises et incertaines : Application à l'évaluation des risques liés aux sites et aux sols pollués*, Thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2005.
- [2] D. Dubois, et H. Prade. *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision, volume 1, outils de modélisation, chapitre Représentations formelles de l'incertain et de l'imprécis*, pp. 111-171. Hermès. 2006.
- [3] A. Journel. Constrained interpolation and qualitative information the soft kriging approach *Mathematical Geology*, 18(3):269-286. 1986
- [4] K. Loquin, D. Dubois. (2010b). *Methods for Handling Imperfect Spatial Information*, chapitre Kriging and epistemic uncertainty: a critical discussion, pp. 269-305. Springer Verlag, 2010.
- [5] J-N. Paoli, O. Strauss, B. Tisseyre, et P. Lagacherie. Utilisation d'un variogramme flou dans une méthode d'agrégation sémantique, *Actes des Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA)*, 2006.
- [6] L.A. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338-353, 1965.

Requêtes floues et SGBD relationnels : vers un couplage renforcé

Fuzzy queries and RDBMSs : towards a tighter coupling

G. Smits¹

O. Pivert¹

T. Girault²

¹ IRISA-ENSSAT, Université de Rennes 1, ² Ingénieur freelance

Technopole Anticipa, BP 80518, 22305 Lannion Cedex

{smits, pivert}@irisa.fr, toma.girault@gmail.com

Résumé :

Dans cet article, nous présentons une stratégie pour la mise en œuvre d'un système d'interrogation floue autour d'un SGBD classique. Le système considéré repose sur le langage SQLf qui permet d'exprimer une grande variété de requêtes floues. Les expérimentations menées montrent que la stratégie d'implémentation choisie apporte des gains de performances par rapport aux architectures existantes fondées sur un couplage plus lâche entre une couche dédiée à l'évaluation des requêtes floues et un SGBD, ce type de solution nécessitant une étape de post-traitement pour calculer la relation floue produite par une requête. Nous décrivons également une interface conviviale visant à aider les utilisateurs non-experts à exprimer leurs requêtes floues de façon intuitive.

Mots-clés :

Bases de données, requêtes floues, optimisation de requête, SQLf, PostgreSQL, interface.

Abstract:

In this paper, we present an implementation strategy for a fuzzy querying system embedded in a regular DBMS. This system relies on the language SQLf that makes it possible to express a great variety of fuzzy queries. Experiments show that this implementation strategy induces performance gains with respect to existing strategies based on a loose (or milder) coupling between a fuzzy querying layer and a DBMS, that necessitate an external postprocessing so as to compute the result in the form of a fuzzy relation. We also describe a user-friendly interface aimed at helping nonexpert users express their fuzzy queries in an intuitive manner.

Keywords:

Database fuzzy querying, query optimization, SQLf, PostgreSQL, interface.

1 Introduction

Durant la dernière décennie, on a pu constater un regain d'intérêt pour l'expression de préférences dans les requêtes de bases de données. En réalité, les premiers travaux de recherche sur ce sujet remontent aux années 80, voir par exemple [12]. Les motivations pour les requêtes à préférences sont multiples [10].

Tout d'abord, il est apparu souhaitable d'offrir des langages de requête plus expressifs, pouvant traduire plus fidèlement le besoin d'information d'un utilisateur. En deuxième lieu, l'introduction de préférences dans les requêtes fournit une base à l'ordonnement des réponses, ce qui est particulièrement appréciable dans le cas d'ensemble de réponses volumineux. Enfin, une requête classique peut produire un résultat vide, alors qu'une version relaxée (et donc moins restrictive) de la requête pourra peut-être être satisfaite par quelques éléments.

Dans cet article, nous considérons l'approche de requêtes à préférences fondée sur la théorie des ensembles flous [4, 6], qui bénéficie de la grande expressivité de cette dernière quant à la modélisation de différents types de critères graduels et à leur combinaison. Le cadre langagier considéré est SQLf [4, 14], une extension floue de SQL initialement proposée dans les années 90 et complétée depuis par divers opérateurs additionnels. Ce langage incorpore de nombreux constructeurs flous et constitue un outil puissant pour exprimer des requêtes à préférences dans un cadre de bases de données. Cependant, deux questions n'ont pas trouvé jusqu'à présent de réponses définitives, qui concernent respectivement : i) la mise en œuvre efficace d'un système d'interrogation fondé sur SQLf (ce qui soulève la question de l'optimisation de requêtes floues), ii) la façon dont on peut aider un utilisateur non-expert à spécifier ses requêtes floues (qui sont intrinsèquement plus complexes que des requêtes classiques, ne

serait-ce que parce que des fonctions d'appartenance entrent en jeu). Dans cet article, nous montrons qu'une architecture bien choisie permet d'atteindre de bonnes performances quant à l'évaluation de requêtes, et nous définissons également une technique conviviale reposant sur une interface graphique pour la spécification des requêtes floues. Ces deux résultats devraient contribuer, du moins l'espérons-nous, à convaincre la communauté des bases de données de la pertinence et de la faisabilité de l'approche floue pour la modélisation de requêtes à préférences.

La suite de l'article est structurée comme suit. La section 2 fournit quelques rappels sur l'interrogation floue de bases de données et présente les caractéristiques principales du langage SQLf. La section 3 discute différents types d'architecture de systèmes d'interrogation floue et expose le principe qui a été retenu dans le prototype que nous avons développé. La section 4 porte sur l'expressivité du fragment de SQLf qui a été implémenté dans ce prototype. En section 5, des résultats expérimentaux sont reportés, qui montrent que la stratégie de mise en œuvre choisie conduit à de bonnes performances relativement à d'autres types d'architecture. La section 6 présente une interface conviviale qui peut être utilisée pour spécifier une requête floue pas à pas. Enfin, la section 7 conclut l'article et esquisse quelques perspectives de futurs travaux.

2 Rappels sur SQLf

Les opérateurs de l'algèbre relationnelle peuvent être étendus de façon assez directe aux relations floues en considérant d'une part ces dernières comme des ensembles flous, et en introduisant des prédicats graduels dans les opérations appropriées d'autre part. En guise d'illustration, nous donnons ci-après la définition de la sélection floue, où r désigne une relation (floue ou classique), ψ une condition floue, et \top une norme triangulaire

(généralement min) :

$$\mu_{\sigma_{\psi}(r)}(t) = \top(\mu_r(t), \mu_{\psi}(t)).$$

Une extension de SQL s'appuyant sur cette algèbre relationnelle étendue est présentée dans [4, 14]. Nous nous limitons ici à la description du bloc de base. Par rapport à SQL, les différences majeures concernent :

- le calibrage du résultat, qui peut être réalisé à l'aide d'un seuil quantitatif (nombre souhaité de réponses, noté k), d'un seuil qualitatif (degré minimal de satisfaction exigé, noté α), ou les deux,
- la nature des conditions autorisées, qui peuvent être floues.

En conséquence, le bloc de base devient :

select [**distinct**] [k | α | k, α] *attributs*
from *relations* **where** *cond-floue*

où *cond-floue* peut faire intervenir à la fois des prédicats flous et des critères booléens.

Par ailleurs, SQLf préserve (et étend) les constructeurs spécifiques à SQL, par exemple les opérateurs d'imbrication, le partitionnement de relation, etc.

3 Architectures de systèmes d'interrogation floue

L'évaluation de requêtes floues [7, 11, 9, 3] soulève différentes difficultés, parmi lesquelles les principales sont énumérées ci-dessous :

- les SGBD commerciaux n'offrent pas d'outils permettant de définir de façon simple des fonctions d'appartenance, des connecteurs flous, etc.
- il n'est pas possible d'utiliser directement les index existants lors de l'évaluation d'une condition de sélection (ou de jointure) floue ;
- une étape additionnelle vouée au calcul des degrés de satisfaction et au calibrage du résultat (top- k ou seuillage qualitatif) est nécessaire, ce qui induit un coût supplémentaire lors de l'évaluation.

En conséquence, la mise en œuvre d'un système d'interrogation floue peut être abordée selon trois types d'architecture [16] :

- *couplage lâche* : les nouvelles fonctionnalités sont intégrées au travers d’une couche logicielle au-dessus du SGBD. Le principal avantage de ce type d’architecture réside dans sa portabilité, puisque n’importe quel SGBD peut être utilisé comme moteur de requête sous-jacent. Son principal point faible tient à ses relativement médiocres performances, qui rendent difficiles le passage à l’échelle.
- *couplage moyen* : les nouvelles fonctionnalités peuvent être intégrées par l’intermédiaire de procédures stockées, à l’aide d’un langage procédural approprié aux bases de données tel que PL/SQL (dans le cas d’Oracle). Une alternative consiste à recourir à des fonctions externes. Avec ce type de solution, les données sont directement gérées par le noyau du SGBD, ce qui conduit à de meilleures performances.
- *couplage fort* : les nouvelles fonctionnalités sont incorporées dans le noyau même du SGBD. Cette solution, qui est évidemment la plus efficace en termes d’évaluation de requête, implique de réécrire entièrement le moteur d’évaluation, y compris l’analyseur syntaxique et l’optimiseur du SGBD, ce qui est une tâche très lourde.

Le type de mise en œuvre que nous présentons dans cet article est à la jonction entre le couplage moyen et le couplage fort dans la mesure où i) les fonctions d’appartenance correspondant aux prédicats flous spécifiés par l’utilisateur sont définies comme des procédures stockées et ii) les extensions graduelles des opérateurs (norme triangulaire pour la conjonction, conorme triangulaire pour la disjonction, quantificateurs flous) sont implémentées en langage C et intégrées dans le moteur de requêtes du SGBD relationnel PostgreSQL.

En l’absence de SGBD commerciaux capables d’interpréter des requêtes floues, certaines approches de la littérature proposent de passer par une étape de dérivation *derivation step* [5] de façon à générer une requête booléenne utilisée pour préfiltrer la relation (ou le produit cartésien des relations) concernée. L’idée est

de restreindre le calcul des degrés de satisfaction aux seuls n-uplets qui satisfont à un niveau suffisant la condition de sélection (ou de jointure). Dans ce type d’approche, l’évaluation de requêtes floues comporte trois étapes :

1. dérivation d’une requête booléenne à partir de la condition floue apparaissant dans la requête utilisateur,
2. évaluation de cette requête booléenne et production de la relation résultante,
3. calcul des degrés de satisfaction attachés aux n-uplets de cette relation (et élimination éventuelle des n-uplets non suffisamment satisfaisants), ce qui produit la relation floue constituant le résultat final.

En termes de performances, l’intérêt d’utiliser une architecture de type “couplage moyen” réside dans le fait que la relation floue résultante est calculée durant la phase de sélection des n-uplets (aucun programme externe n’a besoin d’être appelé pour effectuer l’étape 3).

De manière à faciliter la maintenance et la distribution du code, les fonctionnalités nécessaires à l’évaluation de requêtes floues ont été mises en œuvre sous la forme d’une extension (PGXS) du SGBD open source PostgreSQL. Les fonctionnalités décrites dans la suite en section 4 ont été implémentées par des fonctions écrites en C ou des procédures en PL/PYTHON ou PL/PGSQL. La mise en œuvre tire parti du fait que PostgreSQL autorise l’appel à des modules externes au moment de l’exécution.

4 Expressivité du langage

Dans un premier temps, nous avons implémenté les principales fonctionnalités du langage SQLf, en modifiant légèrement la syntaxe définie dans [4, 14] de façon à éviter tout conflit avec la syntaxe SQL et le moteur de requête de PostgreSQL.

Prédicats flous : Des fonctions d’appartenance trapézoïdales peuvent être définies sur des attributs numériques en utilisant la procédure

suiuante, où le premier paramètre définit l'étiquette linguistique attachée au prédicat et les autres correspondent aux bornes de la fonction :

```
select newTrapezoidalFuzzySet('autour_de_2007', 2004, 2006, 2008, 2010).
```

La définition de prédicats flous sur des attributs catégoriels peut se faire à l'aide de l'instruction suivante, où le premier paramètre définit l'étiquette linguistique attachée au prédicat, le deuxième énumère les valeurs un tant soit peu satisfaisantes, et le dernier spécifie les degrés de satisfaction associés :

```
select newDiscreteFuzzySet('French', ['Peugeot', 'Citroen', 'Dacia'], [1.0, 1.0, 0.6]).
```

Conditions floues. Des prédicats flous peuvent être introduits dans la clause de sélection (*where*), où $\sim=$ correspond à l'opérateur noté *is* dans [5] :

```
select * from cars where year  $\sim=$  'recent'.
```

Modificateurs. Des modificateurs flous peuvent être utilisés pour altérer le sens de certains prédicats. Les modificateurs disponibles par défaut (et définis *a priori* dans le système) sont *very* (modificateur renforçant) et *rather* (modificateur relaxant), définis comme suit : $\mu_{mod P}(x) = (\mu_P(x))^n$ où $n = 2$ (resp. 0.5) si *mod* est *very* (resp. *rather*)

```
select * from cars where year  $\sim=$  'very recent'.
```

Conjonctions et disjonctions. Comme dans le cas classique, une condition de sélection peut être définie comme une conjonction ou une disjonction de prédicats flous ou booléens. Les connecteurs SQL **and** et **or** ont été étendus respectivement par les opérateurs $\&\&$ et $\|$. La paire t-norme/t-conorme sous-jacente à ces opérateurs peut être choisie au moyen de l'instruction :

```
select set_norm('norm');
```

où *norm* peut prendre les valeurs : *Zadeh*, *probabiliste*, *Lukasiewicz* ou *Weber*. Une fonction qui convertit les booléens en nombres réels est utilisée pour combiner des prédicats flous et booléens. Un exemple de requête floue conjonc-

tive dans ce formalisme est :

```
select * from cars
where year  $\sim=$  'very recent' && km  $\sim=$  'low'.
```

Seuils : Un seuil qualitatif (α) ou quantitatif (k) peut être défini pour contrôler le niveau de satisfaction ou la cardinalité du résultat. Leur spécification s'effectue comme suit :

```
select set_alpha(0.4); select set_k(20).
```

Quantificateurs flous. Outre la conjonction et la disjonction, un quantificateur flou peut être utilisé pour combiner des prédicats booléens ou flous. Trois interprétations sont disponibles dans le prototype : celle de Zadeh (fondée sur un Sigma-count de l'ensemble flou impliqué), CTA (*Competitive Type Aggregation*, qui correspond à l'utilisation d'une intégrale de Sugeno) et OWA (*Ordered Weighted Aggregation*, fondée sur une intégrale de Choquet) [2]. Le choix s'effectue au moyen de l'instruction :

```
select set_quantifier('quantifier');
```

où *quantifier* prend l'une des valeurs *zadeh*, *cta* ou *owa*. Un exemple de requête est :

```
select * from cars where most(year  $\sim=$  'very recent', km  $\sim=$  'low', brand = 'Peugeot', consumption  $\sim=$  'low', price  $\sim=$  'reasonable').
```

Opérateurs graduels. Dès lors qu'une fonction de distance a été définie sur un domaine d'attribut, des opérateurs graduels peuvent être employés pour effectuer des comparaisons avec des scalaires (opérateur \sim) ou tester une inclusion graduelle (opérateur *in* \sim). Une variante de ces opérateurs a aussi été définie de façon à exprimer des comparaisons/inclusions graduelles vis-à-vis du résultat d'une sous-requête (voir [14] pour plus de détails). Un exemple dans le cas non-imbriqué est :

```
select * from cars where year  $\sim$  2008 && brand in  $\sim$  ('Peugeot', 'Renault').
```

5 Évaluation de requête

Afin d'estimer le gain en termes de performances induit par la stratégie d'implémentation

que nous proposons, par rapport à des systèmes fondés sur un couplage lâche [13] avec et sans étape de dérivation, nous avons utilisé une relation appelée *randomtable* de cardinalité 100,000. Les n-uplets de *randomtable* ont été générés de façon pseudo-aléatoire sur trois attributs, à savoir *id*, *attnum*, et *atttext*. Le premier est la clé primaire, le deuxième un attribut numérique dont le domaine est l'intervalle [0, 200], et le troisième un attribut catégoriel dont le domaine est l'ensemble des vingt chaînes de caractères correspondant aux vingt premiers nombres entiers (“un”, “deux”, “trois”, etc). Nous avons ensuite défini deux prédicats au moyen des instructions :

```
select newTrapezoidalFuzzySet('low', 0, 0, 10, 15);
select newDiscreteFuzzySet('around_10', ['huit', 'neuf',
'dix', 'onze', 'douze'], [0.6, 0.8, 1.0, 0.8, 0.6]);
```

L'objectif de cette expérimentation préliminaire était de comparer, à l'aide du prototype PostgreSQLf, le temps d'exécution associé à trois stratégies d'implémentation différentes : couplage lâche sans dérivation (LCND), couplage lâche avec dérivation (LCD), et couplage moyen avec dérivation (MCD). Le temps mesuré intègre la construction de la relation floue résultante. Pour réaliser ces mesures, trois requêtes ont été soumises aux trois moteurs d'évaluation correspondants. Cet échantillon, quoique limité, est représentatif des différents types de requêtes floues pouvant être traitées par PostgreSQLf. La requête 1 est composée d'un seul prédicat de sélection sur un attribut numérique, la requête 2 d'une conjonction de deux prédicats flous, et la requête 3 utilise un quantificateur flou pour agréger deux prédicats :

– Query 1 :

```
select * from randomtable where attnum ~='low';
```

qui se dérive en

```
select * from randomtable where attnum between 0
and 15;
```

– Query 2 :

```
select * from randomtable
where attnum ~='low' && atttext ~='around_10';
```

qui se dérive en

```
select * from randomtable where attnum between 0
```

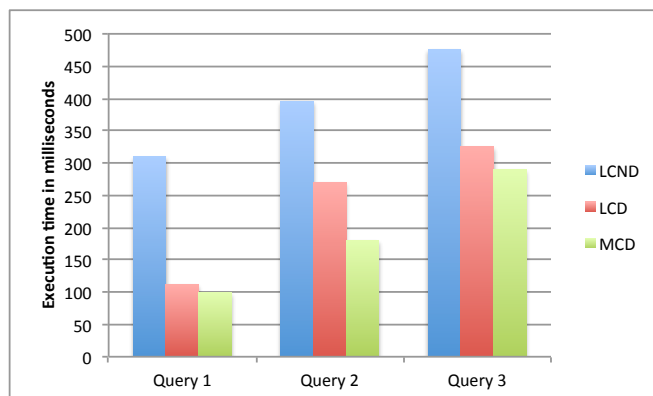


Figure 1 – Temps de calcul / stratégie de mise en œuvre

```
and 15 and atttext in ('huit', 'neuf', 'dix', 'onze',
'douze'));
```

– Query 3 :

```
select * from randomtable
where most(attnum ~='low', atttext ~='around_10');
```

qui se dérive en

```
select * from randomtable where attnum between
0 and 15 or atttext in ('huit', 'neuf', 'dix', 'onze',
'douze')).
```

Les résultats sont reportés dans la figure 1. Il s'avère que la solution “couplage moyen” a les deux principaux avantages suivants :

- elle permet une meilleure gestion des relations floues puisque ces dernières sont directement retournées par le SGBD ;
- elle apporte un gain significatif en termes de performances.

Nous travaillons actuellement à optimiser l'utilisation des index pour évaluer plus efficacement les fonctions utilisateur associées aux prédicats flous.

6 Interface conviviale

6.1 Introduction

À l'évidence, un langage tel que SQLf n'est pas très facile à utiliser pour des utilisateurs novices, non familiers avec les concepts de la théorie des ensembles flous. C'est pourquoi il est nécessaire de définir une interface intuitive pour les aider à formuler leurs requêtes.

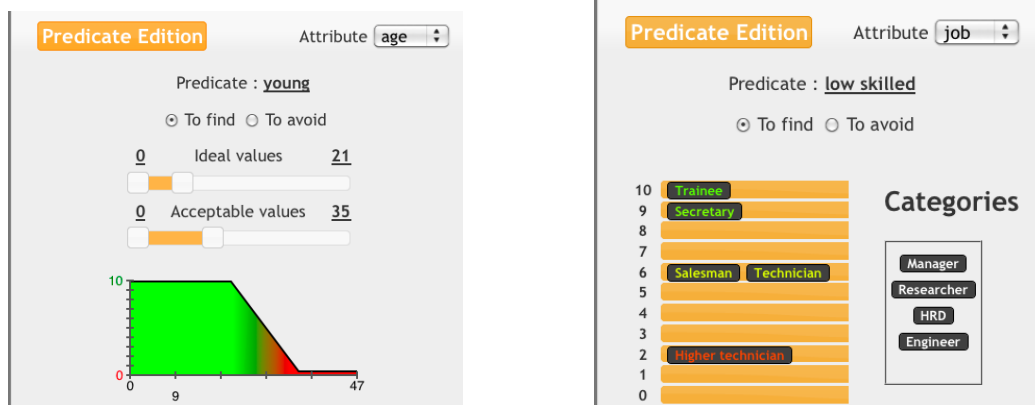


Figure 2 – Définition de prédicats flous numérique (gauche) et catégoriel (droite)

Le prototype que nous avons développé agit comme une interface avec le SGBD et génère des requêtes SQLf directement exécutables par ce dernier par l'intermédiaire d'appels à des fonctions stockées. L'interface est connectée à la base de données de façon à stocker les profils utilisateurs, composés d'informations d'authentification et rassemblant les prédicats et requêtes flous précédemment définis. De cette façon, il est possible de construire un vocabulaire personnel composé d'ensembles flous et de requêtes soumises antérieurement. Cette base de données contient également les informations de connexion aux bases accessibles et la liste des attributs sur lesquels des prédicats flous peuvent être définis.

6.2 Définition intuitive de prédicats flous

Comme la sémantique d'un prédicat flou repose sur sa fonction d'appartenance, tout système d'interrogation flou doit fournir aux utilisateurs un moyen commode de définir de telles fonctions. En pratique, la fonction d'appartenance associée à un ensemble flou F est souvent choisie de forme trapézoïdale. Dans ce cas, F est exprimée par un quadruplet (A, B, C, D) où $\text{noyau}(F) = [B, C]$ et $\text{support}(F) = [A, D]$. Si la fonction est une "épaule droite" (resp. gauche), elle peut être codée par (A, B, k_2, k_2) (resp. (k_1, k_1, C, D)) où $[k_1, k_2]$ représente le domaine de l'attribut concerné.

Diverses méthodes ont été proposées précédemment pour définir des termes flous dans un cadre d'interrogation flexible de bases de données. Dans [11], les auteurs décrivent un prototype construit au-dessus du SGBD commercial Microsoft Access, où la définition des prédicats, comparateurs et quantificateurs flous s'opère via une interface graphique. Cependant, le type d'interface considéré est à notre avis encore trop exigeant dans la mesure où il implique une certaine connaissance de ce qu'est une fonction d'appartenance (l'utilisateur doit en effet spécifier directement les bornes des fonctions qu'il souhaite utiliser).

Dans [9, 8], Goncalves et Tineo introduisent des commandes permettant de définir des prédicats (**create fuzzy predicate**) et des comparateurs flous (**create comparator**) dans SQLf, mais leur usage apparaît encore plus difficile pour un utilisateur non-expert.

Pour des requêtes floues simples, une autre solution, proposée dans [15], est d'inclure les définitions des prédicats flous dans la requête elle-même. Cependant, l'inconvénient de cette méthode est qu'elle peut mener rapidement à des expressions de requêtes assez encombrantes.

Dans [1], les auteurs suggèrent d'utiliser la notion d'*ordre flou* pour spécifier des prédicats flous définis sur des domaines numériques. Ils considèrent trois opérateurs, à savoir *vaut au*

moins, *vaut au plus*, et *appartient à*, rendus tolérants au moyen d'une clause *tolerate up to*. Bien qu'intéressante, cette méthode a une expressivité limitée puisqu'elle ne permet de spécifier que des termes flous atomiques sur des attributs numériques. De plus, elle apparaît tout de même d'une convivialité limitée.

L'interface que nous avons développée propose une méthode intuitive et simple pour définir des prédicats flous. Le panneau d'édition illustré en figure 2 permet à l'utilisateur de spécifier des prédicats sur des attributs numériques (gauche) ou catégoriels (droite). Dans le premier cas, la fonction d'appartenance peut être définie en utilisant deux curseurs pour fixer les intervalles de valeurs acceptables et idéales, ou en déplaçant les bornes de la fonction trapézoïdale dans la représentation graphique. Pour les attributs catégoriels, l'utilisateur peut placer les valeurs de l'attribut concerné dans les boîtes correspondant aux degrés de satisfaction d'une échelle prédéfinie. L'interface permet aussi de raffiner des prédicats flous définis par d'autres utilisateurs sur l'attribut considéré (coin inférieur droit de la figure 4), ainsi que de sauvegarder les prédicats flous (dans le profil de l'utilisateur courant) de façon à pouvoir les réutiliser ou les modifier par la suite.

6.3 Construction de requête

Les prédicats flous peuvent ensuite être déplacés et déposés dans la panneau d'édition de requête floue. La figure 4 montre comment la représentation graphique du prédicat '*wellPaid*', qui est nié pour obtenir la condition *salary is not 'wellPaid'*, est déplacée dans la boîte d'édition qui contient déjà le prédicat *job is 'lowSkilled'*. De cette façon, l'utilisateur peut créer de nouveaux groupes de prédicats ou augmenter un groupe existant. Dès qu'un groupe contient plus d'un prédicat, l'utilisateur doit choisir le connecteur qu'il souhaite utiliser pour effectuer l'agrégation des degrés. Les requêtes sont stockées dans le profil de l'utilisateur courant sous la forme d'un document XML.

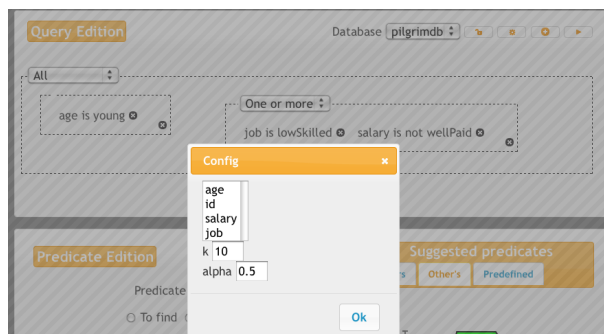


Figure 3 – Paramètres additionnels pour une requête floue

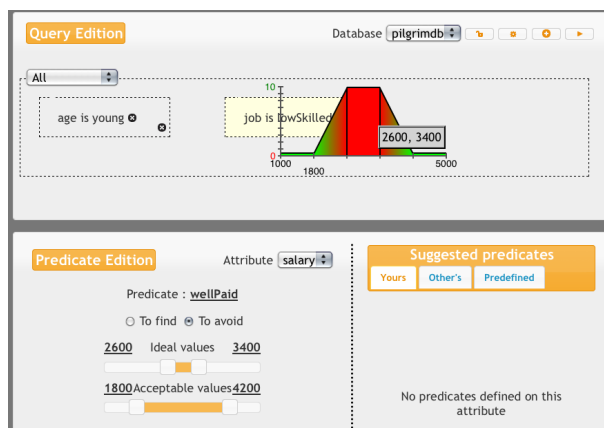


Figure 4 – Vue globale de l'interface

Le coin supérieur droit de l'interface propose un ensemble de boutons permettant de réinitialiser la requête, de se déconnecter, d'exécuter la requête, ou de fixer certains paramètres additionnels (figure 3) tels que : i) la liste des attributs à introduire dans la clause de projection ; ii) un seuil qualitatif α ou quantitatif k .

Quand l'exécution de la requête est déclenchée, les prédicats flous sont transformés en fonctions pl/pgsql, la requête est traduite en SQLf, et le code est alors soumis au SGBD. L'exécution d'une requête floue Q retourne une relation floue où chaque n-uplet t se voit associer un degré de satisfaction $\mu_Q(t)$ (noté simplement μ dans le panneau de résultat). Comme les n-uplets sont présentés par ordre décroissant de leur degré de satisfaction, l'utilisateur peut aisément identifier les réponses qui satisfont au mieux sa requête et peut également ajuster le paramètre k pour réduire la taille du résultat s'il

le souhaite.

7 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une stratégie de mise en œuvre d'un fragment du langage SQLf permettant l'interrogation floue d'une base de données. Cette stratégie, fondée sur un couplage moyen avec un SGBD relationnel, permet d'atteindre de bonnes performances en termes de temps d'exécution. De nombreux domaines d'application pour lesquels l'interrogation flexible apporte une valeur ajoutée significative en termes d'expressivité peuvent bénéficier d'un tel système, sans qu'il soit besoin de faire appel à un module externe pour compiler une requête booléenne dérivée. Nous poursuivons actuellement le développement du prototype présenté dans l'article, de façon à intégrer davantage de fonctionnalités de SQLf et à améliorer encore les performances en exploitant des structures de données internes (index) plus efficaces.

Nous avons également conçu et développé une interface utilisateur pour la spécification de requêtes floues, avec l'objectif de montrer que les éléments principaux d'une requête floue peuvent être définis aisément par un utilisateur novice. Ceci nous a conduit à déterminer les limites entre ce qui peut être compris et manipulé par un utilisateur non-expert (prédicats flous, propositions quantifiées floues, etc) et ce qui doit être réservé au mode expert d'édition de requête (questions impliquant un partitionnement flou de relation, par exemple). Nous travaillons actuellement à de nouvelles fonctionnalités pour le mode non-expert, telles que la possibilité offerte à un utilisateur de définir ses propres quantificateurs flous, d'assigner des poids aux prédicats d'une condition complexe, ou d'exprimer des requêtes floues imbriquées.

Références

- [1] U. Bodenhofer and J. Küng. Fuzzy orderings in flexible query answering systems. *Soft Comput.*, 8(7) :512–522, 2004.
- [2] P. Bosc, L. Liétard, and O. Pivert. Quantified statements and database fuzzy querying. In P. Bosc and J. Kacprzyk, editors, *Fuzziness in Database Management Systems*, pages 275–308. Physica Verlag, 1995.
- [3] P. Bosc and O. Pivert. On the evaluation of simple fuzzy relational queries : principles and measures. In R. Lowen and M. Roubens, editors, *Fuzzy logic – State of the Art*, pages 355–364. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1993.
- [4] P. Bosc and O. Pivert. SQLf : a relational database language for fuzzy querying. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 3 :1–17, 1995.
- [5] P. Bosc and O. Pivert. SQLf query functionality on top of a regular relational database management system. In O. Pons, M. Vila, and J. Kacprzyk, editors, *Knowledge Management in Fuzzy Databases*, pages 171–190. Physica-Verlag, Heidelberg, Germany, 2000.
- [6] D. Dubois and H. Prade. Using fuzzy sets in flexible querying : Why and how ? In *Proc. of the 1996 Workshop on Flexible Query-Answering Systems*, pages pp. 89–103, 1996.
- [7] J. Galindo, J. M. Medina, O. Pons, and J. C. Cubero. A server for fuzzy SQL queries. In *Proc. of FQAS'98*, pages 164–174, 1998.
- [8] M. Goncalves and L. Tineo. Sqlf flexible querying language extension by means of the norm sql2. In *Proc. of FUZZ-IEEE'01*, pages 473–476, 2001.
- [9] M. Goncalves and L. Tineo. SQLf3 : An extension of SQLf with SQL features. In *Proc. of FUZZ-IEEE'01*, pages 477–480, 2001.
- [10] A. Hadjali, S. Kaci, and H. Prade. Database preference queries - a possibilistic logic approach with symbolic priorities. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 63(3-4) :357–383, 2011.
- [11] J. Kacprzyk and S. Zadrozny. FQUERY for ACCESS : Fuzzy querying for a windows-based DBMS. In P. Bosc and J. Kacprzyk, editors, *Fuzziness in Database Management Systems*, pages 415–433. Physica Verlag, 1995.
- [12] M. Lacroix and P. Lavency. Preferences : Putting more knowledge into queries. In *Proc. of the 13rd VLDB Conference*, pages 217–225, 1987.
- [13] Y. López and L. Tineo. About the performance of sqlf evaluation mechanisms. *CLEI ELECTRONIC JOURNAL*, 9(2), 2006.
- [14] O. Pivert and P. Bosc. *Fuzzy Preference Queries to Relational Databases*. Imperial College Press, London, UK, 2012.
- [15] O. Pivert and G. Smits. On fuzzy preference queries explicitly handling satisfaction levels. In S. Greco, B. Bouchon-Meunier, G. Coletti, M. Fedrizzi, B. Matarazzo, and R. R. Yager, editors, *IPMU (1)*, volume 297 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 341–350. Springer, 2012.
- [16] A. Urrutia, L. Tineo, and C. Gonzalez. FSQ and SQLf : Towards a standard in fuzzy databases. In J. Galindo, editor, *Handbook of Research on Fuzzy Information Processing in Databases*, pages 270–298. Information Science Reference, Hershey, PA, USA, 2008.

Évaluation de réponses et guidage des apprenants dans un environnement d'apprentissage

The evaluation of the student's answer for the effective guidance within the e-learning system

A.HADDI¹ A.NAJI²

¹ Ecole Supérieure de Technologie Berrechid

² Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia

¹Département informatique ESTB, Université Hassan I, BP 218 Berrechid Maroc, Adil.haddi@gmail.com

² Département Informatique FSTM, Université Hassan II, BP 146 Mohammedia 20650 Maroc, ab_naji@yahoo.fr

Résumé :

Nous allons présenter dans cet article une procédure d'évaluation de l'apprenant au sein d'un environnement d'apprentissage. Cette évaluation prend en compte le degré de certitude associé à la réponse par l'apprenant. Le score obtenu suite à cette évaluation reflète le degré de compréhension d'un concept par un apprenant. Nous avons proposé un modèle de contenu pédagogique et un modèle de système de gestion de formation à distance adapté aux problèmes d'évaluation et de guidage des apprenants dans leur apprentissage.

Mots-clés :

Elearning, QCM, Evaluation diagnostique, valeurs floues, degré de certitude, guidage.

Abstract:

In this article, we are going to give a clear presentation of the students' evaluation procedure within a learning environment. The target evaluation considers a certainty degree that is mainly accomplished by the students themselves. Besides, the obtained evaluating score that gives a precise statement about the degree of student comprehension concept. Also, we gave the conception of e-learning system that introduces the evaluation process and guidance.

Keywords:

Elearning, MCQ, evaluation diagnostics, fuzzification, guidance, specification UML, dependency.

1 Instructions générales

Plusieurs méthodes d'évaluation ont été adoptées afin de valider les connaissances acquises par l'apprenant durant une session d'apprentissage. En effet, les enseignants proposent différentes questions afin de mesurer le **degré d'acquisition** des différents concepts d'un cours. Après chaque session

d'apprentissage d'un concept, l'environnement d'apprentissage constitue dynamiquement un QCM à partir des questions associées au concept et évalue le degré d'acquisition de l'apprenant afin de le diriger correctement vers le concept suivant. Pourtant, les scores obtenus suite aux QCMs classiques ne sont pas significatifs car ils ne prennent pas en considération la certitude des apprenants dans leurs réponses. A cet effet, nous proposons une méthode d'évaluation de réponses qui intègre le degré de certitude précisé par des apprenants en pourcentage. Le score est calculé en fonction des degrés de certitude fournis par les apprenants. Or, l'être humain a **l'habitude d'exprimer son doute** par des **valeurs floues** telles que: pas sûr, sûr, très sûr. En fait, l'introduction de la **logique floue**, lors de l'évaluation de l'apprenant devient une nécessité et non seulement un choix. Pourtant, le score obtenu doit être exprimé en nombres réels d'où la nécessité de défuzzification du degré de certitude. En plus de l'introduction, ce papier comporte trois sections : la 2^{ème} section est consacrée à la présentation du modèle de contenu. Dans la 3^{ème} section, nous présentons notre approche d'évaluation qui introduit la logique floue et les certitudes des apprenants dans leurs réponses. Dans la 4^{ème} section, nous proposons une procédure pour guider les apprenants dans leurs apprentissages. Nous terminons par une conclusion et des perspectives.

2 Modèle de contenu Pédagogique

Dans un environnement d'apprentissage, l'objectif principal est de transmettre des connaissances aux apprenants et vérifier leurs degrés d'acquisition. A cet effet, durant cette section, nous présentons un modèle de contenu pédagogique.

Comme le précise Pernin [Pernin et al, 2004], il est important de découper le contenu pédagogique en fragments élémentaires pour assurer un enchaînement pertinent des objets et des concepts pédagogiques. Afin de localiser facilement les situations bloquantes d'apprentissage, nous procédons au découpage des cours en trois entités (concept, objectif pédagogique, cours) qui peuvent être mis en œuvre à l'aide des activités élémentaire et des scénarios (**Fig 1**):

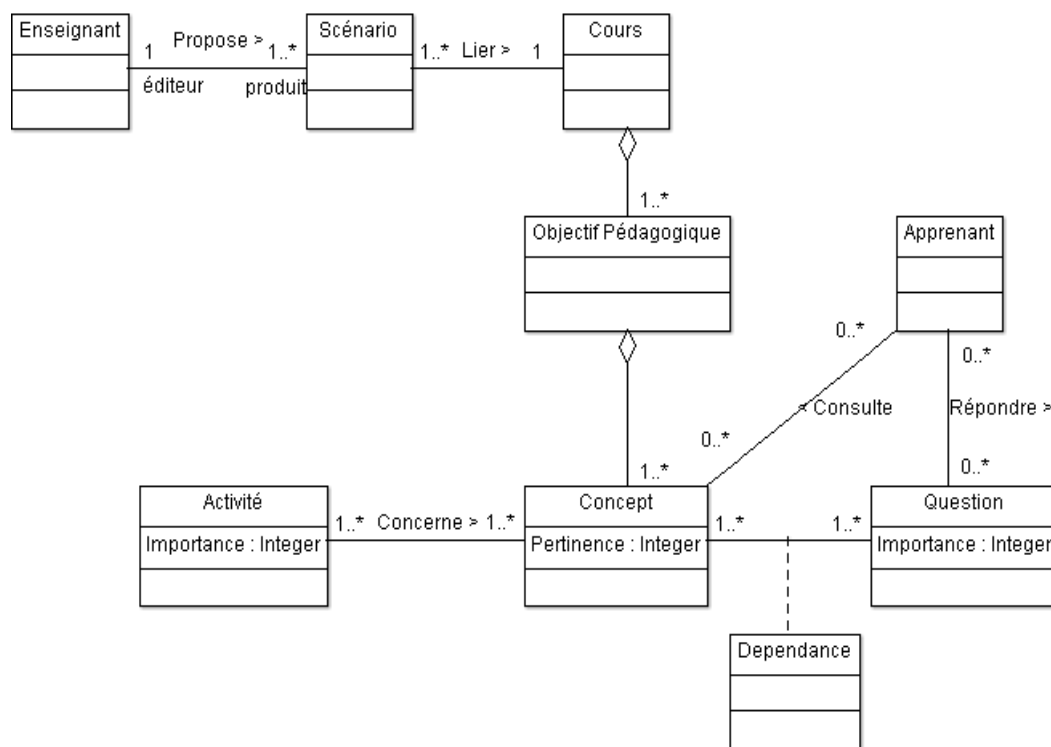


Figure -1- Modèle de contenu pédagogique

Un cours comporte plusieurs objectifs pédagogiques organisés dans des différentes séquences. Chaque objectif pédagogique O_i comporte plusieurs concepts C_j organisés dans des séquences [3]. Les séquences des objectifs pédagogiques et des concepts sont décrites par :

- les ensembles $PR(O_i)$ et $PR(C_j)$ qui décrivent respectivement les objets pédagogiques et les concepts pré-requis de O_i et de C_j vers lesquels le système

de FOAD peut diriger l'apprenant dans le cas où il ne donne pas satisfaction dans l'entité en cours [1],[2].

- les ensembles $SV(O_i)$ et $SV(C_j)$ qui décrivent respectivement des objets pédagogiques et des concepts successeurs de O_i et de C_j vers lesquels le système de FOAD peut diriger l'apprenant, en cas de réussite de l'entité en cours.

Dans le cadre d'évaluation le degré d'acquisition d'un apprenant, il est nécessaire de :

- préciser le degré de pertinence $DP(O_i)$ de l'objectif pédagogique O_i par rapport au cours,
- préciser le degré de pertinence $DP(C_j, O_i)$ de concept C_j par rapport à l'objectif pédagogique O_i ,
- lier chaque concept et chaque objectif pédagogique à un ensemble de questions qui peuvent être utilisées par le système FOAD afin de générer automatiquement des QCMs. Chaque question Q_k est caractérisée par les degrés de dépendance $DD(Q_k, C_j)$ et $DD(Q_k, O_i)$ au concept C_j et objectif pédagogique O_i .

Dans notre modèle, chaque concept C_j introduit par des activités organisées dans des scénarios. Ainsi, il est lié à :

- Un ensemble de questions d'entrées et de sorties utilisées dans l'évaluation diagnostique et l'évaluation sommative. Chaque question est caractérisée par le degré d'importance $DI(Q_k, C_j)$,
- Un ensemble des concepts pré-requis $PR(C_j)$,
- Un ensemble des concepts successeurs $SV(C_j)$,
- le degré de pertinence $DP(C_j, O_i)$ de concept C_j par rapport à l'objectif pédagogique O_i

Dans notre modèle, chaque objectif pédagogique O_i introduit par des concepts organisés dans des séquences. Ainsi, il est lié à :

- Un ensemble de questions d'entrées et de sorties utilisées dans l'évaluation diagnostique et l'évaluation sommative. Chaque question est caractérisée par le degré d'importance $DI(Q_k, O_i)$,
- Un ensemble des concepts pré-requis $PR(O_i)$,
- Un ensemble des concepts successeurs $SV(O_i)$,
- le degré de pertinence $DP(O_i)$ de concept O_i par rapport au cours

3 Modèle d'évaluation

Dans cette partie, nous proposons une procédure d'évaluation qui permet de répondre à la question suivante : à quel degré l'apprenant atteint-il les objectifs tracés par l'enseignant?. A cet effet, l'apprenant est invité à passer des tests durant la session d'apprentissage (**Fig 2**). Ces tests sont effectués soit au début de la session d'apprentissage (test d'entrée ou évaluation diagnostique), pendant l'apprentissage (contrôle continu ou évaluation formative), ou à la fin de la session d'apprentissage (test de sortie ou évaluation sommative). Chaque test est représenté par un QCM qui se compose d'un ensemble de questions associées au concept ou à l'objectif pédagogique sur lequel l'apprenant doit s'évaluer pour calculer son degré d'acquisition et des informations de guidage (**Fig 3**). Chaque question proposée doit être caractérisée par le degré d'importance $DI(Q_k, O_i)$ et $DI(Q_k, C_j)$ à l'objectif O_i et au concept C_j [2].

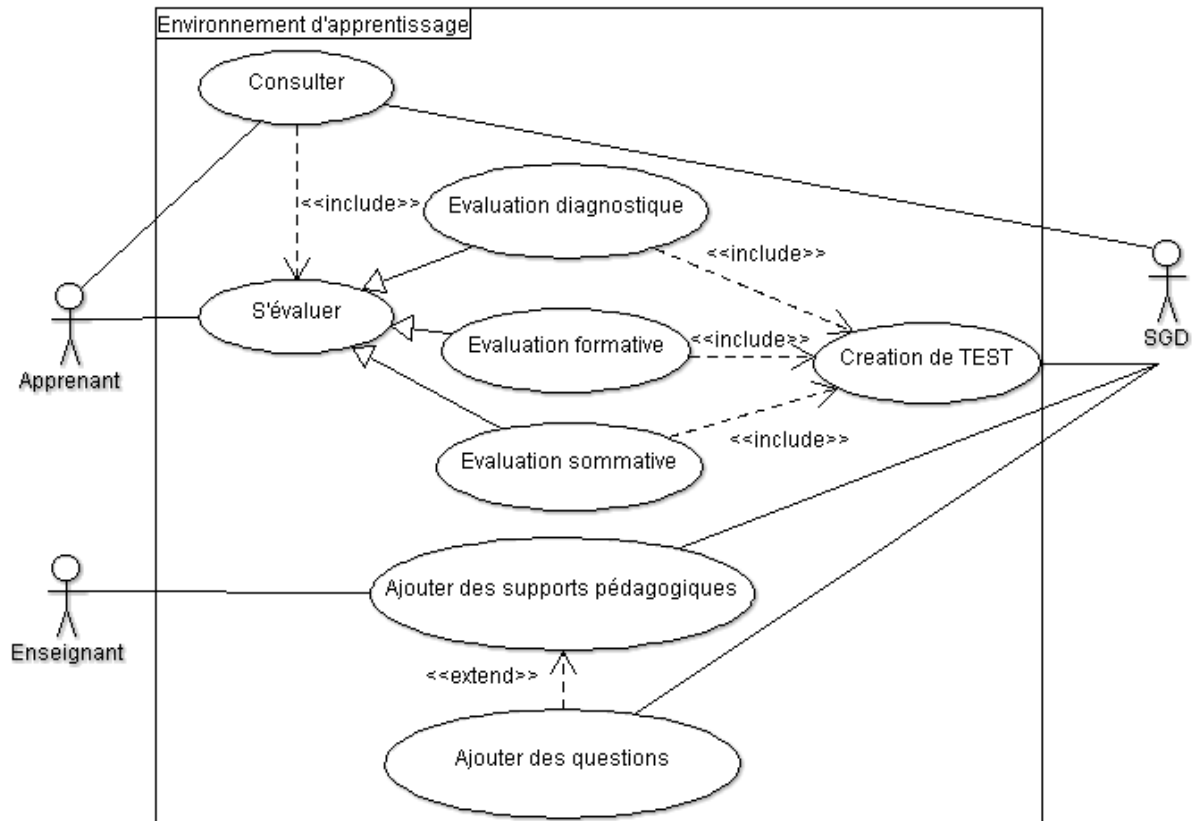


Figure -2- Diagramme des cas d'utilisation pour un environnement d'apprentissage

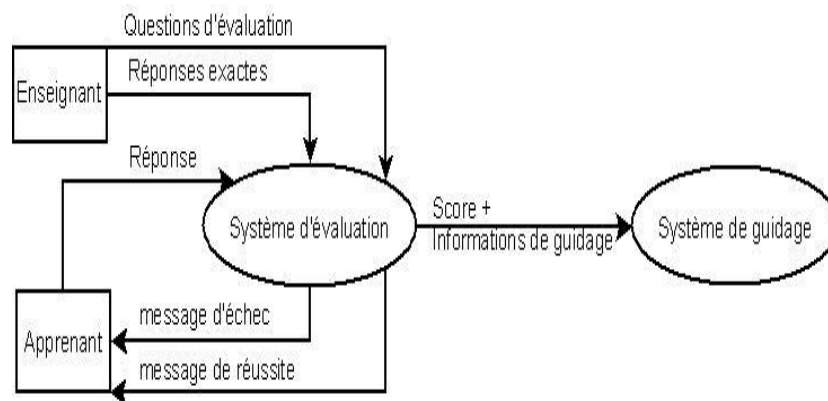


Figure-3- Diagramme de flots de données entre les acteurs et sous-système d'évaluation et guidage

3.1 Création du QCM

les utiliser pour générer automatiquement des QCMs.

Pendant la création de cours, l'enseignant propose plusieurs questions pour chaque objectif pédagogique et chaque concept afin de

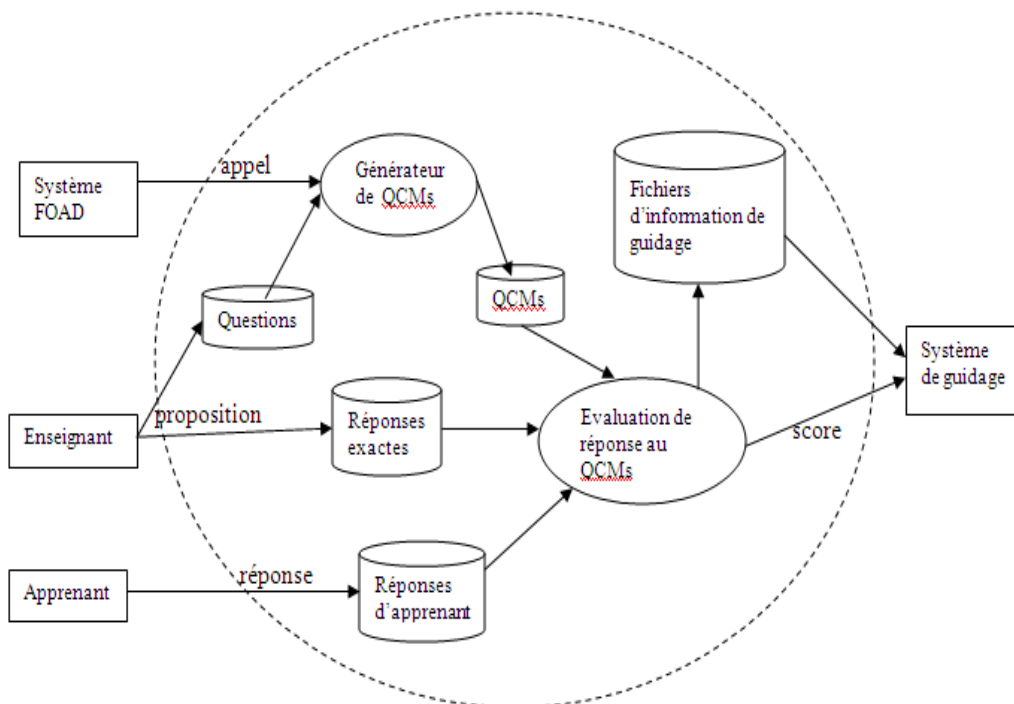


Figure -4- diagramme de contexte de système d'évaluation

L'environnement d'apprentissage crée des QCMs par un choix aléatoire de 5 questions parmi les questions liées à l'entité (concept ou objectif pédagogique) en question (Fig 4). Afin de calculer le score (voir l'algorithme calcul de score pour un QCM), les degrés d'importance des questions doivent être spécifiés par l'enseignant. Au moment d'agencement des questions l'enseignant doit prendre en compte les critères suivants :

- Chaque question est reliée à un ou plusieurs concepts pédagogiques.
- Chaque question est accompagnée par le degré d'importance par rapport au concept.
- Chaque question est accompagnée par une série de réponses $R_{k,l}$, parmi lesquelles l'apprenant doit choisir la ou les bonnes réponses.
- Préciser pour chaque question la ou les bonnes réponses.

Nous rajoutons aux réponses proposées les propositions suivantes:

- aucune solution proposée n'est correcte

- les données de l'énoncé sont insuffisantes
- l'énoncé contient une absurdité

Ces trois propositions diminuent la chance d'arriver à la bonne réponse au hasard, en incitant l'apprenant à réfléchir davantage avant la confirmation de son choix.

Algorithme : calcul de score pour un TEST

```

Variables
SDegreImportance, score, res :réels ;

Début
SDegreImportance  $\leftarrow$  0 ;
score  $\leftarrow$  0 ;
Pour (chaque question  $Q_k$  de TEST) faire
    res  $\leftarrow$  0 ;
    Pour (chaque réponse  $R_{k,l}$  possible au question  $Q_k$ ) faire
        Si (la réponse est exacte) alors
            res  $\leftarrow$  res+degréCertitude ( $R_{k,l}$ ) ;
        Sinon
            res  $\leftarrow$  res-degréCertitude ( $R_{k,l}$ ) ;
        FinSi
    FinPour
    score  $\leftarrow$  score+degreImportance( $Q_k$ )*res ;
    SDegreImportance  $\leftarrow$  SDegreImportance+degreImportance( $Q_k$ ) ;
FinPour
score  $\leftarrow$  score/SDegreImportance ;

Fin
    
```

3.2 Évaluation Diagnostique, formative et sommative

Les environnements d'apprentissage présentent leur support pédagogique de manière séquentielle. Dans des cas critiques l'apprenant se retrouve en face d'un concept ou objectif pédagogique qui dépasse ses capacités cognitives. En effet, il faut mesurer les connaissances pré-requises de l'apprenant qui est mené à l'évaluation au début de chaque session d'apprentissage. Le score de l'évaluation permet au système de guider l'apprenant vers un concept ou un objectif pédagogique pré-requis ou de le laisser continuer sans difficulté son apprentissage (**Fig**

5). Cette évaluation est déclenchée juste après le choix de l'objectif pédagogique ou concept par l'apprenant, ce type d'évaluation est appelé évaluation diagnostique. Ce dernier permet de déterminer le score et des informations de guidage qui peuvent être utilisés par le sous-système de guidage afin d'autoriser à l'apprenant de continuer son apprentissage si le score est supérieur au un seuil. Dans le cas contraire, le sous-système de guidage utilise les informations envoyées par le sous-système d'évaluation afin de diriger l'apprenant vers des pré-requis nécessaires pour comprendre l'entité (concept ou objectif) en cours [3].

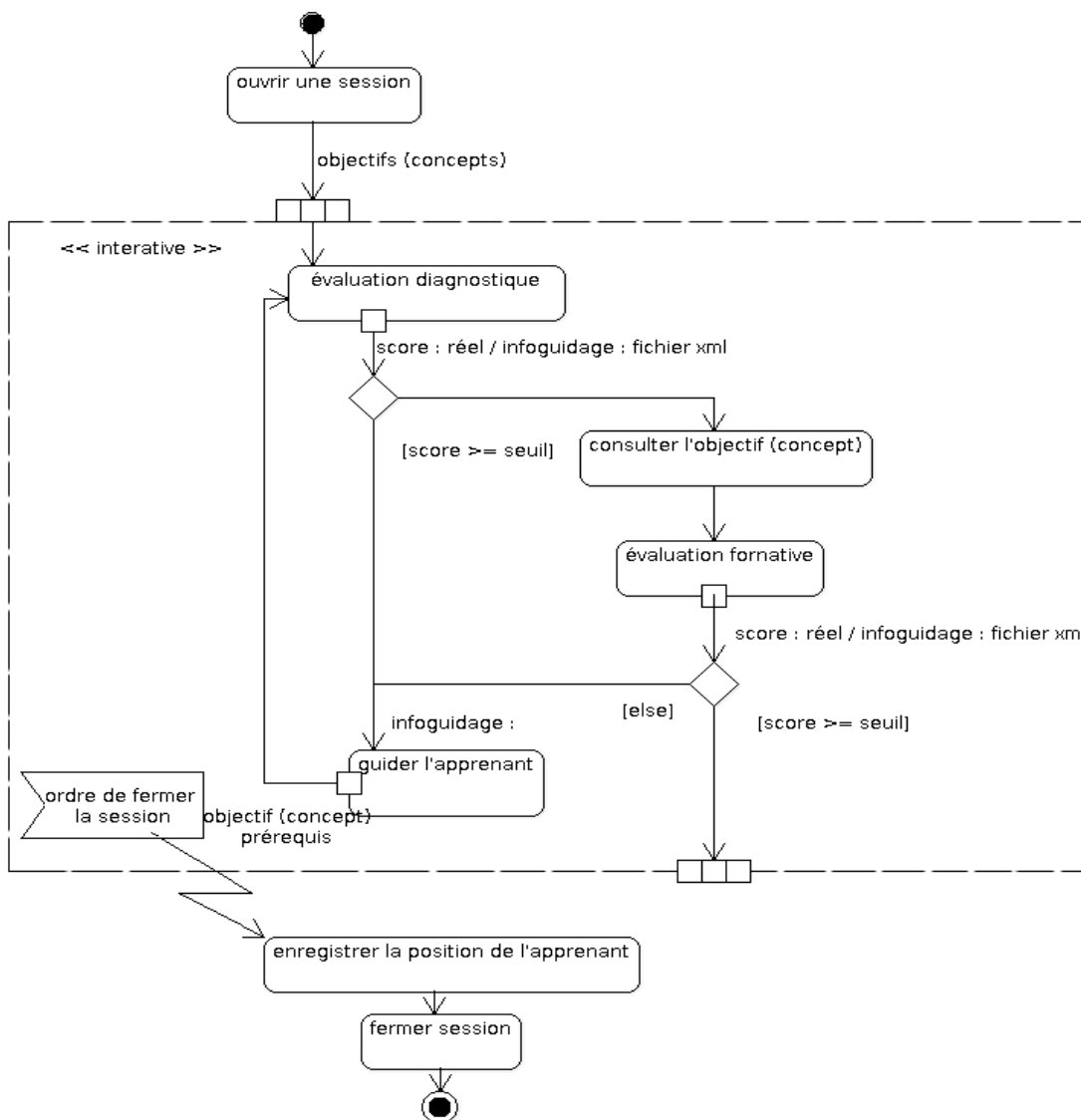


Figure-1- diagramme d'activités d'apprenant et environnement d'apprentissage

Dans un environnement d'apprentissage, l'apprenant doit s'évaluer afin de mesurer ses connaissances, ses compétences, et déterminer ses lacunes. En effet, il est souvent invité à effectuer des tests de niveau et d'orientation. A cet effet, le recours à une évaluation durant la session d'apprentissage est important. Cette évaluation doit être conçue de manière à fournir les informations suivantes :

- Le degré d'acquisition des concepts définis dans les objectifs pédagogiques,
- Les lacunes et les problèmes rencontrés (voir **Fig 4 et 5**) par l'apprenant durant le processus d'apprentissage.
- Garder un historique des problèmes rencontrés par les apprenants pour une éventuelle intervention de l'enseignant afin de réparer les concepts.

L'enseignant doit proposer un ensemble de questions pour chaque concept afin de calculer et contrôler l'efficacité du contenu pédagogique proposé par l'enseignant.

Il est nécessaire de savoir le niveau de connaissances de l'apprenant à la fin de chaque objectif pédagogique afin de dresser un bilan de connaissances et de compétences de l'apprenant à l'aide d'un test de sortie appelé évaluation sommative.

3.3 Évaluation de la réponse des apprenants : Procédure proposée

Dans cette partie, nous procédons à l'énoncé d'une problématique que nous jugeons importante de la prendre en compte lors de l'élaboration d'un QCM. C'est le cas où l'apprenant fixe son choix sur une réponse avec un degré de certitude élevé et que la réponse est fautive. Cela mène à attribuer une pénalité élevée à ce genre de réponses. Or, ce n'est pas toujours le cas, si on suppose que l'apprenant a fait une bonne analyse durant les étapes de la réponse, et à la dernière phase, il a fait une simple erreur d'interprétation ou de calcul.

Une fois le QCM est généré à partir des questions définies par l'enseignant (**Fig 5**), l'apprenant peut sélectionner les bonnes réponses pour chaque question.

Dans la plupart des cas, les apprenants hésitent en choisissant les bonnes réponses. Dans ce cas, l'apprenant élimine les propositions incorrectes, et choisit au hasard les bonnes réponses ou les réponses tolérées parmi celles qui ne sont pas éliminées.

3.3.1. Degré de certitude

Le doute est une situation normale chez l'être humain et accompagne le savoir de l'apprenant. En effet, la connaissance n'est pas absolue et l'imprécision est liée à plusieurs sciences. En fait, donner la possibilité à l'apprenant d'exprimer son doute devient nécessaire [6].

La plupart des chercheurs ont intégré la notion de certitude, en donnant la possibilité à l'apprenant d'accompagner sa réponse par un degré de certitude [4]. En effet, juger un apprenant, lors d'une évaluation diagnostique ou formative, en tenant compte juste la réponse, peut perturber tout le système d'évaluation. En effet, Gilles [5] voit que l'apprenant lors d'une évaluation doit exprimer son doute de manière précise afin d'autoriser un diagnostic très précis.

Dans ce cadre, Leclercq [4] propose une procédure qui intègre 6 niveaux de certitude exprimés par un pourcentage. L'apprenant répond à la question en indiquant son degré de certitude pour exprimer son doute lors de la rédaction des QCM et qui se limitent à utiliser soit des pourcentages ou degrés exprimés par des chiffres réels.

L'être humain a toujours recours à qualifier plein d'attributs (variables) par des valeurs floues. Par exemple, chaque jour on entend dire afin d'exprimer la chaleur : pas chaud, très chaud, chaud, froid, très froid ou pour qualifier la vitesse : rapide, très rapide, lent, très lent, même dans un milieu d'enseignement, on entend les étudiants parler

d'un examen, compliqué, très compliqué, facile, très facile. Ce qui est habituel chez un être humain est d'utiliser des variables linguistique. D'où l'utilité d'introduire des valeurs floues à la place des valeurs réelles ou des intervalles, afin de faciliter l'expression du doute pour l'apprenant [8], [9] et [10].

3.3.2. Degré de certitude : valeurs floues

Dans le but d'exprimer le doute par l'apprenant, nous adoptons la logique floue (voir **Fig 6**) pour établir notre approche d'évaluation. Pour cela, nous définissons les éléments suivants :

- Univers de discours : pourcentage de certitude allant de 0% à 100%.
- Variable linguistique : certitude
- Valeurs linguistiques : pas du tout sûr, pas sûr, moy sûr, assez sûr, très sûr

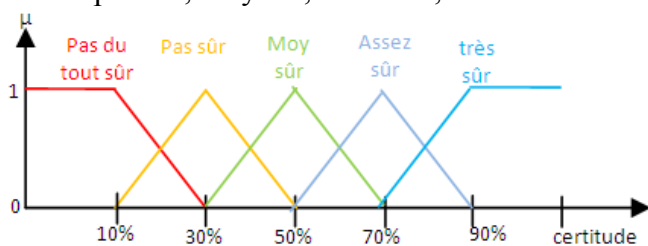


Figure-2- degré d'appartenance des valeurs linguistiques

Chaque valeur floue appartient à l'univers défini par un degré d'appartenance μ allant de 0 à 1 (voir la **Fig 5**).

Dans les études précédentes [4] et [5], la certitude est exprimée une seule fois pour chaque question. Dans la pratique, on constate que dans la plupart des cas, l'apprenant est en face à une question où il hésite entre plusieurs choix. En effet, nous allons enrichir notre méthode en donnant la possibilité à l'apprenant de préciser un degré de certitude (pas du tout sur, pas sur, ..., très sur) pour chaque réponse sélectionnée et non sélectionnée. Cette méthode permet de minimiser le recours au hasard, et elle permet davantage de préciser le degré d'acquisition des concepts, et détecter les lacunes que peut avoir l'apprenant lors des évaluations durant la session d'apprentissage. A cet effet, chaque

réponse correcte ou incorrecte proposée doit être liée à un ensemble d'informations pour indiquer les acquisitions que peut avoir l'apprenant suite à sa réponse. Ces informations peuvent être utilisées par le sous-système de guidage afin de guider l'apprenant vers l'entité suivante (**Fig 5**).

3.3.3. Détermination du score de l'apprenant lors d'une évaluation

Afin de vérifier le degré d'acquisition d'un concept par un apprenant, un score lui est attribué. Le score est calculé à partir des degrés d'importance des questions de test d'évaluation, les réponses et les certitudes des apprenants suivant l'algorithme de calcul de score pour un QCM .

Ainsi, afin de vérifier le degré d'acquisition d'un objectif pédagogique O_i par un apprenant, un score lui est attribué. Ce score est calculé à partir des scores obtenus dans les concepts C_j constitués suivant l'objectif pédagogique O_i et leurs degrés de pertinence $DP(C_j, O_i)$ par rapport à cet objectif pédagogique, à cet effet une formule est mise en place :

$$sc(O_i) = \frac{\sum_j DP(C_j, O_i) * sc(C_j)}{\sum_j DP(C_j, O_i)} \quad (1)$$

Le score, défini ci-dessus (équation 1), inclut le degré de certitude en pourcentages, cependant, le système utilise les valeurs floues pour interpréter les certitudes des apprenants d'où la nécessité de défuzzification du degré de certitude.

3.3.4. Défuzzification du degré de certitude

Il faut associer les valeurs floues (linguistiques) aux valeurs réelles en se basant sur:

- Pas du tout sûr : 10%
- Pas sûr : 30%
- Sûr : 50%

- Assez sûr : 70%
- Très sûr : 100%

Dans notre étude, nous utilisons le tableau suivant pour calculer le score.

Tableau-1- Tableau de définitions des scores selon les degrés de certitude

Barème	Réponse	DC	Score
1	Correcte	Pas du tout sûr	0.1
1	Correcte	Pas sûr	0.3
1	Correcte	Moy sûr	0.5
1	Correcte	Assez sûr	0.7
1	Correcte	Très sûr	1
1	Incorrecte	Très sûr	-1
1	Incorrecte	Assez sûr	-0.7
1	Incorrecte	Moy sûr	-0.5
1	Incorrecte	Pas sûr	-0.3
1	Incorrecte	Pas du tout sûr	-0.1

Le tableau 1 permet d'identifier la décision que va prendre le système suite aux valeurs linguistiques de degré de certitude fixé par l'apprenant afin de calculer le score d'un concept.

3.4 Modèle d'information de guidage

Les scores et les informations obtenues, soit lors d'une évaluation diagnostique, formative ou sommative, sont importants à la prise d'une décision. Ces informations peuvent être exploitées par l'enseignant et le sous-système de guidage afin de déterminer les défauts des supports pédagogiques et de guider les apprenants dans leur apprentissage. La question qui se pose : comment peut-on détecter les concepts où l'apprenant a des lacunes ?

Pour consulter un concept C_j , l'apprenant doit effectuer un test de validation (évaluation diagnostique (Fig 5)) sur les concept pré-requis $PR(C_j)=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$. Pour cela, le générateur dynamique de QCMs génère un QCM à partir des questions liées aux concepts pré-requis au concept C_j . Dans ce QCM, le générateur introduit pour chaque concept pré-requis au moins une question y fortement liée.

Puisque chaque question Q_k peut être liée à plusieurs concepts avec un degré de dépendance $d_{j,k}=DI(Q_k, C_j)$, nous présentons les degrés de dépendances de 5 questions qui composent le $QCM=\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$ aux concepts pré-requis $PR(C_j)=\{C_{j,1}, C_{j,2}, C_{j,3}, C_{j,4}\}$ dans la matrice D suivante :

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & d_{2,5} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & d_{3,5} \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & d_{4,5} \end{bmatrix}$$

Supposons que le résultat de l'évaluation de réponse d'un apprenant est :

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

Où r_k est le résultat de l'évaluation de réponse à la question Q_k .

Les degrés de certitude exprimés par l'apprenant sont pris en considération dans le résultat r_k (voir algorithme de calcul de score).

Le score de l'évaluation diagnostique est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$sc(C_j) = \frac{\sum_k (d_{j,k} * r_k)}{\sum_k d_{j,k}}$$

Nous utilisons le vecteur V afin de déterminer les concepts pré-requis qui doivent être validés par l'apprenant avant de passer au concept C_j dans le cas où le score est inférieur au seuil S_j .

Le vecteur V est représenté par :

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Où :

$$v_p = \frac{\sum_k (d_{p,k} * r_k)}{\sum_k d_{p,k}}$$

Dans le cas où le $sc(C_j)$ est inférieure au seuil S_j , le sous-système de guidage dirige l'apprenant vers les concepts pré-requis liés aux questions à lesquelles l'apprenant n'a pas répondu correctement. C'est-à-dire l'apprenant doit reprendre le concept pré-requis $C_{j,p}$ si $v_p \leq S_j$.

Le vecteur résultat R et la matrice de dépendance D doivent être enregistrés dans des fichiers structurés XML afin de l'utiliser ultérieurement dans le diagnostique.

4 Conclusion et perspectives

L'objectif principal de ce papier est de proposer un modèle de contenu et une procédure d'évaluation. Nous avons aussi proposé une nouvelle méthode d'évaluation de réponse qui intègre le degré de certitude introduit par l'apprenant lors de la réponse. Enfin, nous avons proposé une procédure de guidage des apprenants lors de l'apprentissage. Grâce à cette méthode, le système lui propose la meilleure séquence à suivre afin d'avoir un bon score.

Dans notre prochain travail, nous allons réaliser et améliorer notre procédure de guidage en se basant sur les résultats des évaluations, dépendance entre concepts et des questions.

5 Références

- [1] J. Labat, "EIAH : Quel retour d'information pour le tuteur", *International Journal of Information Sciences for Decision Making Informations, Savoirs, Décisions & Médiations*, 2002
- [2] C. Piombo, "Modélisation probabiliste du style d'apprentissage et application à l'adaptation de contenus pédagogiques indexés par une ontologie" pp. 46-50, Oct. 2007
- [3] N. Hoic Bozic, "a Web-Based Adaptive Hypermedia Courseware System", *Journal of Computing and Information Technology - CIT* 13, 3, pp. 165-176, 2005.
- [4] D. Leclercq "l'évolution des QCM", *Recherches sur l'évaluation en Education*, Paris : L'Harmattan, 139-146. 2006
- [5] J.-L. Gilles, V. Jans & D. Leclercq, " Actes du 15ème Colloque de l'Association Internationale de Pédagogie Universitaire (A.I.P.U.) ", Liège : Affaires Académiques de l'Université de Liège, pp. 311-326, 1997
- [6] E. Vachey, "quel intérêt avons-nous à intégrer le degré de certitude en contrôle continu" , *OST Volume 24*, pages 5-8 Septembre 2001
- [7] Dongrui Wu, "Fuzzy sets, *Transactions on fuzzy systems*", vol. 15, No. 6, decembre 2007
- [8] L.A Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a teory of a possibility", *Fuzzy Sets and Systems Volume 100, Supplement 1*, Pages 9-34, 1999
- [9] A. Brimicomb, "A Fuzzy Set Approach to Using Linguistic Hedges in Geographical Information Systems", *10ème Colloque Européen de Géographie Théorique et Quantitative*, Rostock, Allemagne, 6-11 septembre 1997.
- [10] D. Nozer, "Membership Functions and Probability Measures of Fuzzy Sets", *Journal of the American Statistical Association*, September 2004.

SYMPAS: A Database System for Managing Symbolic Preferences

Y. Harizi¹

A. Hadjali²

H. Azzoune¹

¹ LRIA/ USTHB, Alger, Algeria

² LIAS/ENSMA, Poitiers, France

LRIA/USTHB, Alger, Algeria, yharizi@usthb.dz

LIAS/ENSMA, Poitiers, France, allel.hadjali@ensma.fr

LRIA/USTHB, Alger, Algeria, azzoune@yahoo.fr

Résumé :

Dans cet article, on propose un système de base de données pour la gestion des préférences symboliques exprimées sous forme de déclarations conditionnelles. Ces préférences sont représentées au moyen de formules logiques possibilistes. Le processus de traitement de requêtes est discuté d'une manière explicite, en particulier, l'étape de sélection des top-k réponses. Pour montrer la faisabilité de notre système, une première série d'expérimentations a été menée et certaines mesures de performance sont effectuées et analysées.

Mots-clés :

Requêtes à préférences, Logique possibiliste, Top-k réponses.

Abstract:

In this paper, we propose a database system capable of managing symbolic preferences expressed under the form of conditional statements. Such preferences are translated into logic formulas in a possibilistic logic manner. Preference query processing is discussed in an explicit way, particularly, the step that consists in selecting the top-k answers. Some preliminary experiments are conducted to show the feasibility of our system.

Keywords:

Preference queries, Possibilistic logic, Top-k answers.

1 Introduction

In the last two decades, there has been a growing interest in preference queries in the database community [15][13]. Indeed, the use of preferences inside database systems has a number of potential advantages. First, it is desirable to offer more expressive query languages that are able to express user's requirements in a more faithful way. Second, the use of preferences in queries provides a basis for rank-ordering the retrieved items, which is especially valuable if a query is satisfied by a large set of items. Moreover, a classical query may also have an empty

set of answers, while a relaxed (and thus less restrictive) version of the query can still be satisfied by several items in the database, at least to some degree.

Approaches to database preference queries may be classified into two categories according to their qualitative or quantitative nature [15]. In the latter, preferences are expressed quantitatively by a monotone scoring function, and the overall score is positively correlated with partial scores. Since the scoring function associates each tuple with a numerical score, tuple t_1 is preferred to tuple t_2 if the score of t_1 is higher than the score of t_2 . Representatives of this family of approaches are top-k queries [7] and fuzzy-set-based approaches (e.g., [4]). In the qualitative approach, preferences are defined through binary preference relations. Since such relations can be defined in terms of scoring functions, the qualitative approach is more general than the quantitative one. Representatives of qualitative approaches are those relying on a dominance relationship, e.g. Pareto order, in particular Preference SQL [14], Skyline queries [2] and the approach presented in [8]. See also [5][3].

As users' preferences are more and more diverse and complex, the alternatives number described by means of a set of attributes are often very large. Facing this situation, preferences are not generally expressed in terms of explicit (pre)orders. It is then necessary to make their specification in a compact way. Compact

representation of preferences has raised a substantial interest in Artificial Intelligence [10][6] and, more recently, in the database field [13][5]. Graphical models (as CP-nets [5] and GAI [12]) and logical models (as possibilistic logic [11]) are particularly adapted to this kind of representation.

Let us note that conditional preference statements are often used for describing preferences in local, contextualized way ¹. To illustrate this approach let us consider the following example.

Example 1. Assume a schema instance of a relation Phone (make, model, color), where 'make', 'model' and 'color' take respectively their values in: {Apple(a), Samsung(s), Nokia (n), LG (l)...}, {iPhone 5, iPhone 4, iPhone 4s, iPhone 3g, iPhone 3gs, Galaxy s3, Galaxy s2, Galaxy y,..., N8, C7, C3} and {white(w), black(b), red (r), grey (y),...}. To buy a phone, a user can communicate her/his preferences as a set of pieces of information as follows:

$Q_1 = (i)$ "(s)he prefers Apple (a) phones to Samsung (s) phones,

(ii) For Apple, (s)he prefers iPhone 5 (i_5) to iPhone 4 (i_4),

(iii) For Samsung, (s)he prefers Galaxy s3 (g_3) to Galaxy s2 (g_2) and Galaxy s2 (g_2) to Galaxy y (g_y),

(iv) s(he) prefers black (b) phones to white (w) phones".

The problem of interest is how to help this user to buy a phone by selecting and rank-ordering a set of phones from a database that better fit her/his preferences?

Statements of the above kind can be encoded with graphical or logical representations. For instance in [13], conditional preference statements are translated into classical logic formulas associated with symbolic priority levels, in a possibilistic logic manner. Only preferences on binary database attributes are considered in

¹This means that preferences are (internal) context-dependent. Context here captures conditions that involve the data items stored in the database for which preferences are expressed.

[13]. Starting from this work, we propose here a database system, called SYMPAS ², that allows handling users' preferences expressed in a compact way under the form of conditional statements. In particular, we investigate the issue of selecting the top-k answers to the query at hand in the case where the target database may contain either binary or non-binary attributes.

The paper is organized as follows. Section 2 gives an overview of the SYMPAS architecture where the main modules of the system are illustrated and shortly described. Section 3 discusses the four steps (preferences translation, alternatives building, alternatives ranking, top-k answers selection) to query processing in SYMPAS. Section 4 addresses the empty answers issue. In Section 5, some preliminary experiments are provided to show the feasibility of the system SYMPAS and evaluate some performances. Section 6 concludes the paper and draws some perspectives for future work.

2 An overview of SYMPAS architecture

This section outlines the main components of the system SYMPAS (see Figure 1). As inputs, the system takes a set of conditional preferences statements and a number, k, of answers the user desires. As for outcomes, it provides the top-k database tuples rank-ordered according to these preferences. Four components are designed:

- A module for *building the alternatives*. Alternatives are classes of tuples that can interest the user according to her/his preferences communicated to the system (see Table 1). Two methods have been implemented to build these alternatives: from the preferences communicated or from the content of the queried database.
- A module for *building the preference formulas*. It aims at representing the conditional preferences stated in possibilistic logic formulas.

²SYMBOLIC Preferences mANagement System.

- A module for *rank-ordering the alternatives*. First, it computes the satisfaction level associated with each alternative by leveraging its violation of the possibilistic formulas. Then, a rank-ordering is established between the different alternatives.
- A module for *selecting the top-k answers*. For each alternative, an *SQL* query is built and then a set of tuples that satisfy it is selected. This evaluation process stops when k answers is obtained.

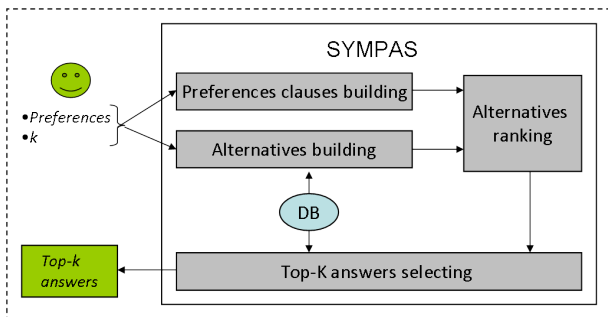


Figure 1: SYMPAS architecture

3 Conditional preference query processing

In the SYMPAS system, the conditional preferences considered are in the form: "in context c , a_1 is preferred to a_2 , a_2 is preferred to a_3 , ..., a_{n-1} is preferred to a_n ", where $\{a_1 \dots a_n\}$ is a subset of values of a database attribute. In Example 1, the user prefers the models g_3 to g_2 and g_2 to g_y where ' g_3 ', ' g_2 ' and ' g_y ' are a subset of values of the attribute 'model'. Note that a user is supposed to not be aware of all the values of an attribute to express her/his preferences.

The question of interest is how a set of answers can be selected and rank-ordered according to a set of preferences expressed in the above form? The idea is firstly to represent the preferences as possibilistic logic formulas using symbolic weights, in the spirit of the approach proposed in [13]. Secondly to identify the classes of tuples (alternatives) that interest the user and then to rank-order these alternatives according

to their symbolic satisfaction levels w.r.t. the logic formulas. Finally to select from the target database the k best tuples that fit the possible alternatives. Below we provide details about each step for handling such conditional preferences.

3.1 Preference clauses building

As pointed out in [13], the possibilistic encoding of the conditional preferences of the form "in context c , a is preferred to b ", when $(b \equiv \neg a)$, is a possibilistic formula of the form: $(\neg c \vee a, 1 - \alpha)$ ³ where the symbolic level $1 - \alpha$ expresses a priority (rather than a certainly level). This encodes a constraint of the form $N(\neg c \vee a) \geq 1 - \alpha$, here it is equivalent to a constraint on a conditional necessity measure $N(a|c) \geq 1 - \alpha$. This is still equivalent to $\Pi(\neg a|c) \leq \alpha$, where Π is the dual possibility measure associated with N . It expresses that the possibility of not having a is upper bounded by α , i.e. $\neg a$ is all the more impossible as α is small. When a and b do not cover all the possible choices ($b \neq \neg a$), the possibilistic formula: $(\neg c \vee a \vee b, 1 - \beta)$, $1 - \beta > 1 - \alpha$, should be added.

More generally, the possibilistic encoding of the conditional preferences of the form "in context c , a_1 is preferred to a_2 , a_2 is preferred to a_3 , ..., a_{n-1} is preferred to a_n ", with the assumption that a_1, \dots, a_n do not necessarily cover all the possible choices, is equivalent to the following n possibilistic formulas:

$$\{(\neg c \vee a_1 \vee \dots \vee a_n, 1 - \alpha_1), (\neg c \vee a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}, 1 - \alpha_2), \dots, (\neg c \vee a_1, 1 - \alpha_n)\}, \text{ with } 1 - \alpha_1 > 1 - \alpha_2 > \dots > 1 - \alpha_n.$$

Note that when $a_1 \vee \dots \vee a_n$ cover all the possible choices in the database, the first clause becomes a tautology and thus does not need to be written.

In algorithm 1, we show how the possibilistic clauses are computed from a user preference query. In our system, each preference $p(i)$ is represented by a quadruple $P(i) = \{A_c, A_p, V_{A_c}, V_{A_p}\}$, where A_c stands for the

³One can check that the formula $(\neg c \vee a \vee b, 1)$ is dropped since it is a tautology.

context attribute, V_{A_c} the value of the context attribute, A_p preference attribute and V_{A_p} the set of values of the preference attribute. For each preference $P(i)$, we compute $|P_i.V_{A_p}|$ ⁴ possibilistic clauses, each clause is represented by a quintuple $C(j) = \{A_c, V_{A_c}, A_p, V_{A_p}, s\}$ where s represents a symbolic priority weight. As can be seen, algorithm 1 returns both the set of possibilistic clauses encoding the preferences of the user and the induced partial order between the symbolic weights associated with these possibilistic clauses.

Algorithm 1 Clauses building

```

1:  $Symbol = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots\}$ 
2:  $j \leftarrow 0$  – the first clause
3: for each preference  $P_i, i: 1$  to  $p$  do
4:   for  $t = |P_i.V_{A_p}|$  down to 1 do
5:      $C_j.A_c \leftarrow P_i.A_c$ 
6:      $C_j.A_p \leftarrow P_i.A_p$ 
7:      $C_j.V_{A_c} \leftarrow P_i.V_{A_c}$ 
8:     for  $k = 1$  to  $t$  do
9:        $C_j.V_{A_p}(k) \leftarrow P_i.V_{A_p}(k)$ 
10:    end for
11:     $C_j.s \leftarrow Symbol(j)$ 
12:     $O_{ij} = Symbol(j)$  – the partial order
13:     $j \leftarrow j + 1$  – to generate the next clause
14:  end for
15: end for
16: return  $\{C_1, \dots, C_j\}$ 
17: return  $O$ 
    
```

Example 2 (Example 1 cont'd). One can check that algorithm 1 leads to the following encoding of the preferences involved in the query Q_1 : $\{(a \vee s, 1 - \alpha_1), (a, 1 - \alpha_2), (\neg a \vee i_5 \vee i_4, 1 - \beta_1), (\neg a \vee i_5, 1 - \beta_2), (\neg s \vee g_3 \vee g_2 \vee g_y, 1 - \gamma_1), (\neg s \vee g_3 \vee g_2, 1 - \gamma_2), (\neg s \vee g_3, 1 - \gamma_3), (b \vee w, 1 - \delta_1), (b, 1 - \delta_2)\}$, with the following partial order between weights $O = \{\alpha_1 < \alpha_2, \beta_1 < \beta_2, \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3, \delta_1 < \delta_2\}$.

3.2 Alternatives building

Alternatives correspond to the different interpretations of the set of attributes stated in the preference query. They represent the classes of tuples that can interest the user. For instance, in

⁴This quantity stands for the cardinality of V_{A_p} related to the preference $P(i)$.

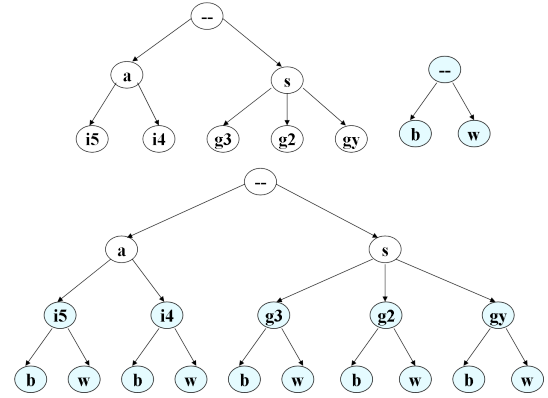


Figure 2: Preference representation

the query Q_1 , preferences are about three different attributes: 'make', 'model' and 'color' and ai_5b is an example of alternative. The alternatives are calculated from the preferences present in the user query. This means that we consider just the choices stated in the user preferences. To do this, our system takes as input the conditional preferences in the form of one or more independent trees. Possible alternatives are obtained by an in-depth scanning of the tree resulting from fusing all the independent trees (see further Figure 2).

Example 3 (Example 1 cont'd). Let us consider the preference query Q_1 . One can observe that preferences can be represented by two independent trees (as illustrated in Figure ??). The first three preferences form the first tree and the fourth preference constitutes the second tree. To calculate the alternatives, we combine the two trees by considering the alternatives of the first tree as a context of the preferences of the second tree. To do this, the fourth preference (i.e., the user prefers black phones to white phones) can be replaced by the following preferences: (i) for iPhone 5 (resp. iPhone 4), (s)he prefers black phones to white phones ; (ii) for Galaxy s3 (resp. Galaxy s2, Galaxy y), (s)he prefers black phones to white phones.

Then, ten different types of phones are obtained: $T = \{ai_5b, ai_4b, sg_3b, sg_2b, sg_yb, ai_5w, ai_4w, sg_3w, sg_2w, sg_yw\}$.

3.3 Alternatives ranking

To rank-order the possible alternatives, we use their satisfaction levels w.r.t. to the set of possibilistic formulas expressing the basic preferences of the user. Such satisfaction levels are calculated by leveraging the violation of these formulas by each alternative. In Table 1, we summarize all the satisfaction levels corresponding to the set of alternatives T . For instance, the vector of satisfaction of the alternative ai_4b is $(1, 1, 1, \beta_2, 1, 1, 1, 1, 1)$ which means that it satisfies all the formulas except the formula $(\neg a \vee i_5, 1 - \beta_2)$.

Alternatives	$(a \vee s, 1 - \alpha_1)$	$(a, 1 - \alpha_2)$	$(\neg a \vee i_5 \vee i_4, 1 - \beta_1)$	$(\neg a \vee i_5, 1 - \beta_2)$	$(\neg s \vee g_3 \vee g_2 \vee g_y, 1 - \gamma_1)$	$(\neg s \vee g_3 \vee g_2, 1 - \gamma_2)$	$(\neg s \vee g_3, 1 - \gamma_3)$	$(b \vee w, 1 - \delta_1)$	$(b, 1 - \delta_2)$
ai_5b	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ai_4b	1	1	1	β_2	1	1	1	1	1
sg_3b	1	α_2	1	1	1	1	1	1	1
sg_2b	1	α_2	1	1	1	1	γ_3	1	1
sg_yb	1	α_2	1	1	1	γ_2	γ_3	1	1
ai_5w	1	1	1	1	1	1	1	1	δ_2
ai_4w	1	1	1	β_2	1	1	1	1	δ_2
sg_3w	1	α_2	1	1	1	1	1	1	δ_2
sg_2w	1	α_2	1	1	1	1	γ_3	1	δ_2
sg_yw	1	α_2	1	1	1	γ_2	γ_3	1	δ_2

Table 1: Satisfaction levels of T

Alternative ranking is established using a technique called "extended Leximin" [13]: Let $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ be two lists of weights attached, respectively, to two proofs of the same proposition, say q . Then α and β can be ordered using an "extended leximin" defined as follows: First, α and β must be increasingly reordered. Assume that the obtained reordered lists correspond to $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ and $(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Then the leximin ordering of the lists α and β writes: $\alpha \succ_{leximin} \beta$ iff $\lambda_1 > \delta_1$ or $\exists i$ such that $\forall j = 1 \dots i; \lambda_j = \delta_j$ and $\lambda_{i+1} > \delta_{i+1}$.

Since the values of the weights ($\alpha_2, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, etc.) are unknown, no particular ordering is assumed between them, this technique

leads to a partial order between possible alternatives.

Now, by applying this technique on T of example 3, we get the following pre-order:

$ai_5b \succ_{kc} \{ ai_4b, sg_3b, sg_2b, sg_yb, ai_5w, ai_4w, sg_3w, sg_2w, sg_yw \}$; $ai_4b \succ_{kc} ai_4w$; $ai_5w \succ_{kc} ai_4w$; $sg_3b \succ_{kc} sg_2b \succ_{kc} sg_yb$; $sg_3w \succ_{kc} sg_2w \succ_{kc} sg_yw$.

Some alternatives as sg_2b, sg_3w are incomparable because the user prefers: (i) the model g_3 to g_2 in case of *Samsung* and (ii) w.r.t color, black phone b to white phone w . But, if we add a pre-order between the symbolic weights by any consistent set of ordering constraints, possibly taking into account some priorities between the user's preferences, a supplementary pre-order between the set of alternatives can be obtained. Let us now consider available the priorities between the user's preferences. For instance, the priority order between the preferences is similar to their order when stated by the user. Then, the partial order between clauses is expressed with the following constraints $\{ \alpha_2 < \beta_1, \beta_2 < \gamma_1, \gamma_3 < \delta_1 \}$. Finally, we get the following order between the set of alternatives for the query Q_1 : $ai_5b \succ_{lex} ai_5w \succ_{lex} ai_4b \succ_{lex} ai_4w \succ_{lex} sg_3b \succ_{lex} sg_3w \succ_{lex} sg_2b \succ_{lex} sg_2w \succ_{lex} sg_yb \succ_{lex} sg_yw$.

3.4 Top-k answers selection

Top-k answers are obtained by evaluating the rank-ordered set of alternatives over the queried database. To this end, we associate with each alternative an SQL query. It is worth noticing that in our system this evaluation process stops when a maximal number of answers, k , is retrieved. This means that the alternatives are not necessary all evaluated. See Algorithm 2 for the top-k answers selection procedure.

Example 4 (Example 1 cont'd). For the rank-ordered alternatives set $T_1 = \{ ai_5b, ai_5w, ai_4b, ai_4w, sg_3b, sg_3w, sg_2b, sg_2w, sg_yb, sg_yw \}$, the corresponding SQL queries write:

For ai_5b : "select * from Phone where Make = 'Apple' and Model = 'iPhone 5' and Color =

Algorithm 2 Top-k answers selecting

```

1:  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ : the rank-ordered set of  $n$  alternatives
2:  $k$ : the maximum number of tuples to retrieve
3:  $i \leftarrow 1$  – the first alternative
4: while  $k > 0$  do
5:    $s \leftarrow \text{Select}(t_i, K)$  – select  $s$  tuples correspond to the alternative  $t_i$ 
6:    $k \leftarrow k - s$ ;
7:    $i \leftarrow i + 1$  – next alternative
8: end while

```

black",

For ai_5w : "select * from Phone where Make = 'Apple' and Model= 'iPhone 5' and Color = white",

And so on.

4 Empty answers case

One can observe that when the alternatives (T) is calculated from the user preferences, we have no ideas about the content of the queried database. Then, it may be happen that no tuples in the database correspond to the computed alternatives and then no tuples (partially) satisfy the (conditional) preferences. To overcome this problem, one way is to calculate the set of alternatives from the queried database. We consider all the choices about the attributes related to preferences stated, that may exist in the database. This calculation can be done by simply building an SQL query using the different attributes stated in the preferences. In the case of Example 1, to obtain the alternatives, one can use the following SQL query on the attributes 'make', 'model' and 'color':

$Q_2 = \text{"Select Make, Model, Color From BD Group by Make, Model, Color"}$.

One can, for instance, get alternatives that exist in the database and not stated in user's preferences: black iPhone 3 (ai_3b), white iPhone 3 (ai_3w), red Samsung g_3 (sg_3r), black Samsung g_4 (sg_4b), white Samsung g_4 (sg_4w), black Nokia c_7 (nc_7b), white Nokia c_7 (nc_7w).

Such alternatives partially satisfy the user preferences and their satisfaction levels w.r.t the logic formulas are: $(1, \alpha_2, 1, 1, 1, 1, 1, \delta_1, \delta_2)$,

$(1, 1, \beta_1, \beta_2, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(\alpha_1, \alpha_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$,
 $(1, \alpha_2, 1, 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 1, 1)$, $(\alpha_1, \alpha_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \delta_2)$,
 $(1, \alpha_2, 1, 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 1, \delta_2)$, $(1, 1, \beta_1, \beta_2, 1, 1, 1, 1, \delta_2)$

By applying the leximin order, we get the following order: $ai_3b \succ_{lex} ai_3w \succ_{lex} sg_3r \succ_{lex} sg_4b \succ_{lex} sg_4w \succ_{lex} nc_7b \succ_{lex} nc_7w$.

5 Experimentation study

Let us first precise that the system SYMPAS is implemented in Java and the experiments are run on Intel Core i3 CPU 2.3GHz with 4.0GB RAM under Windows 8. We have used five databases of different sizes $2ko$, $20ko$, $50ko$, $100ko$, $500ko$, $1000ko$, on a relation Phone with the schema, *Phone* (*Make*, *Model*, *Color*, *Memory*, *Operator*, *Price*).

5.1 First experiment

This experiment aims at measuring the execution time of a preference query ⁵ to select the top-k answers over databases of different sizes figure 3. As can be seen, the execution time to select 30 to 200 tuples from the databases of sizes $20ko$, $50ko$, $100ko$ is lower than the one of size $2ko$. The execution time does not (significantly) change from $k = 200$ tuples when queried the database of size $2ko$ (This behavior is also observed in the cases of sizes $20ko$ and $50ko$).

To provide some explanation about the above results, let us analyze the alternatives number used (i.e., the number of SQL queries sent to the databases) for satisfying the user preference query in each case. This analysis is illustrated in Figure 4.

From Figures 3 and 4, we have:

$$T_5^1(100ko) \simeq T_5^1(50ko) \simeq T_5^1(20ko) \simeq T_5^1(2ko).$$

$$T_{50}^6(2ko) > T_{50}^1(100ko) \simeq T_{50}^1(50ko) \simeq T_{50}^1(20ko).$$

As can be seen, there is some relationship between the executed alternatives number

⁵ $T_k^n(|DB|)$: The execution time to select the top k tuples from the database of size $|DB|$, n is the number of alternatives used or the number of SQL queries sent to the database to select the k tuples.

used for satisfy the preference query and the execution time of the query. The higher the number of alternatives, the higher execution time is. This is due to the fact that in our system the set of alternatives are built from the preference query, and these alternatives are used for retrieving the top-k tuples desired as answers to the query at hand. This is why we have: $T_{100}^{10}(2ko) \simeq T_{200}^{10}(2ko) \simeq \dots \simeq T_{2000}^{10}(2ko)$.

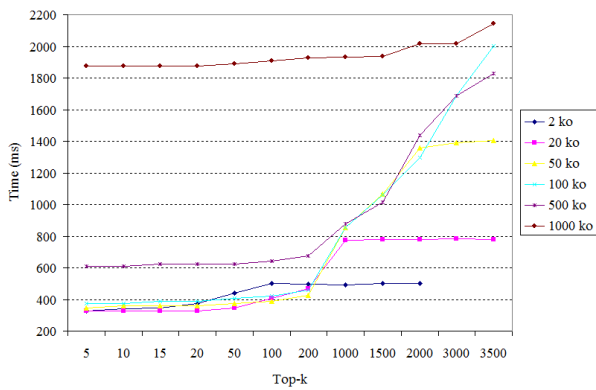


Figure 3: Different execution times

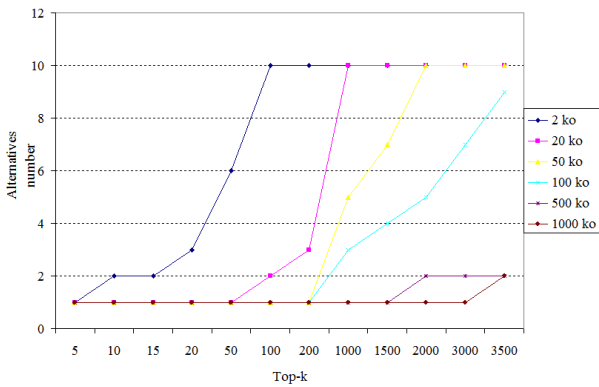


Figure 4: Executed alternatives number

5.2 Second experiment

The aim of this experiment is to compare the execution time of preference queries w.r.t. the two methods implemented in SYMPAS for building alternatives (from the user preference query and from the database content).

We use the following scenario: (i) we consider the preference query (Q_1) used in the first experiment, the alternatives calculated from the

conditional preferences are $\{ai_5b, ai_5w, ai_4b, ai_4w, sg_3b, sg_3w, sg_2b, sg_2w, sg_yb, sg_yw\}$; (ii) we also consider a queried database of 50ko tuples. This database may contain up to 200 different types of phones corresponding to the attribute values stated in the preference query.

Figure 5 shows the execution time evolution of the query (Q_1, k), with $k \in \{5, 10, 15, 20, 50, 100\}$. One can observe that the execution time when we calculate the alternatives from preference query is lower than the one obtained by calculating the alternatives from the content of the database. However, the second approach could be useful in the case where the first one results in empty answers.

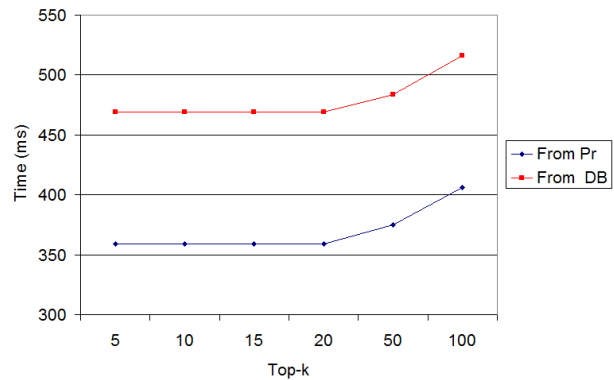


Figure 5: Second experiment

6 Conclusion

In this paper, the first foundations of a database system capable of handling user preferences expressed under the form of conditional statements, are discussed where possibilistic logic plays a key role for representing such conditional preferences. The top-k answers selection to a user query is investigated as well. Some preliminary experiments are conducted to show the feasibility of our proposal and to make some performance measures related to execution time. We plan to perform thorough experiments, in the one hand, to study the effectiveness and efficiency of the proposed system on large real databases and, on the other hand, to compare the system to other approaches. Symbolic priority expressed in an imprecise way [1]

will be also considered. A third line for future research is to investigate the issue of revising preferences in SYMPAS system in the spirit of [9].

References

- [1] S. Benferhat, J. Hué, S. Lagrue, and J. Rossik. Interval-based possibilistic logic. In *Proc. IJCAI*, pages 750–755, 2011.
- [2] S. Borzsonyi, D. Kossmann, and K. Stocker. The skyline operator. In *Proc. of ICDE*, pages 421–430, 2001.
- [3] P. Bosc, A. Hadjali, and O. Pivert. An approach to competitive conditional preferences for database flexible querying. *International Journal of Intelligent Systems*, 26(3):206–227, 2011.
- [4] P. Bosc and O. Pivert. Sqlf: a relational database language for fuzzy querying. *IEEE Trans. on Fuzzy Sys.*, 3:1–17, 1995.
- [5] R-I. Brafman and C. Domshlak. Database preference queries revisited. In *Technical Report TR2004-1934, Cornell University, Comput. and Info. Science*, 2004.
- [6] R-I. Brafman and C. Domshlak. Preference handling - an introductory tutorial. In *Artificial Intelligence Magazine*, volume 30, pages 58–86, 2009.
- [7] N. Bruno, S. Chaudhuri, and L. Gravano. Top-k selection queries over relational databases: mapping strategies and performance evaluation. *ACM Trans. on Database Sys.*, 27:153–187, 2002.
- [8] J. Chomicki. Preference formulas in relational queries. *ACM Transactions on Database Systems*, 28(4):1–40, 2003.
- [9] J. Chomicki. Database querying under changing preferences. In *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, pages 79–109, 2007.
- [10] C. Domshlak, E. Hüllermeier, S. Kaci, and H. Prade. Preferences in artificial intelligence: An overview. *Artificial Intelligence Journal (In Special Issue on Representing, Learning, and Processing Preferences: Theoretical and Practical Challenges)*, 175:7–8, 2011.
- [11] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic: a retrospective and prospective view. *Fuzzy Sets and Sys.*, 144:3–23, 2004.
- [12] C. Gonzales and Perny P. Gai networks for utility elicitation. In *Proc. of the 9th Inter. Conf. on Principles of Knowledge Rep. and Reas.*, pages 224–234, 2004.
- [13] A. Hadjali, S. Kaci, and H. Prade. Database preference queries - a possibilistic logic approach with symbolic priorities. *Annals of Mathematics and AI*, 63:357–383, 2011.
- [14] W. Kiessling and G. Kostler. Preference sql— design, implementation, experiences. In *Proc. of VLDB*, pages 999–1001, 2002.
- [15] K. Stefanidis, G. Koutrika, and E. Pitoura. A survey on representation, composition and application of preferences in database systems. *ACM Trans. on Database Sys.*, 36, 2011.

Projection extensionnelle pour la réduction d'un treillis de concepts formels flous

Fuzzy formal concepts lattice reduction based on extensional projection

Hakim Radja¹

Yassine Djouadi²

1. UMMTO, Univ. de Tizi-Ouzou, Dept. Informatique, BP 17, RP, Tizi-Ouzou, Algérie, Hakim.Radja@hotmail.fr

2. USTHB, Université des Sciences et de la Technologie d'Alger, BP 32 El Alia, Algérie, djouadi@irit.fr

Résumé :

En analyse de concepts formels, les connaissances induites (appelées concepts formels) sont hiérarchisées et représentées sous la forme d'un treillis de Galois. Il s'avère que dans le cas d'applications réelles, le nombre de concepts formels est très important ce qui augmente considérablement la taille du treillis de Galois engendré et par voie de conséquence la complexité de la manipulation de ce treillis. Les treillis de Galois alpha sont apparus récemment pour répondre à ce problème. Néanmoins, les approches proposées en ce sens prennent uniquement en considération des relations Booléennes. Dans la continuité de ces approches, nous proposons dans ce papier une méthode permettant de réduire la taille du treillis de Galois dans le cas de relations binaires floues. L'intérêt de notre contribution se trouve d'autant plus justifié que le nombre de concepts formels est d'autant plus important lorsque la relation est floue. Pour ce faire, nous utilisons un partitionnement de l'ensemble des instances en classes de base. Un tel partitionnement est obtenu en assignant à chaque instance une classe de base en fonction de son type. Nous introduisons ensuite une projection extensionnelle consistant à définir une nouvelle extension pour chaque intension floue. Cette nouvelle notion d'extension est basée sur un certain critère de satisfaction alpha (relatif à la partition) en classes de base. L'approche ainsi proposée permet de réduire le nombre de concepts formels et par conséquent la taille du treillis de Galois.

Mots-clés :

Treillis de Galois alpha, analyse de concepts formels flous, réduction de treillis.

Abstract:

A Galois lattice is a representation of knowledge as a hierarchy of concepts. In the case of real application the number of formal concepts is very important which significantly increases the size of the Galois lattice generated. We propose in this paper a method to reduce the size of concept lattice in the case of fuzzy binary relationship, inspired by Galois alpha lattice. For this purpose, we use a partitioning of the set of instances to base classes. Such partitioning is obtained by assigning to each instance a basis class according to its type. We will then make an extensional projection consisting of defining a new extension for each fuzzy intension. This new notion of extension is based on a criterion of alpha satisfaction relating

to the partition to base classes, which helps to reduce the number of formal concepts and therefore the size of the Galois lattice.

Keywords:

Galois alpha lattice, fuzzy formal concept analysis, lattice reduction.

1 Introduction

L'analyse de concepts formels (ACF), introduite par Wille [1], consiste à apprendre des paires de sous ensembles ($\{\text{objets}\}, \{\text{propriétés}\}$), appelés concepts formels, à partir d'une relation binaire (appelée contexte formel) entre un ensemble d'objets et un ensemble de propriétés. Rappelons que dans la proposition initiale de Wille, la relation considérée est Booléenne (un objet possède totalement la propriété ou ne la possède pas du tout). Dans le cas de l'analyse de concepts formels classique (non flou), plusieurs approches ont été proposées pour réduire la taille du treillis de Galois. Dans [4] les auteurs proposent une méthode qui se base sur l'élimination d'une partie des nœuds du treillis. Dans [5] un treillis de concepts fréquents représente la partie supérieure d'un treillis de concepts : seuls les nœuds dont l'extension est suffisamment grande (relativement à un seuil) sont représentés. Dans beaucoup d'applications, il est parfois utile de représenter une grande quantité de données en les regroupant en une hiérarchie de classes. Partant de cette idée,

Ventos & Soldano [3] ont proposé des treillis réduits appelés treillis de Galois alpha après une projection extensionnelle. Ce modèle qui permet une représentation réduite de connaissances s'avère efficace. Néanmoins, il est limité à des contextes formels Booléens. Il s'avère que l'ACF est souvent amenée à considérer des réalités concrètes (mesures, observations, jugements, etc...) où peuvent apparaître des notions de gradualité. De pareilles réalités ont déjà été modélisées par des contextes formels flous [6]. Cependant, le nombre de concepts formels induit par un contexte formel flou est largement plus important que par un contexte formel Booléen ce qui augmente considérablement la taille du treillis de Galois engendré. La quasi majorité des travaux existant dans le cadre de la réduction de treillis œuvrent sur la globalité du contexte formel (sans partitionnement de celui-ci). A ce titre, nous présentons dans ce papier, une approche permettant de réduire un treillis de concepts formels flous inspirée des treillis de Galois alpha [3]. Dans cette approche nous contrôlons le nombre de nœuds du treillis en tenant compte, dans une certaine mesure associée à un degré alpha (α), d'une partition a priori des données. Cette partition est constituée d'un ensemble de *classes de base* : chaque classe est associée à un *type de base* : celui des instances qui la constitue. Donc, dans cette approche, uniquement les instances appartenant à des classes de bases satisfaisant l'intension floue à un taux alpha seront maintenues dans l'extension alpha. Le cadre général des treillis et de l'analyse de concepts formels floue est donné dans la section 2. En section 3, nous présentons et illustrons sur un exemple simple la procédure nous permettant d'étendre les treillis de Galois alpha au cas de relations floues ainsi que l'algorithme alpha permettant de calculer pour chaque intension floue son extension alpha.

2 Analyse de concepts formels flous

L'analyse de concepts formels consiste à apprendre des paires de sous ensembles ($\{\text{objets}\}, \{\text{propriétés}\}$) appelés concepts formels à partir d'une relation binaire appelée contexte formel. Dans la proposition initiale de Wille [1], la relation considérée est Booléenne (un objet possède totalement la propriété ou ne la possède pas du tout). Dans l'analyse de concepts formels flous, un contexte formel flou est un tuple $\mathcal{K} = (L, O, P, \mathcal{R})$ où la relation floue $\mathcal{R} \in L^{O \times P}$ est une fonction $\mathcal{R} : O \times P \in L$ (généralement $L = [0, 1]$). La fonction \mathcal{R} assigne à chaque objet $x \in O$ et à chaque propriété $y \in P$ un degré $\mathcal{R}(x, y)$ exprimant le degré de satisfaction de y par x . Cette relation est représentée sous forme d'une table. Généralement les lignes représentent les objets et les colonnes les attributs, chaque cellule exprime une valeur appartenant à $[0, 1]$, comme le montre l'exemple suivant :

Table 1 – Contexte formel flou

\mathcal{R}	y_1	y_2	y_3
x_1	0,3	0,1	0,1
x_2	0,8	0,4	0,0
x_3	0,8	0,6	0,0
x_4	1	0,4	0,0
x_5	1	0,4	0,5

Soit $\mathcal{K} = (L, O, P, \mathcal{R})$ un contexte formel flou et soient $X \in L^O$, $Y \in L^P$. Les opérateurs de dérivation $(.)^\uparrow : L^O \rightarrow L^P$ et $(.)^\downarrow : L^P \rightarrow L^O$ sont définis par Belohlavek [7] comme suit :

$$X^\uparrow(y) = \bigwedge_{x \in O} (X(x) \rightarrow \mathcal{R}(x, y))$$

$$Y^\downarrow(x) = \bigwedge_{y \in P} (Y(y) \rightarrow \mathcal{R}(x, y))$$

$X^\uparrow(y)$ (resp. $Y^\downarrow(x)$) désigne le degré d'appartenance de l'attribut y (resp. l'objet x) dans l'ensemble flou de propriétés X^\uparrow (resp. ensemble flou d'objets Y^\downarrow). Etant donné $X \in L^O$ et $Y \in L^P$, une paire (X, Y) est un concept formel flou ssi $X^\uparrow = Y$ et $Y^\downarrow = X$. L'ensemble de tous

les concepts formels flous peut être muni d’une relation d’ordre (notée \leq) définie comme : $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ ssi $X_1 \subseteq X_2$ (ou $Y_2 \subseteq Y_1$). Cet ensemble muni de la relation d’ordre \leq forme un treillis complet. Les opérateurs *Meet* et *Join* sont décrits par le théorème fondamental de Ganter et Wille [2]. Il existe plusieurs méthodes permettant de construire un treillis de Galois dans le cas de l’analyse de concepts formels flous [6], [7], [8], [9] et [10]. Dans ce qui suit nous donnons l’ensemble des concepts formels flous extrait du tableau 1 en utilisant l’algorithme présenté dans [11]. La Figure 1 représente le treillis de Galois correspondant

- $C_1 : (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.3}, y_2^{0.1}, y_3^{0.0})$
- $C_2 : (x_1^{0.3}, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.8}, y_2^{0.1}, y_3^{0.0})$
- $C_3 : (x_1^{0.3}, x_2^{0.8}, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.1}, y_3^{0.0})$
- $C_4 : (x_1^{0.1}, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.8}, y_2^{0.4}, y_3^{0.0})$
- $C_5 : (x_1^{0.1}, x_2^{0.4}, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.8}, y_2^{0.6}, y_3^{0.0})$
- $C_6 : (x_1^{0.1}, x_2^{0.4}, x_3^{0.8}, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.6}, y_3^{0.0})$
- $C_7 : (x_1^1, x_2^{0.0}, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.3}, y_2^{0.1}, y_3^{0.1})$
- $C_8 : (x_1^{0.1}, x_2^{0.0}, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.4}, y_3^{0.5})$
- $C_9 : (x_1^{0.1}, x_2^{0.0}, x_3^1, x_4^1, x_5^{0.5}), (y_1^1, y_2^{0.4}, y_3^{0.1})$
- $C_{10} : (x_1^{0.3}, x_2^{0.0}, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.1}, y_3^{0.1})$
- $C_{11} : (x_1^{0.1}, x_2^{0.8}, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.4}, y_3^{0.0})$
- $C_{12} : (x_1^{0.1}, x_2^{0.0}, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^1, y_3^1)$

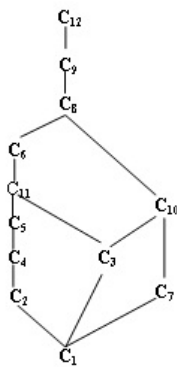


Figure 1 – Treillis de concepts formels flous

Dans le cas d’applications réelles, le nombre de concepts formels flous est très important, ce qui augmente considérablement la taille du treillis de Galois engendré. La suite de ce papier pro-

pose une approche par partitionnement permettant de réduire la taille du treillis tout en gardant son informativité.

3 Proposition

3.1 Partitionnement en classe de base

Les classes de bases sont un regroupement d’objets partageants un même type. Ces classes sont obtenues par un partitionnement non flou de l’ensemble de tous les objets. Ce partitionnement est généralement obtenu à l’aide d’un expert du domaine (Knowledge Engineer). Cette activité ne pouvant être décrite de manière formelle, nous proposons de l’illustrer à travers un exemple concret relevant du domaine médical. Cet exemple a été construit en collaboration avec un médecin spécialiste du Centre Hospitalo Universitaire Nedir Mohammed de Tizi ouzou. Nous avons ainsi mis en évidence les maladies suivantes :

- Hypertension artérielle (o_1),
- Insuffisance cardiaque (o_2),
- Rétrécissement mitral (o_3),
- Dilatation des bronches (o_4),
- Asthme (o_5).

Il a été constaté que les manifestations de ces maladies se font généralement à travers les symptômes suivants :

- Dyspnée (D),
- Douleurs thoraciques (H),
- Expectoration (E).

Le contexte formel illustré à travers le Tableau 2 quantifie les corrélations (relations) entre les maladies et les symptômes correspondants. Ce contexte formel relie un ensemble de maladies à un ensemble de symptômes. A titre d’exemple, un patient ayant de l’hypertension artérielle possède le symptôme d’expectoration à un degré égal à 0,1. Tandis qu’un patient atteint d’insuffisance cardiaque présente le symptôme de dyspnée à un degré 0,8. L’expert a constaté que chaque maladie appartient à une classe de base. Ainsi, les trois premières

Table 2 – Contexte formel flou

Classe de base	\mathcal{R}	D	H	E
CL_1	o_1	0,3	0,1	0,1
	o_2	0,8	0,4	0,0
	o_3	0,8	0,6	0,0
CL_2	o_4	1	0,4	0,0
	o_5	1	0,4	0,5

maladies (hypertension artérielle, insuffisance cardiaque, rétrécissement mitral) appartiennent à la classe des maladies cardio-vasculaires, et les deux dernières (dilatation des bronches, asthme) appartiennent à la classe des maladies respiratoires. Le partitionnement des maladies a ainsi donné lieu à deux classes de base, à savoir :

- Maladie cardio-vasculaires (CL_1)
- Maladies respiratoires (CL_2)

3.2 projection Extensionnelle

Dans [13], les auteurs formalisent l'extension de l'analyse formelle de concepts à des langages plus sophistiqués. La notion de projection est utilisée pour réduire le langage et ainsi réduire la taille du treillis de Galois. Indépendamment, [14] utilise la même notion de projection pour faire varier le langage mais l'utilise également en la nommant projection extensionnelle, pour modifier la fonction d'extension ext. Nous allons proposer une projection extensionnelle pour déterminer, pour chaque intension (terme) floue, une extension dont les objets appartiennent tous à des classes de bases qui satisfont ces termes à un pourcentage alpha. Pour ce, nous allons d'abord rappeler la notion d'inclusion ensembliste floue utilisée. Nous introduisons ensuite une mesure de satisfaction alpha. Basée sur cette dernière, nous proposons de quantifier l'appartenance alpha. Enfin, nous proposons une nouvelle notion d'extension alpha basée sur les notions précédemment définies. Dans [12], le degré d'inclusion est défini comme suit :

Définition 1. (subsethood degree)

Soit $A, B \in L^X$ deux sous ensembles flous. Le degré d'inclusion $S(A, B)$ de A dans B est donné comme suit :

$$S(A, B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \rightarrow B(x))$$

où \rightarrow désigne l'implication floue

Il est à noter que nous utiliserons l'implication de Gödel dans la suite de ce papier. Nous utiliserons aussi l'application \mathcal{I} , pour désigner l'intension $T = \mathcal{I}(o_i)$ d'un objet quelconque o_i , définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : X &\rightarrow L^Y \\ o_i &\mapsto T \end{aligned}$$

où $T(y_k) = R(o_i, y_k)$

3.2.1 Satisfaction alpha

Soient $X = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ un ensemble non flou d'objets (instances) constituant une classe de base, T un terme flou (intension floue) et α un nombre entre $[0, 100]$. Nous définissons dans ce qui suit la notion de satisfaction α . Un ensemble $X = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ satisfait une intension floue T à un taux α (noté $X \text{ sat}_\alpha T$) ssi au moins $\alpha\%$ de ses objets (instances) satisfont T :

$$X \text{ sat}_\alpha T \text{ ssi } \frac{\sum_{i=0}^n S(T, \mathcal{I}(o_i))}{|X|} \times 100 \geq \alpha \quad (1)$$

où :

$|X|$: la cardinalité de l'ensemble non flou X (la classe de base).

$S(T, \mathcal{I}(o_i))$: degré d'inclusion de l'intension T dans $\mathcal{I}(o_i)$.

Exemple :

L'ensemble $X = \{o_1, o_2, o_3\}$ satisfait le terme $T = (D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0})$ pour $\alpha = 70\%$ car :
 $\mathcal{I}(o_1) = (D^{0,3}, H^{0,1}, E^{0,1})$
 $S(T, \mathcal{I}(o_1)) =$

$$S((D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0}), (D^{0,3}, H^{0,1}, E^{0,1})) = 0, 1$$

De la même manière :

$$S(T, \mathcal{I}(o_2)) = 1$$

$$S(T, \mathcal{I}(o_3)) = 1$$

De ce fait, nous avons :

$$X \text{ sat}_{70} T \text{ car } \frac{\sum_{i=1}^n S(T, \mathcal{I}(o_i))}{|X|} \times 100 = \frac{(0,1+1+1)}{3} \times 100 = 70$$

Par contre, l'ensemble $X = \{o_1, o_2, o_3\}$ ne satisfait pas le terme $T = (D^1, H^{0,4}, E^{0,5})$ pour $\alpha = 50$.

3.2.2 Appartenance alpha

Soit $X = \{o_1, o_2, o_3, \dots, o_n\}$ un ensemble d'objets (non flou) et CL désignant une fonction telle que $CL(o_i)$ corresponde à la classe de base de l'objet o_i . Soit T un terme (intension) flou de L^P .

$$o_i \text{ app}_{\alpha} T \text{ ssi } CL(o_i) \text{ sat}_{\alpha} T \quad (2)$$

Exemple :

Pour le terme flou $T = (D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0})$, $o_1 \text{ app}_{60} T$ car :

$$\frac{\sum_{i=1}^3 S(T, \mathcal{I}(o_i))}{|CL1|} \times 100 = \frac{(0,1+1+1)}{3} \times 100 = 70 > 60$$

Plus de 60% de la classe de base de o_1 ($CL1$: classe de l'objet o_1) satisfait le terme flou $T = (D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0})$.

3.2.3 Extension alpha

L'extension alpha (notée $ext_{\alpha}(T)$) d'un terme flou T , relativement à la partition CL est définie comme suit :

$$ext_{\alpha}(T) = \{o_i / \mu_X(o_i)\} \quad (3)$$

Où $\mu_X(o_i) = S(T, \mathcal{I}(o_i))$ si $o_i \text{ app}_{\alpha} T$, 0 sinon

Exemple :

Cet exemple illustre la construction de l'ensemble $ext_{50}(T)$ pour le terme $T = (D^1, H^{0,1}, E^1)$ et $\alpha = 50$

– pour $o_1 \in CL1$

$$S(T, \mathcal{I}(o_1)) = 0, 1$$

$$S(T, \mathcal{I}(o_2)) = 0, 0$$

$$S(T, \mathcal{I}(o_3)) = 0, 0$$

Pour que o_1 fasse partie de $ext_{50}(T)$, il faut que sa classe de base satisfasse T pour $\alpha = 50$:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 S(T, \mathcal{I}(o_i))}{|CL1|} \times 100 = \frac{(0,1+0+0)}{3} \times 100 = 3 > 50$$

Donc la classe de base $CL1 = \{o_1, o_2, o_3\}$ ne satisfait pas le terme $T = (D^1, H^{0,1}, E^1)$ à 50%. Ce qui fait que : $o_1 \in ext_{50}(T)$ avec $\mu_X(o_1) = 0$

– La même chose pour les instances o_2 et o_3 car elles appartiennent à la même classe de base que o_1 .

– Pour $o_4 \in CL2$:

$$S(T, \mathcal{I}(o_4)) = 1$$

$$S(T, \mathcal{I}(o_5)) = 0, 5$$

$$\frac{\sum_{i=4}^5 S(T, \mathcal{I}(o_i))}{|CL2|} \times 100 = \frac{(1+0,5)}{2} \times 100 = 75 > 50$$

Donc la classe de base $CL2 = \{o_4, o_5\}$ satisfait le terme $T = (D^1, H^{0,1}, E^1)$ à 50%. De ce fait, $o_4 \in ext_{50}(T)$ avec un degré d'appartenance : $\mu_X(o_4) = S(T, \mathcal{I}(o_4)) = S((D^1, H^{0,1}, E^1), (D^1, H^{0,4}, E^1)) = 1$

Donc $o_5 \in ext_{50}(T)$ avec un degré d'appartenance $\mu_X(o_5) = S(T, \mathcal{I}(o_5)) = S((D^1, H^{0,1}, E^1), (D^1, H^{0,4}, E^{0,5})) = 0, 5$
Donc l'extension pour $\alpha = 50$ du terme $T = (D^1, H^{0,1}, E^1)$ est : $ext_{50}(T) = ext_{50}(D^1, H^{0,1}, E^1) = (o_1^{0,0}, o_2^{0,0}, o_3^{0,0}, o_4^1, o_5^{0,5})$

3.3 Projection extensionnelle

Rappelons ci-dessous la notion générale de projection :

Un opérateur $Proj$ est une projection d'un treillis (E, \leq) ssi pour tout couple $X, Y \in E$ les propriétés suivantes respectivement de minimalité, monotonie et idempotence sont vérifiées :

1. $Proj(X) \leq X$.
2. $X \leq Y \Rightarrow Proj(X) \leq Proj(Y)$.
3. $Proj(Proj(X)) = Proj(X)$.

Soit E_α l'ensemble de toutes les extensions alpha d'un terme T . En changeant l'extension (ext), une projection extensionnelle transforme un treillis de Galois en un Treillis plus petit mais qui garde l'informativité du treillis initial. A ce titre, la proposition suivante permet d'établir une importante propriété.

Proposition 1.

Soit $G = (L^O, Int, L^P, ext)$ un treillis de Galois. Soient $ext_\alpha = proj_\alpha \circ ext$ et $E_\alpha = proj_\alpha(L^O)$. Alors $Int : E_\alpha \rightarrow L^P$ et $ext_\alpha : L^P \rightarrow E_\alpha$ définissent une correspondance de Galois entre E_α et L^P .

Preuve.

Pour prouver la **Proposition 1**, il suffit de montrer que $proj_\alpha$ est une projection :

– Minimalité :

$$proj_\alpha(X) \leq X$$

$proj_\alpha(X)$ est composée des objets de X qui satisfont le critère α , ie $proj_\alpha(X)$ est inclus dans X puisqu'on élimine des éléments de X , donc $proj_\alpha$ est minimal.

– Monotonie :

$$X \leq Y \Rightarrow proj_\alpha(X) \leq proj_\alpha(Y)$$

Si X est inclus dans Y , chaque élément de X retiré par la projection sera aussi retiré de Y , et ceux qui restent auront toujours les mêmes degrés d'appartenances $proj_\alpha(X)$ est donc inclus dans $proj_\alpha(Y)$ et donc $proj_\alpha$ est monotone.

– Idempotence :

$$proj_\alpha(proj_\alpha(X)) = proj_\alpha(X)$$

Dans la nouvelle extension (extension alpha) il ne reste que les objets dont $\alpha\%$ de la classes de base satisfont le terme flou, donc une nouvelle projection avec un même α nous donnera les mêmes objets avec les mêmes degrés d'appartenance.

3.4 Algorithme EXTALPHA

L'algorithme est conçu pour générer, pour chaque intension floue, son extension alpha. Il est organisé comme suit : au départ l'ensemble des extensions alpha (EXT_SET) est initialisé à l'ensemble vide Ensuite pour chaque intension floue (T), l'algorithme calcule son extension alpha ($ext_\alpha(T)$) en parcourant chaque ligne du contexte formel flou et en vérifiant la condition de satisfaction alpha pour chaque ligne, si la condition est vérifiée l'objet correspondant à la ligne est ajouté à $ext_\alpha(T)$ avec un degré d'appartenance égale au degré d'inclusion ($\mu_X(o_i) = S(T, I(o_i))$) sinon $\mu_X(o_i) = 0$. Enfin, pour chaque extension alpha générée l'algorithme vérifie si elle existe déjà dans l'ensemble EXT_SET si ce n'est pas le cas alors celle ci sera rajoutée à cette ensemble sinon il garde uniquement la plus grande intension parmi celles qui ont toutes la même extension alpha (ext_α), les autres seront enlevées de l'ensemble des intensions $INTENT - SET$. L'algorithme est organisé comme suit :

$INTENT_SET$: Ensemble de toutes les intensions floues.

EXT_SET : Ensemble des extensions alpha.

o_i : Objet de la ligne i du contexte formel flou.

m : Le nombre de ligne du contexte formel flou.

$CL(o_i)$: La classe de base de l'objet o_i .

$|CL(o_i)|$: Cardinalité de la classe de base de l'objet o_i .

$I(o_i)$: Intension de l'objet non flou o_i .

T, T' : Deux intensions floues appartenant à l'ensemble des intensions floues.

$\mu_X(o_i)$: Degré d'appartenance de l'instance o_i à l'ensemble X .

Algorithm. EXTALPHA

Input : $\mathcal{K} = (L, O, P, \mathcal{R}), INTENT_SET$

Output : EXT_SET ,

Begin

$EXT_SET := \{\emptyset\};$

For each $T \in INTENT_SET$ **Do**

$ext_\alpha(T) := \emptyset;$

$i := 0;$

While $i \leq m$ **Do**

if $\frac{\sum_{i=1}^n S(T, I(o_i))}{|X|} \times 100 \geq \alpha$ **then**

$\mu_X(o_i) := S(T, I(o_i))$

else

$\mu_X(o_i) := 0$

$ext_\alpha(T) := \{o_i / \mu_X(o_i)\} \cup ext_\alpha(T)$

$i++$

End While

if $\neg(ext_\alpha(T) \in EXT_SET)$ **then**

$EXT_SET := EXT_SET \cup ext_\alpha(T)$

else

if $(ext_\alpha(T) = ext_\alpha(T'))$ **and** $(T \subseteq T')$ **then**

$INTENT_SET := (INTENT_SET) - T$

else

$INTENT_SET := (INTENT_SET) - T'$

End For

End.

Exemple d'application :

Nous reprenons l'exemple du contexte formel représenté par le Tableau 2, en utilisant l'algorithme proposé nous calculons pour chaque intension floue T son extension alpha ($ext_{60}(T)$), nous obtenons l'ensemble des concepts formels suivants :

$C2 : (o_1^{0,3}, o_2^1, o_3^1, o_4^1, o_5^1), (D^{0,8}, H^{0,1}, E^{0,0})$

$C3 : (o_1^{0,1}, o_2^1, o_3^1, o_4^1, o_5^1), (D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0})$

$C4 : (o_1^{0,3}, o_2^{0,8}, o_3^1, o_4^1, o_5^1), (D^1, H^{0,1}, E^{0,0})$

$C5 : (o_1^{0,1}, o_2^{0,8}, o_3^{0,8}, o_4^1, o_5^1), (D^1, H^{0,4}, E^{0,0})$

$C6 : (o_1^{0,0}, o_2^{0,0}, o_3^{0,0}, o_4^1, o_5^1), (D^1, H^{0,4}, E^{0,5})$

$C7 : (o_1^{0,0}, o_2^{0,0}, o_3^{0,0}, o_4^1, o_5^{0,5}), (D^1, H^{0,4}, E^1)$

$C8 : (o_1^{0,0}, o_2^{0,0}, o_3^{0,0}, o_4^{0,0}, o_5^{0,0}), (D^1, H^1, E^1)$

La Figure 2 présente le treillis de Galois alpha ($\alpha = 60$) équivalent :

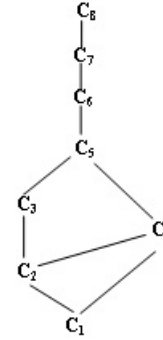


Figure 2 – Treillis réduit (G60)

Notons que pour $\alpha = 0$, on obtient exactement le treillis initial.

4 Conclusion

Dans ce papier, nous avons proposé une méthode permettant de réduire un treillis de concepts formels flous en se basant sur les treillis de Galois alpha et le partitionnement des objets. Nous avons vu qu'en modifiant la notions d'extension en se référant à une partition de l'ensemble des instances O , nous modifions le treillis des extensions tout en gardant la structure en treillis de Galois. Comme perspective, nous comptons déterminer la base minimale d'implications floues à partir du treillis de Galois alpha flou résultant permettant ainsi une représentation condensée de toutes les implications floues qu'on peut induire à partir du contexte formel initial. Ce travail peut être aussi étendu aux opérateurs de dérivation possibilistes proposées par Dubois et Prade [15].

Références

- [1] R. Wille. Restructuring lattice theory : an approach based on hierarchies of concepts. In Ordered Sets, (I. Rival, ed.), Reidel, Dordrecht, pp 445-470, 1982.
- [2] B. Ganter., R. Wille. Formal Concept Analysis, Springer-Verlag, 1999.
- [3] V. Ventos., H. Soldano. Alpha Galois Lattices : An Overview. ICFA 2005, pp 299-314.

- [4] J. Hereth., G. Stumme. Conceptual Knowledge Discovery and Data Analysis. Int. Conf. on Conceptual Structure, 2000, pp 421-437.
- [5] K. Waiyamai., L. Lakhal. Knowledge discovery from very large databases using frequent concept lattices. 11th Eur. Conf. on Machine Learning, ECML'2000, pp.. 437-445.
- [6] S. Pollandt. Fuzzy Begriffe. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg, 1997.
- [7] R. Belohlavek, Fuzzy Galois connections. Math.Logic Quarterly 45 (4), 1999, pp 497-504.
- [8] G. Georgescu, A. Popescu : Non dual fuzzy connection. Archive for mathematical logic 43, 2004.
- [9] W. Zhang : Variable threshold concept lattices. Information sciences 177(22), 2007, pp 4883-4892.
- [10] J. Medina, M. Ojeda-Aciego et J. Ruiz-Calvino. Formal concept analysis via multi adjoint concept lattices. Fuzzy sets and systems, 160 (2), 2009, pp130 -144.
- [11] Y. Djouadi, H. Prade. Possibility-theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices. FODM, 2011.
- [12] J.A. Goguen. L-fuzzy Sets. J.Math. Anal .Appl. 18(1967), pp 145-174.
- [13] B. Ganter., S. O. Kuznetsov. Pattern structures and their projections. Proceedings of ICCS 2001, pp 129-142
- [14] N. Pernelle., M.C. Rousset., V. Ventos. Automatic construction and refinement of a class hierarchy over multi-valued data. In 5th Conference on Principles and practice of Knowledge Discovery in Databases, PKDD 2001, Lecture Notes in Artificial Intelligence : Springer-Verlag, pp.386-398.
- [15] D. Dubois., H. Prade. Possibility theory and formal concept analysis in information systems. Proceedings of IFSA/EUSFLAT 2009, pp. 1021-1026.

Fusion d'Informations pour la Classification Multi-capteurs, Multi-cibles

Information Fusion for a Multi-sensor, Multi-target Classification

S. Hachour F. Delmotte D. Mercier E. Lefèvre
Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois, EA 3926, LGI2A

Univ. Lille Nord de France, UArtois, F-62400, Béthune, France, prenom.nom@univ-artois.fr

Résumé :

La redondance d'informations est une solution habituellement proposée pour corriger l'incertitude des instruments de mesure observant un système complexe. Dans cet article, on s'intéresse au problème de suivi et de classification de plusieurs cibles à l'aide d'un ensemble de capteurs plus ou moins fiables. Chaque capteur est supposé équipé d'un calculateur lui permettant de suivre et de classer plusieurs cibles effectuant divers mouvements. Le suivi des cibles étant optimalement assuré par des IMM (Interacting Multiple Models) à base de filtres de Kalman, le résultat de la classification reste dépendant des erreurs de mesure. En vue d'avoir le meilleur résultat de classification possible, on s'est proposé de fusionner les classifications locales des capteurs, suivant différentes règles de combinaison des cadres probabiliste et crédal, et de comparer les résultats.

Mots-clés :

Suivi multi-cibles, classification crédale, classification Bayésienne, fusion de données, association de données.

Abstract:

Information redundancy is commonly proposed as a solution to overcome the sensors uncertainty when observing complex systems. In this article, we are interested in multiple targets tracking and classification using a set of sensors with different reliabilities. Each sensor is equipped with a processor allowing to track and classify multiple maneuvering targets. Given that the tracking task is optimally provided by Kalman filters based IMM (Interacting Multiple Models), the classification task still depends on the measurements errors. In order to have the best classification result, it is proposed to fuse the sensors local classifications following different combination rules of the Bayesian and credal frameworks, and compare the results.

Keywords:

Multi-target tracking, credal classification, Bayesian classification, data fusion, data association.

1 Introduction

Cet article reprend le problème de suivi et de classification de cibles qui est abondamment étudié dans la littérature [1, 2, 7], où, à base de mesures (ex : positions en x et y du plan) prises par un ou plusieurs capteurs, on sou-

haite estimer les trajectoires d'un ensemble de cibles et les classer selon leurs propriétés dynamiques (ex : capacités de manœuvres). Plusieurs challenges sont à considérer dans ce problème, notamment, la prise en compte de la complexité des manœuvres que peuvent effectuer les cibles et les répercussions que peuvent avoir les erreurs de mesures sur la qualité du suivi et sur la classification des cibles. Le suivi du mouvement des cibles dans notre travail est assuré localement (au niveau des capteurs) par des algorithmes IMM à base de filtres de Kalman (un IMM pour une cible). Les mesures faites par les capteurs sont acheminées aux IMM par le moyen d'un algorithme d'association bidimensionnel généralisé, notamment, l'algorithme GNN (Global Nearest Neighbor) qui tend à minimiser la distance globale entre les mesures et les cibles connues. En plus de la tâche d'association, cet algorithme fournit des informations concernant les cibles nouvellement détectées ou non détectées. Ces informations sont utilisées par des fonctions score [2] pour gérer les apparitions et disparitions de cibles au niveau des capteurs.

À l'issue du processus d'estimation, et à l'aide des données cinématiques estimées, chaque capteur procède à une étape de classification locale en utilisant un formalisme Bayésien ou crédal [9]. Les classifications locales étant dépendantes des erreurs de mesure faites par les capteurs, en terme de performance, ces dernières sont fusionnées et des conclusions sont tirées quant à la robustesse de la classification globale. Les classifications locales des capteurs sont fu-

sionnées selon un ordre obtenu par un algorithme GNN généralisé, ce qui permet de gérer le fait que les capteurs n'observent pas le même nombre de cibles.

Le paragraphe 2 de cet article présente une description simplifiée du contexte de suivi multicibles, le paragraphe 3 aborde la classification locale (Bayésienne ou crédale) faite par les capteurs, ensuite la manière dont les classifications des capteurs sont fusionnées dans le paragraphe 4 et enfin, le paragraphe 5 est dédié à une application sur des cibles aériennes.

2 Suivi local des cibles

Les cibles dans leur environnement peuvent effectuer une multitude de manœuvres différentes (mouvements uniformes, accélérations, etc.), leur évolution peut être vue comme un processus Markovien commutant. Une modélisation possible d'un tel processus consiste à définir un nombre fini de modèles linéaires où chaque modèle représente un mode d'évolution particulier. Pour une cible i adoptant un mode d'évolution m_l , avec $l = \{1, \dots, r\}$ et r étant le nombre de modes d'évolution possibles, l'évolution du vecteur d'état peut être décrite comme suit :

$$x^i(k) = F(m_l)x^i(k-1) + Bu^i(k) + w^i(k) \quad (1)$$

où, $x^i(k) \in R^p$ représente le vecteur d'état de la cible i à l'instant k , avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. La notation $F(m_l)$ représente la matrice d'état de dimension $(p \times p)$ qui dépend du mode d'évolution m_l et $u^i(k)$ représente une entrée déterministe qui peut modéliser les changements d'accélération par exemple, et $w^i(k)$ est une erreur de modélisation considérée Gaussienne à moyenne nulle ayant Q comme matrice de covariance. La matrice d'entrée est notée B . Différentes modélisations possibles du mouvement des cibles peuvent être trouvées dans [2].

Par souci de simplicité, les mesures sont considérées linéairement dépendantes du vecteur d'état et sont modélisées par :

$$z_{s_i}^j(k) = Hx^i(k) + v_{s_i}(k) \quad (2)$$

où, $z_{s_i}^j(k) \in R^q$ représente la $j^{\text{ème}}$ mesure reçue à l'instant k , par le capteur s_i , avec $j \in$

$\{1, 2, \dots, m_{s_i}\}$. La matrice d'observation de dimension $(q \times p)$ est notée H et $v_{s_i}(k)$ représente l'erreur de mesure faite par le capteur s_i , elle est vue comme un bruit Gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance R . On note que le nombre de cibles n_{s_i} connues par un capteur s_i est variant dans le temps et une mesure $z_{s_i}^j(k)$ acquise à l'instant k peut être issue d'une cible connue (prédite), une nouvelle cible ou bien du bruit. L'ensemble des mesures prises par un capteur s_i , avec $s_i = \{s_1, s_2, \dots, S\}$, à un instant k est noté $Z_{s_i}(k) = \{z_{s_i}^1(k), z_{s_i}^2(k), \dots, z_{s_i}^{m_{s_i}}(k)\}$, avec m_{s_i} le nombre de mesures acquises par le capteur s_i . L'ensemble des mesures acquises sont utilisées par chaque capteur pour mettre à jour des cibles déjà prédites par les IMM ou créer de nouvelles cibles. Les détails concernant l'algorithme IMM peuvent être trouvés dans [1, 2]. A l'issue de la phase d'association, les IMM sont mis à jour et une estimation de l'état de toutes les cibles est faite au niveau des capteurs. On note $\hat{X}_{s_i}(k) = \{\hat{x}_{s_i}^1(k), \hat{x}_{s_i}^2(k), \dots, \hat{x}_{s_i}^{n_{s_i}}(k)\}$, l'ensemble des estimations faites par le capteur s_i à l'instant k .

3 Classification locale des cibles

Comme dans les travaux de Smets et Ristic [7, 10], la classification des cibles dans ce travail est faite à base des données cinématiques estimées des cibles. Les connaissances *a priori* sur les capacités de manœuvre des cibles nous permettent de définir un nombre K fini de classes $C = \{c_1, c_2, \dots, c_K\}$ où, chaque classe c_i regroupe un certain nombre r_i de modes d'évolution (ex : classe contenant le mode de vitesse constante, classe contenant les modes d'accélérations moyennes, etc).

A base des vraisemblances des modes d'évolution m_l fournies par les IMM, le théorème de Bayes permet à chaque capteur s_i de classer localement les cibles n_{s_i} . Le capteur fournit un rapport $\rho_{s_i} = \{P_{s_i}^1, P_{s_i}^2, \dots, P_{s_i}^{n_{s_i}}\}$ contenant les probabilités de classification de toutes les cibles, où par exemple, $P_{s_i}^1 = \{P_{s_i}^1(c_1), P_{s_i}^1(c_2), \dots, P_{s_i}^1(c_K)\}$. D'une manière analogue, et grâce au théorème de Bayes gé-

néralisé [5, 8], chaque capteur peut fournir une masse de croyance concernant la classification de chaque cible suivie. L'ensemble des fonctions de masse provenant d'un capteur s_i à l'instant k est noté $M_{s_i} = \{m_{s_i}^1, m_{s_i}^2, \dots, m_{s_i}^{n_{s_i}}\}$, avec $s_i = 1, \dots, S$ et n_{s_i} le nombre de cibles. Les détails concernant les classificateurs (Bayésien et crédal), utilisés par les capteurs peuvent être trouvés dans [6, 7, 10]. On note que les masses de croyance contenues dans les rapport M_{s_i} peuvent être transformées en probabilités pignistiques en vue de prendre des décisions de classification locales, ou bien elles sont conservées pour une classification globale, où elles sont fusionnées à l'aide des lois qui sont décrites dans la section suivante. La transformation pignistique se fait comme suit :

$$\text{Bet}P(c_i) = \sum_{c_i \in A} \frac{1}{|A|} \frac{m(A)}{1 - m(\emptyset)}, \quad (3)$$

où $A \subseteq C$ et $m(\emptyset)$ représente la masse de croyance de l'ensemble vide.

4 Classification globale

Sachant que les capteurs sont en général sujets à des erreurs de détections, et des performances de classification amoindries à cause des erreurs de mesure, cette section sera dédiée à la fusion des informations provenant des capteurs afin d'avoir une meilleure classification des cibles. Étant donné que les capteurs n'observent pas l'environnement des cibles de la même manière (ce qui signifie que le nombre de cibles connues peut être différent d'un capteur à un autre) et que les différentes cibles ne sont pas suivies dans le même ordre par les capteurs (ex : la cible 2 vue par le capteur s_i correspond à la cible 3 vue par le capteur s_j), la fusion des classifications locales ne peut pas être effectuée directement. Une étape d'association entre les estimations faites par les différents capteurs est nécessaire (ex : ensemble d'estimations \hat{X}_{s_i} faites par le capteur s_i et ensemble d'estimations \hat{X}_{s_j} faites par le capteur s_j). Le processus de la classification globale est effectué selon les étapes suivantes :

1. association entre les estimations des capteurs (track-to-track) : soit une matrice de distances Euclidiennes $[D_{i,j}] \in R^{n_{s_i} \times n_{s_j}}$ entre les n_{s_i} cibles connues par le capteur s_i et les n_{s_j} cibles connues par le capteur s_j , et soit une matrice auxiliaire $\Psi = [\psi_{i,j}]$, tel que $\psi_{i,j} = \{0, 1\}$, le problème d'association entre les deux ensembles \hat{X}_{s_i} et \hat{X}_{s_j} peut être posé comme suit :

$$\text{minimiser } \sum_{i=1}^{n_{s_i}} D_{i,j} \psi_{i,j}, \quad (4)$$

avec,

$$\sum_{i=1}^{n_{s_i}} \psi_{i,j} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n_{s_j}} \psi_{i,j} \leq 1, \quad (5)$$

où, $D_{i,j}$ est la distance Euclidienne normalisée séparant les estimations $\hat{x}_{s_i}^i$ et $\hat{x}_{s_j}^j$ des deux capteurs s_i et s_j .

Les contraintes formulées dans (5) signifient que les cibles estimées par un capteur donné peuvent être ou ne pas être associées aux cibles estimées par les autres capteurs (les cibles ne sont pas toutes observées par tous les capteurs). La solution au problème posé par l'équation (4), est obtenue à l'aide de l'algorithme Munkres modifié [4], elle donne une information sur les cibles communément suivies par les capteurs et les cibles qui ne sont pas suivies par tous les capteurs. Comme cela est illustré par la figure 1, la cible t_2 est suivie par les trois capteurs s_1, s_2 et s_3 , la cible t_3 est suivie uniquement par le capteur s_1 , etc.

2. préparation de la classification globale : la fusion des informations suit les lois suivantes : si une cible donnée est observée par un capteur s_i , ce dernier contribue à la classification globale, avec la classification locale qu'il aura réalisée concernant la cible en question. Si une cible donnée n'est pas observée par un capteur s_i , ce dernier contribue à la classification globale avec une ignorance (équiprobabilité dans le cas Bayésien et masse de croyance vide dans le cas crédal). Pour la figure 1, par exemple,

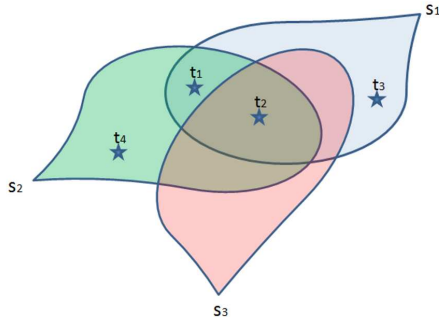


FIGURE 1 – Exemple de trois capteurs observant partiellement 4 cibles

le capteur s_1 fournit les classifications locales calculées pour les cibles t_1, t_2 et t_3 et une ignorance pour la cible t_4 .

3. classification globale : une fois que la mise en correspondance entre les estimations des capteurs est faite, on procède à une classification globale. Les stratégies de combinaisons utilisées pour fusionner les classifications locales sont présentées dans les sections suivantes.

4.1 Classification globale Bayésienne

Selon la solution obtenue dans l'étape d'association (track-to-track), les probabilités contenues dans les ensembles ρ_{s_i} , avec $s_i = 1, \dots, S$, sont fusionnées (conjonctivement, autres combinaisons), ensuite les probabilités globales finales des classes sont obtenues à l'aide du théorème de Bayes.

Fusion Bayésienne conjonctive. D'une manière générale, la fusion Bayésienne conjonctive des probabilités provenant de deux capteurs indépendants s_1 et s_2 est définie comme suit : la probabilité $P_{s_1 \cap s_2}$ qu'une cible donnée appartienne à la classe c_j est calculée par :

$$P_{s_1 \cap s_2}(c_j) = \frac{P_{s_1}(c_j)P_{s_2}(c_j)}{\sum_{c_i \in C} P_{s_1}(c_i)P_{s_2}(c_i)}, \quad (6)$$

Une fois que les probabilités provenant des capteurs sont fusionnées $P_{s_1 \cap s_2}$, elles sont combinées avec les probabilités *a priori* P^{k-1} à l'aide du théorème de Bayes pour obtenir les probabi-

lités des classes de l'instant k :

$$P^k(c_j) = \frac{P_{s_1 \cap s_2}(c_j)P^{k-1}(c_j)}{\sum_{c_i \in C} P_{s_1 \cap s_2}(c_i)P^{k-1}(c_i)}, \quad (7)$$

avec, $i = 1, \dots, K$ et K , le nombre de classes dans l'ensemble C .

Autres fusions Bayésiennes. Afin d'avoir un meilleur résultat de classification globale, d'autres opérateurs de fusion Bayésienne sont utilisés [3], et les probabilités finales des classes sont obtenues à l'aide du théorème de Bayes. La probabilité P_{s_1, s_2} , donnée par deux capteurs indépendants, qu'une cible donnée appartienne à la classe c_j est calculée par :

$$P_{s_1, s_2}(c_j) = \Phi(P_{s_1}(c_j), P_{s_2}(c_j)),$$

avec Φ un opérateur tel que le minimum, le maximum ou la moyenne. Une fois que les vraisemblances des capteurs sont fusionnées, le résultat est utilisé pour calculer les probabilités des classes comme dans l'équation (7).

4.2 Classification globale crédale

Selon la solution donnée par l'étape d'association (track-to-track), les masses de croyance M_{s_i} provenant des capteurs $s_i = 1, \dots, S$, sont fusionnées conjonctivement ou disjonctivement.

Fusion crédale conjonctive. La combinaison conjonctive crédale simplifiée à la fusion des masses de croyance m_{s_1} et m_{s_2} de deux capteurs s_1 et s_2 est donnée par la formule suivante :

$$m_{s_1 \odot s_2}(A) = \sum_{A_1, A_2 | A_1 \cap A_2 = A} m_{s_1}(A_1)m_{s_2}(A_2), \quad (8)$$

où, $A \subseteq C$.

Fusion crédale Disjonctive. La combinaison disjonctive des masses de croyance m_{s_1} et m_{s_2} des deux capteurs s_1 et s_2 est donnée par la formule suivante :

$$m_{s_1 \cup s_2}(A) = \sum_{A_1, A_2 | A_1 \cup A_2 = A} m_{s_1}(A_1)m_{s_2}(A_2). \quad (9)$$

On note que toutes les probabilités contenues dans les ensembles ρ_{s_i} et les masses de

croissance contenues dans les ensembles M_{s_i} , avec $s_i = 1, \dots, S$, sont combinées selon les lois décrites précédemment et selon l'ordre donné par l'association (track-to-track). Afin de prendre une décision concernant la classification des cibles, les masses de croyance résultant des fusions (conjonctive ou disjonctive) sont transformées en probabilités pignistiques suivant l'équation (3).

5 Application à la classification de cibles aériennes

Cette section décrit un exemple de suivi et de classification de cibles aériennes (avion de ligne, bombardier, avion de chasse, etc). Les cibles apparaissent et disparaissent aléatoirement et effectuent différentes manœuvres. La classification des cibles est basée sur la complexité des manœuvres effectuées (mouvement constant, accélérations moyennes, accélérations fortes, etc). La relation entre les différents modes d'évolution et les classes est donnée comme suit :

- classe c_1 : classe des cibles ayant de faibles capacités de manœuvre (ex : avion de ligne).
- classe c_2 : classe des cibles ayant des capacités de manœuvre moyennes (ex : bombardier).
- classe c_3 : classe des cibles ayant des capacités de manœuvre fortes (ex : avion de chasse).

Le vecteur d'état de toutes les cibles est donné par : $x = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y}]$, il représente la position et la vitesse des cibles dans le plan (x, y) . L'évolution du vecteur d'état suit le modèle donné par l'équation (1). Les différentes manœuvres sont modélisées par une entrée déterministe variable $u = [a_x \ a_y]^T$, qui représente les différents modes d'accélération. La différence entre les capacités d'accélération permet de distinguer les cibles et de les classer dans l'une des classes définies précédemment. Les capacités d'accélération pour les classes définies sont exprimées par : $-L_i \leq \{a_x, a_y\} \leq L_i$, où $L_i = 0g, 0.2g$ et $0.4g$ respectivement, pour les classes c_1, c_2 et c_3 , avec $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ l'accélération terrestre. Dans notre simulation, chaque cible est suivie par un IMM contenant

13 modes d'évolution représentant toutes les manœuvres qui peuvent être effectuées dans les directions x et y . Les différents modes d'évolution sont répartis dans les trois classes c_1, c_2 et c_3 comme suit :

$M_{c_1} = [m_1]$: mode de la classe c_1 .

$M_{c_2} = [m_1, \dots, m_5]$: modes de la classe c_2 .

$M_{c_3} = [m_1, \dots, m_{13}]$: modes de la classe c_3 .

Suivant le modèle de l'équation (1), $F(m_1)$, par exemple, est équivalent à la matrice d'état F , influencée par l'entrée déterministe $u = [0 \ 0]^T$, ce qui correspond au mode d'évolution avec une vitesse constante. Les matrices d'état et d'entrée F et B sont données respectivement par :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \Delta T^2/2 & 0 \\ \Delta T & 0 \\ 0 & \Delta T^2/2 \\ 0 & \Delta T \end{bmatrix},$$

où, ΔT représente la période d'échantillonnage.

Dans cet exemple, deux capteurs sont utilisés pour suivre et classer les trois cibles dont les trajectoires en (x, y) sont données par la figure 2. Leurs mesures sont prises selon le modèle de l'équation (2), en utilisant la matrice d'observation suivante : $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Les deux capteurs sont entachés de bruits de va-

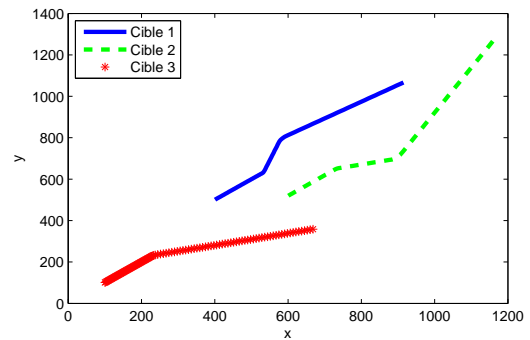


FIGURE 2 – Trajectoires des cibles

riances importantes, ce qui est censé altérer la qualité des classifications locales. Dans ce qui suit, on s'intéresse uniquement aux résultats de classification de la cible 2 (voir figure 2) qui est observée par les deux capteurs utilisés.

La cible 2 commence son évolution avec une vitesse constante, elle effectue une manœuvre

moyenne (accélération moyenne selon x) entre le 62^{ème} et le 65^{ème} pas de temps, elle effectue une seconde manœuvre forte (accélération forte selon y) entre 83^{ème} et le 87^{ème} pas de temps et elle termine son évolution en vitesse constante. Les résultats de classification attendus pour la cible 2 sont :

- doute entre les trois classes (c_1 , c_2 et c_3) durant la première phase du mouvement (tous les avions peuvent évoluer en vitesse constante).
- doute entre les classes (c_2 et c_3) après la première manœuvre moyenne (les avions de ligne sont supposés incapables d'effectuer des manœuvres).
- classification de la cible dans la classe c_3 (avion de chasse) après sa deuxième manœuvre forte.

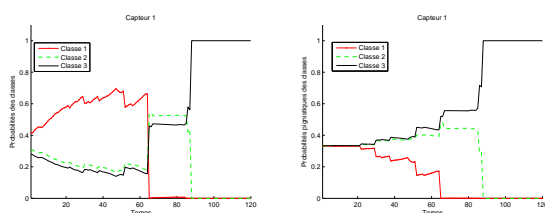


FIGURE 3 – Classifications Bayésienne et crédale faites par le capteur s_1

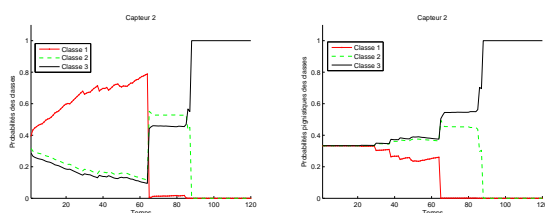


FIGURE 4 – Classifications Bayésienne et crédale faites par le capteur s_2

Les figures 3 et 4 montrent les résultats de classification (Bayésien et crédal) obtenus par les capteurs s_1 et s_2 respectivement. Deux remarques importantes peuvent être faites : on peut voir que dans les situations de doute (première phase du mouvement par exemple) là où, on est censé avoir un doute parfait entre

les trois classes, les classifieurs Bayésiens des deux capteurs ont tendance à favoriser la première classe. Cela est dû au fait que les vraisemblances des classes sont des sommes pondérées des vraisemblances des modes dans les IMM, et que la classe c_1 est celle qui engendre le nombre minimum de modes et donc, sa vraisemblance est moins influencée par des modes non concernés par le mouvement actuel de la cible (ce qui est le cas pour les classes c_2 et c_3 qui contiennent respectivement, 5 et 13 modes d'évolution). La capacité du formalisme crédal à attribuer de la masse de croyance à des ensembles de classes lui permet de mieux gérer les situations de doute (imprécision), d'où l'amélioration importante par rapport au résultat Bayésien. Ce résultat a été démontré en premier dans [10] pour la classification d'une seule cible et étendu au cas de plusieurs cibles, dans [6]. La deuxième remarque qui peut être faite est relative à la performance des capteurs où, on peut constater une détérioration des résultats de classification, notamment, durant la première et la deuxième phases du mouvement pour les deux capteurs s_1 et s_2 (comportement aléatoire des probabilités/probabilités pignistiques des classes, là où on est censé avoir un doute parfait). Cette dégradation dans les résultats de classification est due à des erreurs de mesure importantes (variance : 0.6) qui font que les classifieurs favorisent les classes c_2 et c_3 au profit de la classe c_1 par exemple (comme cela peut se voir sur les résultats des figures 3 et 4). Cela signifie qu'avec des erreurs de mesure importantes, un avion de ligne peut être pris pour un bombardier ou un avion de chasse. L'objectif de la classification globale (fusion des classifications locales) est de remonter à un résultat de classification plus fiable.

Les figures 5 les résultats de la fusion conjonctive dans les cadres Bayésien et crédal et la figure 6 montre le résultat de la fusion disjonctive crédale et le meilleur résultat Bayésien obtenu en fusionnant les vraisemblances des capteurs à l'aide de l'opérateur minimum.

La figure 5 montre que la classification globale issue de la fusion conjonctive n'améliore

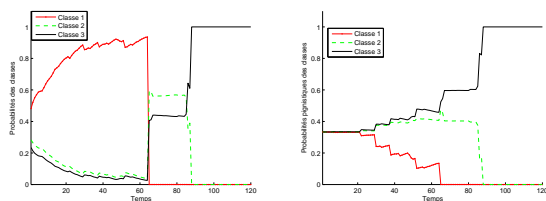


FIGURE 5 – Fusions conjonctives (Bayésienne et crédale)

pas les résultats de classification obtenus au niveau des capteurs. En effet, comme la combinaison conjonctive transmet toute la croyance (probabilités/masses de croyance) sur les intersections, le résultat de la combinaison accentue la divergence causée par le bruit des capteurs. Prenons l'exemple de la classification crédale à l'instant 40 : la croyance du capteur s_1 à cet instant est $m_{s_1}(\{c_1, c_2, c_3\}) = 0.65$, $m_{s_1}(\{c_2, c_3\}) = 0.35$ et la croyance du capteur s_2 est $m_{s_2}(\{c_1, c_2, c_3\}) = 0.9$, $m_{s_2}(\{c_2, c_3\}) = 0.1$, le résultat de la combinaison conjonctive est $m_{s_1 \odot s_2}(\{c_1, c_2, c_3\}) = 0.59$, $m_{s_1 \odot s_2}(\{c_2, c_3\}) = 0.41$, ce qui explique l'accentuation de l'erreur de classification.

Le résultat de la classification Bayésienne

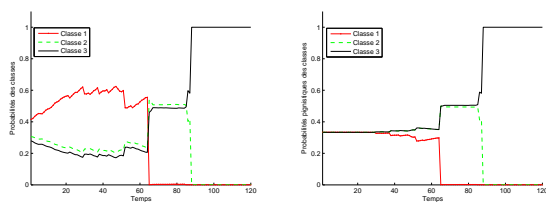


FIGURE 6 – Autre fusion Bayésienne et fusion disjonctive crédale

sur la figure 6 est obtenu en utilisant la vraisemblance du capteur qui s'engage le moins (opérateur $\Phi = \text{minimum}$), les performances des autres opérateurs sont moins bonnes, par manque de place les résultats ne sont pas mentionnés. La remarque la plus importante est l'amélioration apportée par la fusion crédale disjonctive où le résultat obtenu s'avère beaucoup plus lisse que ceux obtenus locale-

ment par les capteurs et par la combinaison conjonctive. Cela s'explique par le fait que la combinaison disjonctive transmet toute la croyance sur l'union des classes et donc elle tend à favoriser la prudence (ignorance) et corriger les divergences occasionnées par le bruit. Pour la classification crédale à l'instant 40, le résultat de la fusion disjonctive des masses de croyances est $m_{s_1 \oplus s_2}(\{c_1, c_2, c_3\}) = 0.96$, $m_{s_1 \oplus s_2}(\{c_2, c_3\}) = 0.04$, ce qui explique la prudence du classifieur disjonctif et la correction des divergence obtenues par les deux capteurs au même instant. Le classifieur disjonctif ne classe une cible que lorsque cette dernière effectue de vraies manœuvres et que les manœuvres sont observées par les deux capteurs comme à l'instant 87.

Les commentaires suivants concernent les résultats de la classification crédale :

- si une cible est détectée par les deux capteurs, et que les résultats de classification des capteurs sont plus ou moins détériorés, à cause des erreurs de mesure, le meilleur résultat de classification peut être obtenu, en fusionnant disjonctivement les résultats obtenus au niveau des capteurs (résultat montré dans cet article).
- si une cible n'est pas détectée par les deux capteurs, le capteur qui ne la détecte pas contribue à la classification globale par une ignorance (proposé dans la section 4). Dans ce cas le résultat de la fusion disjonctive est tout le temps erroné (suit l'avis du capteur qui ne détecte pas). Le mieux dans cette situation est de se contenter du résultat de la fusion conjonctive (résultat non montré dans cet article).

La figure 7 donne l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de classification. Pour chaque valeur de variance des bruit des capteurs, l'EQM est moyennée à travers 20 simulations, avec différentes réalisations de bruits. L'EQM représente la différence entre les probabilités pignistiques attendues et celles obtenues par les capteurs 1 et 2 ainsi que celles obtenues à l'issue des classifications globales conjonctive et disjonctive. L'EQM est calculée par :

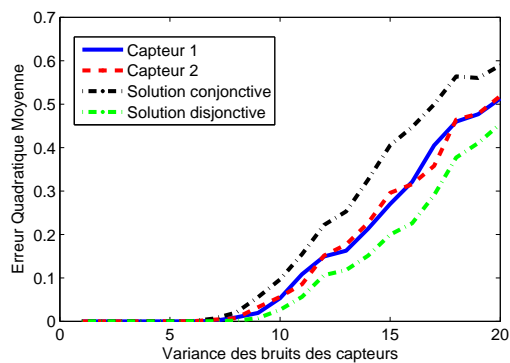


FIGURE 7 – Erreurs de classification

$EQM = (\hat{B}etp - Betp)'(\hat{B}etp - Betp)$, où $\hat{B}etp$ représente les un vecteur contenant les probabilités pignistiques attendues. La figure 7 montre que la classification la plus robuste est celle obtenue à l'issue de la fusion disjonctive.

6 Conclusion

Cet article reprend un exemple de suivi et de classification de plusieurs cibles à la fois. Nous avons opté pour une architecture multi-capteurs afin d'obtenir une meilleure classification des cibles, cela, en considérant des capteurs non fiables.

Chaque capteur, à l'aide d'un ensemble d'observations bruités, est en mesure de suivre localement une multitudes de cibles (nombre de cibles peut différent d'un capteur à un autre) ainsi que de fournir une classification locale concernant chaque objet. Les capteurs sont considérés complètement indépendants, leur classifications locales, étant détérioré par le bruit, sont fusionnées, dans le but d'obtenir une classification globale de meilleure qualité.

Pour les cibles qui sont communément observées par tous les capteurs, cet article montre que la classification globale issue d'une fusion disjonctive donne une classification meilleure que celle issue de la fusion conjonctive et celles obtenues localement par les capteurs.

Références

[1] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, T. Kirubarajan, and J. Wiley. *Estimation with applications*

to tracking and navigation. Wiley Online Library, 2001.

- [2] S.S. Blackman and R. Popoli. *Design and analysis of modern tracking systems*, volume 685. Artech House Norwood, MA, 1999.
- [3] Isabelle Bloch. Fusion d'informations numériques : panorama méthodologique. *Journées Nationales de la Recherche en Robotique*, page 79, 2005.
- [4] F. Bourgeois and J.-C Lassalle. An extension of the munkres algorithm for the assignment problem to rectangular matrices. *Communications of the ACM*, 14(12) :802–804, 1971.
- [5] F. Delmotte and P. Smets. Target identification based on the transferable belief model interpretation of Dempster-Shafer model. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A : Systems and Humans*, 34(4) :457–471, 2004.
- [6] S. Hachour, F. Delmotte, É. Lefèvre, D. Mercier, J. Klein, and Vannobel J-M. Classification crédale multi-cibles. *21eme Rencontres Francophone sur la Logique floue et ses Applications (LFA2012)*, pages 201–208, 2012.
- [7] B. Ristic, N. Gordon, and A. Bessell. On target classification using kinematic data. *Information Fusion*, 5(1) :15–21, 2004.
- [8] P. Smets. Belief functions : the disjunctive rule of combination and the generalized bayesian theorem. *International Journal of Approximate Reasoning*, 9(1) :1–35, 1993.
- [9] P. Smets and R. Kennes. The Transferable Belief Model. *Artificial intelligence*, 66(2) :191–234, 1994.
- [10] P. Smets and B. Ristic. Kalman filter and joint tracking and classification based on belief functions in the TBM framework. *Information Fusion*, 8(1) :16–27, 2007.

Classification multi-label par fonctions de croyance

Multilabel classification using belief functions

R. Nassif^{1,2}S. Destercke¹M.H. Masson³¹ Université de Technologie de Compiègne² Université Libanaise³ Université de Picardie Jules VerneLaboratoire Heudiasyc, UMR CNRS 7253, BP 20529 60205 Compiègne, roula.nassif@etu.utc.fr

Résumé :

La classification multi-label consiste à associer simultanément à chaque individu x une ou plusieurs étiquettes. L'ordonnement d'étiquettes est un problème d'apprentissage dont le but est de relier des instances à un ordre total défini sur un ensemble d'étiquettes possibles. Une technique de passage de l'ordonnement d'étiquettes à la classification multi-label a été développée dans la littérature. En se basant sur cette technique, nous utilisons la théorie des fonctions de croyance afin d'élaborer une nouvelle méthode de classification multi-label. Afin d'évaluer notre approche, nous comparons les résultats obtenus sur les jeux de données classiques avec ceux obtenus par d'autres méthodes de la littérature.

Mots-clés :

Classification multi-label, ordonnancement d'étiquettes, fonctions de croyance, k-PPV évidentiels, étiquette calibrée, comparaison par paires.

Abstract:

In multilabel classification, the goal is to assign one or more labels to each instance x . Label ranking is a learning task where the goal is to map instances to a linear order on a finite set of predefined labels. An approach was developed in the literature to move from label ranking to multilabel classification. Based on this technique, we use the theory of belief functions to develop a new method for multilabel classification problem. To evaluate our approach, we compare the results with those obtained by other methods in the literature.

Keywords:

Multilabel classification, label ranking, belief functions, evidential k-NN, calibrated label, pairwise comparison.

1 Introduction

Ces dernières années ont vu émerger différentes extensions du problème de classification classique : parmi ces dernières se trouvent les problèmes de classification multi-label et les problèmes d'ordonnement d'étiquettes. Soit \mathcal{L} un ensemble fini d'étiquettes $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$ et soient X l'espace d'entrée et Y l'espace

de sortie formé des sous-ensembles de \mathcal{L} . Sur la base d'un ensemble d'apprentissage $D = \{(x_i, y_i) / x_i \in X, y_i \in Y\}$ formé de n instances étiquetées, on recherche un classifieur permettant d'associer à toute instance $x \in X$ le y minimisant un certain critère d'erreur. Dans la *classification classique*, l'espace de sortie est formé par des singletons c.à.d. qu'une seule étiquette parmi les l est associée à chaque instance x . Dans la *classification multi-label*, une ou plusieurs étiquettes sont associées simultanément à x . Dans le cas du problème d'*ordonnement d'étiquettes*, il s'agit d'apprendre pour chaque instance x un ordre total \succ sur l'ensemble d'étiquettes \mathcal{L} . Par exemple, prenons le cas d'un document et supposons qu'on désire le classer selon deux critères, le premier étant la langue et le second le champ d'application. Etant donné un ensemble de trois langues possibles {française, anglaise, chinoise}, à tout document on ne peut associer qu'une seule étiquette parmi les trois étiquettes possibles. Ce type de problème est traité par la classification classique. Par contre, pour un ensemble de champs d'application (*mathématiques, physique, chimie, biologie, informatique*) $\{M, P, C, B, I\}$, un document peut relever de plusieurs catégories comme les mathématiques, physique et informatique, soit $y = \{M, P, I\}$, donc pour une instance on peut associer une ou plusieurs étiquettes. Finalement, du point de vue du problème d'ordonnement, on peut associer à tout document un ordre sur l'ensemble des champs d'application. Par exemple un docu-

ment x peut appartenir plus à la catégorie M que P que I ... En utilisant l'écriture $\lambda_i \succ_x \lambda_j$ qui signifie que, pour une instance x , l'étiquette λ_i est préférée à l'étiquette λ_j , le résultat aura, par exemple, la forme suivante : $M \succ_x P \succ_x I \succ_x C \succ_x B$.

Ces deux problèmes ont de nombreuses applications. Le problème de classification multi-label est rencontré, par exemple, dans la caractérisation d'une image (qui peut à la fois contenir une ville, une montagne, une plage, ...), d'une musique (qui peut être à la fois douce, calmante, enthousiasmante) ou d'un film (qui peut appartenir à plusieurs genres). Le problème d'ordonnement est rencontré, par exemple, dans la recommandation d'articles selon les préférences des consommateurs, l'évaluation du profil d'expression d'un gène (où les forces d'expression peuvent se voir comme un ordonnancement).

Nous traitons dans cet article du problème de classification multi-label en adoptant l'approche proposée par Fürnkranz et al. [3]. Cette approche appelée ordonnancement calibré, permet de transformer tout algorithme résolvant un problème d'ordonnement en méthode pour la classification multi-label. Nous utilisons comme algorithme d'ordonnement celui proposé par Masson et al. [5]. Ce dernier, fondé sur la théorie des fonctions de croyance, permet d'obtenir l'ordonnement le plus plausible à partir d'informations fournies par différents classificateurs binaires.

Afin de présenter les résultats de la classification multi-label par ordonnancement calibré dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance, nous proposons d'organiser cet article de la manière suivante : tout d'abord, nous commençons par quelques brefs rappels sur la théorie des fonctions de croyance, puis nous rappelons la méthode de l'ordonnement d'étiquettes par fonctions de croyance introduite dans [5]. Ensuite, nous présentons la méthode de classification multi-label par ordonnancement calibré [3]. Dans le paragraphe 5,

nous évaluons notre méthode en comparant les résultats obtenus sur des jeux de données classiques avec d'autres méthodes.

2 Quelques rappels sur la théorie des fonctions de croyance

La théorie des fonctions de croyance (ou théorie de Dempster-Shafer) [8] généralise à la fois la théorie des probabilités (conditionnement, marginalisation) et les approches ensemblistes (intersection, union, inclusion, etc.). Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ (cadre de discernement) un ensemble fini de réponses possibles à une question. Une fonction de masse sur Ω est une application $m : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que :

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1. \quad (1)$$

Tout sous-ensemble A de Ω tel que $m(A) > 0$ représente un ensemble possible de valeurs pour ω , et la quantité $m(A)$ peut être interprétée comme la mesure de croyance exactement allouée à $\omega \in A$. A partir de m , on peut définir d'autres fonctions :

- Fonction de plausibilité : elle représente la partie maximale de croyance qui pourrait soutenir A .

$$pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (2)$$

- Fonction de commonalité : elle représente la somme des masses allouées aux sur-ensembles de A , $q(\emptyset) = 1$,

$$q(A) = \sum_{B \supseteq A} m(B) \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (3)$$

Soient Ω et Θ deux cadres de discernement. On appelle *raffinement* de Θ vers Ω l'application $\rho : 2^\Theta \rightarrow 2^\Omega$ telle que :

- l'ensemble $\{\rho(\{\theta\}), \theta \in \Theta\} \subseteq 2^\Omega$ est une partition de Ω ;

$$- \rho(A) = \cup_{\theta \in \Theta} \rho(\{\theta\}) \quad \forall A \subseteq \Theta$$

Θ est appelé un grossissement de Ω et Ω un raffinement de Θ . Pour transférer une masse m^Θ d'un grossissement Θ vers Ω , on utilise

l'opération d'extension vide suivante :

$$m^{\Theta \uparrow \Omega}(B) = \begin{cases} m^{\Theta}(A) & \text{si } B = \rho(A), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

Soient m_1 et m_2 deux fonctions de masse sur Ω modélisant deux éléments d'évidence, on utilise la règle de combinaison conjonctive pour les combiner. La fonction de masse résultante est, $\forall A \subseteq \Omega$:

$$(m_1 \oplus m_2)(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B)m_2(C). \quad (5)$$

Cette règle peut s'exprimer facilement à l'aide des commonalités, $\forall A \subseteq \Omega$:

$$(q_1 \oplus q_2)(A) = q_1(A)q_2(A). \quad (6)$$

A noter que, avant d'appliquer cette règle de combinaison, il faut ramener les informations sur le même cadre de discernement.

3 Ordonnement d'étiquettes par fonctions de croyance

3.1 Ordonnement d'étiquettes

Le problème d'ordonnement d'étiquettes consiste à apprendre, à partir d'exemples, une application associant à toute instance $x \in X$, un ordre total \succ_x sur $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$. L'ordre total \succ_x peut être représenté de manière équivalente par une permutation τ_x de l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, l\}$ de telle sorte que $\lambda_i \succ_x \lambda_j \Leftrightarrow \tau_x(i) < \tau_x(j)$ (la valeur $\tau_x(i)$ représente le rang de λ_i dans les préférences de x). Pour résoudre ce problème, différentes méthodes existent. Une approche particulière est celle dite de *préférence par paires* [2]. Elle consiste à apprendre, pour chaque couple d'étiquettes (λ_i, λ_j) tels que $i < j$, un classifieur binaire M_{ij} permettant de prédire pour une entrée x si λ_i est préférée ou non à λ_j . Pendant la classification, chaque instance x est alors soumise aux $l(l-1)/2$ classifieurs, la sortie du classifieur étant 1 si $\lambda_i \succ \lambda_j$ et 0 dans le cas contraire. A noter que n'importe quel classifieur binaire peut être utilisé dans ce cas, et que

la sortie n'est pas nécessairement dans $\{0, 1\}$, elle est généralement comprise dans l'intervalle $[0, 1]$. Hüllermeier propose alors d'associer à chaque entrée x une relation floue de préférence R_x :

$$R_x(\lambda_i, \lambda_j) = \begin{cases} M_{ij}(x) & \text{si } i < j, \\ 1 - M_{ij}(x) & \text{si } i > j. \end{cases} \quad (7)$$

Moyennant ces relations de préférences, on calcule pour chaque étiquette λ_i , la fonction score $S_x(\lambda_i)$:

$$S_x(\lambda_i) = \sum_{j \neq i} R_x(\lambda_i, \lambda_j). \quad (8)$$

Pour une instance x , l'ordre total est obtenu en triant par ordre décroissant les fonctions $S_x(\lambda_i)$ calculées pour chaque élément de \mathcal{L} .

3.2 Ordonnement d'étiquettes par fonctions de croyance

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour traiter la problématique d'ordonnement d'étiquettes. Dans cet article, nous adoptons l'approche *d'ordonnement d'étiquettes dans le cadre des fonctions de croyance* [5].

Chaque classifieur binaire évidentiel M_{ij} travaille sur un grossissement particulier Θ_{ij} de l'ensemble S contenant toutes les permutations possibles de $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, l\}$. Nous avons $\Theta_{ij} = \{\theta_{ij}, \bar{\theta}_{ij}\}$ un grossissement binaire avec θ_{ij} l'ensemble des permutations $\tau \in S$ pour lesquelles λ_i est préférée à λ_j et $\bar{\theta}_{ij}$ l'ensemble des permutations $\tau \in S$ pour lesquelles λ_j est préférée à λ_i . On suppose que chaque classifieur évidentiel fournit, pour chaque instance x , la fonction de masse suivante :

$$\begin{cases} m_x^{\Theta_{ij}}(\theta_{ij}) = \alpha_{ij}, \\ m_x^{\Theta_{ij}}(\bar{\theta}_{ij}) = \beta_{ij}, \\ m_x^{\Theta_{ij}}(\Theta_{ij}) = 1 - \alpha_{ij} - \beta_{ij}. \end{cases} \quad (9)$$

A partir de ces masses, on en déduit les plausi-

bilités suivantes :

$$\begin{cases} pl_x^{\Theta_{ij}}(\theta_{ij}) = 1 - \beta_{ij}, \\ pl_x^{\Theta_{ij}}(\overline{\theta_{ij}}) = 1 - \alpha_{ij}. \end{cases} \quad (10)$$

Ces valeurs correspondent aux commonalités, donc on a :

$$\begin{cases} q_x^{\Theta_{ij}}(\theta_{ij}) = 1 - \beta_{ij} \\ q_x^{\Theta_{ij}}(\overline{\theta_{ij}}) = 1 - \alpha_{ij}. \end{cases} \quad (11)$$

Un ordre total sur les étiquettes s'obtient finalement par la méthode du *maximum de plausibilité*. Ayant $l(l-1)/2$ sources d'informations exprimées sur des référentiels différents, on cherche une fonction de masse $m_x^S(\cdot)$ exprimée sur S . La fonction de masse totale est obtenue en combinant ces différentes masses étendues à S grâce à l'opération d'extension vide :

$$m_x^S(\cdot) = \bigoplus_{i < j} m_x^{\Theta_{ij} \uparrow^S}(\cdot). \quad (12)$$

En utilisant les opérations sur les fonctions de croyance, la commonalité associée à une permutation τ de S peut s'écrire :

$$q_x(\tau) = \prod_{\tau(i) < \tau(j)} (1 - \beta_{ij}) \prod_{\tau(k) > \tau(l)} (1 - \alpha_{kl}), \quad (13)$$

où la notation $\tau(i) < \tau(j)$ en indice désigne l'ensemble des couples (λ_i, λ_j) , $i < j$ pour lesquels λ_i est placée avant λ_j . La permutation τ étant un élément singleton de S , cette valeur n'est rien d'autre que la plausibilité $pl_x(\tau)$. Le choix d'un ordre particulier dans S peut consister à chercher la permutation τ^* de plus grande plausibilité. Pour maximiser $pl_x(\tau)$, il est équivalent de maximiser son logarithme. La permutation optimale s'exprime donc sous la forme suivante :

$$\tau^* = \arg \max_{\tau} \sum_{\tau(i) < \tau(j)} \ln(1 - \beta_{ij}) + \sum_{\tau(k) > \tau(l)} \ln(1 - \alpha_{kl}). \quad (14)$$

Pour déterminer τ^* , on introduit pour chaque classifieur binaire une variable x_{ij} telle que :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i \succ \lambda_j \text{ c.à.d. } \tau(\lambda_i) < \tau(\lambda_j), \\ 0 & \text{si } \lambda_j \succ \lambda_i \text{ c.à.d. } \tau(\lambda_j) < \tau(\lambda_i). \end{cases}$$

On calcule les x_{ij} optimaux par résolution d'un programme linéaire en nombres entiers :

$$\max_{x_{ij} \in \{0,1\}} \sum_{i < j} x_{ij} \ln(1 - \beta_{ij}) + \sum_{i < j} (1 - x_{ij}) \ln(1 - \alpha_{ij}). \quad (15)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_{ij} + x_{jk} - 1 \leq x_{ik} & \forall i < j < k, \\ x_{ik} \leq x_{ij} + x_{jk} & \forall i < j < k. \end{cases} \quad (16)$$

Ces contraintes permettent d'assurer la transitivité de la relation d'ordre recherchée. Finalement, à partir des valeurs x_{ij} , on peut déterminer la permutation optimale :

$$\begin{cases} x_{ij} = 1 & \Rightarrow \tau^*(i) < \tau^*(j), \\ x_{ij} = 0 & \Rightarrow \tau^*(i) > \tau^*(j). \end{cases} \quad (17)$$

4 Classification multi-label par ordonnancement calibré

Nous exposons une approche pour résoudre le problème de *multi-label calibré* qui associe à toute entrée $x \in X$, caractérisée par des attributs, un ensemble d'étiquettes pertinentes $P_x \subseteq \mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$ déduit à partir d'un ordre sur \mathcal{L} .

4.1 Classification multi-label comme problème d'ordonnement

Dans la classification multi-label, chaque exemple x est associé à un ensemble d'étiquettes pertinentes P_x et implicitement à un ensemble d'étiquettes non pertinentes $N_x = \mathcal{L} \setminus P_x$. Ce problème peut être vu comme un cas particulier de l'ordonnement d'étiquettes. Obtenir P_x et N_x à partir d'un ordre \succ sur \mathcal{L} revient à choisir une étiquette λ_i et à considérer la séparation $P_x = \{\lambda_j / \lambda_j \succ \lambda_i\}$ et $N_x = \{\lambda_j / \lambda_i \succeq \lambda_j\}$. Pour résoudre le problème du choix de λ_i , Fürnkranz et al. [3] proposent d'ajouter une étiquette pivot λ_0 à \mathcal{L} .

Soit S^0 l'espace des permutations possibles de l'ensemble \mathcal{L}' avec $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \lambda_0$ ($\mathcal{L}' = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$). Le modèle $h : X \rightarrow S^0$ associant à tout exemple un ordre sur \mathcal{L}' est appelé ordonnancement calibré. Le pivot λ_0 est ensuite utilisé pour séparer les étiquettes pertinentes (P_x) de celles non pertinentes.

Le problème est alors réduit à un problème d'ordonnement de $l + 1$ étiquettes. Le résultat

étant de la forme :

$$\lambda_{i_1} \succ \dots \lambda_{i_j} \succ \lambda_0 \succ \lambda_{i_{j+1}} \succ \dots \lambda_{i_l}. \quad (18)$$

Ceci induit à la fois un ordonnancement

$$\lambda_{i_1} \succ \dots \lambda_{i_j} \succ \lambda_{i_{j+1}} \succ \dots \lambda_{i_l}, \quad (19)$$

et une partition bipartite :

$$\begin{cases} P_x = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}\}, \\ N_x = \{\lambda_{i_{j+1}}, \dots, \lambda_{i_l}\}. \end{cases} \quad (20)$$

4.2 Transformation de données multi-label en données d'ordonnancement

Un individu de l'ensemble d'apprentissage d'un problème d'ordonnancement est une instance $x \in X$, caractérisée par des attributs, et sa sortie y constituée d'une relation de préférence $R_x = \{(\lambda, \lambda') / \lambda \succ_x \lambda'\}$. Dans un problème de classification multi-label, deux ensembles N_x et P_x sont associés à chaque instance d'apprentissage x . A partir de ces ensembles, on peut facilement construire l'ensemble de préférences $R_x = \{(\lambda, \lambda') / \lambda \in P_x, \lambda' \in N_x\}$. En introduisant le pivot λ_0 , l'ensemble de préférences devient alors :

$$R'_x = R_x \cup \{(\lambda, \lambda_0) / \lambda \in P_x\} \cup \{(\lambda_0, \lambda) / \lambda \in N_x\}$$

Nous traitons dans cette section la transformation d'un ensemble d'apprentissage multi-label vers un ensemble d'apprentissage traitant un problème d'ordonnancement. Afin de rendre plus claire la méthodologie, nous utilisons un exemple. Supposons que l'ensemble d'apprentissage associé au problème de classification multi-label d'un document (*paragraphe 1*) est formé de trois instances :

$$x_1 : P_{x_1} = \{M, P, I\};$$

$$x_2 : P_{x_2} = \{C, B\};$$

$$x_3 : P_{x_3} = \{M\}.$$

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, afin de résoudre le problème de classification multi-label, il faut ajouter un pivot λ_0 à $\mathcal{L} = \{M, P, C, B, I\}$. Suivant le paragraphe 3.1, les données d'apprentissage sont

ensuite transformées pour obtenir un jeu de données par paire d'étiquette. Nous devons alors construire 15 classifieurs binaires M_{ij} ($M_{0M}, M_{0P}, \dots, M_{MP}, M_{MC}, \dots, M_{BI}$). Par exemple, pour le classifieur M_{0M} , pour x_1 et x_3 , l'étiquette M appartient à P_{x_1} et P_{x_3} , d'où $M \succ_{x_1} \lambda_0$ et $M \succ_{x_3} \lambda_0$, cependant, pour x_2 , l'étiquette M n'appartient pas à P_{x_2} , d'où $\lambda_0 \succ_{x_2} M$. x_1 et x_3 seront donc utilisés pour apprendre M_{0M} , mais pas x_2 . Pour le classifieur M_{MP} , pour x_1 , on ne sait pas laquelle des étiquettes $\{M, P\}$ est préférée, alors nous ne prenons pas en considération cet exemple dans la construction de la base d'apprentissage de ce classifieur. Voici quelques transformations :

Tableau 1 – Classifieur M_{0M}

	$\lambda_0 \succ_x M$	$M \succ_x \lambda_0$
x_1	0	1
x_2	1	0
x_3	0	1

Tableau 2 – Classifieur M_{MP}

	$M \succ_x P$	$P \succ_x M$
x_3	1	0

5 Etude expérimentale

5.1 Jeux de données utilisés

Pour tester notre méthode, nous utilisons trois bases de données $\{emotions, scene, yeast\}$, téléchargées de la librairie *MULAN* (<http://mlkd.csd.auth.gr/multilabel.html>). Les données *emotions* portent sur la classification des chansons selon les émotions qu'elles évoquent, le jeu *scene* porte sur l'indexation sémantique de scènes et, finalement, la base *yeast* contient des données concernant des analyses fonctionnelles des gènes. Les caractéristiques de ces jeux sont données dans le

tableau 3, et tous les résultats fournis dans ce papier ont été calculés sur les exemples de test (fournis dans les jeux de données initiaux).

Tableau 3 – Caractéristiques des données : nombre des exemples d'apprentissage et de test, nombre d'attributs, nombre de classes.

Nom	# App.	# Test	# Attr.	# Classes
emotion	391	202	72	6
scene	1211	1196	294	6
yeast	1500	917	103	14

Vu l'écart entre les valeurs des différents attributs, nous utilisons des données *centrées réduites*.

5.2 Les métriques d'évaluation

Pour évaluer la performance de notre classifieur multi-label, plusieurs critères existent dans la littérature [9]. Nous rappelons dans ce qui suit deux métriques d'évaluation utilisées : le *coût de Hamming* et la *précision*. Soit l'ensemble test $T = \{(x_i, Y_i), i = 1, \dots, N\}$, avec Y_i le vrai ensemble d'étiquettes associé à l'exemple test x_i et soit \hat{Y}_i l'ensemble d'étiquettes prédites par le classifieur multi-label pour x_i .

- **Coût de Hamming** : Ce critère évalue combien d'étiquettes sont mal classées (une étiquette n'appartenant pas à Y_i est prédite ou bien une étiquette appartenant à Y_i n'est pas prédite).

$$C.H. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|Y_i \Delta \hat{Y}_i|}{l}. \quad (21)$$

Δ étant la différence symétrique entre deux ensembles. Plus petite est la valeur du *Coût de Hamming*, plus grande est la performance.

- **Précision** : Cette métrique mesure le degré de similarité entre Y_i et \hat{Y}_i :

$$Prec. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|Y_i \cap \hat{Y}_i|}{|Y_i \cup \hat{Y}_i|}. \quad (22)$$

Contrairement au *Coût de Hamming*, plus grande est la valeur de la *Précision*, plus grande est la performance.

5.3 Algorithme d'apprentissage et résultats

Comme on a déjà vu dans les paragraphes 2 et 3, on a besoin de $l(l+1)/2$ classifieurs binaires évidentiels, pour ceci nous transformons les jeux de données multi-label (*paragraphe 4.2*) et nous utilisons comme classifieurs les *k-plus proches voisins (k-PPV) évidentiels de Denoeux* [1] (Programmes matlab téléchargeables à l'adresse www.hds.utc.fr/tdenoeux). Nous aurons en sortie, pour chaque classifieur M_{ij} utilisés sur les jeux d'apprentissage transformés (voir *paragraphe 4.2*), les fonctions de masses associées à chaque exemple $x : m_x^{\Theta_{ij}}(\theta_{ij}) = \alpha_{ij}$ et $m_x^{\Theta_{ij}}(\bar{\theta}_{ij}) = \beta_{ij}$. Ensuite, ayant pour chaque instance x l'ensemble des valeurs α_{ij} et β_{ij} , nous cherchons la permutation optimale $\tau^*(x)$. En utilisant l'étiquette λ_0 , on peut passer de l'ordonnancement $\tau^*(x)$ à l'ensemble d'étiquettes pertinentes P_x (*paragraphe 4.1*).

Nous avons fait varier le nombre de plus proches voisins k de 1 à 13, et nous avons reporté les meilleurs résultats dans la dernière ligne des tableaux 4, 5 et 6.

5.4 Discussion

Pour tester la performance de notre méthode, nous comparons les résultats expérimentaux obtenus avec d'autres approches. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour traiter les problèmes de classification multi-label. Ces méthodes peuvent être divisées en deux catégories selon la façon dont on traite l'ensemble de données d'apprentissage. La première catégorie transforme le problème d'apprentissage multi-label en un ou plusieurs problèmes d'apprentissage à une seule classe, tandis que la seconde catégorie se base sur l'adaptation directe des algorithmes de classification mono-label pour l'apprentissage multi-label. Notre approche faisant partie du premier

groupe, nous comparons nos résultats avec des méthodes appartenant à la première catégorie :

- *Binary Relevance* (BR) : [10] Elle consiste à construire l classifieurs binaires, chaque classifieur est utilisé pour séparer une classe des autres. Pour une nouvelle instance x , la sortie de BR est l'ensemble des étiquettes λ_i prédites par chaque classifieur binaire.
- *Label Powerset* (LP) : [10] Cette approche considère chaque ensemble P_x dans l'ensemble d'apprentissage comme une étiquette pour un nouveau problème d'apprentissage mono-label. Pour une nouvelle instance x , le classifieur monolabel fait sortir une étiquette, qui n'est autre que l'ensemble P_x prédit pour l'instance x .
- *Random k-labelsets* (RAkEL) : [10] Elle consiste à décomposer de manière aléatoire l'ensemble \mathcal{L} en des sous-ensembles et puis à construire un classifieur LP pour chacun de ces sous-ensembles. Pour chaque étiquette λ_i une décision moyenne est calculée. La décision finale est positive pour une étiquette donnée si la décision moyenne est plus grande qu'une valeur seuil t .
- *RAkEL évidentielle* (E-RAkEL) : [4] Elle utilise la méthode RAkEL conjointement avec la théorie des fonctions de croyance. L'utilisation de la théorie des fonctions de croyance rend possible l'association d'une fonction de masse à chaque classifieur. Ces fonctions sont ensuite combinées par un opérateur adapté dans le but de donner une décision finale sur l'appartenance d'un individu à un ensemble d'étiquettes.
- *Classifier Chains* (CC) : [6] Comme dans le cas de la méthode *Binary Relevance*, on construit l classifieurs binaires, mais afin d'intégrer d'éventuelles dépendances entre étiquettes, le $j^{\text{ième}}$ classifieur utilise dans ses attributs d'entrée les prédictions des $j - 1$ classifieurs précédents.

Pour l'approche RAkEL évidentielle, nous utilisons les résultats figurant dans [4]. Pour les autres approches, nous utilisons les résultats

figurant dans [7] qui sont issus des algorithmes se trouvant dans la librairie *MULAN* (<http://mlkd.csd.auth.gr/multilabel.html#Software>). Nous considérons uniquement les résultats issus de l'utilisation des *k-plus proches voisins* comme classifieurs binaires.

En analysant les valeurs se trouvant dans les tableaux 4, 5 et 6, on voit que les résultats obtenus en transformant un problème de classification multi-label en un problème d'ordonnement, résolu en utilisant le cadre théorique des fonctions de croyance, sont comparables par rapport à ceux des autres méthodes de classification multi-label. Il serait cependant nécessaire de pousser cette comparaison pour inclure le coût de rang (ranking loss), potentiellement plus favorable à notre méthode basée sur l'identification d'un ordonnancement entre étiquettes.

Tableau 4 – Résultats sur le jeu de données emotions.

Approche	C.H.	Rang	Prec	Rang
BR	0.188	1	0.551	4
LP	0.215	5	0.56	3
RAkEL	0.198	4	0.577	2
E-RAkEL	0.235	6	0.519	6
CC	0.197	3	0.584	1
MC	0.1914	2	0.5404	5

Tableau 5 – Résultats sur le jeu de données scene.

Approche	C.H.	Rang	Prec	Rang
BR	0.094	1	0.643	5
LP	0.097	3	0.713	1
RAkEL	0.095	2	0.694	3
E-RAkEL	0.129	6	0.611	6
CC	0.100	4	0.701	2
MC	0.101	5	0.6469	4

Tableau 6 – Résultats sur le jeu de données yeast.

Approche	C.H.	Rang	Prec	Rang
BR	0.193	1	0.522	2
LP	0.213	4	0.523	1
RAkEL	0.208	3	0.493	5
CC	0.213	4	0.521	3
MC	0.1974	2	0.5157	4

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle méthode pour la classification multi-label. L'approche proposée utilise la technique de transformation d'un problème de classification multi-label en un problème d'ordonnement. Ce dernier est résolu par la méthode de préférence par paires. Les sorties des classificateurs binaires sont représentées par des fonctions de croyance. Nous utilisons la combinaison conjonctive et les commonalités pour aboutir à l'ordonnement optimal (*méthode de maximum de plausibilité*). La méthode développée a été testée sur des jeux de données classiques. Les résultats obtenus montrent que la méthode est compétitive par rapport à d'autres méthodes de classification multi-label.

Dans le futur, nous envisageons d'étendre l'approche d'ordonnement d'étiquettes par fonctions de croyance à la prédiction d'ordres partiels et de l'appliquer en particulier à la classification multi-label. En effet, les fonctions de croyance sont bien adaptées au problème de prédictions partielles, et pourrait être avantageuses dans le cas où de telles prédictions font sens. Dans les autres cas (prédictions complètes), notre approche apparaît comme coûteuse par rapport aux gains de précisions obtenus.

Références

- [1] T. Denoeux. A k-nearest neighbor classification rule based on Dempster-Shafer theory. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 25(5), 804-813, May 1995.
- [2] J. Fürnkranz, E. Hüllermeier. Preference Learning and Ranking by Pairwise Comparison. *Preference Learning*, Springer, 2011.
- [3] J. Fürnkranz, E. Hüllermeier, E.L. Mencia, K. Brinker Multilabel Classification via Calibrated Label Ranking. In *Journal Machine Learning*, 73(2) : 133-153, 2008.
- [4] S. Kanj, F. Abdallah, T. Denoeux. La méthode RAkEL évidentielle pour la classification multi-label. *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA)*, 2012.
- [5] M.-H. Masson, L. Qiang, T. Denoeux Ordonnement d'alternatives dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance. *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA)*, 2010.
- [6] J. Read, B. Pfahringer, G. Holmes, and E. Frank. Classifier Chains for multi-label classification, *Machine Learning*, 85(3), 333-359, (2011).
- [7] A. M. Santos, A. M. P. Canuto and A. F. Neto. A Comparative Analysis of Classification Methods to Multi-Label Tasks in Different Application Domains, *International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications*, ISSN 2150-7988(3), 218-227, (2011).
- [8] G. Shafer A mathematical theory of evidence. *Princeton University Press*, Princeton, N.J., 1976.
- [9] G. Tsoumakas and I. Katakis. Multi-label classification : An overview. *International Journal of Data Warehousing and Mining*, 3(3), 1-13, July-September 2007.
- [10] G. Tsoumakas, I. Katakis, and I. Vlahavas. Random k-Labelsets for Multi-Label Classification. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 23(7), 1079– 1089, 2011.

Prédictions multilabel partielle : une première étude utilisant les KNN évidentiels

Partial multilabel prediction : a first study using evidential KNN

R. Kallel^{1,2}

S. Destercke²

B. Ben Yaghlane¹

¹ Institut Supérieur de Gestion de Tunis

² Université de Technologie de Compiègne, CNRS

Laboratoire de Recherche Opérationnelle, de Décision et de Contrôle de Processus

Laboratoire Heudiasyc, UMR CNRS 7253, BP 20529 60205 Compiègne

Résumé :

Dans ce résumé, nous nous intéressons au problème multilabel, qui se différencie de la classification classique par le fait que plusieurs étiquettes peuvent s'appliquer conjointement à une même instance. Plus particulièrement, nous nous intéressons au problème de produire non plus des prédictions complètes mais partielles, avec l'idée que ces dernières soient plus fiables. Nous proposons une première méthode ainsi que des méthodes de mesure adaptées.

Mots-clés :

Pertinence binaire, prédictions partielles, multilabel.

Abstract:

In this abstract, we are interested in the multilabel problem, where multiple labels can jointly apply to a single instance (in contrast with multi-class problems, where only one class apply to each instance). More precisely, we are interested in the issue of making partial (but more accurate) predictions, rather than complete ones.

Keywords:

Binary relevance, partial predictions, multilabel.

1 Introduction

Le problème usuel de classification consiste à associer à une instance $x \in \mathcal{X}$ une classe $\hat{\lambda}_x \in \mathcal{L} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ parmi n . Le problème de classification multilabel consiste, lui, à associer à chaque instance un sous-ensemble $\hat{Y}_x \subseteq \mathcal{L}$ d'étiquettes pertinentes (nous omettrons l'indice x par la suite). Ce type de problème survient quand plusieurs étiquettes peuvent s'appliquer à une seule instance, par exemple pour classer un film qui peut être à la fois une comédie et un drame, ou encore pour identifier un type d'image qui peut contenir à la fois une plage et une montagne.

Dans le cas multilabel, l'espace de prédiction

compte donc $2^{|\mathcal{L}|}$ éléments possibles, ce qui rend le problème beaucoup plus complexe que celui de classification usuelle. Il est donc souvent impossible, même pour un n de taille modérée (plus de 10), d'appliquer les techniques usuelles à l'espace $2^{|\mathcal{L}|}$. Pour résoudre ce problème, diverses méthodes ont été proposées [5, 2], dont la méthode de pertinence binaire [4], retenue ici. Cette méthode consiste, pour chaque étiquette λ_i , à prédire si oui ou non elle est pertinente, et à retenir comme prédiction P l'ensemble des étiquettes déclarées pertinentes.

La prédiction à réaliser étant de nature complexe, il peut être intéressant de produire des prédictions partielles mais plus fiable lorsque l'information sur certaines étiquettes manque. De telles prédictions reviennent à s'abstenir lorsque l'information manque, et l'utilisation de théories de l'incertain (comme la théorie des fonctions de croyances, utilisée ici) modélisant l'imprécision semble indiquée pour identifier les cas où cette information manque.

Les problématiques liées aux prédictions ont récemment été étudiées pour le cas d'ordonnement d'étiquettes [1]. Comme pour ce dernier, il est nécessaire dans le cas multilabel de redéfinir les fonctions de coût afin que ces dernières intègrent la notion de prédictions partielles ou imprécises. Nous proposons dans ce travail d'adapter le coût de Hamming. Les prédictions partielles sont quand à elles

produites en utilisant la méthodes des kppv évidentiels développée par Denoeux [3].

2 Méthode, mesures et résultats

Notre approche reprend l'idée de la pertinence binaire, mais nous proposons d'utiliser les kppv évidentiels de Denoeux pour réaliser les prédictions. Pour chaque label λ_i , le prédicteur produira une fonction de croyance (fdc)¹ binaire sur l'espace $\{0, 1\}$, qui permet de prédire l'ensemble \hat{Y} des labels pertinents, des labels non-pertinents \hat{N} et des labels \hat{I} pour lesquels on s'abstient de prédire :

- $\lambda_i \in \hat{Y}$ si $Bel(\{1\}) = m(\{1\}) > 0.5$,
- $\lambda_i \in \hat{N}$ si $Bel(\{0\}) = m(\{0\}) > 0.5$,
- $\lambda_i \in \hat{I}$ sinon.

En d'autres terme, plus notre ignorance ($m(\{0, 1\})$) est grande, plus la prédiction est partielle. Dans les KNN évidentiels, cette ignorance peut être directement contrôlée par le paramètre α , modélisant la fiabilité par défaut des informations. Pour mesurer la qualité de prédictions incomplètes, nous proposons [1] de diviser le score en deux aspects : le nombre moyen de prédictions erronées (H) mesurant la justesse et la complétude (C) mesurant la précision. Etant donné une prédiction partielle divisée en étiquettes pertinentes (\hat{Y}), inconnues (\hat{I}) et non-pertinentes ($\hat{N} = \hat{Y} \cup \hat{I}$), ces dernières sont calculées comme

$$H = (|\hat{Y} \cap \bar{Y}| + |\hat{N} \cap Y|) / (n - |\hat{I}|),$$

$$C = 1 - |\hat{I}| / n.$$

Quand la prédiction est complète ($\hat{I} = \emptyset$), alors H est le coût de Hamming. Les figures 1 et 2 montrent l'évolution des divers critères (la seconde figure comportant en plus les coûts de Hamming maximaux et minimaux) pour le jeu de données émotions (72 attributs, 6 labels, 593 données divisées en apprentissage/test).

Le comportement est bien celui attendu, c'est-à-dire que le nombre de prédictions erronées

1. Une fdc Bel est définie par une fonction de masse $m : 2^{\{0,1\}} \rightarrow 1$ avec $\sum m(E) = 1$ et $m(\emptyset) = 0$ comme suit : $Bel(A) = \sum_{E \subseteq A} m(E)$

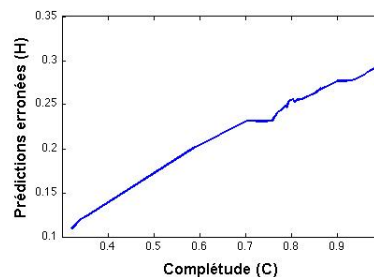


Figure 1 – Evolution prédictions erronées et complétude

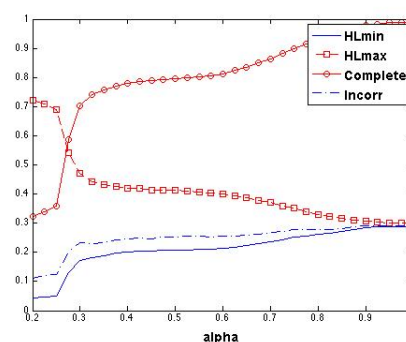


Figure 2 – Evolution avec α des différentes mesures

tend à diminuer au fur-et-à-mesure que les prédictions deviennent plus partielles (i.e., que nous sommes plus prudents dans nos prédictions).

Références

- [1] W. Cheng, M. Rademaker, B. De Baets, and E. Hüllermeier. Predicting partial orders : Ranking with abstention. In *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, pages 215–230. Springer, 2010.
- [2] K. Dembczynski, W. Waegeman, W. Cheng, and E. Hüllermeier. On label dependence and loss minimization in multi-label classification. *Machine Learning*, 88(1-2) :5–45, 2012.
- [3] T. Denoeux. A k-nearest neighbor classification rule based on dempster-shafer theory. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 25(5) :804–813, 1995.
- [4] G. Tsoumakas, A. Dimou, E. Spyromitros, V. Mezaris, I. Kompatsiaris, and I. Vlahavas. Correlation-based pruning of stacked binary relevance models for multi-label learning. In *Proceeding of ECML/PKDD 2009 Workshop on Learning from Multi-Label Data, Bled, Slovenia*, pages 101–116, 2009.
- [5] G. Tsoumakas and I. Katakis. Multi-label classification : An overview. *International Journal of Data Warehousing and Mining (IJDWM)*, 3(3) :1–13, 2007.

Optimisation de la paramétrisation pour la reconnaissance floue des signaux de parole

Optimization of features parameters for fuzzy speech recognition

I. Ben Fredj

K. Ouni

Unité de Recherche Systèmes Mécatroniques et Signaux

Ecole Supérieure de Technologie et d'Informatique (ESTI), Université de Carthage

Tunis, Tunisie

ines_benfredj@yahoo.fr

kais.ouni@esti.rnu.tn

Résumé :

Nous présentons une méthode de reconnaissance phonémique de la base Timit en utilisant la logique floue. Elle consiste en l'extraction de vecteurs de référence flous : le vecteur maximal, le vecteur moyen et le vecteur minimal. Pour classer un phonème donné, nous calculons son degré d'appartenance à toutes les classes des phonèmes, et nous choisissons par la suite le plus haut degré d'appartenance. Nous évaluons cette méthode avec différentes techniques de paramétrisation du signal de parole telles que les coefficients Mel Cepstre (MFCC), les coefficients de prédiction linéaire cepstraux (LPCC) et la méthode de prédiction linéaire perceptuelle (PLP). Nous avons introduit les dérivées premières et secondes ainsi que l'énergie de signal afin de modéliser ses caractéristiques transitoires pouvant contribuer à l'amélioration de la tâche de reconnaissance. Les taux de reconnaissance retenus sont 83.47%, 82.09% et 99.48% respectivement pour 36 MFCC, 11 LPC and 11 PLP.

Mots-clés :

Logique floue, LPC, MFCC, PLP, Timit.

Abstract :

We provide a phoneme recognition technique of Timit corpus based on the concept of fuzzy logic. The fuzzy method consists on the extraction of a three fuzzy reference vectors : maximal, mean and minimal vectors. To classify a phoneme request, we calculate his degree of membership to all classes. The class of a phoneme request is then the one which maximizes one degree of membership calculated according to reference vectors. We also compare the performance of our recognizer using different speech parameterization techniques such as MFCC, LPC and PLP. We extracted temporal dynamic of the signal to improve recognition task. So, we introduced first and second derivatives and energy. Our experimental results indicate that the classifier behaves differently depending on the number of samples. Fuzzy logic gave a considerable matter since

retained recognition rates were 83.47%, 82.09% and 99.48% respectively for 36 MFCC, 11 LPC and 11 PLP.

Keywords :

Fuzzy logic, LPC, MFCC, PLP, Timit.

1 Introduction

La reconnaissance automatique de la parole comporte deux processus [1] [2] : le premier est la paramétrisation de signal qui consiste à représenter le signal de parole par un jeu de paramètres réduit, pertinent et robuste pour réduire le flux d'informations à traiter par le moteur de reconnaissance. La paramétrisation est généralement suivie par le processus de reconnaissance [3]. Un tel processus nécessite l'utilisation extensive des techniques d'intelligence artificielle. Ces techniques, telles que la logique floue, visent à résoudre les problèmes de la modélisation de données et de classification.

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle technique de reconnaissance phonémique de la base Timit basée sur la logique floue [4]. Elle consiste en l'extraction de vecteurs de référence flous utilisés ensuite pour calculer le degré d'appartenance d'un phonème donné à toutes les classes définies des phonèmes. Le classifieur a été évalué avec différentes techniques de paramétrisation de signal tel que MFCC [5], LPC [6] et PLP [7]. Le but principal est de déterminer le nombre optimal des paramètres de signal générant les taux de reconnaissance les plus significatifs.

Dans la section suivante, nous proposons un aperçu général des techniques de paramétrisation de signal utilisées. Par la suite, nous définissons le concept de la logique floue qui sera suivi par l'approche de reconnaissance. Ensuite, nous discutons les résultats expérimentaux et nous finissons avec les conclusions et quelques perspectives.

2 Techniques de paramétrisation

2.1 MFCC

Le codage MFCC (Mel Frequency Cepstral Coding) est une technique très utilisée en traitement de la parole.

Il est basé sur la variation des bandes critiques de l'oreille humaine avec la fréquence, les filtres espacés linéairement aux basses fréquences et logarithmiquement à hautes fréquences [5]. Ces filtres sont modélisés par une échelle non-linéaire issue de connaissances sur la perception humaine : l'échelle Mel.

Pour les MFCCs, on utilise la fenêtre de Hamming durant la transformation du domaine temporel au domaine fréquentiel. Cette transformation est faite en utilisant la transformée de Fourier.

Un filtrage, est appliqué ensuite, par banc de filtres triangulaires espacés selon l'échelle de Mel. Cette échelle reproduit la sélectivité de l'oreille qui diminue avec l'accroissement de la fréquence.

Après le calcul de log, une transformée en cosinus discrète est appliquée pour assurer un retour au domaine temporel.

Figure 1 illustre l'algorithme de calcul des coefficients MFCC.

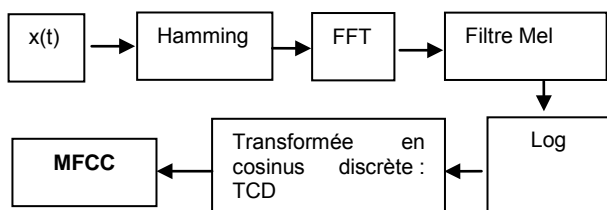


Figure 1 – Algorithme de calcul des coefficients MFCC

2.2 LPCC

Les coefficients LPC cepstraux peuvent être calculés à partir de l'analyse LPC du signal [6] par une procédure récursive. Autrement dit, ce sont les coefficients LPC convertis en cepstres.

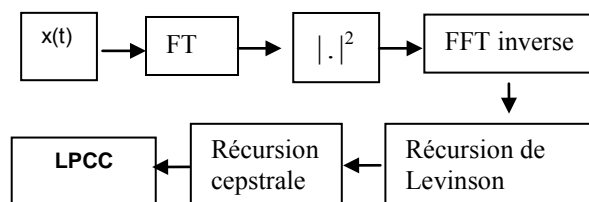


Figure 2 – Algorithme de calcul des coefficients LPC

L'analyse LPC est illustrée dans [6].

2.3 PLP

La méthode de prédiction linéaire perceptive (PLP), étudiée par Hermansky en 1991 [7], essaye de simuler le système auditif humain en introduisant des mécanismes psycho-acoustiques de l'oreille humaine. Elle repose sur l'analyse LPC;

En effet, la PLP modélise un spectre auditif par un modèle tout pôle d'ordre réduit en utilisant la technique d'auto-corrélation de la prédiction linéaire.

La PLP consiste en un filtrage en bandes critiques du spectre de signal à court terme suivi d'une correction de l'intensité. L'amplitude du signal est alors compressée et enfin l'analyse par prédiction linéaire intervient. Cette dernière étape est en réalité une technique de compression spectrale qui modifie le spectre (ensemble de fréquences constituant un signal) de puissance à court terme avant son approximation par un modèle autorégressif.

L'algorithme de PLP est détaillé ci-contre :

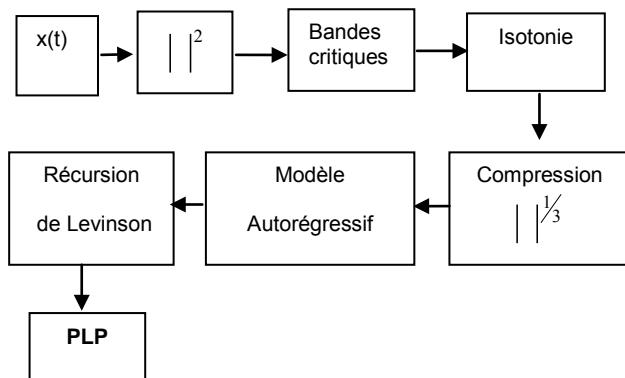


Figure 3 – Algorithme de calcul des coefficients PLP

3 HMM : méthode classique de reconnaissance de la parole

Les systèmes de reconnaissance de la parole sont généralement basés les modèles de Markov cachés : HMM.

Les HMM sont des modèles statistiques riches en structure mathématiques dont la sortie est une séquence de symboles ou de quantités [16]. Ils sont largement utilisés dans la reconnaissance de la parole étant donné leur puissante adaptation à la variabilité des observations. De plus, leur apprentissage automatique des données vocales a amélioré leurs performances de reconnaissance. D'autres parts, la formulation probabiliste offerte par les HMM fournit un cadre unifié pour les hypothèses de notation et les combinaisons des sources de connaissances.

Cependant, les HMM présentent deux limitations majeures: Tout d'abord, l'hypothèse de Markov d'indépendance conditionnelle (étant donné qu'un état ne dépend que de l'état précédent). Deuxièmement, les HMM sont bien définis uniquement pour les processus qui sont une fonction d'une seule variable indépendante, comme le temps ou la position unidimensionnelle.

Concernant la première limitation, théoriquement il est possible de définir un HMM dans lequel la dépendance peut s'étendre aux états et aux sorties précédentes. Néanmoins, de telles extensions compliquent les modèles définis et peuvent impliquer

rapidement à une énorme complexité de calcul. Au même temps, beaucoup de travail reste à faire sur l'amélioration et l'utilisation des modèles déjà existants.

En outre, La deuxième limitation est fondamentale. Il semble impossible de définir un HMM dépendant de plus qu'une seule variable indépendante. Par conséquent, pour des problèmes tels que la reconnaissance vocale où le signal est naturellement est une fonction de deux variables, les chercheurs ont dû élaborer des méthodes de conversion des problèmes de deux dimensions en un problème d'une seule dimension avant d'utiliser les HMM comme solution.

Finalement et en dépit de cette contrainte, les HMM ont enrichi l'état de l'art dans le domaine de la reconnaissance vocale et se sont répandus progressivement à d'autres domaines comme la reconnaissance des formes électro-encéphalographique EEG, la reconnaissance des caractères, le domaine musical et d'autres [17].

Dans nos travaux de recherche, pour remédier aux problèmes présentés par les HMM, nous avons essayé d'implémenter une nouvelle approche de reconnaissance phonémique fondée sur la logique floue. L'algorithme flou utilisé a été testé dans la classification des objets 3D, et a donné de résultats remarquables [11].

4 Approche de reconnaissance proposée

4.1 Base de données

La base TIMIT [10] est utilisée pour la classification et la reconnaissance. Elle est composée par 630 locuteurs de 8 dialectes différents des États-Unis. Chaque locuteur prononçant 10 phrases ce qui donne 6300 phrases.

Le tableau 1 décrit la structure du corpus Timit.

Tableau 1 –Corpus Timit

Dialecte	Désignation	Locuteurs	
		H	F
DR1	New England	31	18
DR2	Northern	71	31
DR3	North Midland	79	23
DR4	South Midland	69	31
DR5	Southern	62	36
DR6	New York City	30	16
DR7	Western	74	26
DR8	Army Brat	22	11

H : Hommes

F : Femmes

Nous avons organisé le corpus Timit en sept classes homogènes de phonèmes représentant les affriquées, les fricatives, les nasales, les semi-voyelles, les occlusives, les voyelles et les autres comme l'illustre tableau 2.

Tableau 2 –Distribution des classes de phonèmes de Timit

Classe (ou macro-classes)	Etiquette
Affriquées	/jh/ /ch/
Fricatives	/s/ /sh/ /z/ /zh/ /f/ /th/ /v/ /dh/
Nasales	/m/ /n/ /ng/ /em/ /en/ /eng/ /nx/
Semi-voyelles	/l/ /r/ /w/ /y/ /hh/ /hv/ /el/
Occlusives	/b/ /d/ /g/ /p/ /t/ /k/ /dx/ /q/ /bcl/ /dcl/ /gcl/ /pcl/ /tcl/ /kcl/
Voyelles	/iy/ /ih/ /eh/ /ey/ /ae/ /aa/ /aw/ /ay/ /ah/ /ao/ /oy/ /ow/ /uh/ /uw/ /ux/ /er/ /ax/ /ix/ /axr/ /ax-h/
Autres	/pau/ /epi/ /h#/ /1/ /2/

De plus, la base Timit est divisée en données d'apprentissage et de reconnaissance. Le nombre des échantillons de ces données sera présenté par la suite avec les résultats.

Nous appliquons MFCC, LPC et PLP. Chaque phonème est représenté par un vecteur de 12 coefficients qui caractérisent les trois fenêtres du milieu. La fenêtre d'analyse est de 256 échantillons extraits chaque 10 ms en utilisant le fenêtrage de Hamming de 25 ms. La fréquence d'échantillonnage est égale à 16000 KHz.

4.2 Algorithme flou

L'algorithme de reconnaissance floue adopté repose sur l'extraction des vecteurs : minimal, moyen et maximal relatifs à chaque classe de phonèmes [11].

Le même algorithme est utilisé pour la classification et la reconnaissance.

Après l'extraction des paramètres MFCC, LPC et PLP, nous obtenons pour chaque phonème une matrice de coefficients. Nous répartissons tous les phonèmes selon la distribution décrite dans tableau 2 et nous commençons par la classification comme suit :

Soit v_{max} , v_{moy} et v_{min} le vecteur maximal, le vecteur minimal et le vecteur moyen d'une classe «c» ;

Le degré d'appartenance $D_{r,c}$ d'un vecteur « V_r » à la classe «c» est donné par :

$$D_{r,c} = \frac{v_{max} - v_{moy}}{V_r - v_{moy}} \quad \text{si} \quad v_{moy} \leq V_r \leq v_{max}$$

$$D_{r,c} = \frac{V_r - v_{min}}{v_{moy} - V_r} \quad \text{si} \quad v_{min} \leq V_r \leq v_{moy} \quad (1)$$

$$D_{r,c} = 0 \quad \text{sinon}$$

En effet, la comparaison entre le vecteur « V_r » et les vecteurs de références v_{max} , v_{moy} et v_{min} est une comparaison des normes de chacun de ces vecteurs. Donc, l'expression « $v_{moy} \leq V_r \leq v_{max}$ » désigne

$$\ll \text{norme}(v_{moy}) \leq \text{norme}(V_r) \leq \text{norme}(v_{max}) \gg.$$

Ainsi, nous obtenons pour chaque échantillon un degré d'appartenance relatif à chaque classe. Nous choisissons la classe relative au plus haut degré d'appartenance.

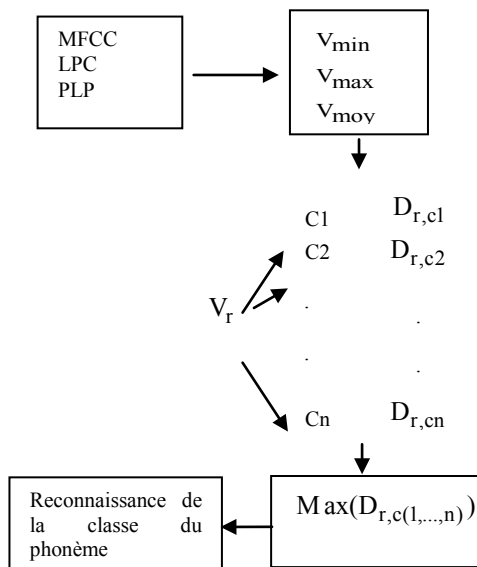


Figure 4 – Algorithme de classification floue

Notons que la classification d'un phonème en entrée signifie son identification par rapport aux macros classes ; Par exemple, pour classer le phonème /aa/, il suffit d'affirmer que c'est une voyelle. Ceci est établi si son degré d'appartenance à la classe des voyelles et supérieur aux degrés d'appartenance des autres classes. Ce phonème sera attribué à la classe du plus haut degré d'appartenance. Le même raisonnement est suivi dans l'approche de reconnaissance.

Pour développer les différentes techniques de paramétrisation utilisées (MFCC, LPC et PLP), nous avons utilisé l'implémentation de Dan Elis décrite dans [12].

De plus, la simulation du classifieur a été effectuée sous l'environnement Matlab.

5 Résultats expérimentaux

Dans nos expériences, l'objectif principal était de déterminer le nombre optimal des coefficients qui offrent les meilleurs taux de reconnaissance.

Pour cette raison, un certain nombre d'expériences ont été effectuées dans

lesquelles les coefficients dynamiques (dérivées premières et secondes) ainsi que l'énergie du signal ont été introduits avec les coefficients statiques des MFCC, LPC et PLP. Les résultats préliminaires ont montré que les dérivées premières et secondes n'ont été avantageuses que pour MFCC. Bien que cette amélioration a confirmé que l'augmentation du nombre de caractéristiques améliore significativement les performances du système de reconnaissance (en notant que les meilleurs taux ont été obtenus avec 36 coefficients) ; Cette conclusion a été confirmée strictement pour MFCC. Comme ce n'était pas le cas pour les LPC et PLP, nous avons cherché à déterminer le nombre optimal de coefficients pour ces paramètres pour obtenir de meilleurs résultats. Certains récents travaux confirment qu'un nombre réduit de LPC et PLP peut entraîner meilleure représentation de signal de parole [13] [15]. De ce fait, plusieurs expériences ont été établies dans ce sens. Nous avons varié le nombre des coefficients à partir de 5 coefficients cepstraux + énergie jusqu'à 13 coefficients cepstraux + énergie. Les résultats retenus ont été obtenus par 11 coefficients cepstraux + énergie comme l'illustrent les tableaux 3 et 4.

Tableau 3 –Taux de classification

Dialecte	Nombre des échantillons	MFCC (%)	LPC (%)	PLP (%)
DR1	40084	96.87	86.62	99.14
DR2	81343	97.01	77.02	99.38
DR3	80686	97.12	84.05	99.45
DR4	73092	96.16	83.23	99.60
DR5	75978	96.85	83.94	99.56
DR6	37263	98.93	82.30	99.19
DR7	82419	98.81	80.73	99.38
DR8	23105	97.08	86.48	99.68
Taux moyen	493970	97.32	82.39	99.43

Tableau 4 –Taux de reconnaissance

Dialecte	Nombre des échantillons	MFCC (%)	LPC (%)	PLP (%)
DR1	11598	73.09	84.37	99.57
DR2	27884	86.66	71.43	99.44
DR3	27519	85.61	86.11	99.30
DR4	34119	81.90	95.88	99.42
DR5	29719	82.96	74.91	99.64
DR6	11680	89.73	72.32	99.66
DR7	25254	81.53	82.59	99.52
DR8	11766	84.93	82.49	99.39
Taux moyen	179539	83.47	82.09	99.48

Nous remarquons que les taux d'erreur les plus faibles pour la classification et la reconnaissance ont été obtenus pour 11 PLP suivis par les 36 MFCC et ensuite par les 11 LPC. Une observation intéressante est que les taux de classification et de reconnaissance sont comparables ce qui indique une souplesse certaine du système de reconnaissance.

En outre, les meilleurs résultats ont été obtenus pour PLP et MFCC indépendamment du nombre de coefficients. De plus, nous pouvons déduire le bénéfice sûr et évident de l'intégration du coefficient d'énergie.

Nous pouvons noter également que les résultats varient d'un dialecte à un autre ce qui ouvre un important sujet de recherche pour étudier la cause de cette différence et d'évaluer chaque dialecte séparément.

6 Conclusions

Un nouveau système de reconnaissance de phonèmes basé sur la logique floue a été examiné dans ce travail. Des techniques classiques de paramétrisation de signal de parole ont été utilisées telles que MFCC, LPC et PLP.

Une étude comparative a été opérée pour déterminer le nombre adéquat des paramètres pour chaque technique utilisée.

Les résultats illustrent que les coefficients MFCC et PLP ont été les plus adéquats pour la classification et la reconnaissance floue présentées.

Cette étude préliminaire montre que notre méthode est une approche prometteuse pour la construction d'un moteur de reconnaissance phonémique. D'autres travaux se concentreront sur l'évaluation de cette reconnaissance floue dans un environnement bruité comme la base Aurora.

Références

- [1] M.A. Anusuya, S. Katti. Front end analysis of speech recognition : a review. *International Journal of Speech Technology*, 99–145, 2011.
- [2] B.H. Juang, L.R. Rabiner. Automatic speech recognition - A brief history of the technology development. *Elsevier Encyclopedia of Language and Linguistics*, 2005.
- [3] I. Mporas, T. Ganchev, Mihalis, M. Siafarikas, N. Fakotakis. Comparison of Speech Features on the Speech Recognition Task. *Journal of Computer Science*, 608-616, 2007.
- [4] I.B. Fredj, K. Ouni. Study of speech analysis techniques for the phonemes classification using fuzzy logic. *8th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD11)*, 1-5, 2011.
- [5] B.T. Meyer, B. Kollmeier. Complementarity of MFCC, PLP and Gabor features in the presence of speech-intrinsic variabilities. *Interspeech*, 2009.
- [6] Thiang. S.Wijoyo. Speech Recognition Using Linear Predictive Coding and Artificial Neural Network for Controlling Movement of Mobile Robot. *International Conference on Information and Electronics Engineering*, 179-183, 2011.
- [7] H. Hermansky. Perceptual linear predictive (PLP) analysis of speech. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1738-1752 (1990).
- [8] L. A. Zadeh. Fuzzy logic, neural networks, and soft computing. *ACM'94*, 77-84, 1994.
- [9] A.I. Pérez-Neira, M.A. Lagunas, A. Morell, J. Bas. Neuro-fuzzy Logic in Signal Processing for Communications : From Bits to Protocols. *NOLISP*, 10-36, 2005.
- [10] Linguistic Data Consortium, University of Pennsylvania, http://www ldc.upenn.edu/Catalog/readme_files/tim it readme.html
- [11] A. Sadiq, R.O.H. Thami, M. Daoudi, J.P. Vandeborre. Classification des Objets 3D Basée sur la Logique Floue. *Compression et Représentation des Signaux Audiovisuels (CORESA'2004)*, 2004.

- [12] D.P.W. Ellis. PLP and RASTA (and MFCC, and inversion) in Matlab using melfcc.m and invmelfcc.m, <http://www.ee.columbia.edu/~dpwe/resources/matlab/rastamat/>
- [13] M.A. Anusuya, S.K. Katti. Comparison of Different Speech Feature Extraction Techniques with and without Wavelet Transform to Kannada Speech Recognition. *International Journal of Computer Applications*, 19-24, 2011.
- [14] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965.
- [15] Prasad, K. Ravi, A.N. Mishra, S.N. Sharan. Text Dependant Speaker Identification Using VQ and DTW. *VSRD-IJEECE*, 453-459, 2011.
- [16] I.B. Fredj, K. Ouni. Optimization of Features Parameters for HMM Phoneme Recognition of TIMIT Corpus. *Engineering and Technology*, 90-94, 2013.
- [17] B. Askazad. Hidden Markov Model. University of Engineering and Technology Lahore Pakistan, 2001.

Traitement de l'incertitude à l'aide des relations de préférence dans une méthode de décision multicritères

Handling uncertainty using preference relations in a multi-criteria decision making method

A. Ennaceur¹

Z. Elouedi¹

E. Lefevre³

¹ LARODEC, University of Tunis, Institut Supérieur de Gestion, Tunisia

² LGI2A, Univ. Lille Nord of France, UArtois EA 3926, France

amel_naceur@yahoo.fr

zied.elouedi@gmx.fr

eric.lefevre@univ-artois.fr

Résumé :

Cet article propose une méthode d'aide à la décision multicritères dans un environnement incertain, où l'incertitude est représentée à l'aide de la théorie des fonctions de croyance. Dans ce cadre, nous présentons une nouvelle méthodologie qui introduit l'imperfection au niveau des préférences de l'expert.

Afin d'évaluer l'importance des critères et de déterminer les priorités des alternatives, notre approche suggère d'utiliser les relations de préférence binaires pour éliciter les jugements du décideur. Pour ce faire, l'analyse multicritères hiérarchique (AHP) basée sur les fonctions de croyance qualitatives est développée pour obtenir une représentation numérique adéquate.

Mots-clés :

Analyse multicritères hiérarchique (AHP), Théorie des fonctions de croyance, Evaluations imparfaites, pondération des critères

Abstract:

This paper proposes a multi-criteria decision making method in an uncertain environment, where the uncertainty is represented using the belief function framework. Indeed, we suggest a novel methodology that tackles the challenge of introducing uncertainty in expert opinions.

In order to judge the criteria weights and the alternatives priorities, our proposed approach suggests to use preference relations to elicitate the decision maker assessments. Therefore, the Analytic Hierarchy Process with qualitative belief function framework is developed to get adequate numeric representation.

Keywords:

Analytic Hierarchy Process, Belief function theory, Imperfect assessments, Criteria weights

1 Introduction

L'aide à la décision multicritères a été largement utilisée pour modéliser des problèmes

de décision de différentes disciplines. Elle s'impose de plus en plus comme étant l'un des cadres les plus réalistes pour formuler et résoudre des problèmes de décision.

Pour ce faire, plusieurs méthodes ont été proposées [1]. Leur principal objectif est de choisir une ou plusieurs alternatives ou de procéder au classement de celles-ci sur la base d'un certain nombre de critères de différentes natures [1]. Ainsi, deux approches d'agrégation sont identifiées. D'un côté, l'approche de surclassement introduite par Roy, où certaines méthodes comme Electre et Promethee sont développées [2]. De l'autre côté, une première méthode basée sur la théorie de l'utilité a été proposée par Keeney et Raiffa [3]. Principe qui a été ensuite repris dans un certain nombre de méthodes [4].

Cependant, il est à noter que ces approches reposent sur un cadre certain. Elles ne permettent pas de prendre en compte les différentes formes d'imperfection (imprécision et incertitude) des informations. En effet, ces incertitudes peuvent provenir de données mal connues, non fiables, ou encore de paramètres non mesurables qui doivent être exprimés par un expert. Dans ce cadre, il est nécessaire d'étendre l'aide à la décision multicritères au contexte incertain et de développer des méthodes capables de gérer

ces imperfections au niveau des critères mais également au niveau des alternatives.

Par conséquent, des travaux reposant sur des cadres plus généraux sont développés en combinant des modèles standards avec des théories de l'incertain telles que : la théorie des probabilités, la théorie des ensembles flous [5], [6], la théorie des fonctions de croyance. Les premiers articles, liant cette dernière et la méthode d'analyse multicritères hiérarchique (AHP), par exemple, remontent aux travaux de Beynon et al. [5]. Cette méthode a été par la suite affinée et étendue dans de nombreux travaux [7] [8], etc.

La méthode AHP possède deux avantages majeurs par rapport aux approches existantes. Tout d'abord, elle apporte une procédure qui permet de traduire les préférences du décideur en poids, en utilisant une échelle prédéfinie. Elle introduit aussi une démarche claire, qui doit permettre d'éviter les incohérences lors de la définition des poids des critères et des priorités des alternatives.

En dépit de ses avantages, le processus AHP peut avoir quelques défauts. En effet, le choix de l'échelle de préférence est primordial et influence grandement le résultat final. Cependant, elle ne permet pas de représenter des incertitudes liées aux préférences des experts. Par exemple, la phase de construction des critères est une étape délicate qui nécessite une compréhension du problème posé et une interaction avec les acteurs impliqués dans la prise de décision. L'expert doit donc fournir ses préférences à partir d'une certaine expérience et ses jugements peuvent être incertains, imprécis ou même incomplets.

Ainsi, une nouvelle méthode permettant de prendre en compte des données incertaines dans un cadre multicritères est proposée. Cette méthode est alors fondée sur la méthode AHP et la théorie des fonctions de croyance. Contrairement aux approches précédentes où les comparaisons sont données par une échelle prédéfinie

de valeur, nous allons essayer de modéliser cette évaluation par des relations de préférence binaires. En outre, on suppose également que l'importance des critères et la priorité des alternatives peuvent être exprimées au moyen d'une fonction de masse de croyance afin de mieux représenter ces imperfections. Notre proposition permet alors de transformer les préférences obtenues à partir des jugements d'un expert, en une valeur numérique avec certaines valeurs de pondération, et ce, dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance.

Notre article est organisé de la manière suivante. Dans le paragraphe 2, les concepts de base dont nous avons besoin sur les fonctions de croyance sont rappelés. Dans le paragraphe 3, la méthode de fonction de croyance qualitative exploitée dans cet article est exposée. Le paragraphe 4 propose une méthode multicritères dans un cadre incertain. Cette méthode est détaillée et illustrée par un exemple. Enfin, le paragraphe 5 conclut et ouvre une discussion sur ce travail.

2 La théorie des fonctions de croyances

2.1 Notions de base

Soit Θ , appelé cadre de discernement ou univers, un ensemble fini de propositions ou d'hypothèses exhaustives et exclusives. Une fonction de masse de croyance sur Θ est une application $m : 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ telle que [10] :

$$\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1. \quad (1)$$

La fonction de masse m représente la part de croyance attribuée à A sans que celle-ci puisse être répartie sur les propositions qui la composent. Un ensemble A tel que $m(A) > 0$ est appelé élément focal. Soit $\mathcal{F}(m) \subseteq 2^\Theta$ l'ensemble des éléments focaux.

La fonction de croyance associée à une fonction de masse m est définie par :

$$bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B) \text{ et } bel(\emptyset) = 0. \quad (2)$$

La quantité $bel(A)$ représente le degré de croyance en A . Elle mesure à quel point les informations données par une source soutiennent la proposition A .

2.2 Combinaison

Deux fonctions de masse m_1 et m_2 issues de deux sources d'information fiables et distinctes peuvent être combinées en utilisant la règle de combinaison conjonctive définie par [9] :

$$(m_1 \odot m_2)(A) = \sum_{B, C \subseteq \Theta, B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Theta. \quad (3)$$

2.3 Affaiblissement

Un doute sur la fiabilité d'une source ayant fourni une information m est parfois possible. L'opération d'affaiblissement [11] de m par une constante $\alpha \in [0, 1]$, appelée taux d'affaiblissement, permet de prendre en compte cette métaconnaissance sur l'information m . Cette opération de correction de m est définie par :

$$m^\alpha(A) = (1 - \alpha)m(A), \quad \forall A \subseteq \Theta, \quad (4)$$

$$m^\alpha(\Theta) = \alpha + (1 - \alpha)m(\Theta). \quad (5)$$

2.4 Les mesures d'incertitude

Les mesures d'incertitude relatives à un événement caractérisent la nature de l'information, celle-ci pouvant être imprécise ou incertaine. De nombreux travaux ont été réalisés sur ces mesures. Ces travaux ont abouti à la définition de plusieurs mesures. Dans cet article, nous nous focalisons sur la mesure composée H [12] définie par :

$$H(m) = \sum_{A \in \mathcal{F}(m)} m(A) \log_2 \left(\frac{|A|}{m(A)} \right). \quad (6)$$

Cette fonction présente l'avantage qu'elle a un maximum unique.

2.5 Niveau décisionnel

Lorsqu'une décision doit être prise, la fonction de croyance éventuellement obtenue doit donc être transformée en une mesure de probabilité. Une solution consiste à utiliser la transformation pignistique en calculant la probabilité pignistique définie par [13] :

$$BetP(A) = \sum_{B \subseteq \Theta} \frac{|A \cap B|}{|B|} \frac{m(B)}{(1 - m(\emptyset))}, \quad \forall A \in \Theta. \quad (7)$$

3 Méthode de fonction de croyance qualitative

Le problème de l'élicitation des opinions des experts dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance a été abordé par de nombreux travaux [14] [15] [17].

Dans cet article, nous utilisons l'approche de Ben Yaghlane et al. [14]. Cette méthode a été choisie car elle gère le problème d'incohérence dans les comparaisons par paires. Aussi, l'originalité de ce modèle est sa capacité de générer des informations quantitatives à partir des préférences qualitatives.

L'idée principale de la méthode est donnée comme suit.

Soient deux alternatives a et b , un expert peut exprimer laquelle des propositions est la plus susceptible d'être vraie. Ainsi, il utilise deux relations de préférence binaires : la préférence (\succ) et l'indifférence (\sim), définies respectivement par :

$$a \succ b \Leftrightarrow bel(a) - bel(b) \geq \varepsilon, \quad (8)$$

$$a \sim b \Leftrightarrow |bel(a) - bel(b)| \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Dans ces équations, ε est considéré comme le plus petit écart que l'expert peut discerner entre le degré de croyance de deux propositions a et b , sachant que ε est une constante spécifiée par l'expert avant de commencer le processus d'optimisation.

Par la suite, une technique mono-objective a été utilisée afin de résoudre ce problème d'optimisation :

$$\begin{aligned}
 & \text{Max}_m UM(m) \\
 & \text{s.t.} \\
 & \text{bel}(a) - \text{bel}(b) \geq \varepsilon \\
 & \quad (a \text{ est préféré à } b) \\
 & \text{bel}(a) - \text{bel}(b) \leq \varepsilon \\
 & \quad (a \text{ et } b \text{ sont indifférents}) \\
 & \text{bel}(a) - \text{bel}(b) \geq -\varepsilon \\
 & \quad (a \text{ et } b \text{ sont indifférents}) \\
 & \sum_{a \in \mathcal{F}(m)} m(a) = 1, m(a) \geq 0, \\
 & \forall a \subseteq \Theta; m(\emptyset) = 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

où les trois premières contraintes sont dérivées des équations précédentes. La dernière contrainte garantit que la somme des masses allouées aux éléments focaux est égale à 1 (masse normalisée). Elle impose également que les masses soient positives.

4 Méthode multicritères basée sur des évaluations qualitatives

4.1 Introduction

L'objectif principal de cette section est d'établir une méthode liant la méthode AHP avec la théorie des fonctions de croyance et de permettre de formuler un problème de décision multicritères en utilisant des relations de préférence binaires.

Un problème de décision multicritères est défini par un ensemble d'alternatives $\Theta = \{a_1, \dots, a_n\}$ et un ensemble de critères notés respectivement $\Omega = \{c_1, \dots, c_m\}$. Le paragraphe suivant donne une présentation du modèle proposé.

4.2 Définition du modèle

La méthode AHP (Analytic Hierarchy Process) a été développée par Saaty [16] [4]. Cette méthode propose de découper un

problème de décision complexe en une structure hiérarchique. Cette hiérarchisation se déroule selon plusieurs niveaux, débutant par l'objet du problème, suivi des critères et qui se termine par les différentes alternatives possibles.

Cette méthode est basée sur l'évaluation par paires, où l'ensembles des comparaisons forment des matrices de jugement. Ainsi, chaque matrice est construite à partir de comparaisons basées sur une échelle numérique de priorité avec certaines valeurs de pondérations (Tableau 1). Cette échelle traduit les préférences du décideur en valeurs numériques. Ensuite, la méthode du vecteur propre est appliquée pour déterminer l'importance de chacun des critères et des alternatives.

Tableau 1 – Echelle de mesure de Saaty

Valeur numérique	Définition
1	Importance égale
3	Importance faible
5	Importance forte
7	Importance attestée
9	Importance absolue
2,4,6,8	Valeurs intermédiaires entre deux appréciations voisines.

Par conséquent, notre modèle repose sur les mêmes caractéristiques que l'AHP standard (niveau hiérarchique, comparaison par paire) mais en considérant des relations de préférence à la place de nombres exactes.

Comme pour la méthode classique, nous commençons par construire la matrice de jugement des critères. Ainsi, pour exprimer ses préférences, le décideur donne des opinions qualitatives, à partir de ces connaissances et de ces expériences plutôt que des informations quantitatives directes. La procédure est illustrée dans le Tableau 2.

Cette matrice est alors construite à partir des relations de préférence. Dans ce tableau, P_{ij} peut être :

1. une relation preference stricte \succ : SSI

Tableau 2 – Matrice de Préférences

	c_1	c_2	...	c_m
c_1	-	P_{12}	...	P_{1m}
c_2	-	-	...	P_{2m}
...	-	-	-	...
c_m	-	-	-	-

$$(c_i \succ c_j) \wedge \neg(c_j \succ c_i)$$

2. une relation d'indifférence \sim : SSI ($c_i \succ c_j$) \wedge ($c_j \succ c_i$)

3. une relation inconnue : (-).

Une fois cette matrice construite, nous procédons comme dans le cas classique. Nous construisons tout d'abord la valeur correspondante à chaque critère c_i , ce qui correspond dans la méthode classique à la construction du vecteur propre. Ces valeurs obtenues sont une fonction de masse de croyance. En effet, notre modèle cherche à transformer les relations obtenues en valeurs numériques en utilisant les fonctions de croyance. Pour ce faire, nous avons adopté l'approche de Ben Yaghlane et al. [14] afin de convertir toutes les relations obtenues en un problème d'optimisation (Equation 10). Sa résolution, selon certaines mesures d'incertitude (UM) telle que H (Equation 6), permet la génération d'une fonction de croyance la plus incertaine et la moins informative.

Cette fonction de masse de croyance se calcule selon la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 & \text{Max}_{m^\Omega} H(m^\Omega) \\
 & \text{s.t.} \\
 & \text{bel}^\Omega(\{c_i\}) - \text{bel}^\Omega(\{c_j\}) \geq \varepsilon \\
 & \quad (c_i \text{ est préféré à } c_j) \\
 & \text{bel}^\Omega(\{c_i\}) - \text{bel}^\Omega(\{c_j\}) \leq \varepsilon \\
 & \quad (c_i \text{ et } c_j \text{ sont indifférents}) \\
 & \text{bel}^\Omega(\{c_i\}) - \text{bel}^\Omega(\{c_j\}) \geq -\varepsilon \\
 & \quad (c_i \text{ et } c_j \text{ sont indifférents}) \\
 & \sum_{c_k \in \mathcal{F}(m)} m^\Omega(\{c_k\}) = 1, m^\Omega(\{c_i\}) \geq 0, \\
 & \quad \forall c_i \in \Theta; m^\Omega(\emptyset) = 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

Sachant que la première contrainte traduit la relation de préférence et la deuxième et

troisième contraintes modélisent la relation d'indifférence. D'où, chaque paire de critères doit vérifier une de ces deux relations.

Avec cette formulation, nous supposons que le poids des critères est décrit par une fonction de masse de croyance notée m^Ω , issue de la résolution du problème d'optimisation (Equation 11).

Finalement, pour obtenir l'importance relative de chaque critère, nous proposons de transformer les probabilités pignistiques $BetP^\Omega$, issue de la fonction m , en coefficients β_i de la façon suivante :

$$\beta_i = \frac{BetP^\Omega(c_i)}{\max_k BetP^\Omega(c_k)}. \tag{12}$$

Pour les m matrices (nombre de critères) de jugement des alternatives par rapport au m critères, qui elles aussi sont représentées avec des fonctions de masse de croyance, le calcul du vecteur propre s'effectue de la même manière que pour le calcul du vecteur poids.

Maintenant, l'étape suivante consiste à intégrer la $BetP^\Omega$ relative aux critères avec celles relatives aux alternatives.

A ce niveau, notre principal problème est que la fonction de masse correspondance aux critères est définie sur un cadre de discernement Ω différent de celui des alternatives Θ . Pour résoudre ce problème, on suppose que chaque poids de critère peut-être vu comme étant une mesure d'affaiblissement. Ainsi, chaque fonction de masse de croyance relative à un ensemble d'alternatives est affaiblie par la mesure correspondante :

$$m_{c_k}^{\alpha_k}(\{a_j\}) = \beta_k \cdot m_{c_k}(\{a_j\}), \quad \forall a_j \in \Theta, \tag{13}$$

$$m_{c_k}^{\alpha_k}(\Theta) = (1 - \beta_k) + \beta_k \cdot m_{c_k}(\Theta). \tag{14}$$

où $m_{c_k}(\{a_j\})$ est la masse de croyance relative à l'alternative a_j sachant le critère c_k et β_k est le degré de fiabilité (sachant que $\alpha_k = 1 - \beta_k$).

Une fois les fonctions de masse de croyance affaiblies, il est possible de les combiner par l'intermédiaire de la combinaison conjonctive. Nous obtenons alors :

$$m_{final} = \odot m_{c_k}^{\alpha_k}, \quad k = \{1, \dots, m\}. \quad (15)$$

La dernière étape consiste alors à prendre une décision concernant la meilleure alternative. La technique la plus utilisée dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance est de retenir l'alternative ayant la plus grande probabilité pignistique (Equation 7).

4.3 Exemple

L'exemple présenté dans cet article est relatif au choix d'une voiture. Trois voitures sont candidates et il s'agit de choisir celle qui convient le mieux, en fonction de trois critères. Ce problème sera traité selon deux méthodes. D'une part, une analyse multicritères hiérarchique crédibiliste, dans laquelle les critères et les alternatives seront exprimés par des relations de préférence, et d'autre part une analyse multicritères hiérarchique standard [4].

Les résultats permettront d'évaluer l'apport de la méthode d'analyse multicritères crédibiliste proposée. Sa pertinence, d'un point de vue décisionnelle, sera également discutée.

Une étude préliminaire a identifié 3 critères possibles : $\Omega = \{\text{Confort } (c_1), \text{ Style } (c_2), \text{ Puissance } (c_3)\}$. Après avoir obtenu les réponses à l'issue d'un questionnaire, l'expert établit la matrice de comparaison donnée par le Tableau 3.

Tableau 3 – Matrice de comparaison par paires

Criteria	c_1	c_2	c_3
c_1	-	\succ	\succ
c_2	-	-	\sim
c_3	-	-	-

D'après ce tableau, nous remarquons que l'expert préfère $\{c_1\}$ à $\{c_2\}$ et aussi $\{c_1\}$ à $\{c_3\}$. Pour compléter cette matrice, l'expert doit remplir uniquement la moitié de la matrice sans quantifier la diagonale et la matrice réciproque.

Maintenant, pour appliquer la méthode établie dans ce papier, nous devons transformer les relations obtenues en un problème d'optimisation, dont la résolution permet d'obtenir les poids des différents critères. Nous considérons que $\varepsilon = 0.01$ et nous choisissons H comme mesure d'incertitude. Nous obtenons alors les contraintes suivantes :

1. $c_1 \succ c_2 \Leftrightarrow bel^\Omega(\{c_1\}) - bel^\Omega(\{c_2\}) \geq \varepsilon$
2. $c_1 \succ c_3 \Leftrightarrow bel^\Omega(\{c_1\}) - bel^\Omega(\{c_3\}) \geq \varepsilon$
3. $c_2 \sim c_3 \Leftrightarrow bel^\Omega(\{c_2\}) - bel^\Omega(\{c_3\}) \leq \varepsilon$ et $bel^\Omega(\{c_2\}) - bel^\Omega(\{c_3\}) \geq -\varepsilon$

et le modèle suivant :

$$\begin{aligned}
 Max_{m^\Omega} H(m^\Omega) = & -m^\Omega(\{c_1\}) * \log_2(1/m^\Omega(\{c_1\})) \\
 & -m^\Omega(\{c_2\}) * \log_2(1/m^\Omega(\{c_2\})) \\
 & -m^\Omega(\{c_3\}) * \log_2(1/m^\Omega(\{c_3\})) \\
 & -m^\Omega(\Omega) * \log_2(3/m^\Omega(\Omega)); \\
 & s.t. \\
 & bel^\Omega(\{c_1\}) - bel^\Omega(\{c_2\}) \geq \varepsilon \\
 & bel^\Omega(\{c_1\}) - bel^\Omega(\{c_3\}) \geq \varepsilon \\
 & bel^\Omega(\{c_2\}) - bel^\Omega(\{c_3\}) \leq \varepsilon \\
 & bel^\Omega(\{c_2\}) - bel^\Omega(\{c_3\}) \geq -\varepsilon \\
 & \sum_{c_i \in \mathcal{F}(m^\Omega)} m^\Omega(\{c_i\}) = 1, m^\Omega(\{c_i\}) \geq 0, \\
 & \forall c_i \in \Omega; m^\Omega(\emptyset) = 0,
 \end{aligned} \quad (16)$$

Finalement, les poids correspondants sont donnés dans le Tableau 4.

Tableau 4 – Pondération des critères

Criteria	c_1	c_2	c_3	Ω
m^Ω	0.238	0.208	0.208	0.346
$BetP^\Omega$	0.352	0.324	0.324	
β_k	1	0.92	0.92	

Ensuite, la même procédure est répétée pour comparer chaque alternative par apport à chaque critère.

Soit $\Theta = \{\text{Peugeot}(p), \text{Renault}(r), \text{Ford}(f)\}$ l'ensemble des alternatives. L'approche avec les relations de préférence appliquée aux alternatives donne les priorités entre alternatives présentées dans le Tableau 5.

Tableau 5 – Priorités des alternatives

Alternatives	c_1	c_2	c_3
$\{p\}$	0.336	0.3	0.207
$\{r\}$	0.18	0.1	0.304
$\{f\}$	0.242	0.195	0.039
$\{p, r, f\}$	0.242	0.405	0.45

Une fois les matrices des priorités obtenues, notre objectif est alors d'intégrer ces priorités avec le poids des critères. Nous commençons par la procédure d'affaiblissement où les valeurs de β_k sont données dans le Tableau 4. Le résultat est présenté dans le Tableau 6.

Tableau 6 – Priorités des alternatives affaiblies

Alternatives	c_1	c_2	c_3
$\{p\}$	0.336	0.276	0.1904
$\{r\}$	0.18	0.092	0.2796
$\{f\}$	0.242	0.1794	0.0358
$\{p, r, f\}$	0.242	0.4526	0.4942

L'étape suivante consiste donc à combiner les différentes masses obtenues (Tableau 7).

Tableau 7 – Fonction de masse de croyance finale

a_i	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{f\}$	\emptyset	Θ
m_{final}	0.2317	0.174	0.025	0.5153	0.054

Finalement, la probabilité pignistique (Equation 7) est utilisée afin de choisir l'alternative préférée (Tableau 8).

Afin de comparer notre modèle à une méthode classique, nous avons utilisé la méthode AHP standard pour traiter ce même problème. Les mêmes résultats ont été obtenus, comme indiqué dans le Tableau 9. Il est clair que le choix de l'alternative p est le plus approprié.

D'après les deux approches cette alternative a l'importance la plus élevée. Notre méthode

Tableau 8 – Classement des alternatives

Alternatives	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{f\}$
$BetP_{final}$	0.552	0.322	0.126

a l'avantage d'être facile à expliquer à des non spécialistes. En effet, les experts sont tenus d'exprimer leurs préférences qualitativement sans avoir besoin de se familiariser avec la méthode.

Tableau 9 – Classement des alternatives selon AHP standard

Alternatives	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{f\}$
priorités	0.609	0.217	0.174

5 Conclusion

Une méthode d'aide à la décision multicritères basée sur la théorie des fonctions de croyance a été présentée. L'idée fondamentale de cette approche est de permettre au décideur d'exprimer ses opinions en utilisant des relations de préférences binaires. Ensuite, ces relations sont traduites en valeurs numériques suivant l'approche de Ben Yaghlane et al. [14] afin d'obtenir le poids des critères et la priorité des alternatives.

Enfin, la méthode proposée est facile à comprendre et simple à utiliser. Mais, elle ne permet pas de modéliser les différentes formes d'imperfection. Ainsi, en exprimant ces préférences, l'expert peut utiliser d'autres types de relation comme la préférence faible et l'incomparabilité. Cette piste est laissée en perspective.

Références

- [1] M. Zeleny. *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill Book Company, 1982.
- [2] J.P. Brans, Ph. Vincke, B. Marechal. How to select and how to rank projects : The PROMOTEE method. *European Journal of Operational Research*, 24 : 228-238, 1986.
- [3] R.L. Keeney, H. Raiffa. *Decisions with multiple objectives : Preferences and value tradeoffs*. Cambridge University Press, 1976.
- [4] T. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New-York, 1980.

- [5] M. Beynon, B. Curry, P. Morgan. The Dempster-Shafer theory of evidence : An alternative approach to multicriteria decision modelling. *OMEGA*, 28 : 37-50, 2000.
- [6] P.J.M. Van Laarhoven, W. Pedrycz. A fuzzy extension of Saaty's priority theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 11 : 199-227, 1983.
- [7] A. Ennaceur, Z. Elouedi, E. Lefevre. Handling Partial Preferences in the Belief AHP Method : Application to Life Cycle Assessment. *Proceedings of The Twelfth International Conference on Advances in Artificial Intelligence (AI*IA)*, LNAI 6934, Springer-Verlag, pp. 396-401.
- [8] A. Ennaceur, Z. Elouedi, E. Lefevre. Reasoning under uncertainty in the AHP method using the belief function theory. *Proceedings of the International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, 2012, pp. 373-383.
- [9] Ph. Smets. The combination of evidence in the Transferable Belief Model. *IEEE Pattern analysis and Machine Intelligence*, 12 : 447-458, 1990.
- [10] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [11] Ph. Smets. Transferable Belief Model for expert judgments and reliability problems. *Reliability Engineering and System Safety*, 38 : 59-66, 1992.
- [12] N. Pal, J. Bezdek, R. Hemasinha. Uncertainty measures for evidential reasoning I : A review. *International Journal of Approximate Reasoning*, 7 : 165-183, 1992.
- [13] Ph. Smets. The Application of the Transferable Belief Model to Diagnostic Problems. *International Journal of Intelligent Systems*, 13 : 127-158, 1998.
- [14] A. Ben Yaghlane, T. Denoeux, K. Mellouli. Constructing belief functions from expert opinions. *Proceedings of the 2nd International Conference on Information and Communication Technologies : from Theory to Applications, Damascus, Syria, 2006*, pp. 75-89.
- [15] S.K.M. Wong, P.J. Lingras. Representation of Qualitative User Preference by Quantitative Belief Functions. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 6 : 72-78, 1994.
- [16] T. Saaty. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 15 : 234-281, 1977.
- [17] A. Ennaceur, Z. Elouedi, E. Lefevre. Introducing Incomparability in Modeling Qualitative Belief Functions. *Proceedings of the International Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence (MDAI)*, LNAI 7647, Springer-Verlag, Catalonia, Spain, 2012, pp. 382-393.

Sur des classes de fonctions à seuil caractérisables par des contraintes relationnelles

On classes of threshold functions characterizable by relational constraints

M. Couceiro¹

E. Lehtonen²

K. Schölzel³

¹ LAMSADE, Université Paris Dauphine

² Computer Science and Communications Research Unit, Université du Luxembourg

³ Mathematics Research Unit, Université du Luxembourg

Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France, miguel.couceiro@dauphine.fr
6, rue Richard Coudenhove-Kalergi, L-1359 Luxembourg, Luxembourg, {erkko.lehtonen,karsten.schoelzel}@uni.lu

Résumé :

Motivés par les sémantiques modales induites par des jeux de majorité, nous considérons la classe des fonctions à seuil. L. Hellerstein a montré que cette classe peut être caractérisée par des contraintes relationnelles (ou, de façon équivalente, par des équations fonctionnelles), mais aussi qu'il faut un nombre infini de ces contraintes pour la caractériser. Dans cet article, nous présentons une classification complète des classes de fonctions à seuil induites par des clones booléens, en identifiant ceux qui ont une caractérisation finie. De plus, nous présentons les ensembles des contraintes relationnelles qui caractérisent chacune de ces classes.

Mots-clés :

Fonction booléenne, fonction à seuil, clone, caractérisation, contrainte relationnelle, équation fonctionnelle.

Abstract:

Motivated by modal semantics induced by majority games, we consider the class of threshold functions. It was shown by L. Hellerstein that this class is characterizable by relational constraints (or equivalently, by functional equations), but that there is no characterization by means of finitely many constraints. In this paper, we present a complete classification of classes of threshold functions induced by Boolean clones, into whether they are characterizable by finitely many relational constraints. Moreover we provide sets of constraints characterizing each of such classes.

Keywords:

Boolean function, threshold function, clone, characterization, relational constraint, functional equation

1 Introduction and preliminaries

1.1 Introduction

Two approaches to characterize properties of Boolean functions have been considered recently: one in terms of functional equations [9], another in terms of relational constraints [19]. As it turns out, these two approaches have the same expressive power in the sense that they characterize the same properties (classes) of Boolean functions, which can be described as initial segments of the so-called “minor” relation between functions: for two functions f and g of several variables, f is said to be a minor of g if f can be obtained from g by identifying, permuting or adding inessential variables (see Subsection 1.3). Furthermore, a class is characterizable by a finite number of functional equations if and only if it is characterizable by a finite number of relational constraints.

Apart from the theoretical interest, these approaches were shown in [4] to be tightly related to frame definability within modal logic, and a complete correspondence between classes of Boolean functions and classes of Scott-Montague frames $\langle W, F \rangle$, where W is a finite set and $F: \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)$, for modal

logic was established. This correspondence is based on the natural bijection between maps $F: \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)$ and vector-valued Boolean functions $f: \mathbb{B}^{|W|} \rightarrow \mathbb{B}^{|W|}$. For basic background on modal logic see, e.g., [1].

An attractive aspect of this correspondence is that equational theories (or, equivalently, constraint theories) of classes of Boolean functions translate straightforwardly into theories of the corresponding classes of modal frames. This setting was refined to several correspondences between important classes of Boolean functions (such as clones and other noteworthy equational classes) and classes of Kripke-like structures by considering several variants to classical modal semantics.

Motivated by modal semantics based on majority games, in this paper we consider classes of threshold functions, that is, Boolean functions that have the property that the true points can be separated from the false points by a hyperplane when considered as elements of the n -dimensional real space \mathbb{R}^n . Such functions have been widely studied in the existing literature on Boolean functions, switching theory, system reliability theory, game theory, etc.; for background see, e.g., [12, 16, 17, 18, 20, 22].

This property is known to be expressible by relational constraints (or equivalently, by functional equations) but no finite set of such objects is able to capture this property (see [11]). However, by imposing additional conditions such as linearity or preservation of componentwise conjunctions or disjunctions of tuples, the resulting classes of threshold functions may become characterizable by a finite number of relational constraints. In fact, these examples can be obtained from the class of threshold functions by intersecting it with certain clones (i.e., classes of functions containing all projections and closed under functional composition), namely, those of linear functions, conjunctions and disjunctions, respectively. Another noteworthy and well-known example of such an intersection is the class of “majority games”,

which results as the intersection with the clone of self-dual monotone functions. The natural question is then: Is the class of majority games characterizable by a finite number of relational constraints?

In this paper we answer negatively to this question by determining which intersections $T \cap C$ of the class T of threshold functions with a clone C are characterizable by a finite set of relational constraints. Moreover, we provide finite or infinite characterizing sets of relational constraints accordingly. Such characterizing sets can then be used to axiomatize classes of “weighted median Kripke frames” that can account for modal semantics induced by majority games. Essentially, a *weighted median Kripke frame* is a structure $\mathbf{K} = \langle W, D \rangle$ where W is a nonempty finite set and D is a function $W^2 \rightarrow \mathbb{N}$ satisfying the condition: for each $w \in W$, the sum $\sum_{v \in W} D(w, v)$ is odd. A *weighted median Kripke model* is then a structure $\mathbf{M} = \langle \mathcal{K}, V \rangle$ where $\mathbf{K} = \langle W, D \rangle$ is a weighted median Kripke frames and V is a valuation $\Phi \rightarrow \mathcal{P}(W)$. In these models, the truth-value of propositional formulas is given as usual but the truth-value of modal formulas of the form $\Box\phi$ is given by: $\mathbf{M}, w \models \Box\phi$ if and only if

$$\sum_{v \in \|\phi\|^{\mathbf{M}}} D(w, v) \geq \frac{\sum_{v \in W} D(w, v) + 1}{2},$$

where $\|\phi\|^{\mathbf{M}} := \{v \in W : \mathbf{M}, v \models \phi\}$.

This model-theoretic approach to modal logic was considered by Virtanen in [21] where the basic modal language is used to reason about knowledge and belief. Here, Virtanen proposes a variation of epistemic logic and introduces a model-theoretic approach in which weights represent probabilities of possible events.

Given the page limit for this contribution, we will only focus on the former aspect, namely, constraint characterizations of classes of threshold functions. The latter aspect is the subject of a manuscript being prepared in collaboration

between the authors and L. Hella and J. Kivela at the University of Tampere.

The paper is organized as follows. In the remainder of this section, we recall basic notions and results that will be needed throughout the paper. The main results are presented in Section 2, namely, the classification of all intersections $C \cap T$ as well as the corresponding characterizing sets of relational constraints. The Appendix provides further background on the theory of Boolean clones.

1.2 Boolean functions

Throughout the paper, we denote the set $\{1, \dots, n\}$ by $[n]$ and the set $\{0, 1\}$ by \mathbb{B} .

We will denote tuples in \mathbb{B}^m by boldface letters and their entries with corresponding italic letters, e.g., $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$. Tuples $\mathbf{a} \in \mathbb{B}^m$ may be viewed as mappings $\mathbf{a}: [m] \rightarrow \mathbb{B}$, $i \mapsto a_i$. With this convention, given a map $\sigma: [n] \rightarrow [m]$, we can write the tuple $(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ as $\mathbf{a} \circ \sigma$, or simply $\mathbf{a}\sigma$.

A *Boolean function* is a map $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ for some positive integer n called the *arity* of f . Typical examples of Boolean functions include

- the n -ary i -th *projection* ($i \in [n]$) $e_i^{(n)}: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$;
- the n -ary 0 -constant and 1 -constant functions $\mathbf{0}^{(n)}, \mathbf{1}^{(n)}: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$, $\mathbf{0}(\mathbf{x}) = 0$ and $\mathbf{1}(\mathbf{x}) = 1$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$;
- *negation* $\bar{\cdot}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$;
- *conjunction* $\wedge: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$, $x \wedge y = 1$ if and only if $x = y = 1$;
- *disjunction* $\vee: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$, $x \vee y = 0$ if and only if $x = y = 0$;
- *modulo-2 addition* $\oplus: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$, $x \oplus y = (x + y) \bmod 2$.

The set of all Boolean functions is denoted by Ω and the set of all projections is denoted by I_C .

The preimage $f^{-1}(1)$ of 1 under f is referred to as the set of *true points*, while the preimage $f^{-1}(0)$ of 0 under f is referred to as the set of *false points*.

The *dual* of a Boolean function $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ is the function $f^d: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ given by

$$f^d(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}.$$

A variable x_i is *essential* in $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ if there are $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{B}$ such that

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Variables that are not essential are said to be *inessential*.

Fact 1. A variable x_i is essential in f if and only if it is essential in f^d .

A Boolean function f is *self-dual* if $f = f^d$.

1.3 Minors and relational constraints

A function $f: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{B}$ is a *minor* of another function $g: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ if there exists a map $\sigma: [n] \rightarrow [m]$ such that $f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}\sigma)$ for all $\mathbf{a} \in \mathbb{B}^m$; in this case we write $f \leq g$. Functions f and g are *equivalent*, denoted $f \equiv g$, if $f \leq g$ and $g \leq f$. In other words, f is a minor of g if f can be obtained from g by permutation of arguments, addition and deletion of inessential arguments and identification of arguments. Functions f and g are equivalent if each one can be obtained from the other by permutation of arguments and addition and deletion of inessential arguments. The minor relation \leq is a quasi-order (i.e., a reflexive and transitive relation) on the set of all Boolean functions, and the relation \equiv is indeed an equivalence relation. For further background see, e.g., [5, 6, 7].

In what follows, we shall consider minors of a particular form. Let $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$, let $i, j \in [n]$ ($i \neq j$). The function $f_{i=j}: \mathbb{B}^{n-1} \rightarrow \mathbb{B}$ given by

$$f_{i=j}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

for all $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{B}$, is called an *identification minor* of f .

Classes of functions that are closed under taking minors are known to be characterizable by so-called relational constraints. This was shown by Pippenger [19]. We will briefly survey some results which we will use hereinafter. An m -ary *relational constraint* is a couple (R, S) of m -ary relations R (the *antecedent*) and S (the *consequent*) on \mathbb{B} (i.e., $R, S \subseteq \mathbb{B}^m$). We denote the antecedent and the consequent of a relational constraint Q by $R(Q)$ and $S(Q)$, respectively. The set of all relational constraints is denoted by Θ .

A function $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ *preserves* an m -ary relational constraint (R, S) , denoted $f \triangleright (R, S)$, if for every $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n \in R$, we have $f(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n) \in S$. (Regarding tuples \mathbf{a}^i as unary maps, $f(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n)$ denotes the m -tuple whose i -th entry is $f(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n)(i) = f(a_i^1, \dots, a_i^n)$.)

The preservation relation gives rise to a Galois connection between functions and relational constraints that we briefly describe; for further background, see [2, 7, 19]. Define $\text{cPol}: \mathcal{P}(\Theta) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$, $\text{cInv}: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Theta)$ by

$$\begin{aligned} \text{cPol}(\mathcal{Q}) &= \{f \in \Omega : f \triangleright Q \text{ for every } Q \in \mathcal{Q}\}, \\ \text{cInv}(\mathcal{F}) &= \{Q \in \Theta : f \triangleright Q \text{ for every } f \in \mathcal{F}\}. \end{aligned}$$

We say that a set \mathcal{F} of functions is *characterized* by a set \mathcal{Q} of relational constraints if $\mathcal{F} = \text{cPol}(\mathcal{Q})$. Dually, \mathcal{Q} is *characterized* by \mathcal{F} if $\mathcal{Q} = \text{cInv}(\mathcal{F})$. In other words, sets of functions characterizable by relational constraints are exactly the fixed points of $\text{cPol} \circ \text{cInv}$, and, dually, sets of relational constraints characterizable by functions are exactly the fixed points of $\text{cInv} \circ \text{cPol}$.

The Galois connection cPol – cInv refines the well-known Galois connection Pol – Inv between functions and relations, which is induced by a similar preservation relation: function $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ *preserves* an m -ary relation R if for

every $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n \in R$, we have $f(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n) \in R$. (In other words, f preserves the relational constraint (R, R) .) Here, the Galois closed sets of functions coincide exactly with *clones*, i.e., classes of functions that contain all projections and that are closed under functional composition; for further background see, e.g., [8].

The following result reassembles various descriptions of the Galois closed sets of functions, which can be found in [7, 9, 19].

Theorem 2. *Let \mathcal{F} be a set of functions. The following are equivalent.*

- (i) \mathcal{F} is characterizable by relational constraints.
- (ii) \mathcal{F} is closed under taking minors.
- (iii) \mathcal{F} is of the form

$$\begin{aligned} \text{forbid}(A) &:= \\ &\{f \in \Omega : g \not\leq f \text{ for all } g \in A\} \end{aligned}$$

for some antichain A (i.e., set of pairwise incomparable functions) with respect to the minor relation \leq .

Remark 3. From the equivalence of (i) and (ii) in Theorem 2, it follows that the union and the intersection of classes that are characterizable by relational constraints are characterizable by relational constraints.

Remark 4. Note that the antichain A in Theorem 2 is unique up to equivalence. In fact, A can be chosen among the minimal elements of $\Omega \setminus \mathcal{F}$; the elements of A are called *minimal forbidden minors* for \mathcal{F} .

Remark 5. The Galois closed sets of relational constraints were likewise described in [19].

As we will see, there are classes of functions that, even though characterizable by relational constraints, are not characterized by any finite set of relational constraints. A set of functions

is *finitely characterizable* if it is characterized by a finite set of relational constraints. The following theorem is a refinement of Theorem 2 and provides a description for finitely characterizable classes.

Theorem 6 ([7, 9]). *Let \mathcal{F} be a set of functions. The following are equivalent.*

- (i) \mathcal{F} is finitely characterizable.
- (ii) \mathcal{F} is of the form $\text{forbid}(A)$ for some finite antichain A with respect to the minor relation \leq .

2 Main results: classification and characterizations of Galois closed sets of threshold functions

2.1 Motivation

An n -ary Boolean function $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ is a *threshold function* if there are *weights* $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ and a *threshold* $t \in \mathbb{R}$, such that

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 \iff \sum_{i=1}^n w_i x_i \geq t.$$

In other words, an n -ary Boolean function $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ is a threshold function if there is a hyperplane in \mathbb{R}^n strictly separating the true points of f from the false points of f . The set of all threshold functions is denoted by T .

The class of threshold functions has remarkable invariance properties. For instance, it is closed under taking negations and duals. Moreover, the class of threshold functions is also closed under taking minors of its members; hence it is characterizable by relational constraints by Theorem 2. However, it was shown by Hellerstein [11] that no finite set of relational constraints suffices.

Theorem 7. *The class of threshold functions is not finitely characterizable. Consequently, there exists an infinite antichain A such that for every $f \in A$, $f \notin T$ and $g \in T$ for every $g < f$.*

Imposing some additional conditions on threshold functions, we may obtain proper subclasses of T that are finitely characterizable. Easy examples arise from the intersections of T with the clone L of linear functions, the clone Λ of conjunctions or the clone V of disjunctions (see Appendix). However, other intersections may fail to be finitely characterizable. This fact gives rise to the following problem.

Problem. Which clones C of Boolean functions have the property that $C \cap T$ is finitely characterizable?

In the following subsection we present a solution to this problem.

2.2 Complete classification and corresponding characterizations of subclasses of threshold functions

For any clone C contained in one of L , V and Λ , the intersection $C \cap T$ is a clone. For,

$$L \cap T = \Omega(1), \quad \Lambda \subseteq T, \quad V \subseteq T.$$

Hence, the characterization of $C \cap T$ for any clone C contained in one of L , V and Λ is given by relational constraints of the form (R, R) for those relations R characterizing C (as given in the Appendix).

We proceed to characterizing the remaining subclasses $T \cap C$ of threshold functions that, as we will see, are not finitely characterizable.

A characterization of the class T of threshold functions (i.e., for $C = \Omega$), is given by the following family of relational constraints. Define for $n \geq 1$, the $2n$ -ary relational constraint B_n as

$$R(B_n) := \{(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{B}^{2n} : \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=n+1}^{2n} x_i\},$$

$$S(B_n) := \mathbb{B}^{2n} \setminus \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_n, \underbrace{(1, \dots, 1)}_n, \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_n \right\}.$$

(Note that in the definition of $R(B_n)$ we employ the usual addition of real numbers.)

Theorem 8. *The set $\text{cPol}\{B_n : n \geq 2\}$ is the class of all threshold functions.*

Moreover, for every clone C , the subclass $C \cap T$ of threshold functions is characterized by the set $\{B_n : n \geq 1\} \cup \mathcal{R}_C$, where \mathcal{R}_C is the set of relational constraints characterizing the clone C , as given in the Appendix.

Theorem 8 provides an infinite set of relational constraints characterizing the set $C \cap T$ for each clone C . As the following classification reveals, the characterization provided is optimal for the clones not contained in L , V or Λ in the sense that for such clones C , the class $C \cap T$ is not finitely characterizable by relational constraints.

Theorem 9. *Let C be a clone of Boolean functions. The subclass $C \cap T$ of threshold functions is finitely characterizable if and only if C is contained in one of the clones L , V , Λ .*

Appendix. Description of Boolean clones and corresponding characterizing sets of relational constraints

We provide a concise description of all Boolean clones as well as characterizing sets of relations R – or, equivalently, relational constraints (R, R) – for some clones; the characterization of the remaining clones is easily derived by noting that if $C_1 = \text{cPol}(Q_1)$ and $C_2 = \text{cPol}(Q_2)$, then $C_1 \cap C_2 = \text{cPol}(Q_1 \cup Q_2)$. We make use of notations and terminology appearing in [10] and [13].

- Ω denotes the clone of all Boolean functions. It is characterized by the empty relation.

- T_0 and T_1 denote the clones of 0- and 1-preserving functions, respectively, i.e.,

$$\begin{aligned} T_0 &= \{f \in \Omega : f(0, \dots, 0) = 0\}, \\ T_1 &= \{f \in \Omega : f(1, \dots, 1) = 1\}. \end{aligned}$$

They are characterized by the unary relations $\{0\}$ and $\{1\}$, respectively.

- T_c denotes the clone of constant-preserving functions, i.e., $T_c = T_0 \cap T_1$.

- M denotes the clone of all monotone functions, i.e.,

$$M = \{f \in \Omega : f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{b}) \text{ whenever } \mathbf{a} \leq \mathbf{b}\}.$$

It is characterized by the binary relation

$$\leq := \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

- $M_0 = M \cap T_0$, $M_1 = M \cap T_1$, $M_c = M \cap T_c$.

- S denotes the clone of all self-dual functions, i.e.,

$$S = \{f \in \Omega : f^d = f\}.$$

It is characterized by the binary relation

$$\{(0, 1), (1, 0)\}.$$

- $S_c = S \cap T_c$, $SM = S \cap M$.

- L denotes the clone of all linear functions, i.e.,

$$L = \{f \in \Omega : f = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n\}.$$

It is characterized by the quaternary relation

$$\{(a, b, c, d) : a \oplus b \oplus c = d\}.$$

- $L_0 = L \cap T_0$, $L_1 = L \cap T_1$, $LS = L \cap S$, $L_c = L \cap T_c$.

Let $a \in \{0, 1\}$. A set $A \subseteq \{0, 1\}^n$ is said to be *a-separating* if there is some $i \in [n]$ such that for every $(a_1, \dots, a_n) \in A$ we have $a_i = a$. A function f is said to be *a-separating* if $f^{-1}(a)$ is *a-separating*. The function f is said to be *a-separating of rank $k \geq 2$* if every subset $A \subseteq f^{-1}(a)$ of size at most k is *a-separating*.

- For $m \geq 2$, U_m and W_m denote the clones of all 1- and 0-separating functions of rank m , respectively. They are characterized by the m -ary relations $\mathbb{B}^m \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ and $\mathbb{B}^m \setminus \{(1, \dots, 1)\}$, respectively.
- U_∞ and W_∞ denote the clones of all 1- and 0-separating functions, respectively, i.e., $U_\infty = \bigcap_{k \geq 2} U_k$ and $W_\infty = \bigcap_{k \geq 2} W_k$.
- $T_c U_m = T_c \cap U_m$ and $T_c W_m = T_c \cap W_m$, for $m = 2, \dots, \infty$.
- $MU_m = M \cap U_m$ and $MW_m = M \cap W_m$, for $m = 2, \dots, \infty$.
- $M_c U_m = M_c \cap U_m$ and $M_c W_m = M_c \cap W_m$, for $m = 2, \dots, \infty$.
- Λ denotes the clone of all conjunctions and constants, i.e.,

$$\Lambda = \{f \in \Omega : f = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_n}\} \cup \{\mathbf{0}^{(n)} : n \geq 1\} \cup \{\mathbf{1}^{(n)} : n \geq 1\}.$$

It is characterized by the ternary relation

$$\{(a, b, c) : a \wedge b = c\}.$$

- $\Lambda_0 = \Lambda \cap T_0$, $\Lambda_1 = \Lambda \cap T_1$, $\Lambda_c = \Lambda \cap T_c$.
- V denotes the clone of all disjunctions and constants, i.e.,

$$V = \{f \in \Omega : f = x_{i_1} \vee \dots \vee x_{i_n}\} \cup \{\mathbf{0}^{(n)} : n \geq 1\} \cup \{\mathbf{1}^{(n)} : n \geq 1\}.$$

It is characterized by the ternary relation

$$\{(a, b, c) : a \vee b = c\}.$$

- $V_0 = V \cap T_0$, $V_1 = V \cap T_1$, $V_c = V \cap T_c$.
- $\Omega(1)$ denotes the clone of all projections, negations, and constants. It is characterized by the ternary relation

$$\{(a, b, c) : a = b \text{ or } b = c\}.$$

- $I^* = \Omega(1) \cap S$, $I = \Omega(1) \cap M$.

- $I_0 = I \cap T_0$, $I_1 = I \cap T_1$.
- I_c denotes the smallest clone containing only projections, i.e., $I_c = I \cap T_c$.

References

- [1] Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, M.: *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [2] Couceiro, M.: On Galois connections between external functions and relational constraints: arity restrictions and operator decompositions, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **72**, 15–35 (2006)
- [3] Couceiro, M., Foldes, S.: On closed sets of relational constraints and classes of functions closed under variable substitution, *Algebra Universalis* **54**, 149–165 (2005)
- [4] Couceiro, M., Hella, L., Kivelä, J.: Term definable classes of Boolean functions and frame definability in modal logic, *Logic J. IGPL* **16**:1 43–73 (2008)
- [5] Couceiro, M., Lehtonen, E.: On the effect of variable identification on the essential arity of functions on finite sets, *Int. J. Found. Comput. Sci.* **18**, 975–986 (2007)
- [6] Couceiro, M., Lehtonen, E.: Generalizations of Świerczkowski’s lemma and the arity gap of finite functions, *Discrete Math.* **309**, 5905–5912 (2009)
- [7] Couceiro, M., Pouzet, M.: On a quasi-ordering on Boolean functions, *Theoret. Comput. Sci.* **396**, 71–87 (2008)
- [8] Denecke, K., Erné, M., Wismath, S. L. (eds.) *Galois Connections and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004)
- [9] Ekin, O., Foldes, S., Hammer, P. L., Hellerstein, L.: Equational characterizations of Boolean function classes, *Discrete Math.* **211**, 27–51 (2000)

- [10] Foldes, S., Pogosyan, G. R.: Post classes characterized by functional terms, *Discrete Appl. Math.* **142**, 35–51 (2004)
- [11] Hellerstein, L.: On generalized constraints and certificates, *Discrete Math.* **226**, 211–232 (2001)
- [12] Isbell, J. R.: A class of majority games, *Q. J. Math.* **7**(2), 183–187 (1956)
- [13] Jablonski, S. W., Gawrilow, G. P., Kudrjawzew, W. B.: *Boolesche Funktionen und Postsche Klassen*, Vieweg, Braunschweig, 1970
- [14] Jeroslow, R. G.: On defining sets of vertices of the hypercube by linear inequalities, *Discrete Math.* **11**, 119–124 (1975)
- [15] Lay, S. R.: *Convex sets and their applications*, Dover (2007)
- [16] Muroga, S.: *Threshold Logic and Its Applications*, Wiley-Interscience, New York (1971)
- [17] Peleg, B.: A theory of coalition formation in committees, *J. Math. Econom.* **7**(2), 115–134 (1980)
- [18] Peleg, B.: Coalition formation in simple games with dominant players, *Internat. J. Game Theory* **10**, 11–33 (1981)
- [19] Pippenger, N.: Galois theory for minors of finite functions, *Discrete Math.* **254**, 405–419 (2002)
- [20] Taylor, A., Zwicker, W.: Simple games and magic squares, *J. Combin. Theory Ser. A* **71**, 67–88 (1995)
- [21] Virtanen, A.: *Essee deskriptiivisestä modaalilogiikasta*, manuscript, Tampere, 1994.
- [22] Winder, R. O.: *Threshold logic*, Ph.D. Thesis, Mathematics Department, Princeton University (1962)

Fonctions d'agrégation barycentriquement associatives

Barycentrically associative aggregation functions

Jean-Luc Marichal

Bruno Teheux

Université du Luxembourg

Unité de recherche en mathématiques

6, rue Coudenhove-Kalergi, L-1359 Kirchberg, Luxembourg

{jean-luc.marichal,bruno.teheux}@uni.lu

Résumé :

Nous étudions la propriété algébrique d'associativité barycentrique pour les fonctions d'agrégation. Cette propriété, bien connue dans l'axiomatisation des moyennes quasi-arithmétiques par Kolmogoroff-Nagumo, est souvent considérée comme très naturelle lorsque le procédé d'agrégation rappelle celui d'une moyenne (arithmétique, géométrique, harmonique...). Nous rappelons la définition de cette propriété et nous en proposons quelques généralisations. Nous présentons aussi quelques résultats, dont certains assez surprenants, liés à ces propriétés.

Mots-clés :

Fonction d'agrégation, fonction moyenne, associativité barycentrique.

Abstract:

We investigate the algebraic property of barycentric associativity for aggregation functions. This property, well-known in Kolmogoroff-Nagumo's axiomatization of the quasi-arithmetic means, is often considered as very natural whenever the aggregation process is of an (arithmetic, geometric, harmonic...) mean type. We recall the definition of this property and propose some extensions. We also present some results, some rather surprising, related to these properties.

Keywords:

Aggregation functions, mean function, barycentric associativity.

1 Fonctions d'agrégation

En général, les fonctions d'agrégation sont définies et utilisées pour combiner, fusionner et résumer plusieurs valeurs numériques en une seule, de telle sorte que le résultat final de l'agrégation prenne en compte, d'une manière prescrite, toutes les valeurs individuelles. De telles fonctions d'agrégation sont largement utilisées dans de nombreuses disciplines bien connues comme la statistique, l'économie, la fi-

nance, l'informatique, etc.

Pour donner un exemple, supposons que plusieurs personnes forment des jugements quantifiables sur la mesure d'un objet (poids, longueur, surface, hauteur, importance ou autres attributs) ou même sur le ratio de deux telles mesures (combien plus lourd, plus long, plus grand, plus important un objet est-il par rapport à un autre). Pour atteindre un consensus sur ces jugements, des fonctions d'agrégation classiques ont été proposées : la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, la médiane et bien d'autres encore.

Pour choisir un mode d'agrégation raisonnable et satisfaisant dans un problème donné, il est utile d'adopter une approche axiomatique et sélectionner ainsi les fonctions d'agrégation qui vérifient certaines propriétés. De telles propriétés peuvent être dictées par la nature des valeurs à agréger. Par exemple, dans un problème classique d'analyse multicritère, un des objectifs est d'évaluer le score global d'une alternative à partir de scores partiels obtenus sur différents critères. Dans ce cas, il ne serait pas très naturel de donner au score global une valeur inférieure au plus petit des scores partiels ou supérieure au plus grand des scores partiels. Ainsi, seule une fonction de type "interne" (une moyenne) peut être utilisée. Pour donner un autre exemple, supposons que l'on souhaite agréger des opinions dans une procédure de vote. Si les votants sont anonymes, la fonc-

tion d'agrégation doit être symétrique.

2 Associativité barycentrique

Une des propriétés algébriques les plus intéressantes et les plus naturelles dans de nombreux problèmes est celle d'associativité barycentrique. En effet, celle-ci est vérifiée par la plupart des moyennes telles que la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, la moyenne quadratique, la moyenne exponentielle, etc.

Considérons une suite de fonctions réelles $F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2, x_3), \dots$ et supposons que chacune de ces fonctions soit symétrique, c'est-à-dire invariante par permutation des variables. Dans sa formulation originale introduite par Bemporad [2], la propriété d'associativité barycentrique se traduit par l'équation

$$\begin{aligned} F_n(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ = F_n(x, \dots, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

où $x = F_k(x_1, \dots, x_k)$ et $k = 1, \dots, n$.

Cette propriété a été utilisée indépendamment par Kolmogoroff [3] et Nagumo [5] dans une caractérisation des moyennes quasiarithmétiques. Ce résultat s'énonce comme suit.

Théorème. *Considérons une suite de fonctions réelles $F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2, x_3), \dots$ vérifiant l'associativité barycentrique et supposons que chacune de ces fonctions soit symétrique, continue, strictement croissante sur chacune de ses variables et réflexive (c'est-à-dire $F_k(x, \dots, x) = x$). Alors, et seulement alors, il existe une fonction réelle ϕ d'une variable réelle qui est continue et strictement monotone telle que*

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right)$$

pour tout entier n .

Depuis son introduction, la propriété d'associativité barycentrique a été utilisée par différents auteurs [1, 3–5] et sous différents noms tels que l'associativité des moyennes, l'associativité pondérée, la décomposabilité, et l'associativité barycentrique.

Cette propriété est en fait un cas particulier d'une propriété plus générale, que nous appellerons *pré-associativité barycentrique*, et qui se traduit par l'implication

$$\begin{aligned} F_k(x_1, \dots, x_k) = F_k(x'_1, \dots, x'_k) \\ \Downarrow \\ F_n(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ = F_n(x'_1, \dots, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Lorsque les fonctions sont réflexives, cette dernière propriété se réduit à l'associativité barycentrique. De nombreuses fonctions d'agrégation sont barycentriquement pré-associatives sans être barycentriquement associatives. Citons par exemples les fonctions classiquement associatives telles que la somme $\sum_{i=1}^n x_i$ et le produit $\prod_{i=1}^n x_i$.

Dans notre exposé, nous présentons un certain nombre de propriétés, certaines assez étonnantes, qui relie la pré-associativité barycentrique à l'associativité barycentrique. Nous présentons également des généralisations de ces propriétés au cas où les fonctions ne sont pas symétriques, permettant ainsi que considérer des fonctions d'agrégation pondérées.

Références

- [1] C. Antoine. *Les moyennes*, volume 3383 of *Que Sais-Je ? [What Do I Know ?]*. Presses Universitaires de France, Paris, 1998.
- [2] G. Bemporad. Sul principio della media aritmetica. (Italian). *Atti Accad. Naz. Lincei*, 3(6) :87–91, 1926.
- [3] A. N. Kolmogoroff. Sur la notion de la moyenne. (French). *Atti Accad. Naz. Lincei*, 12(6) :388–391, 1930.
- [4] J.-L. Marichal, P. Mathonet, and E. Tousset. Characterization of some aggregation functions stable for positive linear transformations. *Fuzzy Sets and Systems*, 102(2) :293–314, 1999.
- [5] M. Nagumo. Über eine klasse der mittelwerte. (German). *Japanese Journ. of Math.*, 7 :71–79, 1930.

Modélisation TS sous forme descripteur et commande d'un pendule inversé à deux roues

Fuzzy descriptor modeling and control of two wheeled inverted pendulum

B. Allouche¹

L. Vermeiren¹

A. Dequidt¹

M. Dambrine¹

¹ LAMIH, CNRS UMR 8201, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Le Mont Houy 59313 Valenciennes Cedex 9-France

{benyamine.allouche, laurent.vermeiren, antoine.dequidt, michel.dambrine}@univ-valenciennes.fr

Résumé :

Une question couramment posée en robotique mobile est : Comment concevoir et commander un véhicule urbain capable de naviguer dans des espaces étroits ? D'un point de vue mécanique, le concept à deux roues semble être une bonne solution en raison de son encombrement réduit et de sa capacité à manœuvrer dans des espaces restreints. Cependant, la commande de ce type de véhicule nécessite deux niveaux de contrôle : le premier pour l'auto-équilibrage et le second pour assurer un suivi de consigne de vitesse. Ce travail a pour objective la synthèse d'une loi de commande robuste capable de stabiliser le passager autour de son équilibre naturel ainsi que d'assurer son déplacement le long d'une pente. Une approche quasi LPV, à travers un modèle flou TS et les contraintes LMI, sera proposée. L'approche sera basée sur la forme descripteur du système mécanique dans le but de réduire le conservatisme des contraintes LMI.

Mots-clés :

Modèle descripteur, fonction de Lyapunov non quadratique, contraintes LMI, véhicule à deux roues, pendule inversé.

Abstract:

A commonly asked question in the field of autonomous robotics and intelligent vehicles is : How to design and control an urban transporter able to investigate narrow spaces ? From a mechanical point of view, a two wheeled transporter seems to be a good alternative due to its small footprint and its ability to manoeuvre on tight turns. The aim of this work is to design a robust controller able to stabilize the transporter on its natural equilibrium along an unknown slope. A quasi LPV approach, through the so-called TS fuzzy model and LMI constraints will be proposed. This latter is based on the descriptor form of the mechanical system in order to reduce the conservatism of the LMI constraints.

Keywords:

descriptor model, non-quadratic Lyapunov function, LMI constraints, Two wheeled vehicle, inverted pendulum.

1 Introduction

De nos jours, la croissance spectaculaire des outils informatiques, de la théorie de la commande ainsi que des technologies de fabrication [1] permet aux chercheurs pour d'explorer de nouveaux concepts de véhicules plus adaptés à nos besoins quotidiens. Par exemple, le déplacement dans une rue piétonne, le transport des personnes handicapées, la réduction de l'énergie consommée et des espaces de stationnement. Le robot mobile à deux roues est devenu très populaire cette dernière décennie grâce à son faible encombrement et sa bonne maniabilité dans les espaces étroits [2]. Plusieurs prototype à deux roues ont vu le jour comme : B2 [1], JOE [3], Nbot [4], Legway [5] et Segway, qui est le concept le plus connu par le grand public [6]. D'un point de vue théorique, le robot mobile à deux roues est un système complexe sous-actionnée [7] [8]. Ces systèmes dynamiques instables ont attiré l'attention des chercheurs dans le domaine de la théorie de la commande, car ils constituent un très bon exemple d'application [1], [3], [7], [8], [9].

La stabilisation d'un tel véhicule avec les mêmes conditions qu'un véhicule conventionnel, telles que le déplacement en pente ou le franchissement d'une petite marche, reste un enjeu scientifique. Dans le cadre du projet VHI-POD (véhicule de transport en station debout individuel auto-équilibré pour personne handi-

capée avec aide à la verticalisation) financé par l'ANR (Agence Nationale de la Recherche), quelques questions concernant la robustesse de la loi de commande apparaissent. La variation de la masse et de l'inertie de l'utilisateur influe énormément sur les performances du véhicule, spécialement si ce dernier se trouve en pente. En effet, le point d'équilibre du pendule inversé à 2 roues dépend directement de la pente, non mesurée a priori. L'objectif de ce travail est de proposer une solution pour la commande des véhicules à deux roues type Segway, en se basant sur l'approche descripteur Takagi-Sugeno (TS) flou [16]. La méthodologie de synthèse sera basée sur la forme descripteur du modèle du véhicule, issue naturellement de la modélisation mécanique. L'avantage de cette technique est de réduire la complexité du modèle TS flou ainsi que le conservatisme des solutions LMI [13], [22].

Ce papier est structuré comme suit : la section 2 présente le modèle mécanique du véhicule sur une pente. Le modèle non linéaire obtenu sert alors de base à l'obtention d'un modèle TS sous forme descripteur ; la section 3 décrit la loi de commande PDC étendue (Parallel Distributed Compensation) ; la section 4 présente les résultats de simulation obtenus en stabilisation et poursuite de trajectoire ; Finalement, la section 5 contient quelques conclusions.

2 Modélisation

2.1 Modèle mécanique

Le véhicule est schématisé dans le plan par une roue connectée à un solide en libre rotation sur l'axe de la roue. La masse et le centre de gravité (situé à une distance l de l'axe de la roue) du solide constituent les caractéristiques inertielles du système "utilisateur + robot". La figure 1 montre la structure du système, où ψ et θ sont respectivement, l'angle de basculement du solide et la vitesse angulaire de la roue. Supposant que le système se déplace sur une pente d'angle α . Les notations utilisées sont définies

comme suit :

m_w, m_b - masses de la roue et du solide.

I_w, I_b - moments d'inertie de la roue et du solide.

l - distance entre le centre de gravité du solide et l'axe de rotation de la roue.

R - rayon de la roue.

C - coefficient de frottement visqueux.

Γ - couple moteur.

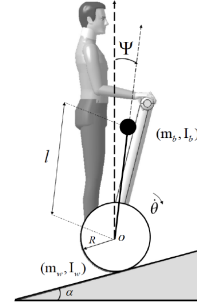


Figure 1 – Vue dans le plan du pendule inversé à 2 roues.

Le modèle mécanique est obtenu à l'aide des équations d'Euler-Lagrange [10] sous la forme :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta} + J_{12} \cos(\psi + \alpha) \ddot{\psi} + C \dot{\theta} \\ \quad - J_{12} \sin(\psi + \alpha) \dot{\psi}^2 + K_1(\alpha) = \Gamma \\ J_{12} \cos(\psi + \alpha) \ddot{\theta} + J_2 \ddot{\psi} - K_2 \sin \psi = -\Gamma \end{cases} \quad (1)$$

où

$$J_1 = m_w R^2 + m_b R^2 + I_w$$

$$J_2 = m_b l^2 + I_b$$

$$J_{12} = m_b R l$$

$$K_1(\alpha) = (m_w + m_b) g R \sin \alpha$$

$$K_2 = m_b g l$$

Dans l'équation (1), la dynamique est fortement liée aux caractéristiques du solide (m_b, I_b) supposées incertaines. Sur un plan horizontal l'équilibre statique est la verticale ($\psi = 0$) et en pente, l'équilibre change ($\psi = \delta$) avec [2] :

$$\delta = \arcsin \left[\frac{(m_w + m_b) R}{m_w l} \sin(\alpha) \right] \quad (2)$$

cette equation montre que l'équilibre est fonction de la pente et des paramètres du so-

lide (généralement inconnus). En revanche, il est compliqué de calculer l'angle d'équilibre au préalable. De même, il est difficile de synthétiser une loi de commande sachant que l'angle d'équilibre n'est pas déterminé, surtout si le contrôleur est basé sur un modèle linéarisé [8].

Soit $x^T = [\psi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]$ le vecteur d'état, la forme descripteur du systèmes est donnée par :

$$E(x)\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B\Gamma(t) + D \quad (3)$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & J_{12} \cos(\psi + \alpha) \\ 0 & J_{12} \cos(\psi + \alpha) & J_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -C & J_{12} \sin(\psi + \alpha)\dot{\psi} \\ K_2 \frac{\sin \psi}{\psi} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Forme TS descripteur

La modélisation floue de Takagi-Sugeno est une représentation mathématique des systèmes, elle appartient à la famille des quasi LPV [11]. A l'intérieur d'un ensemble compact de variable d'état, un modèle flou TS peut représenter exactement un système non linéaire par une collection de modèles linéaires pondérés par un ensemble de fonctions non linéaires issu des non-linéarités du système [12]. L'avantage de cette représentation est qu'elle fournit une méthodologie systématique pour la conception de lois de commande à l'aide des techniques d'optimisation convexes (LMI) [13]. Dans ce travail, le modèle TS est déterminé directement à partir de la forme descripteur du système ce qui réduit la complexité de synthèse [14], [15], [18], [21].

Considérons r_e and r respectivement le nombre de fonctions non-linéaires pour la partie gauche

et droite de l'équation d'état. Notons $X(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées, $Y(t) \in \mathbb{R}^q$ le vecteur des sorties, $z(t)$ le vecteur des prémisses, A_i, B_i, C_i des matrices de dimensions appropriées représentant le i -ème modèle local appartenant au modèle TS flou. Sous hypothèse que les E_k sont des matrices régulières de dimensions appropriées, le modèle continu Takagi-Sugeno sous forme descripteur s'écrit comme suit [15] :

$$\begin{cases} E_v \dot{X}(t) = A_h X(t) + B_h u(t) \\ Y(t) = C_h X(t) \end{cases} \quad (4)$$

avec la relation

$$E_v = \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t))E_k; \quad A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i$$

$$B_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i; \quad C_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i$$

et les fonctions scalaires $h_i(z(t)) \geq 0$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $v_k(z(t)) \geq 0$, $k \in \{1, \dots, r_e\}$ vérifient une propriété de somme convexe :

$$\sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t)) = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1.$$

La forme TS descripteur du véhicule peut être obtenue en considérant les deux non-linéarités suivantes de l'équation (3).

$Nl_1(\psi) = \cos(\psi + \alpha)$, $Nl_2(\psi) = \frac{\sin(\psi)}{\psi}$, et en négligeant la troisième non-linéarité $Nl_3(\psi, \dot{\psi}) = \sin(\psi + \alpha)\dot{\psi}$ puisque $\dot{\psi}$ est non mesurable.

Le modèle TS descripteur est alors composé de ($2^{r_e} \times 2^r = 4$ règles) contrairement au modèle TS qui était composé de 8 règles [1]. Les modèles linéaires sont obtenus en utilisant l'approche par secteur non-linéaire [13]. Les fonction d'appartenances sont :

$$\begin{cases} h_1 = \frac{Nl_2(\psi) - \underline{Nl_2}}{Nl_2 - \underline{Nl_2}} \overline{Nl_2}; & h_2 = \frac{Nl_2 - Nl_2(\psi)}{Nl_2 - \underline{Nl_2}} \underline{Nl_2} \\ v_1 = \frac{Nl_1(\psi) - \underline{Nl_1}}{Nl_1 - \underline{Nl_1}} \overline{Nl_1}; & v_2 = \frac{Nl_1 - Nl_1(\psi)}{Nl_1 - \underline{Nl_1}} \underline{Nl_1} \end{cases} \quad (5)$$

où \underline{Nl}_i , \overline{Nl}_i sont respectivement les bornes supérieur et inférieur de la i -ème fonction non-linéaire.

Pour prendre en considération la non-linéarité négligée, le modèle (4) est réécrit sous la forme d'un modèle TS avec des incertitudes de modélisation :

$$(E_v + \Delta E_v)\dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h)x(t) + (B_h + \Delta B_h)u \quad (6)$$

avec les incertitudes : $\Delta A_h = H_a \Delta a_h(t) W_{a_h}$, $\Delta B_h = H_b \Delta b_h(t) W_{b_h}$, $\Delta E_v = H_e \Delta e_v(t) W_{e_v}$, ou H_e , H_a , H_b , W_{e_v} , W_{a_h} , W_{b_h} , des matrices constantes $\Delta e_v^T(t) \Delta e_v(t) \leq I$, $\Delta a_h^T(t) \Delta a_h(t) \leq I$ et $\Delta b_h^T(t) \Delta b_h(t) \leq I$.

Considérant les bornes des variables suivantes : $|\psi| \leq 32^\circ$, $|\dot{\psi}| \leq 100^\circ/s$

la non-linéarité $\alpha_3(t) = J_{12} \cdot Nl_3(\psi, \dot{\psi})$ peut être décomposée en

$$\alpha_3(t) = \alpha_{3m} + \beta(t)\alpha_{3r} \quad (7)$$

avec $\alpha_{3m} = (\overline{\alpha_3} + \underline{\alpha_3})/2$, $\alpha_{3r} = (\overline{\alpha_3} - \underline{\alpha_3})/2$ et $\beta(t) \in [-1 \ 1]$. Enfin, les matrices correspondant aux incertitudes sont les suivantes :

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad W_a = [0 \ \alpha_{3r} \ 0].$$

3 Loi de commande PDC étendu

De façon classique, le système (4) peut être reformulé dans sa forme augmentée avec le vecteur augmenté $X^*(t) = [X^T(t) \ \dot{X}^T(t)]^T$:

$$\begin{cases} E^* \dot{X}^*(t) = (A_{hv}^* X^*(t) + B_h^* u(t)) \\ Y(t) = C_h^* X^*(t) \end{cases} \quad (8)$$

avec

$$A_{hv}^* = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z(t)) v_k(z(t)) A_{ik}^*$$

$$B_h^* = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) B_i^*, \quad C_h^* = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i^*$$

$$E^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{ik}^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -E_k \end{bmatrix}$$

$$B_i^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad C_i^* = [C_i \ 0]$$

3.1 Stabilisation

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante [16] :

$$V(X^*) = X^{*T} E^* Q(z) X^* \quad (9)$$

la condition de symétrie $E^* Q(z) = Q^T(z) E^*$ impose la structure suivante

$$Q(z) = \begin{bmatrix} Q^1(z) & 0 \\ Q^3(z) & Q^4(z) \end{bmatrix} \quad (10)$$

avec $Q^1(z) = (Q^1(z))^T > 0$ et $Q^4(z)$ une matrice régulière, l'inverse de $Q(z)$ s'écrit alors comme suit :

$$(Q(z))^{-1} = P_{hh} = \begin{bmatrix} (Q^1(z))^{-1} & 0 \\ -(Q^4(z))^{-1} Q^3(z) (Q^1(z))^{-1} & (Q^4(z))^{-1} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, pour relâcher les contraintes LMI, la matrice inverse s'écrit sous la forme suivante :

$$P_{hh} = \begin{bmatrix} p_{hh}^1 & 0 \\ p_{hh}^3 & p_{hh}^4 \end{bmatrix} \quad \text{avec} : Y_{hh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j Y_{ij}.$$

Notez également que

$$Q^1(z) = (P_{hh}^1)^{-1}, \quad Q^4(z) = (P_{hh}^4)^{-1} \quad \text{et} \quad Q^3(z) = (P_{hh}^4)^{-1} (p_{hh}^3) (P_{hh}^1)^{-1}.$$

La loi de commande proposée est [14] :

$$u = F_{hv} (p^1)^{-1} X = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z) F_{ik} (p^1)^{-1} X^* \quad (11)$$

avec F_{ik} les matrices de gains. En boucle fermée, le modèle (8) peut être réécrite comme :

$$\begin{cases} E^* \dot{X}^*(t) = (A_{hv}^* + B_h^* F_{hv}^*) X^*(t) \\ Y(t) = C_h^* X(t) \end{cases} \quad (12)$$

ou

$$F_{hv}^* = [F_{hv} (P^1)^{-1} \ 0]$$

3.2 Stabilisation robuste

Compte tenu des incertitudes, le système étendu (8) peut être réécrit avec les matrices suivantes :

$$A_{ik}^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i + \Delta A_i & -(E_k + \Delta E_k) \end{bmatrix}$$

$$E^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_i^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i + \Delta B_i \end{bmatrix}$$

Considérons la propriété suivante [24]

$$\begin{cases} S = S^T > 0 \\ X^T Y + Y^T X \leq X^T S X + Y^T S^{-1} Y \end{cases} \quad (13)$$

A partir de la loi de commande contrôleur PDC modifié (11), la fonction de Lyapunov (9), la relaxation [20], la propriété (13) avec $\tau_{(*)}^{(*)} > 0$ matrice diagonal et le complement de Schur, les conditions robuste de stabilisation sont données directement par le corollaire 1 [14].

Corollaire 1 *le modèle floue robuste sous forme descripteur (6) sous la loi de commande (11) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P^1 > 0$, P_{ij}^3 , P_{ij}^4 , F_{ik} et des matrices diagonales τ_{ijk}^a , τ_{ijk}^b , τ_{ijk}^e tel que :*

$$P^1 > 0, \quad (14)$$

$$G_{ik} < 0, \quad (15)$$

$$\frac{2}{r-1} G_{iik} + G_{ijk} + G_{jik} < 0, \quad i \neq j \quad (16)$$

pour $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $k \in \{1, \dots, r_e\}$ et

$$G_{ijk} = \begin{bmatrix} P_{ij}^3 + (P_{ij}^3)^T & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \Lambda_{ijk} & \Omega_{ijk} & 0 & 0 & (*) \\ W_{a_i} P^1 & 0 & -\tau_{ijk}^a & 0 & 0 \\ W_{b_i} F_{jk} & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^b & 0 \\ -W_{e_k} P_{ij}^3 & -W_{e_k} P_{ij}^4 & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^e \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\Lambda_{ijk} = A_i P^1 + B_i F_{jk} - E_k P_{ij}^3 + (P_{ij}^4)^T$$

$$\Omega_{ijk} = -E_k P_{ij}^4 - (E_k P_{ij}^4)^T + \tau_{ijk}^a H_a H_a^T + \tau_{ijk}^b H_b H_b^T + \tau_{ijk}^e H_e H_e^T.$$

3.3 Boucle de commande du véhicule avec action intégrale

Afin d'atteindre l'équilibre naturel sans erreur statique, une partie intégrale a été ajoutée (figure 2). Théoriquement, cette boucle supplémentaire est une extension du vecteur d'état du système $\bar{X}^T = [X^T \ X_i^T]$, avec \dot{X}_i définie par [12] :

$$\dot{X}_i = Y_d - \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i X \quad (18)$$

La forme descripteur du système étendu est :

$$\begin{cases} \bar{E}_v \dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}_{hv} \bar{X}(t) + \bar{B}_h u(t) + B_0 Y_d \\ Y(t) = \bar{C}_h \bar{X}(t) \end{cases} \quad (19)$$

avec

$$\bar{E}_v = \begin{bmatrix} E_v & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \bar{A}_h = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_h = \begin{bmatrix} B_h \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{C}_h = [C_h \ 0]$$

$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$: 0 et I matrices de dimension appropriées.

Par conséquent, la loi de commande PDC étendue peut s'écrire :

$$u = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z) \bar{F}_{ik} \bar{X} \quad (20)$$

avec

$$\bar{F}_{ik} = [F_{ik} \ L_{ik}] (P^1)^{-1}$$

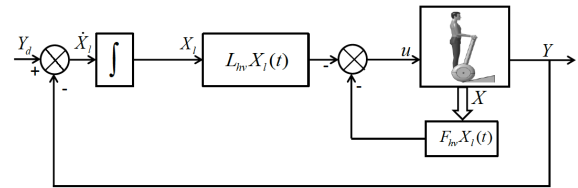


Figure 2 – Boucle de commande avec l'action intégrale

4 Résultats de simulation

Les tests de simulation sont basés sur les paramètres du véhicule à 2 roue B2 [1], (tableau 1). Un contrôleur PDC robuste avec une boucle intégrale a été synthétisé. Pour vérifier la robustesse du contrôleur, les incertitudes sont supposées être de l'ordre 40% des paramètres nominaux du solide. La dynamique du système est donnée automatiquement en réglant le rayon de faisabilité sur la boîte à outils Matlab LMI Toolbox [23]. Les gains calculés sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} [F_{11} \mid L_{11}] &= [1621.3 \quad 39.4 \quad 499.1 \mid -10.0] \\ [F_{12} \mid L_{12}] &= [2592.6 \quad 71.2 \quad 878.1 \mid -17.9] \\ [F_{21} \mid L_{21}] &= [1568.4 \quad 38.0 \quad 482.0 \mid -9.60] \\ [F_{22} \mid L_{22}] &= [2579.3 \quad 70.8 \quad 874.1 \mid -17.8] \end{aligned}$$

Tableau 1 – Paramètres estimés du B2 [1]

Symbole	Valeur
m_w	25kg
m_b	233kg
I_w	$0.78kg \cdot m^2$
I_b	$52.93kg \cdot m^2$
R	0.25m
l	1.09m
C	$0.1N \cdot m \cdot s/rad$

4.1 Stabilisation

Dans cette partie, il est supposé que le système se déplace sur une surface plane. L'objectif est de stabiliser le solide à l'origine $\psi_{ref} = 0$, tout en maintenant le véhicule sur sa position initiale $\dot{\theta} = 0$. La figure 3 montre l'évolution de l'état $x(t) = [\psi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T$, la commande Γ et la fonction de Lyapunov $V(x)$ à partir des conditions initiales $X_0 = [-20^\circ \quad 0rad/s \quad 0rad/s]^T$.

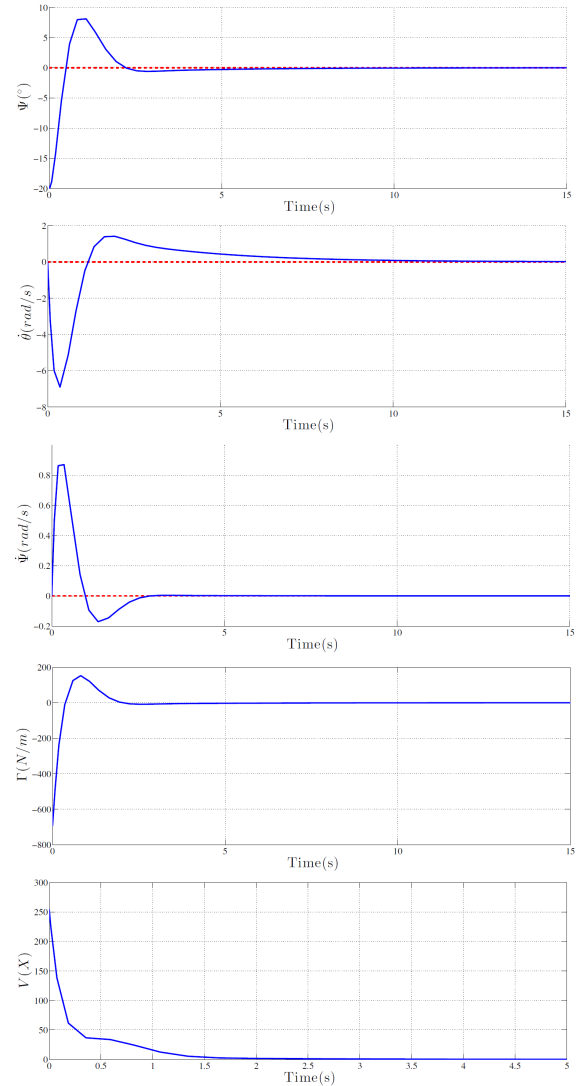


Figure 3 – Stabilisation du véhicule à l'aide d'une loi PDC

4.2 Poursuite de trajectoire

Dans cette section, un profil de sol a été imposé. Le but est de simuler un scénario de navigation pour le véhicule. Ce test permet de vérifier la robustesse de l'approche TS flou sous la forme descripteur.

Le scénario contient cinq étapes de 20 secondes chacune (figure 4). Premièrement, stabilisation du véhicule. Puis, le véhicule se déplace jusqu'à atteindre une vitesse angulaire $\dot{\theta}_{ref}$ équivalente à une vitesse de translation de 10km/h. Une fois cette vitesse atteinte, le véhicule monte sur une pente de 30%. Dans la quatrième étape, il

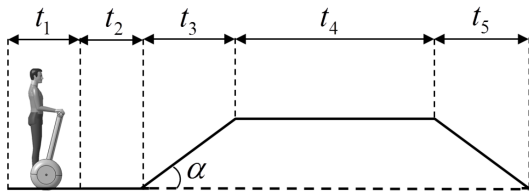


Figure 4 – profile de sol

se stabilise sur un plan pour un moment puis il descend la pente. Les résultats sont représentés sur la figure 5. Dans tous les cas, le véhicule est asymptotiquement stable, la vitesse désirée est atteinte, le solide atteint son équilibre naturel donné par (2).

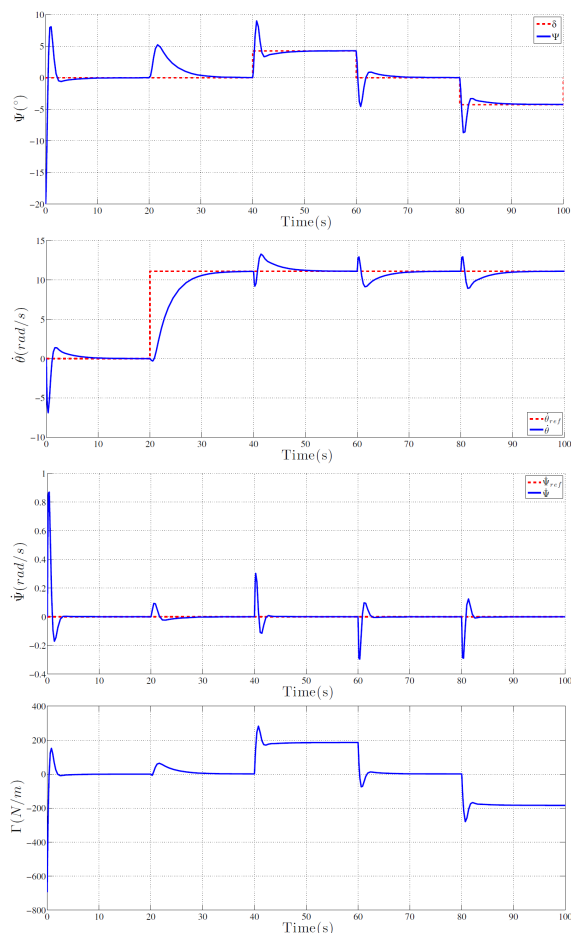


Figure 5 – Poursuite de trajectoire

5 Conclusion

Dans le cadre du projet VHIPOD, plusieurs questions ont été soulevées concernant les per-

formances des véhicules à deux roues, par exemple, le déplacement à domicile/extérieur, le déplacement sur une pente ou le franchissement d'une petite marche. Le but de cette réflexion est d'étudier la possibilité d'étendre l'utilisation de cette technologie au profit des personnes handicapées. Dans ce travail un modèle à deux dimensions du véhicule sur une pente a été présenté afin de mettre en évidence l'effet de l'angle de la pente ainsi que celui des paramètres inertiels de l'utilisateur sur l'angle d'équilibre naturel. Pour faire face aux paramètres non mesurables, une approche basée sur le modèle TS sous forme descripteur ainsi que la formulation d'un problème LMI a été proposée. L'intérêt de cette méthode est sa simplicité de synthèse basée sur la forme naturelle d'un système mécanique. La première simulation concernant la stabilisation du pendule dans un espace réduit montre qu'il est possible d'envisager son utilisation à domicile. Le second test a montré l'efficacité de l'approche utilisée en appliquant une consigne de vitesse pour se déplacer sur un sol prédéfini tout en assurant la stabilité de l'utilisateur vers l'équilibre naturel. Les résultats de ce travail vont servir à la définition du cahier des charges du projet VHIPOD. Le prochain travail va porter sur l'amélioration des performances du système en intégrant des observateurs afin de pouvoir estimer les variables non mesurables. Une autre partie du projet a été lancée dans le but d'analyser le comportement biomécanique des personnes handicapées puis de fournir un modèle biomécanique qui sera par la suite intégré dans la boucle de commande.

Remerciements :

Ce travail a été réalisé avec le soutien de la Région Nord Pas-de-Calais, le Campus International sur la Sécurité et l'Intermodalité des Transports, la Délégation Régionale à la Recherche et à la Technologie, le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, l'Agence Nationale de la Recherche, le Centre National de la Recherche Scientifique et la Communauté Européenne. Les auteurs remercient le soutien de ces institutions, en plus de tous les partenaires du projet ANR TECSAN VHIPOD (Véhicule de transport en station debout individuel auto-équilibré pour personne handicapée avec aide à la verticalisation, réf : ANR-12-TECS-0001) : Laboratoire de Traitement de l'Information Médicale (LATIM-INSERM UMR 1101), le Centre de Ressources & d'Innovation Mobilité Handicap (CEREMH), le Centre

de Réadaptation Mutualiste et de Réadaptation fonctionnelle de Kerpape (CMRRF de Kerpape), les sociétés BA systèmes et ADM Concept.

Références

- [1] Tirmant, H., Baloh, M., Vermeiren, L., Guerra, T. M., & Parent, M. (2002, June). B2, an alternative two wheeled vehicle for an automated urban transportation system. In Intelligent Vehicle Symposium, 2002. IEEE (Vol. 2, pp. 594-603).
- [2] Kausar, Z., Stol, K., & Patel, N. (2012). Effect of terrain inclination on performance and stability region of two wheeled mobile robots. *Int J Adv Robotic Sy*, 9(218).
- [3] Grasser, F., D'Arrigo, A., Colombi, S., & Rufer, A. C. (2002). JOE : a mobile, inverted pendulum. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 49(1), 107-114.
- [4] Available : <http://www.geology.smu.edu/dpa-www/robo/nbot/>
- [5] Available : <http://www.teamhassenplug.org/robots/legway/>
- [6] Available : <http://www.segway.fr/>
- [7] Xu, J. X., Guo, Z. Q., & Lee, T. H. (2012). Synthesized design of a fuzzy logic controller for an underactuated unicycle. *Fuzzy Sets and Systems*, 207, 77-93.
- [8] Huang, J., Guan, Z. H., Matsuno, T., Fukuda, T., & Sekiyama, K. (2010). Sliding-mode velocity control of mobile-wheeled inverted pendulum systems. *Robotics, IEEE Transactions on*, 26(4), 750-758.
- [9] Ha, Y., & Yuta, S. (1994). Trajectory tracking control for navigation of self-contained mobile inverse pendulum. In *Intelligent Robots and Systems' 94. Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS'94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on* (Vol. 3, pp. 1875-1882).
- [10] d'Andréa-Novel, B., & de Lara, M. C. (2000). *Cours d'automatique : commande linéaire des systèmes dynamiques*. Presses de l'Ecole des Mines.
- [11] Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, (1), 116-132.
- [12] Vermeiren, L., Dequidt, A., Guerra, T. M., Rago-Tirmant, H., & Parent, M. (2011). Modeling, control and experimental verification on a two wheeled vehicle with free inclination : An urban transportation system. *Control Engineering Practice*, 19(7), 744-756.
- [13] Tanaka, K., & Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. New York : John Wiley & Sons.
- [14] Vermeiren, L., Dequidt, A., Afroun, M., & Guerra, T. M. (2012). Motion control of planar parallel robot using the fuzzy descriptor system approach. *ISA Transactions*, Volume 51, Issue 5, September 2012, 596-608.
- [15] Taniguchi, T., Tanaka, K., & Wang, H. O. (2000). Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(4), 442-452.
- [16] Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K., & Wang, H. O. (1999). Fuzzy descriptor systems : stability analysis and design via LMIs. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999* (Vol. 3, pp. 1827-1831).
- [17] Bernal M, Guerra TM. Generalized nonquadratic stability of nonlinear models in the Takagi-Sugeno form. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 2010 ;18(4) :815-822.
- [18] Vermeiren L., Dequidt A., Afroun M., Guerra T. (2010). Modélisation TS sous forme descripteur et commande en mouvement d'un robot parallèle plan. *LFA 2010*, 72-79.
- [19] Rhee B-J, Won S. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems* 2006 ;157 : 1211-1228.
- [20] Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T., & Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 9(2), 324-332.
- [21] Guerra, T. M., & Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 40(5), 823-829.
- [22] Guelton, K., Bouarar, T., & Manamanni, N. (2009). Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems—A descriptor redundancy approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19), 2796-2811.
- [23] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., & Chilali, M. (1992). *LMI control toolbox. Manuales de MATLAB, User's Guide Version*, 1.
- [24] Xie, L., & de Souza Carlos, E. (1992). Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(8), 1188-1191.

Alternative SOS aux conditions LMI pour la synthèse de lois de commande non-PDC pour les modèles flous T-S

C.-C. Duong

K. Guelton

N. Manamanni

CRESTIC EA3804, Université de Reims Champagne-Ardenne
Moulin de la Housse BP1034, 51687 Reims, France, kevin.guelton@univ-reims.fr

Résumé :

De nos jours, pour l'analyse non-quadratique des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S), les résultats successivement proposés sous forme LMIs tendent à des conditions de plus en plus complexes avec une réduction de conservatisme parfois discutable. Cet article présente une exploration de techniques alternatives aux approches LMIs dans le contexte non-quadratique. Dans la majeure partie des travaux existant, les conditions non-quadratiques LMIs souffrent de la présence de paramètres de synthèse difficiles à obtenir dans la pratique ou conduisent à l'obtention de conditions locales. L'objectif de ce travail consiste donc à montrer qu'une approche tirée de l'optimisation polynomiale (formalisme "Sum-Of-Squares") peut être employée afin de synthétiser un contrôleur non-quadratique valide sur l'ensemble de l'espace de définition du modèle T-S considéré. Cependant, il est également souligné que ces approches souffrent de restrictions de modélisation mais ouvrent la porte vers de possibles perspectives.

Mots-clés :

Modèles flous Takagi-Sugeno; Stabilisation non-quadratique; commande Non-PDC; Sum-Of-Squares.

Abstract:

Nowadays, when dealing with non-quadratic controllers design for continuous-time Takagi-Sugeno (T-S) models, LMIs-based successive conditions become more and more complex for a conservatism reduction that is sometime questionable. In this paper it is assumed that it is interesting to explore what can be done, else than LMIs, in the non-quadratic framework. In most of the cases, non-quadratic LMIs suffer from the requirement of unknown parameters or lead to local stability analysis. The aim of this paper is to show, at a first attempt, that the Sum-Of-Squares formalism is suitable to design non-PDC controllers which stabilizing T-S models on their whole definition set. However, it is pointed-out that the SOS formalism requires a restrictive modelling assumption but opening some possible further prospects.

Keywords:

Takagi-Sugeno fuzzy models; Non-quadratic stabilization; Non-PDC controller design; Sum-Of-Squares.

1 Instructions

Les modèles Takagi-Sugeno (T-S) ont fait l'objet de nombreuses études ces dernières décennies. En effet, initialement introduits en 1985 [1], les modèles T-S sont décrits par une collection de règles floues de type SI-ALORS et dont les conclusions permettent d'approximer fidèlement la dynamique de systèmes non linéaires. Depuis, par le biais des techniques de décomposition en secteurs non linéaires [2], l'intérêt de la communauté pour ce type de systèmes s'est accru en raison de leur capacité à représenter fidèlement un modèle non linéaire sur tout ou partie de son espace d'état. Ainsi, de manière similaire aux systèmes Quasi-LPV (Linéaires à Paramètres Variants), les modèles T-S constituent des représentations polytopiques convexes des systèmes non linéaires, c'est-à-dire des collections de modèles linéaires interconnectés par des fonctions convexes non linéaires. Basés sur ces propriétés de convexité, de nombreux travaux ont été réalisés pour l'analyse de leurs stabilités ou de leurs stabilisations au travers de l'optimisation d'inégalités linéaires matricielles (LMIs) obtenues par l'application de la méthode direct de Lyapunov, [3-6].

La plupart des résultats sur l'analyse, la synthèse de lois de commande ou d'observateurs pour les systèmes T-S, ont été obtenus à l'aide d'une fonction candidate quadratique de Lyapunov. Néanmoins, ces résultats souffrent de conservatisme dans la mesure où elles requièrent la recherche de variables de décisions communes à un ensemble de contraintes LMIs [7]. Afin de réduire le conservatisme, des schémas de relaxation ont été proposés [8-9] et de récents travaux se sont concentrés sur l'emploi de

fonctions candidates non-quadratiques de Lyapunov (NQLF), e.g. [10-11]. Malgré tout, ces approches restent difficiles à mettre en œuvre dans le cas des systèmes décrits en temps continu. En effet, dans ce cas, un terme dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance apparaît au sein des conditions de stabilité, rendant difficile l'obtention de conditions LMIs. Afin de contourner ce problème, l'emploi de fonctions candidates de Lyapunov sous forme d'intégrales curvilignes a été proposé au prix de restrictions liées aux contraintes d'indépendances du chemin parcouru [12-14]. D'autres travaux récents ont également été proposés en reconsidérant les objectifs de synthèse à un cadre local, e.g. [15]. Néanmoins, la formulation de ces conditions s'avère quelque peu complexe et l'obtention de conditions globales demeure un problème ouvert. Parallèlement aux résultats sur l'analyse des modèles T-S à base de LMIs, des travaux préliminaires ont récemment vu le jour sur l'analyse et la stabilisation des modèles T-S polynomiaux par le biais de techniques d'optimisation « Sum-Of-Squares » (SOS) [16-17]. Ainsi, similairement aux approches LMI dans le cadre non-quadratique, ces premiers résultats SOS pour l'analyse de la stabilité ont été étendus, afin de réduire le conservatisme, par l'emploi de fonction candidate de Lyapunov polynomiale multiples [18-20].

À ce jour, concernant les approches LMI, un constat s'impose : les résultats successifs sont de plus en plus complexes pour une réduction de conservatisme qui est parfois minime. Il semble donc opportun de reconsidérer les approches proposées et d'explorer les alternatives possibles dans ce contexte. L'objectif de cet article consiste donc à explorer une alternative possible aux conditions de synthèse de contrôleurs non-quadratiques à base de LMI pour les modèles T-S sans pour autant prétendre, à ce stade, réduire le conservatisme. Ainsi, des conditions SOS, dédiée à la synthèse globale de contrôleurs non-quadratique, sont proposées pour les modèles T-S conventionnels [22]. En effet, ces derniers peuvent être vus comme des cas particuliers des modèles T-S polynomiaux. L'avantage de cette approche repose sur le fait

qu'elle ne nécessite pas la connaissance à priori de paramètres difficiles à obtenir dans la pratique (comme c'est le cas pour les approches LMI), même si, à ce jour, une hypothèse de modélisation restrictive reste requise (cf. hyp. 1 ci-dessous) [16-17, 22].

La suite de cet article est organisée comme suit: Tout d'abord, les approches usuelles de synthèse non-quadratique de contrôleurs pour les modèles T-S sont présentées et discutées. Ensuite, de nouvelles conditions SOS sont proposées comme alternative aux approches LMI. Finalement, un exemple numérique illustre la validité de l'approche proposée.

2 Formulation du problème de synthèse non-quadratique et discussion sur les approches LMI

Soit la classe des modèles non linéaires représentée par:

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur d'entrées, $A(x(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $B(x(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ représentent des matrices dont les arguments peuvent contenir des fonctions non linéaires bornées sur un espace compact $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ de l'espace d'état.

Par l'application de la méthode de décomposition en secteurs non linéaires [2], les modèles représentés par (1) peuvent être réécrit exactement sur Ω sous la forme de modèles T-S donnés par:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

où $z(t) \in \mathfrak{R}^p$ est le vecteur de prémisses, $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ sont des matrices constantes et $h_i(z(t)) > 0$ sont les fonctions d'appartenance positives et vérifiant la propriété de somme convexe $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$.

Considérons maintenant la loi de commande non-PDC donnée par [10]:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i \right)^{-1} x(t) \quad (3)$$

où $F_i \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et $X_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ sont les matrices de gain à synthétiser.

Remarque 1: A partir de la décomposition en secteurs non linéaires [2], le modèle T-S (2) est réputé valide localement (sur Ω) si des non linéarités contenues dans (1) ne sont pas bornées sur l'ensemble de l'espace d'état. Néanmoins, si toutes les non linéarités sont bornées sur Ω , (2) représente (1) dans sa globalité. De ce fait, dans la suite (tout comme d'ailleurs pour l'ensemble des travaux sur la commande des systèmes T-S), un contrôleur non-PDC (3) est dit globalement asymptotiquement stabilisant (GAS) pour un modèles T-S donné (2) s'il le stabilise sur l'ensemble de son espace de définition Ω , plutôt que sur l'ensemble de l'espace d'état du modèle non linéaire initial (1).

Notations: Dans ce qui suit, afin d'alléger les expressions mathématiques, le temps t est omit lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. De plus, pour une matrice M donnée, on note

$$He(M) = M + M^T, \quad M_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) M_i, \quad \text{ou encore}$$

$$M_{hh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) M_{ij} \dots$$

En substituant (3) dans (2), la dynamique en boucle fermée peut être exprimée par:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \left(A_i + B_i F_j \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) X_i \right)^{-1} \right) x \quad (4)$$

Il convient donc maintenant de proposer des conditions de synthèse du contrôleur (3) de telle sorte que la dynamique en boucle fermée (4) soit stable. Dans cette optique, la méthode directe de Lyapunov a très largement été utilisée pour aboutir à des conditions sous forme de LMI, e.g.[10]. Parmi les fonctions candidates de Lyapunov, les fonctions floues de Lyapunov (fonctions non-quadratiques, NQLF) ont fait l'objet d'une attention

particulière puisqu'elle partagent la même structure d'interconnexion floue que le système à stabiliser et conduisent à une réduction substantielle du conservatisme [3]. Ainsi, afin de stabiliser (4), on considère la NQLF donnée par [10]:

$$v(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) X_i \right)^{-1} x \quad (5)$$

qui est strictement positive pour $x(t) \neq 0$ avec $X_i = X_i^T > 0$.

Le schéma de relaxation donné par le lemme suivant sera utilisé dans les preuves des théorèmes pour réduire le conservatisme des conditions de synthèse de contrôleurs.

Lemme 1 [9]: Soient Υ_{ij} des matrices de dimensions appropriées, l'inégalité:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \Upsilon_{ij} < 0 \quad (6)$$

est vérifiée si, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / j \neq i$, les inégalités (7) et (8) sont vérifiées.

$$\Upsilon_{ii} < 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r-1} \Upsilon_{ii} + \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) < 0 \quad (8)$$

Le théorème suivant, inspiré de [11], exprime des conditions non-quadratiques LMI pour la synthèse de contrôleurs non-PDC (3).

Théorème 1: Soient $\forall i \in \{1, \dots, r\}, |\dot{h}_i(z)| < \theta_i$. Le modèle T-S (2) est localement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur non-PDC (3) s'il existe les matrices F_j , $X_i = X_i^T > 0$ et R_{ij} telles que, $\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3 / j \neq i$, les LMIs (7), (8) et $X_k + R_{ij} > 0$ soient satisfaites, avec:

$$\Upsilon_{ij} = He(A_i X_j + B_i F_j) - \sum_{k=1}^r \theta_k (X_k + R_{ij}) \quad (9)$$

La preuve du théorème 1 est ommise dans cet article dans la mesure où elle suit les même étapes que celles proposées dans [11].

Remarque 2: Le lemme borné réel donné au théorème 1 constitue une légère amélioration des conditions LMI proposées dans [11]. En effet, les conditions de cette dernière étude peuvent être obtenues en simplifiant le théorème 1, i.e. en posant les variables de décision libres $R_{ij} = R$ communes. De plus, en posant $R_{ij} = 0$, on obtient les conditions non-quadratiques proposées dans [10]. Enfin, en posant $X_k = X$ et $R_{ij} = -X$ communes, on retrouve les conditions quadratiques classiques [3][9]. Par conséquent, le théorème 1 inclue à titre de cas particuliers ces résultats antérieurs et conduit donc à une réduction du conservatisme.

Remarque 3: Le théorème 1 requiert, pour l'implémentation des LMIs, la connaissance à priori des bornes θ_i des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance $\dot{h}_i(z(t))$. Ce point fait l'objet de nombreuses critiques dans la mesure où les fonctions d'appartenance dépendent souvent de l'état dont la dynamique ne peut être, par définition, connue à l'avance. De ce fait, dans la pratique, il est souvent impossible d'estimer ces bornes avant même d'avoir synthétisé la boucle fermée. De plus, en l'absence de connaissances sur la dynamique en boucle fermée, il est incorrect de parler de conditions asymptotiques globales sur Ω dans la mesure où il est hypothétique de dire que $|\dot{h}_i(z)| < \theta_i$ pour toutes conditions initiales $x(0) \in \Omega$.

Remarque 4: D'autres approches permettant de s'affranchir du problème des bornes des dérivées des fonctions d'appartenance ont été proposées. Tout d'abord, l'emploi d'une fonction candidate de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne (LIFLF) a été proposé dans [12-14]. Néanmoins, même si de récents travaux conduisent à des conditions LMIs en stabilisation [14], cette approche nécessite de conditionner les variables de décision X_i (matrices de Lyapunov) à un cas particulier où les termes anti-diagonaux sont communs et

donc source de conservatisme. Plus récemment, un résultat local a été proposé pour contourner le problème du choix des bornes des dérivées des fonctions d'appartenance [15]. En effet, l'idée est de maximiser un

$$\text{domaine d'attraction } D = \left\{ x : x \in \Omega, \left\| \sum_{j=1}^r \dot{h}_j P_j \right\| < \lambda \right\}$$

garanti. Bien que ce résultat soit LMI (avec une formulation LMI quelque peu complexe), il reste néanmoins local dans la mesure où le domaine d'attraction D ne recouvre pas l'ensemble Ω dans sa globalité.

À ce stade, les critiques soulignées aux remarques 3 et 4 peuvent être interprétées comme des inconvénients des approches LMI non quadratiques pour les modèles T-S. De plus, les améliorations successives des travaux sur les approches LMI non quadratiques conduisent à des conditions de plus en plus complexe pour un gain de conservatisme qui est parfois discutable. Il semble donc intéressant d'explorer les alternatives possibles pour formuler le problème de synthèse non quadratique pour les modèles T-S. Ce point fait l'objet de la section suivante qui constitue la contribution principale de cet article où des conditions SOS (Sum-Of-Square) sont proposées comme alternative possible aux conditions LMI.

3 Conditions non-quadratiques SOS pour la synthèse de lois de commande pour les modèles T-S

Dans cette section, l'objectif est de présenter de nouvelles conditions de synthèse non quadratique de contrôleurs non-PDC (3) pour les modèles T-S (2) conduisant à la stabilisation globale (sur Ω) de la dynamique en boucle fermée (4). Ces conditions sont basées sur le formalisme SOS [23] et une fonction candidate de Lyapunov non quadratique (5) [22].

Pour faciliter la compréhension du résultat et clarifier les preuves mathématiques, quelques préliminaires (Définitions, Hypothèses et lemmes) sont présentés ci-dessous.

Hypothèse 1: Dans la lignée des travaux existants sur la stabilisation des modèles flous polynomiaux [16-17] et afin d'éviter l'obtention de conditions non convexes, on suppose que le vecteur de prémisses z ne dépend uniquement que des variables d'état qui ne sont pas directement affectées par la commande. C'est-à-dire, les variables d'état dont les lignes correspondantes dans les matrices d'entrée B_i sont nulles. Ainsi, on note A_i^k la $k^{\text{ème}}$ ligne de A_i . $K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ est l'ensemble des indices des lignes de B_i dont les arguments sont nuls. On peut donc écrire:

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i^k x, \forall k \in K \quad (10)$$

et $\forall s \in \{1, \dots, r\}$,

$$\frac{\partial h_i(z)}{\partial x_s} = 0, \forall s \in \{1, \dots, n\} / K \quad (11)$$

Hypothèse 2: $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $h_i(z)$ sont continûment dérivables selon chaque variable d'état x_s (avec $s \in K$) sur Ω . De ce fait, $g_i^s(z) = \frac{\partial h_i(z)}{\partial x_s}$ est une fonction bornée sur Ω telle que $\forall t, g_k^s(z) \in [\alpha_{k1}^s, \alpha_{k2}^s]$ et, ces bornes sont toujours connues sur Ω alors que $|\dot{h}_i(z)| < \theta_i$ ne peuvent être déterminées à l'avance. Aussi, il est possible d'appliquer à nouveau une décomposition en secteur non linéaire sur $g_k^s(z)$ permettant de définir deux fonctions convexes, $\omega_{k1}^s(z) \geq 0$ et $\omega_{k2}^s(z) \geq 0$ avec $\omega_{k1}^s + \omega_{k2}^s = 1$, telles que:

$$g_k^s(z) = \frac{\partial h_k(z)}{\partial x_s} = \sum_{\tau=1}^2 \omega_{k\tau}^s(z) \alpha_{k\tau}^s \quad (12)$$

Exemple: Afin d'illustrer l'hypothèse 2, considérons la fonction d'appartenance $h_1(x_1) = \sin^2 x_1$. Sa dérivée temporelle $\dot{h}_1(x_1) = 2\dot{x}_1 \cos x_1 \sin x_1$ dépend de \dot{x}_1 et donc ses bornes ($|\dot{h}_1(z)| < \theta_1$) sont inconnues avant la synthèse d'un contrôleur puisque la dynamique

en boucle fermée \dot{x}_1 n'est pas encore synthétisée. Cependant, $g_1^1(x_1) = \frac{\partial h_1(x_1)}{\partial x_1} = 2 \cos x_1 \sin x_1 \in [\alpha_{11}^1, \alpha_{12}^1]$ est bornée quelque soit x_1 et, $\alpha_{11}^1 = -1$ et $\alpha_{12}^1 = 1$ sont des paramètres connus! Ainsi, avec $\omega_{11}^1(x_1) = \frac{1}{2} - \cos x_1 \sin x_1 \geq 0$ et $\omega_{12}^1(x_1) = \frac{1}{2} + \cos x_1 \sin x_1 \geq 0$, $\omega_{11}^1 + \omega_{12}^1 = 1$, on peut écrire $g_1^1(x_1) = \frac{\partial h_1(x_1)}{\partial x_1} = \sum_{\tau=1}^2 \omega_{1\tau}^1(z) \alpha_{1\tau}^1$.

Le théorème suivant exprime les conditions non-quadratiques SOS pour la synthèse de contrôleurs non-PDC (3) globalement stabilisants pour la classe de modèles (2) sur Ω sous l'hypothèse 1.

Théorème 2: Le modèle T-S (2) est globalement asymptotiquement stabilisé (sur Ω) par la loi de commande non-PDC (3) s'il existe les matrices F_j , $X_i = X_i^T > 0$ et R_j , ainsi que les polynômes $\varepsilon_{1i}(x) > 0$, $\varepsilon_{2i}(x) \geq 0$, $\varepsilon_{3ij}(x) \geq 0$ et $\varepsilon_{4ij}(x) \geq 0$ tels que, $\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3$, $j \neq i$, $\forall s \in K$ et $\forall \tau \in \{1, 2\}$, les conditions (13), (14), (15) et (16) soient satisfaites.

$$x^T (X_i - \varepsilon_{1i}) x \text{ est SOS} \quad (13)$$

$$x^T (X_k + R_j - \varepsilon_{2kj}) x \text{ est SOS} \quad (14)$$

$$-x^T [P_{iips}^q + \varepsilon_{2i} I] x \text{ est SOS} \quad (15)$$

$$-x^T \left(\frac{1}{r-1} P_{iips}^q + \frac{1}{2} (P_{ijps}^q + P_{jips}^q) + \varepsilon_{3ij} I \right) x \text{ est SOS} \quad (16)$$

avec $P_{ijk\tau}^s = He(A_i X_j + B_i F_j) - \alpha_{k\tau}^s A_i^s x (X_k + R_j)$.

Preuve: Soit la fonction candidate non quadratique de Lyapunov (3). Le modèle T-S (2) est stable si, $\forall x$:

$$x^T (He(A_h X_h + B_h F_h) - \dot{X}_h) x < 0 \quad (17)$$

Concentrons nous maintenant sur le terme \dot{X}_h , on peut écrire:

$$\begin{aligned}\dot{X}_h &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_j(z) \dot{h}_k(z) (X_k + R_j) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{s \in K} h_j(z) \frac{\partial h_k(z)}{\partial x_s} \dot{x}_s (X_k + R_j)\end{aligned}\quad (18)$$

De plus, sous l'hypothèse 2, $\forall t, g_k^s(z) \in [\alpha_{k1}^s, \alpha_{k2}^s]$ possèdent des bornes connues sur Ω . De ce fait, il existe toujours $\omega_{k1}^s(z) > 0$ et $\omega_{k2}^s(z) > 0$ avec $\omega_{k1}^s + \omega_{k2}^s = 1$, tels que (12) soit définie. Ainsi, l'équation (18) peut être réécrite sous la forme:

$$\dot{X}_h = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{s \in K} \sum_{\tau=1}^2 h_j(z) \omega_{k\tau}^s(z) \alpha_{k\tau}^s \dot{x}_s (X_k + R_j) \quad (19)$$

En substituant (10) dans (19) et sous l'hypothèse 1, on obtient:

$$\dot{X}_h = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{s \in K} \sum_{\tau=1}^2 h_i(z) h_j(z) \omega_{k\tau}^s(z) \alpha_{k\tau}^s A_i^s x (X_k + R_j) \quad (20)$$

Ainsi, sous l'hypothèse 1 et 2, en considérant (20), l'inégalité (17) est strictement équivalente sur Ω à:

$$x^T \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{s \in K} \sum_{\tau=1}^2 h_i(z) h_j(z) \omega_{k\tau}^s(z) P_{ijk\tau}^s x < 0 \quad (21)$$

avec $P_{ijk\tau}^s = He(A_i X_j + B_i F_j) - \alpha_{k\tau}^s A_i^s x (X_k + R_j)$

Notons que $x^T P_{ijk\tau}^s x$ sont des polynômes scalaires en x . Par conséquent, la négativité de (21), et donc de (17), peut être vérifiée par les outils d'optimisation SOS tools. Ainsi, en appliquant le lemme 1 sur (21), on obtient les conditions SOS exprimées au théorème 2.

Remarque 4: Les principaux avantages de l'approche SOS proposée (théorème 2) vis-à-vis des approches LMI (e.g. théorème 1) sont:

- Les conditions du théorème 2 sont libres de tout paramètres inconnus tels que les bornes des dérivées temporelles des fonctions d'appartenances. En effet, les bornes de

$g_k^s(z)$, α_{k1}^s et α_{k2}^s ne dépendent pas directement de \dot{x} et sont toujours connues et définies sous l'hypothèse 2 (cf exemple ci-dessus).

- L'ensemble des paramètres du théorème 2 étant connus, l'approche SOS proposé permet de garantir, lorsqu'une solution existe, la stabilisation globale sur le domaine de validité du modèle T-S Ω . Notons que ce point ne peut être garanti par les résultats LMI tels que [10-11] et [15], hormis les conditions LMI obtenues au travers d'une fonction candidate de Lypapunov sous forme d'intégrales curvilignes [14]. Cependant, dans ces dernières, un cas particulier avec des matrices de décisions dont les termes anti-diagonaux sont communs est requis.

Enfin, il apparaît clairement que le principal inconvénient des approches SOS pour la stabilisation des système repose sur l'hypothèse 1. En effet, le vecteur de prémisses z ne doit dépendre uniquement des états qui ne sont pas affectés directement par la commande. Cette hypothèse est bien entendue restrictive et, comme cela est précisé dans [16], il est souhaitable d'employer un changement de base permettant, autant que faire se peut, d'introduire le maximum de lignes nulles possibles au sein des matrices d'entrées B_i . Ce point peut être considéré comme le verrou principal des approches SOS et devrait faire l'objet de futurs travaux.

4 Exemple de simulation

Soit le modèle T-S donné par:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (22)$$

$$\square \text{ où } A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, h_1(x_2) = \frac{1}{2}(1 - \sin x_2)$$

et $h_2(x_2) = 1 - h_1(x_2)$.

Rappelons que, en appliquant le théorème 1, un contrôleur non-PDC garantissant la stabilisation non-quadratique globale ne peut être synthétisé, hormis les travaux employant une fonction candidate de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne [14]. De plus, comme l'illustre le portrait de phases tracé sur la figure 1, le modèle T-S en boucle ouverte (22) est instable.

D'après les définitions de h_1 et h_2 , on a :

$$\frac{\partial h_1(x_2)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \cos x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (23)$$

$$\frac{\partial h_2(x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \cos x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (24)$$

Ainsi, le théorème 2 peut être implémenté avec les paramètres connus $\alpha_{11}^1 = \alpha_{21}^1 = -\frac{1}{2}$ et $\alpha_{12}^1 = \alpha_{22}^1 = \frac{1}{2}$. Notons que les variables de décision ε_{1i} , ε_{2i} , ε_{3ij} et ε_{4ij} ont été fixées comme des polynômes d'ordre zéro (variables scalaires). Le résultat, obtenu via la boîte à outils SOSTOOLS pour Matlab [23], est donné par les matrices:

$$F_1 = \begin{bmatrix} -20.608 & -2.9356 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -20.8868 & -1.0598 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 7.9772 & -2.068 \\ -2.068 & 0.61071 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 7.9773 & -2.0683 \\ -2.0683 & 0.60992 \end{bmatrix},$$

et permettent alors de synthétiser la loi de commande non-PDC donnée par:

$$u(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) F_i \left(\sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) X_i \right)^{-1} x(t) \quad (25)$$

qui stabilise globalement (22) comme cela est illustré par le portrait de phases de la figure 2.

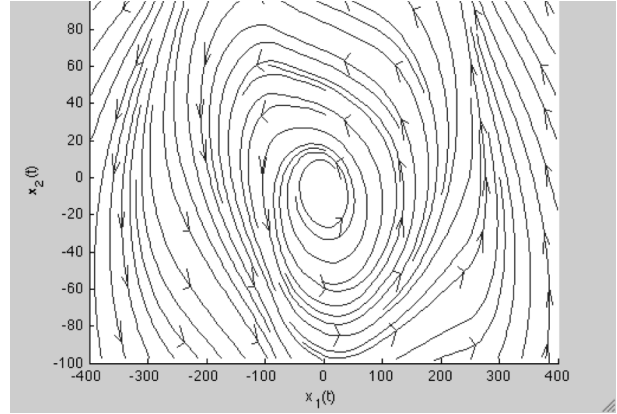


Fig. 1. Portrait de phase en boucle ouverte.

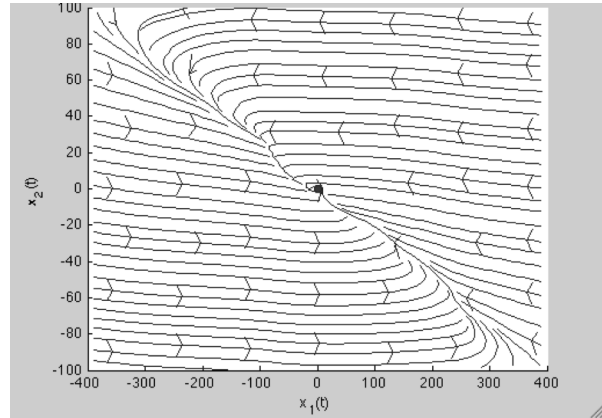


Fig. 2. Portrait de phase en boucle fermée.

5 Conclusion

Dans cet article, une alternative aux approches LMI pour la stabilisation non-quadratique globale des modèles Takagi-Sugeno a été proposée. En effet, l'efficacité des approches LMI a maintes fois été démontrée pour l'analyse des modèles Takagi-Sugeno. Cependant, dans le cadre non-quadratique, ces dernières souffrent de conservatisme. De plus les récentes et successives améliorations dans le cadre non-quadratique conduisent à des conditions de plus en plus complexe avec un gain de conservatisme qui est parfois discutable. L'objectif était donc ici d'explorer ce qui peut être fait, de manière alternative, pour synthétiser une loi de commande non-quadratique globale. Ainsi des conditions issues de l'optimisation polynomiale et plus

précisément des techniques SOS ont été proposées. Il convient toutefois de souligner qu'il s'agit ici d'une première tentative et qu'en aucun cas l'approche proposée prétend fournir de meilleurs résultats en termes de performances et de conservatisme que les dernière approches LMI proposées. Ceci-dit, l'approche SOS proposée présente l'avantage de fournir une méthodologie de synthèse globale lorsque la plupart des approches LMI non-quadratiques existantes ne peuvent prétendre à cet objectif. Néanmoins, cet avantage est obtenu au prix d'une hypothèse de modélisation restrictive, pouvant être entendue comme l'inconvénient majeur des approches SOS, qu'il conviendra de lever dans de futures études.

Remerciements

Les auteurs remercient Mr Paul Hinaume pour ses conseils concernant l'implémentation des conditions SOS à l'aide de la boîte à outils SOSTOOLS.

References

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modelong and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [2] K. Tanaka and H.O. Wang, "Fuzzy control systems design and analysis: A linear Matrix Inequality Approach," Wiley, New York, USA, 2001.
- [3] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, no. 2, pp. 135-156, 1992.
- [4] G. Feng, "A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 14, no. 5, pp. 676-697, 2006.
- [5] T. Bouarar, K. Guelton and N. Manamanni, "LMI stability conditions for Takagi-Sugeno uncertain descriptors," *IEEE International Fuzzy Sytems conference, FUZZ IEEE 2007*, London, UK, July 23-26, 2007.
- [6] Q. Gao, X.J. Zeng, G. Feng, Y. Wang, J. Qiu, "T-S-Fuzzy-Model-Based approximation and controller design for general nonlinear systems," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 42, no. 4, pp. 1143-1154, 2012.
- [7] A. Sala, "On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems," *Annual Reviews in Control*, vol. 33, no. 1, pp. 48-58, 2009.
- [8] X. Liu, and Q. Zhang, "New approaches to H_∞ controller design based on fuzzy observers for fuzzy T-S systems via LMI," *Automatica*, vol. 39, no. 9, pp. 1571-1582, 2003.
- [9] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo and Y. Yamamoto, "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 2, pp. 324-332, 2001.
- [10] K. Tanaka, T. Hori and H.O. Wang, "A multiple Lyapunov approach to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 4, pp. 582-589, 2003.
- [11] L.A. Mozelli, R.M. Palhares, F.O. Souza and E.M.A.M. Mendes, "Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems," *Automatica*, vol. 46, no. 6, pp. 1580-1583, 2009.
- [12] B.J. Rhee and S. Won, "A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design," *Fuzzy Sets & Systems*, vol. 157, no. 9, pp. 1211-1228, 2006.
- [13] K. Guelton, T.M. Guerra, M. Bernal, T. Bouarar and N. Manamanni, "Comments on fuzzy control systems design via fuzzy Lyapunov functions," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, vol. 40, no. 3, pp. 970-972, 2010.
- [14] L.A. Mozelli, R.M. Palhares, G.S.C. Avellar, "A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems," *Information Sciences*, vol. 179, no. 8, pp. 1149-1162, 2009.
- [15] T.M. Guerra, M. Bernal, K. Guelton and S. Labiod, "Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno models," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 201, pp. 40-54, 2012.
- [16] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Othake and H.O. Wang, "A sum-of-squares approach to modeling ans control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 17, no. 4, pp. 991-922, 2009.
- [17] M. Narimani and H.K. Lam, "SOS-based stability analysis of polynomial fuzzy model-based control systems via polynomial membership functions," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 18, no. 5, pp. 862-871, 2010.
- [18] K. Guelton, N. Manamanni, D.L. Koumba-Emianiwe and C.D. Chinh, "SOS stability conditions for nonlinear systems based on a polynomial fuzzy Lyapunov function," *18th IFAC World Congress*, vol. 18, no. 1, pp. 12777-12782, Milano, Italy, 2011.
- [19] M. Bernal, A. Sala, A. Jaadari and T.M. Guerra, "Stability analysis of polynomial fuzzy models via polynomial fuzzy Lyapunov functions," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 185, no. 1, pp. 5-14, 2011.
- [20] K. Guelton, N. Manamanni, C.D. Chinh, D.L. Koumba-Emianiwe, "Sum-of-squares stability analysis of Takagi-Sugeno systems based on multiple polynomial Lyapunov functions," *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 1-8, 2013.
- [21] T. Bouarar, K. Guelton and N. Manamanni, "Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi-Sugeno descriptors," *ISA Transactions*, vol. 49, no. 4, pp. 447-461, 2010.
- [22] C.C. Duong, K. Guelton, N. Manamanni, "A SOS based alternative to LMI approaches for non-quadratic stabilization of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2013*, Hyderabad, India, July 7-10.
- [23] S. Prajna, A. Papachristodoulou, P. Seiler and P.A. Parrilo, "SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB," Version 2.00. California Inst. Technol., Pasadena, 2004.

Contrôleur flou T-S optimal pour une assistance à la conduite

B. Soualmi, C. Sentouh, J.C. Popieul and S. Debernard ¹

¹ Université de valenciennes

LAMIH UVHC, Campus du Mont Houy, valenciennes France

{boussaad.soualmi, chouki.sentouh}@univ-valenciennes.fr

{jean-christophe.popieul, serge.debernard}@univ-valenciennes.fr

Résumé :

Dans ce papier une assistance à la conduite pour un maintien de voie est proposée. Cette dernière est basée sur un contrôleur de type Takagi-Sugeno (T-S) optimal. Les nonlinéarités dues à la variation de la vitesse longitudinale sont prises en compte comme des paramètres variants pour obtenir une description quasi-LPV du modèle du véhicule. L'outil LMI est utilisé pour la synthèse du contrôleur T-S. Les résultats obtenus en simulation et tests sur simulateur de conduite montrent la pertinence de l'approche proposée.

Mots-clés :

Système Avancés d'Aide à la Conduite, Contrôleur Takagi-Sugeno, Commande Optimale, LMI.

Abstract:

In this work a driver assistance system based on a fuzzy Takagi-Sugeno optimal controller is proposed. A quasi-LPV model of the lateral vehicle dynamics is driven considering the longitudinal velocity variation than the LMI tool is used to reach the T-S controller. The proposed approach is validated with human driver in SHERPA dynamic simulator.

Keywords:

Advanced driver assistance systems, Takagi-Sugeno controller, LMI, optimal control.

1 Introduction

La place qu'occupe la voiture aujourd'hui dans la vie quotidienne est d'une importance capitale, elle est une garantie d'autonomie de déplacement des personnes [8]. Néanmoins, le nombre d'accidents de circulation reste assez important (67288 accidents corporels en France [12]), et ce, malgré les efforts déployés par la politique en matière de prévention, d'information, de répression ou de ceux des constructeurs automobiles en matière de sécurité passive (ceinture de sécurité, structure déformable, airbags...) et active (ABS, ESP, etc).

Avec les progrès réalisés dans l'automatique, l'informatique, les télécommunications et

la miniaturisation des composants électroniques (capteurs, calculateurs), la recherche est en mesure, aujourd'hui, de développer des systèmes avancés d'aide à la conduite (ADAS) pouvant réduire d'avantage le nombre d'accidents [6].

Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature, pour l'aide au maintien de voie [15, 11, 2, 3, 14, 4]. Dans un premier temps, l'automatique est introduite afin d'aider le conducteur à mieux maîtriser son véhicule ou bien améliorer ses performances. Dans [1] les auteurs proposent un système de maintien de cap de véhicule soumis à une perturbation de freinage asymétrique en agissant sur l'angle de braquage. Les auteurs [13] proposent une stabilisation du véhicule en agissant sur le freinage différentiel puis l'angle de braquage dans le cas où la première correction n'est pas suffisante. Mais cette solution -stabilisation du véhicule- seule ne peut combler les erreurs humaines. C'est dans cette optique que des systèmes avancés d'aide au maintien de la voie agissant directement sur la trajectoire du véhicule, commencent à émerger. Dans [11], une automatisation partielle de la conduite basée sur le contrôleur adaptatif développé dans [9] est proposée en considérant les variations des différents paramètres. [15] proposent un système de maintien de voie basé sur un contrôleur H_2 avec un retour complet de l'état. Pour remédier à l'effet de la variation de la vitesse longitudinale sur la dynamique latérale, dans [14] les auteurs représentent la dynamique latérale du véhicule en système LPV (Linear Parameter Varying) où la vitesse longitudinale est le paramètre variant. Dans [2] une un

contrôleur T-S pour un suivi de trajectoire est proposé.

Le travail présenté dans cet article propose une approche pour le contrôle latéral du véhicule en tenant en compte la variation de la vitesse longitudinale, et ce, en utilisant l'approche multi-modèles Takagi-Sugeno.

Ce papier est organisé comme suit. La modélisation T-S ainsi que le concept de la PDC est introduit en section 2. Dans la section 3, le modèle T-S du véhicule et le contrôleur T-S associé sont exposés. Les résultats de simulation et d'expérimentation sur simulateur de conduite sont rapportés dans la section 4. La section 5 conclut les résultats obtenus.

2 Modélisation T-S et contrôle PDC

La modélisation T-S est un outil puissant pour la représentation des systèmes nonlinéaires, à paramètres variants ou incertains sous forme d'un ensemble fini de règles floues de la forme [17]:

Règle_i: Si ρ_1 est M_{i1} ... et ρ_l est M_{il} Alors:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t), \quad i = 1..r \end{cases} \quad (1)$$

Avec : $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ représentent le vecteur d'état, les signaux d'entrées et de sorties, respectivement. A_i , B_i , C_i et D_i représentent les matrices aux dimensions appropriées du i^{em} sous-modèle linéaire et r le nombre de règles floues. Le vecteur ρ contient les paramètres variants qui peuvent dépendre (ou pas) des variables d'état ou bien une perturbation externe et *doit être connu ou mesurable à chaque instant* [7].

M_{ij} sont les fonctions d'appartenance floues des termes d'entrées.

En utilisant la méthode de centre de gravité pour la défuzzification de (1), la dynamique globale du système s'exprime :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\rho) [A_i x(t) + B_i u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\rho) [C_i x(t) + D_i u(t)] \end{cases} \quad (2)$$

Tel que: $h_i(\rho) = \frac{w_i(\rho)}{\sum_{i=1}^r w_i(\rho)}$ et $w_i(\rho) = \prod_{j=1}^l M_{ij}(\rho_j)$ est le degré de validité de la i^{eme} règle.

Il est clair que :

$$h_i(\rho(t)) \geq 0 \quad \forall i = 1..r \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r h_i(\rho(t)) = 1$$

Le système non linéaire est ainsi représenté sous forme d'une somme convexe de sous-systèmes linéaires. La compensation parallèle distribué (PDC) est une technique de conception simple et naturelle pour un modèle type T-S décrit par (2) [21].

Dans le concept PDC, chaque règle de contrôle est conçue pour la règle correspondante du modèle T-S. Ainsi les théories des systèmes linéaires peuvent être utilisées pour concevoir les conséquences des règles de commande floues.

Soit K_i le retour d'état correspondant au i^{eme} sous-système linéaire de la règle correspondante, alors l'expression du contrôleur T-S est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(\rho) K_i(\rho) x(t) \quad (3)$$

Il a été démontré que dans le cadre de modèle T-S et la conception de contrôle PDC, les conditions de conception pour la stabilité et les performances du système peuvent être formulées en termes de faisabilité d'un ensemble d'inégalités matricielle linéaires (LMIs) [21, 18, 19, 5].

3 Modèle du véhicule et contrôleur T-S

3.1 Modèle T-S du véhicule sur route

Afin d'étudier la dynamique latérale du véhicule dans un plan horizontal, le modèle bicyclette (Fig.1) est utilisé. Ce modèle s'obtient en négligeant la dynamique du roulis et du tangage et en remplaçant chaque essieu par une roue équivalente. Avec les hypothèses posées, le modèle nonlinéaire simplifié est donné par

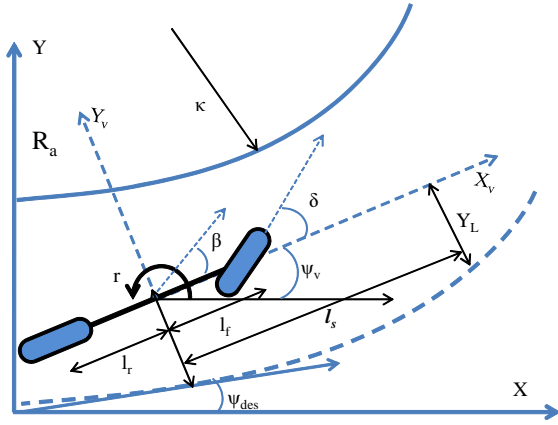


Figure 1: Représentation du modèle bicyclette sur route.

[16]:

$$\begin{cases} \dot{v}_y = \frac{F_{yf} + F_{yr} - c_y v_y^2}{m} - v_x r \\ \dot{r} = \frac{l_f F_{yf} - l_r F_{yr}}{I_z} \end{cases} \quad (4)$$

Où: v_x , v_y , r sont, respectivement, la vitesse longitudinale, la vitesse latérale et la vitesse du lacet. l_f et l_r sont, respectivement, les distances de l'essieu avant et arrière du centre de gravité du véhicule, c_y est le coefficient latéral de la traînée aérodynamique, m et I_z sont, respectivement, la masse du véhicule, et le moment d'inertie autour de l'axe du lacet. F_{yf} et F_{yr} sont les forces latérales équivalentes des roues avant et arrière.

Considérant des faibles angles de braquage et de dérive du véhicule, les forces latérales des pneumatiques sont données par:

$$\begin{cases} F_{yf} = 2C_f \left(\delta - \frac{v_y + l_f r}{v_x} \right) \\ F_{yr} = -2C_r \frac{v_y - l_r r}{v_x} \end{cases} \quad (5)$$

Avec δ : l'angle de braquage équivalent des roues avant.

Le positionnement du véhicule sur la route est étudié par deux variables supplémentaires (y_L) et (ψ_L) qui sont l'erreur latérale par rapport au centre de la voie à une distance (l_s) à l'avant du véhicule et l'erreur du cap. Leurs dynamiques

sont données par:

$$\begin{cases} \dot{y}_L = v_y + l_s r + v_x \psi_L \\ \dot{\psi}_L = r - v_x \kappa \end{cases} \quad (6)$$

κ étant la courbure de la route.

Ces deux variables peuvent être fournies par un système de vision (voir [10] par exemple).

Afin de quantifier le ressenti du conducteur aux couples sur la colonne de direction (couple de la commande et de l'autoalignement), la colonne de direction est modélisée. La dynamique simplifiée d'un système de direction assisté est donnée par [4]:

$$I_s \ddot{\delta} = T_d + T_c - \eta_t C_f \left(\delta - \frac{v_y + l_f r}{v_x} \right) - B_s \dot{\delta} \quad (7)$$

Avec T_c est le couple de la commande, T_d celui du conducteur, I_s est le moment d'inertie équivalent du système de direction et B_s son coefficient d'amortissement (frottement) équivalent.

En négligeant les forces aérodynamiques (i.e. $c_y = 0$) la représentation d'état de (4) augmentée avec le positionnement sur route (6) et le système de direction (7) est :

$$\begin{cases} \dot{x}_v = A x_v + B_u u + B_w \kappa \\ \dot{y}_v = C x_v \end{cases} \quad (8)$$

Tel que: $x_v = [v_y \ r \ \psi_L \ y_L \ \delta \ \dot{\delta}]^T$ le vecteur d'état du système, l'entrée du système u est le couple délivré par la commande (T_c) additionné à celui du conducteur (T_d).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l_s & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ T_{s2} & T_{s1} & 0 & 0 & T_{s3} & T_{s4} \end{pmatrix}; B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_s} \end{pmatrix}$$

$$B_w = (0 \ 0 \ 0 \ -v_x \ 0 \ 0)^T$$

Avec :

$$a_{11} = -2 \frac{C_r + C_f}{m v_x}, \quad a_{12} = -v_x + 2 \frac{l_r C_r - l_f C_f}{m v_x},$$

$$a_{21} = 2 \frac{l_r C_r - l_f C_f}{I_z v_x}, \quad a_{22} = -2 \frac{l_r^2 C_r + l_f^2 C_f}{I_z v_x},$$

$$T_{s1} = 2 \frac{2C_f \eta_t}{J_s R_s v_x}, \quad T_{s2} = \frac{2C_f l_f \eta_t}{J_s R_s v_x}, \quad T_{s3} = -\frac{2C_f \eta_t}{J_s R_s},$$

$$T_{s4} = -\frac{B_s}{J_s}, \quad b_1 = 2 \frac{C_f}{m}, \quad b_2 = 2 \frac{l_f C_f}{I_z},$$

En considérant la vitesse longitudinale comme paramètre variant dans la dynamique latérale dans l'intervalle $[5, 25]m/s$ et définissant par $\rho_1 = v_x$ et $\rho_2 = \frac{1}{v_x}$, on obtient les quatre fonctions d'appartenance suivantes :

$$M_1^1 = \frac{\bar{\rho}_1 - \rho_1}{\bar{\rho}_1 - \underline{\rho}_1} = \frac{25 - \rho_1}{20} \text{ et } M_1^2 = 1 - M_1^1$$

$$M_2^1 = \frac{\bar{\rho}_2 - \rho_2}{\bar{\rho}_2 - \underline{\rho}_2} = \frac{\frac{1}{5} - \rho_2}{\frac{1}{5} - \frac{1}{25}} \text{ et } M_2^2 = 1 - M_2^1$$

La dynamique globale du modèle T-S obtenu s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(v_x) (A_i x + B_i u) \\ y = \sum_{i=1}^4 h_i(v_x) C_i x \end{cases} \quad (9)$$

Avec :

$$h_1 = M_1^1 \times M_2^1, \quad h_2 = M_1^1 \times M_2^2$$

$$h_3 = M_2^1 \times M_1^1, \quad h_4 = M_2^1 \times M_1^2$$

et les matrices A_i , B et C ($i = 1..4$) sont les matrices obtenus dans (8) pour les quatre sommums $[\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2]$, $[\bar{\rho}_1, \rho_2]$, $[\rho_1, \bar{\rho}_2]$, $[\rho_1, \rho_2]$, avec $\underline{\rho} = \min(\rho)$ et $\bar{\rho} = \max(\rho)$.

Une comparaison des sorties du système non-linéaire (4) et celles données par son modèle T-S (9) est rapportée sur la Figure (2). Les sorties sont le résultat de l'excitation des deux modèles avec un couple de braquage sinusoïdal et pour une variation de la vitesse longitudinale en palier. Comme on peut le constater la modélisation T-S donne une représentation exacte du modèle non linéaire.

Le contrôleur T-S correspondant est discuté dans la section suivante.

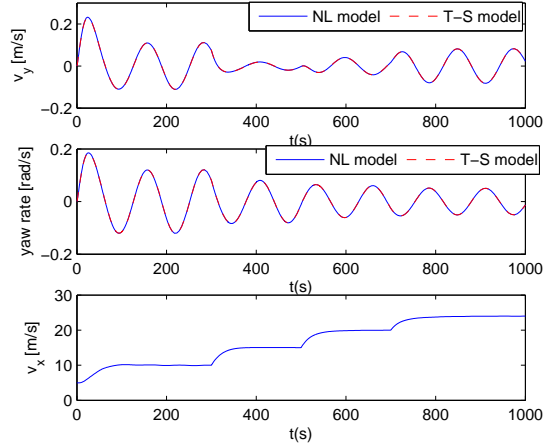


Figure 2: Comparaison des sorties du modèle non-linéaire et du modèle T-S

3.2 Contrôleur T-S

Le but premier du contrôleur, recherché, est le maintien du véhicule sur la route, cela se traduit par la minimisation de l'écart latéral (y_L) ainsi que de l'erreur de cap (ψ_L). Le confort du conducteur comme second objectif: confort corporel par la minimisation de l'accélération latérale (a_y) et au volant par minimisation de la vitesse de braquage (δ). Le vecteur de performance à minimiser est donc $z = C_z x = [a_y, \psi_L, y_L, \delta]$

Pour atteindre les objectifs cités, on propose un contrôleur T-S optimal de la forme (3) minimisant le critère quadratique donné par :

$$J = \int_0^{\infty} z^T Q z + u^T R u dt \quad (10)$$

Avec : $Q = \text{diag}[q_{a_y}, q_{\psi_L}, q_{y_L}, q_{\delta}]$ et q_x est la pondération de la variable x et R la pondération sur le signal de commande.

Le problème à résoudre, à présent, est de retrouver les gains K_i permettant de minimiser J sous la dynamique A_i , B , C_z $i = \overline{1..r}$.

Soit $V(x) = x^T X x$ avec $X > 0$ et le signal de commande $u(t)$ satisfaisant l'équation Hamilton-Jacoby [20]:

$$\dot{V}(x(t)) + z(t)^T Q z(t) + u(t)^T R u(t) < 0 \quad (11)$$

Par le calcul de $\dot{V}(x(t))$ et remplacement de $u = -K_\rho x$, en utilisant le compliment de Schur (voir l'annex) le problème peut se réécrire :

$$\begin{bmatrix} PA_\rho^T + A_\rho P - (B_\rho M_\rho + M_\rho^T B_\rho^T) & PC_{z\rho}^T & M_\rho^T \\ C_{z\rho} P & -Q_i^{-1} & 0 \\ M_\rho & 0 & -R_i^{-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Avec: $P = X^{-1}$ et $M_\rho = K_\rho P$

Les gains K_i du contrôleur T-S sont obtenus par la résolution des LMIs suivant [20]:

Minimiser γ :

$$\begin{bmatrix} \gamma & x(0)^T \\ x(0) & P \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

et pour $1 \leq i \leq j \leq r$:

$$\begin{cases} \Pi_{ii} < 0 \\ \frac{1}{r-1}\Pi_{ii} + \frac{1}{2}[\Pi_{ij} + \Pi_{ji}] < 0 \end{cases} \quad (14)$$

Tel que :

$$\Pi_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_{ii} & PC_{zi}^T & M_i^T \\ C_{zi}P & Y & 0 \\ M_i & 0 & S \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} T_{ij} & PC_{zi}^T & PC_{zj}^T & M_i^T & M_j^T \\ C_{zi}P & Y & 0 & 0 & 0 \\ C_{zj}P & 0 & Y & 0 & 0 \\ M_i & 0 & 0 & S & 0 \\ M_j & 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad (15)$$

Avec $G_{ji} = A_i - B_i K_j$, $Y = -Q^{-1}$, $S = -R^{-1}$ et

$$T_{ij} = P(G_{ij} + G_{ji})^T + (G_{ij} + G_{ji})P$$

Et enfin :

$$K_i = M_i P^{-1} \quad (16)$$

On suppose dans cette étude que le vecteur d'état $x(t)$ est disponible.

4 Simulations et résultats

4.1 Validation sur Matlab/Simulink

Une première série de tests est réalisée en simulation sur Matlab/Simulink afin d'ajuster le

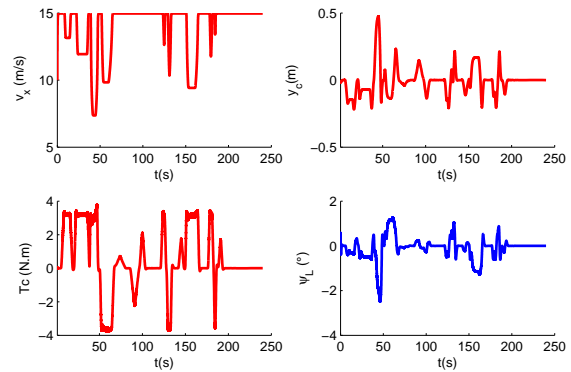


Figure 3: Résultats de simulation, haut gauche: vitesse du véhicule (v_x), haut droite : écart latéral (y_c), bas gauche : couple du contrôleur (T_c), bas droite : erreur de cap (ψ_L).

contrôleur qui sera, par la suite, implémenté sur le simulateur de conduite SHERPA.

Le modèle d'écrit en (4) est utilisé pendant les simulations. La vitesse longitudinale est régulée par le contrôleur mode glissant similaire à celui développé dans [16], tandis que le contrôle latéral est assuré par le contrôleur T-S développé ici. Comme rapporté sur la Figure (3), le véhicule reste sur la voie avec un écart latéral inférieur à 40cm, et ce, malgré la variation de la vitesse longitudinale.

4.2 Test en conduite

Après un bon réglage de la loi de commande en simulation, l'approche proposée est testée sur le simulateur SHERPA (Fig.4).

Dans cet essai, le contrôle latéral du véhicule est assuré à la fois par un conducteur humain et le contrôleur proposé tandis que la vitesse longitudinale est gérée uniquement par le conducteur. Comme déjà souligné précédemment, le but principal est de tester la capacité de l'approche proposée à assurer un bon maintien de voie.

Comme on peut le voir sur la Figure 5 l'approche proposée permet de maintenir le véhicule sur la route avec un écart latéral inférieur à 0.5m et une erreur de cap inférieure à 10° sur toute la trajectoire réalisée avec une faible intervention du conducteur (voir couple



Figure 4: Le simulateur SHERPA .

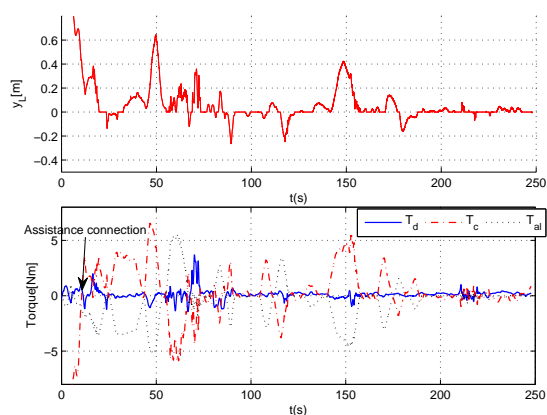


Figure 6: Ressenti du conducteur en conduite sur simulateur, haut: erreur latérale y_L , le bas: couple conducteur T_d , couple de l'assistance T_c , couple d'auto alignement T_{al} .

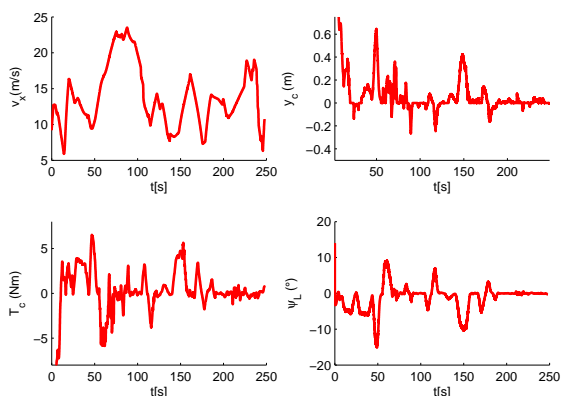


Figure 5: Résultat d'un test de conduite sur simulateur, haut: vitesse du véhicule v_x et erreur latérale y_c , le bas: couple de l'assistance T_c et erreur de cap ψ_L .

conducteur dans la Figure 6).

Afin de mettre en avant le ressenti du conducteur, une représentation des couples délivrés par le conducteur (T_d), l'assistance (T_c) ainsi que le couple d'auto-alignement (T_{al}) est rapportée sur Fig.6.

Par calcul des normes des différents couples, on trouve que le conducteur fournit l'équivalent de 5% du couple total nécessaire pour réaliser le trajet et le reste est fourni par l'assistance.

5 Conclusions

Une assistance au maintien de la voie est proposée dans ce papier. Cette assistance est basée sur un contrôleur T-S correspondant à la modélisation T-S du modèle bicyclette non-linéaire du véhicule. L'objectif est le maintien du véhicule au centre de la voie, sans autant rejeter les actions du conducteur.

L'approche proposée est validée dans un premier temps en simulation avec Matlab/Simulink puis implémentée sur le simulateur dynamique SHERPA afin de mieux quantifier le ressenti du conducteur. Les résultats obtenus jusqu'à présent sont assez prometteurs.

L'objectif qui sera exploré dans les travaux futures concerne l'étude des interactions du contrôleur proposé avec le conducteur à la fois pendant la conduite normale -maintien de la route- et dans des cas d'urgence; présence d'obstacles non détecté, changement de voie... etc. Une piste consiste à prendre en compte le conducteur dans l'étape de synthèse du contrôleur, et ainsi, améliorer la coopération entre le système d'assistance et le conducteur.

A Annex

Dérivé de la fonction de Lyapunov :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= x(t)^T (A_\rho - B_\rho K_\rho)^T X x(t) \\ &\quad + x(t)^T X (A_\rho - B_\rho K_\rho) x(t) \\ &= x(t)^T ((A_\rho - B_\rho K_\rho)^T X + X (A_\rho - B_\rho K_\rho)) x(t)\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}z(t)^T Q z(t) + u(t)^T R u(t) &= x(t)^T C_{z\rho}^T Q C_{z\rho} x(t) \\ &\quad + x(t)^T (B K_\rho)^T R (B K_\rho) x(t)^T \\ &= x(t)^T (C_{z\rho}^T Q C_{z\rho} + (B K_\rho)^T R B K_\rho) x(t)\end{aligned}\quad (18)$$

Complément de Schur :

$$\begin{cases} R > 0 \\ Y + X^T R X < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Y & X^T \\ X & -R^{-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

References

- [1] J. Ackermann and T. Bünte. Yaw disturbance attenuation by robust decoupling of car steering. *Control Engineering Practice*, 5(8):1131–1136, 1997.
- [2] A. El Hajjaji and S. Bentalba. Fuzzy path tracking control for automatic steering of vehicles. *Robotics and Autonomous Systems*, 43(4):203–213, 2003.
- [3] A. El Hajjaji, A. Ciocan, and D. Hamad. Four wheel steering control by fuzzy approach. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 41(2):141–156, 2005.
- [4] N.M. Enache, S. Mammar, M. Netto, and B. Lusetti. Driver steering assistance for lane-departure avoidance based on hybrid automata and composite Lyapunov function. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 11(1):28–39, 2010.
- [5] T.M. Guerra and L. Vermeiren. Control laws for Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*, 120(1):95–108, 2001.
- [6] R. Isermann. Mechatronic systems—innovative products with embedded control. *Control Engineering Practice*, 16(1):14–29, 2008.
- [7] J. Li, H.O. Wang, D. Niemann, and K. Tanaka. Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems: An LMI approach. *Information sciences*, 123(3-4):201–221, 2000.
- [8] S. Mammar, P. Martinet, S. Glaser, M. Netto, L. Nouveliere, and B. Thuilot. Méthodes de l’automatique pour l’assistance et l’automatisation de la conduite automobile. In *Journées Nationales de la Recherche en Robotique (JNRR05)*, France, 2005.
- [9] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design*. Prenlice-Hall, 1995.
- [10] J.C. McCall and M.M. Trivedi. Video-based lane estimation and tracking for driver assistance: survey, system, and evaluation. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 7(1):20–37, 2006.
- [11] M.S. Netto, S. Chaib, and S. Mammar. Lateral adaptive control for vehicle lane keeping. In *Proceedings of the American Control Conference, 2004.*, volume 3, pages 2693–2698. IEEE, 2004.
- [12] O.N.I.S.R. Sécurité routière -chiffres clés : La mortalité routière en France 2010. Technical report, Ministère de la l’intérieur, de l’outre-mer, des collectivités locales et de l’immigration, septembre 2010.
- [13] C. Poussot-Vassal, O. Sename, L. Dugard, and SM Savaresi. Vehicle dynamic stability improvements through gain-scheduled steering and braking control. *Vehicle System Dynamics*, 49(10):1597–1621, 2011.
- [14] Thibaut Raharijaona, Checrel P., and Yagoubi M. Commande l’v d’ordre réduit sous la forme retour d’état-observateur appliquée l’assistance au contrôle latéral. In *IEEE Conférence Internationale Francophone d’Automatique CIFA2006*, Bordeaux, France, may 2006.
- [15] M. Shimakage, S. Satoh, K. Uenuma, and H. Mouri. Design of lane-keeping control with steering torque input. *JSAE Review*, 23(3):317–323, 2002.
- [16] D. Swaroop and S.M. Yoon. The Design of a Controller for a Following Vehicle in an Emergency Lane Change Maneuver. *Institute of Transportation Studies, Research Reports, Working Papers, Proceedings*, 1999.
- [17] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B : Cybernetics*, 15(1):116–132, 1985.
- [18] K. Tanaka, T. Ikeda, and H.O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and lmi-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2):250–265, 1998.
- [19] K. Tanaka and H.O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. Wiley-Interscience, 2001.
- [20] HD Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2):324–332, 2001.
- [21] H.O. Wang, K. Tanaka, and M.F. Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):14–23, 1996.

PI-flou avec une seule entrée pour la commande sans capteur mécanique du MAS exceptée de la rotation directe de Park

A. Lokriti¹

I. Salhi¹

S. Doubabi¹

¹ Faculté des Sciences et Technique Marrakech, Université Cadi Ayyad, BP 549, Av Abdelkarim Elkhatabi, Gueliz, Marrakech, Maroc

Lokriti.eepci@gmail.com, isalhi@yahoo.fr, saiddoubabi@gmail.com

Résumé :

Vue le grand volume de calcul que présente un asservissement de vitesse du MAS, sans capteur mécanique utilisant : i) un reconstituteur de vitesse type MRAS, ii) un contrôleur FLC standard pour la vitesse, et iii) une commande DRFOC. Dans ce papier, nous proposons de remplacer ce contrôleur flou FLC standard (à deux entrées) par un autre à entrée unique noté SIFLC, et d'éliminer la rotation de Park directe de la commande DRFOC. Ceci va permettre une grande réduction du temps de calcul d'un tel asservissement et facilitera par la suite son implémentation. L'asservissement proposé et classique sont comparés par simulation dans l'environnement Matlab/Simulink. Les résultats montrent une équivalence impressionnante.

Mots-clés :

Moteur asynchrone, contrôle flou, commande vectorielle, observateur adaptatif.

Abstract:

View the high computation time that request an induction machine speed drive without mechanical sensor using : i) a MRAS based speed observer, ii) a standard FLC speed controller, and iii) a DRFOC scheme. In this paper, we propose, to replace the standard fuzzy controller FLC (with two inputs) by another single input fuzzy controller noted SIFLC, and remove the direct Park rotation of the DRFOC scheme. This will allow a large reduction in computation time of such a drive and then facilitate its implementation. The proposed and classical drives are compared by simulation in Matlab / Simulink environment. The results show an impressive equivalence.

Keywords:

Induction motor, fuzzy control, field oriented control, adaptive observer.

I. Introduction générale

Ces dernières décennies, et pour des raisons économiques et technologiques, la suppression du capteur mécanique et la réduction du temps de calcul, sont devenus une priorité primordiale dans les asservissements de vitesse du Moteur ASynchrone (MAS) [1].

En fait, peut importe qu'ils utilisent un modèle mathématique du MAS ou pas : Filtre de Kalman [2],

Observateur de Luemberger [3], ou Filtrage Adaptatif et Transformation de Fourier Rapide et Injection de Signal Haute Fréquence [4], l'exigence de moyens performants en termes de traitement du signal, et par fois d'information sur le nombre d'encoques dans le rotor, sont les inconvénients néfastes de ces différents reconstituteurs de vitesse [1]. A l'encontre de ces derniers, l'approche Système Adaptatif utilisant un Modèle de Référence (MRAS) se présente comme une technique plus attractive, car elle est très simple et facile à implémenter [5]. Suivant le signal d'erreur adopté, nombreux types d'MRAS peuvent être distingués, à commencer par l'approche classique : utilisant l'erreur entre les flux rotoriques estimés par les modèles en tension et en courant [6], [7]. En fait, cet approche est très simple, mais souffre des problèmes d'intégration en boucle ouverte de la f.c.é.m. Citant aussi, l'MRAS basé sur l'erreur résultante de l'estimation de la puissance réactive [8], qui présente l'avantage d'être indépendant de la résistance statorique. Pourtant, reste peu utilisé, du fait qu'il se heurte au problème d'amplification du bruit de mesure, résultant de l'application de la fonction dérivé au courant mesuré. Pour remédier à ces problèmes, un autre type d'MRAS est souhaitable. En effet, cet MRAS exploite l'erreur résultante de la multiplication croisée entre l'erreur des courants statoriques (mesurés et estimés) et les flux rotoriques estimés [9]. Encore, le modèle de référence, qu'il utilise, est le MAS entraîné ; ceci le rend relativement, plus robuste aux changements des paramètres du MAS [1]. Ce type d'MRAS a été implémenté, dernièrement par [5], [10], pour l'asservissement de vitesse du MAS et ces performances reflètent un grand succès.

D'autre part, indépendamment du reconstituteur de vitesse adopté, les blocs principaux dans l'algorithme d'asservissement de vitesse, sans capteur mécanique du MAS sont : le contrôleur de vitesse et la commande adoptée pour le contrôle du couple.

En effet, le contrôleur PI, est classiquement employé comme contrôleur de vitesse pour le MAS, vu que sa synthèse repose sur des méthodes très simples (placement de pôles, Ziegler Nichols) [11]. Cependant, il ne peut pas faire face à l'identification imprécise du moment d'inertie, aux dérives des paramètres électriques, aux dynamiques non modélisées (filtres, actionneur...), et à la forte non-linéarité du couple [12], [13]. Afin d'évité ces imperfections, beaucoup de

stratégies de contrôle à base d'intelligence artificielle, ont été proposées dans la littérature pour le contrôle de la vitesse du MAS. Notamment l'utilisation du contrôleur flou (FLC) très proche du résonnement humain, et n'ayant pas besoin de modèles mathématiques des systèmes non linéaires [5], [14] [15]. En réalité, l'utilisation du FLC au lieu du PI, améliorera, sans doute, les performances du contrôle de vitesse du MAS, mais c'est au détriment d'une augmentation considérable du temps de calcul [16], [17].

Aussi, contrairement à la Commande Direct de Couple (DTC), la commande Directe par Orientation du Flux Rotorique (DRFOC), présente l'aptitude de contrôler à la fois le flux, le couple et le courant tout en gardant une fréquence de commutation fixe. En effet, des performances très élevées, en plusieurs points de fonctionnement, ont été obtenu via cette commande pour le contrôleur du couple du MAS [10]. Cependant, la commande DRFOC, présente un temps de calcul, relativement élevé, effet dû principalement au calcul inévitable des termes en sinus et cosinus : premiers consommateurs de temps de calcul et indispensables pour effectuer les deux rotations (directe et inverse) de Park.

Dans ce contexte, vue le grand volume de calcul que présente un asservissement de vitesse du MAS, sans capteur mécanique utilisant : i) un reconstruteur de vitesse type MRAS de courant, ii) un contrôleur FLC standard pour la vitesse, et iii) une commande DRFOC. Dans ce papier, nous proposons de remplacer ce contrôleur flou FLC standard (à deux entrées) par un autre à entrée unique noté SIFLC, et d'éliminer la rotation de Park directe de la commande DRFOC ; ce qui va permettre une grande réduction du temps de calcul d'un tel asservissement. En réalité, les auteurs dans [18] ont pu montrer que les performances du FLC standard peuvent être retrouvées par un SIFLC équivalent. Cette équivalence a été validée pour un convertisseur de tension, type hacheur-élévateur. Les résultats pratiques ont montré la division par dix du temps de calcul, nécessaire pour l'exécution du contrôleur flou, sans dégradation de performances. D'autre part, un simple calcul issu de la conservation de puissance, que nous présentons dans ce papier, montre que les courants statoriques, direct et quadrature, peuvent être retrouvé sans rotation de Park. L'asservissement proposé et classique sont comparés par simulation dans l'environnement Matlab/Simulink. Les résultats montrent une équivalence impressionnante.

II. Notations

i, v et φ	Courant, tension et flux.
R_s, R_r	Résistance statorique et rotorique
L_s, L_r	Inductances cyclique statorique et rotorique.
M	Inductance cyclique mutuelle stator-rotor.

σ	Coefficient de fuite de Blondel.
ω_s	Vitesse de synchronisme.
θ_s	Angle de Park.
ω_g	Pulsation de glissement.
ω	Vitesse électrique du rotor.
Ω	Vitesse mécanique du rotor en (rad/sec).
W	Vitesse mécanique du rotor en (tr/min).
n_p	Nombre de paires de pôles.
J	Moment d'inertie.
f	Coefficient de frottement visqueux.
C_e, C_c	Couples électromagnétique et de charge.
$()^*, ()_n$ et $(\hat{})$	Note des grandeurs de références, nominales et estimées.
$()_{d,q}$ et $()_{\alpha,\beta}$	Note des composantes directes et quadratures dans les repères liés, au champ tournant et au stator.
$()_s$ et $()_r$	Note des grandeurs statoriques et rotoriques.

III. Modélisation dynamique du MAS

Sous certaines hypothèses habituelles, le modèle dynamique du MAS dans le repère (d, q) [19], peut se présenter sous la forme d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_{sd} = \frac{1}{\sigma L_s} \left[-R_s i_{sd} + \omega_s \sigma L_s i_{sq} + \frac{MR_r}{L_r} \varphi_{rd} + \frac{M}{L_r} \omega \varphi_{rq} + v_{sd} \right] \\ \frac{d}{dt} i_{sq} = \frac{1}{\sigma L_s} \left[-\omega_s \sigma L_s i_{sd} - R_s i_{sq} - \frac{M}{L_r} \omega \varphi_{rd} + \frac{MR_r}{L_r} \varphi_{rq} + v_{sq} \right] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_{dr} = \frac{MR_r}{L_r} i_{sd} - \frac{R_r}{L_r} \varphi_{rd} + \omega_g \varphi_{rq} \\ \frac{d}{dt} \varphi_{rq} = \frac{MR_r}{L_r} i_{sq} - \frac{R_r}{L_r} \varphi_{rq} - \omega_g \varphi_{rd} \end{cases} \quad (2)$$

$$C_e = n_p \frac{M}{L_r} (\varphi_{rd} i_{sq} - \varphi_{rq} i_{sd}) \quad (2)$$

$$J \frac{d}{dt} \Omega + f \Omega = C_e - C_c \quad (3)$$

Avec :

$$\omega_g = \omega_s - \omega ; R_{sr} = \left(R_s + R_r \frac{M^2}{L_r^2} \right) ; \sigma = \left(1 - \frac{M^2}{L_s L_r} \right)$$

En effet, modéliser le MAS de cette manière, permet de réduire le nombre de grandeurs qu'on a besoin de connaître pour simuler son fonctionnement [20].

VI. Asservissement de vitesse du MAS sans capteur mécanique.

Le schéma général d'un asservissement de vitesse du MAS sans capteur mécanique, à base d'une commande DRFOC et d'un MRAS de type courant, peut se présenter comme suit [21] :

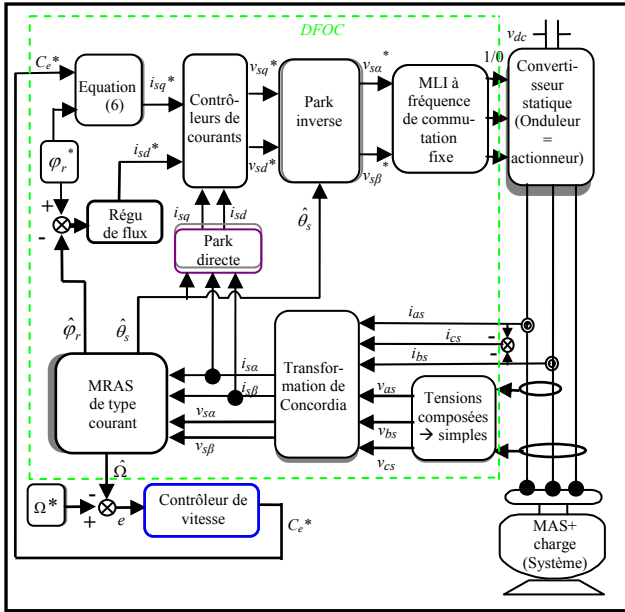


Figure.1 : schéma général d'un asservissement de vitesse du MAS sans capteur mécanique

Dans cet algorithme de commande, des contrôleurs linéaire (type PI, ou IP), de flux et de courants statoriques, assurent de très bonnes performances. Alors qu'un contrôleur non linéaire (type flou) est souvent souhaitable pour l'asservissement de la vitesse [17].

VI.1. Commande vectorielle directe à flux rotorique orienté (DRFOC).

La commande DRFOC reste la commande par orientation de flux la plus utilisée [22], car elle seule permet le contrôle du couple de la MAS, le plus similaire à celui de la MCC à excitation séparée. Selon F. Blaschke, inventeur de la commande DRFOC [23], l'achèvement d'une telle commande par références de flux et de couple, commence par estimer ou observer les composantes du vecteur flux rotorique dans le repère (α, β) : $(\hat{\varphi}_{r\alpha}$ ou $\hat{\varphi}_{r\beta})$. À partir de ces composantes, on estime les valeurs de l'amplitude du flux rotorique $(\hat{\varphi}_r)$ et de sa phase par rapport au repère (α, β) : $(\hat{\theta}_s)$, comme traduit par les équations suivantes :

$$\hat{\varphi}_r = \sqrt{(\hat{\varphi}_{r\alpha})^2 + (\hat{\varphi}_{r\beta})^2} \quad (4)$$

$$\hat{\theta}_s = \arctg\left(\frac{\hat{\varphi}_{r\beta}}{\hat{\varphi}_{r\alpha}}\right) \quad (5)$$

La première valeur sera utilisée comme retour pour la boucle de flux dont la sortie est i_{sd}^* . La deuxième sera prise comme angle de Park. On calcul ensuite i_{sq}^* qui, à partir des équations du MAS dans le repère (d, q) et sous l'hypothèse d'orientation de flux ; $\varphi_{rd} = \varphi_r^*$ et $\varphi_{rq} = 0$, peut s'écrire [22] :

$$i_{sq}^* = C_e^* \frac{L_r}{pM \varphi_r^*} \quad (6)$$

i_{sd}^* et i_{sq}^* sont enfin utilisés comme références pour les boucles de courant. Les sorties de ces dernières représentent les tensions de référence.

VI.2. Reconstruction du flux et de la vitesse (MRAS).

L'asservissement de vitesse du MAS exige d'ajouter à l'algorithme de la commande DRFOC une boucle de vitesse dont la sortie est C_e^* , et afin que sa soit un asservissement sans capteur mécanique, l'addition d'un reconstruteur de vitesse est obligatoire. En fait, il s'agit ici d'un observateur type adaptatif (MRAS), qui permet à la fois la reconstruction du flux et de la vitesse.

L'MRAS que nous avons opté d'utiliser, exploite l'erreur résultante de la multiplication croisée entre l'erreur des courants statoriques (mesurés et estimés) et les flux rotoriques estimés [9]. Le schéma bloc de cet observateur se présente comme suit [10] :

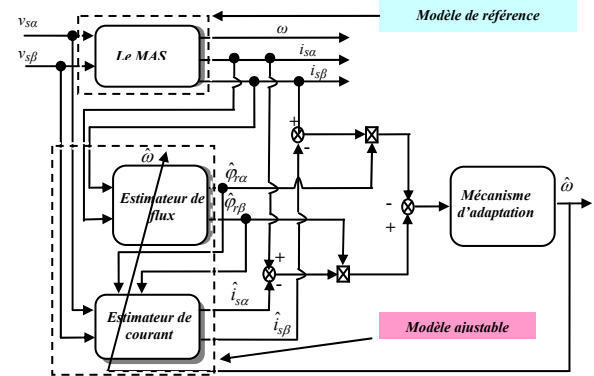


Figure.2 : Le schéma bloc du MRAS (de courant)

En fait, cette technique garantit des performances et une stabilité assez satisfaisante [10]. Comme l'illustre la figure ci-dessus, la vitesse est estimée en utilisant un modèle de référence et un modèle adaptatif. Le modèle de référence est la MAS en elle-même. Alors que le modèle adaptatif, dépendamment de la vitesse, est conçu de deux estimateurs ; de courant et de flux, données respectivement par les deux systèmes d'équations suivantes [5] :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{i}_{s\alpha}}{dt} = \frac{R_r M^2 + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2} \hat{i}_{s\alpha} + \frac{1}{\sigma L_s} v_{s\alpha} \\ \quad + \frac{R_r M}{\sigma L_s L_r^2} \hat{\varphi}_{r\alpha} + \hat{\omega} \frac{M}{\sigma L_s L_s} \hat{\varphi}_{r\beta} \\ \frac{d\hat{i}_{s\beta}}{dt} = \frac{R_r M^2 + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2} \hat{i}_{s\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} v_{s\beta} \\ \quad + \frac{R_r M}{\sigma L_s L_r^2} \hat{\varphi}_{r\beta} - \hat{\omega} \frac{M}{\sigma L_s L_s} \hat{\varphi}_{r\alpha} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\varphi}_{r\alpha}}{dt} = \left[\frac{R_r}{L_r} (M i_{s\alpha} - \hat{\varphi}_{r\alpha}) - \hat{\omega} \hat{\varphi}_{r\beta} \right] \\ \frac{d\hat{\varphi}_{r\beta}}{dt} = \left[\frac{R_r}{L_r} (M i_{s\beta} - \hat{\varphi}_{r\beta}) + \hat{\omega} \hat{\varphi}_{r\alpha} \right] \end{cases} \quad (8)$$

Notons que ces estimateurs exigent, en plus de la connaissance de la vitesse électrique $(\hat{\omega})$, la mesure des courants et tensions statoriques. La vitesse électrique

estimée, n'est rien que la sortie d'un mécanisme d'adaptation (souvent un contrôleur PI). Les gains de ce contrôleur PI sont généralement retrouvés via la méthode essai-erreur, tenant en compte des limitations causées par les bruits provenant des mesures [24]. Notons que la vitesse mécanique estimée se déduit de celle électrique de la façon suivante :

$$\hat{\Omega} = n_p \hat{\omega} \quad (9)$$

VI.3. Contrôleur flou standard de vitesse (FLC)

La figure (3), montre le schéma bloc d'un contrôleur FLC (noté aussi PIFLC), qui peut être utilisé pour l'asservissement de vitesse du MAS [25]

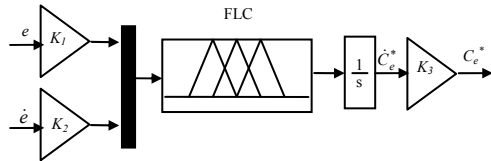


Figure.3 : le schéma bloc d'un contrôleur FLC standard

Ce contrôleur flou est constitué d'un contrôleur flou basic, un intégrateur et des Facteurs d'Echèle (FEs). Les entrées du bloc flou sont les valeurs de l'erreur de vitesse et sa dérivée (e et \dot{e}) multipliées respectivement par les FEs (K_1) et (K_2), et sa sortie est la variation du couple de référence (\dot{C}_e^*), qui après intégration et multiplication par le FE (K_3), donne le couple de référence C_e^* . Les cinq Fonctions d'Appartenance (FAs), que nous avons utilisées pour fuzzifier les entrées et la sortie du FLC, type Sugeno, sont respectivement présentées par les figures (4) et (5). En effet, les FAs des entrées sont présentées par les figures (4) et (5). En effet, les FAs des entrées sont présentées par les figures (4) et (5). En effet, les FAs des entrées sont présentées par les figures (4) et (5). En effet, les FAs des entrées sont présentées par les figures (4) et (5).

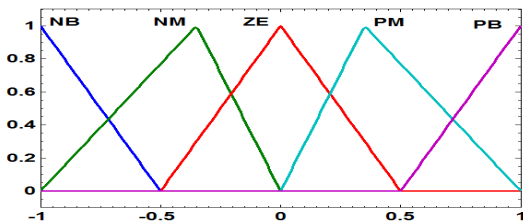


Figure.4 : FAs, utilisées pour les entrées du FLC

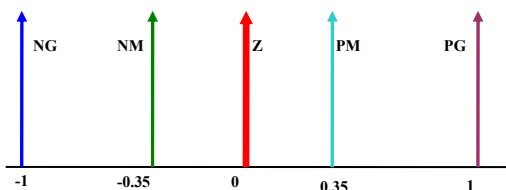


Figure.5 : FAs, choisies pour la sortie du FLC

La table (1) regroupe les différentes règles, établies en se basant sur la structure de Toeplitz qui reste valable pour tout les FLCs qui utilisent l'erreur et sa dérivée comme variable d'entrée [26], [27].

Table.1 : Table des règles du FLC

e \ e-dot	NG	NM	Z	PM	PG
NG	Z	NM	NG	NG	NG
NM	PM	Z	NM	NG	NG
Z	PG	PM	Z	NM	NG
PM	PG	PG	PM	Z	NM
PG	PG	PG	PG	PM	Z

Dans notre cas, le contrôleur flou comporte 25 règles, et la méthode de défuzzification utilisée est la méthode des sommes pondérées. Les choix que nous avons effectués sur la répartition des FAs et pour la table des règles donnent lieu à une surface, des règles floues, de forme non-linéaire comme l'indique la figure suivante :

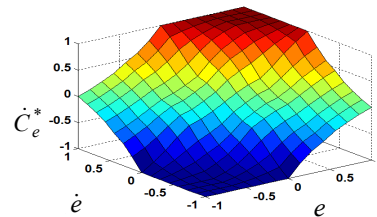


Figure. 6 : Allures de la surface des règles floues du FLC

Pour exploiter tout l'univers de discours, K_1 est choisi de telle sorte que le produit ($e \times K_1$), demeure à l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$. En effet, K_1 a été choisi égal à l'inverse de la variation maximale de la vitesse de référence ($\Omega_{max}^* = 157$ rad/sec). Parce que l'un dépend de l'autre, K_2 et K_3 ont été ajustés manuellement lors de plusieurs essais (test-erreur). Les valeurs adoptées sont ceux qui ont aboutis à un temps de réponse en vitesse, égal à 0.4 (sec). Ce choix a permis, en fait, de limiter la sortie du contrôleur FLC à une valeur égale à $C_e^* = 1.5 \times C_{en} = 15$ (N.m). Les valeurs numériques des FEs utilisés, sont les suivantes : $K_1 = 6.37 \times 10^{-3}$, $K_2 = 1 \times 10^{-3}$ et $K_3 = 1.5 \times 10^3$.

V. Elimination de la rotation de Park directe

Comme indiqué dans la figure (1), les boucles de courants statoriques, indispensables dans une commande DRFOC, sollicitent l'utilisation de la rotation de Park directe tel que :

$$i_{sq} = \sin(\hat{\theta}_s) i_{s\alpha} - \cos(\hat{\theta}_s) i_{s\beta} \quad (10)$$

$$i_{sd} = \cos(\hat{\theta}_s) i_{s\alpha} + \sin(\hat{\theta}_s) i_{s\beta} \quad (11)$$

L'élimination de ces fonctions trigonométriques, ne peut être que favorable en terme de réduction de temps de calcul. En réalité i_{sd} et i_{sq} , peuvent être calculées d'une autre façon ; selon le repère où les calculs sont effectués, et on se basant sur le principe de la conservation de puissance, le couple électromagnétique peut s'écrire sous différentes formes équivalentes. En effet, les équations suivantes présentent deux d'elles :

$$C_e = \frac{p \cdot L_m}{L_r} \cdot \text{Imag} \left[\bar{i}_s \bar{\phi}_r^c \right] = \frac{p \cdot L_m}{L_r} (\hat{\phi}_{r\alpha} i_{s\beta} - i_{s\alpha} \hat{\phi}_{r\beta}) \quad (12)$$

$$= p \cdot (L_m / L_r) (\hat{\phi}_{rd} i_{sq} - i_{sd} \hat{\phi}_{rq})$$

$$\text{où : } \bar{i}_s = (i_{s\alpha} + j i_{s\beta}) \text{ et } \bar{\phi}_r^c = (\hat{\phi}_{r\alpha} - j \hat{\phi}_{r\beta})$$

A partir de ces égalités de couple et sous la condition d'orientation du repère (d, q) suivant le flux rotorique $\hat{\phi}_{rq} = 0$, on conclut que i_{sq} peut aussi s'écrire :

$$i_{sq} = \frac{(\hat{\phi}_{r\alpha} i_{s\beta} - i_{s\alpha} \hat{\phi}_{r\beta})}{\hat{\phi}_{rd}} = \frac{(\hat{\phi}_{r\alpha} i_{s\beta} - i_{s\alpha} \hat{\phi}_{r\beta})}{\hat{\phi}_r} \quad (13)$$

En procédant de la même façon, mais en considérant cette fois la partie réelle au lieu de la partie l'imaginaire du même produit $(\bar{i}_s \bar{\phi}_r^c)$ nous retrouvons :

$$i_{sd} = \frac{(\hat{\phi}_{r\alpha} i_{s\alpha} + i_{s\beta} \hat{\phi}_{r\beta})}{\hat{\phi}_r} \quad (14)$$

Notons que ce calcul n'introduit que des opérations arithmétiques simples et ne fait pas appel aux fonctions trigonométriques ; comme dans le cas de la rotation de Park directe qui exige leur calcul.

VI. Contrôleur flou à entrée unique de vitesse (SIFLC)

En se basant sur l'étude effectuée par [18], il est possible de remplacer le contrôleur FLC à deux entrées (l'erreur et sa dérivée), de type Sugeno, et dont la table des règles respecte la structure de Toeplitz, par un autre, équivalent, mais à entrée unique (SIFLC). En fait, cette étude basée sur la méthode de distance signée, permet de transformer la dimension de la surface des règles floue de trois à deux. Le schéma bloc du SIFLC que nous avons utilisé est présenté par la figure suivante :

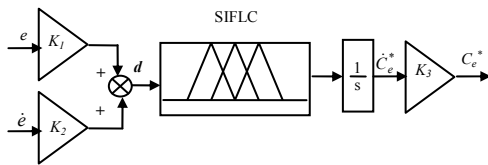


Figure. 7 : Le schéma bloc du SIFLC

où d est l'entrée unique du bloc flou, appelée distance signée.

On note que l'entrée du contrôleur flou et sa sortie sont respectivement, fuzzifiée, défuzzifiée et misent en échèle par les mêmes FAs et FEs utilisés pour les variables du FLC standard. Alors que la table des règles floues se réduit à :

Table.2 : Table de règles du SIFLC

d	NG	NM	Z	PM	PG
\dot{c}_e	NG	NM	Z	PM	PG

Ainsi la surface des règles se réduit à une fonction bidimensionnelle comme l'illustre la figure qui suit :

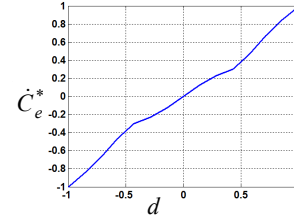


Figure. 8 : Allures de la surface de control flou du SIFLC

L'avantage principal du contrôleur SIFLC, c'est qu'il permet de réduire le nombre des règles floues de $(n \times n)$ à (n) : dans notre cas c'est de 25 à 5. Ceci va, sûrement, réduire largement le temps de calcul [18].

VII. Résultats de simulation

Dans le but de valider séparément l'effet de l'élimination de la rotation de Park directe, de celui de la substitution du FLC par le SIFLC. Nous avons effectué, séparément, deux tests de simulation dans l'environnement Matlab/Simulink, sur un modèle d'un MAS (1.5 KW) déjà identifié dans notre laboratoire (voir table 3). Nous avons aussi choisi pour ces simulations une fréquence de Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI) égale à $f_{MLI} = 8$ (KHz). Alors que le pas de simulation (T_s) est pris 25 fois plus petit que période de la MLI: $T_s = 5e^{-6}$ (sec). Ce choix est en fait dicté par la nécessité de bien reconstruire le signal modulant (triangulaire) de la MLI et assurer un bon fonctionnement de l'actionneur (onduleur).

Le premier test concerne l'équivalence entre la rotation de Park directe, et les équations à base de la conservation de puissance, dans le calcul de i_{sd} et i_{sq} . En effet, il s'agit d'un test par référence de couple (en boucle ouverte de vitesse), qui dure 3 (sec). Le flux rotorique de référence est pris égal à sa valeur nominale $\phi_r^* = 0.4713$ (Wb) et une séquence d'échelons aussi bien positifs que négatifs [7.55, 0.8, -6.35] (N.m) est prise comme référence de couple. Les résultats de ce test sont présentés par les figures (9-16).

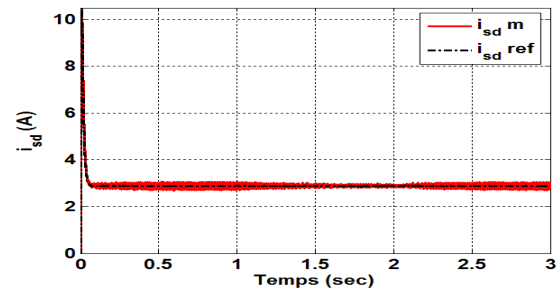


Figure. 9 : Courants statoriques directs (DRFOC-avec rotation de Park)

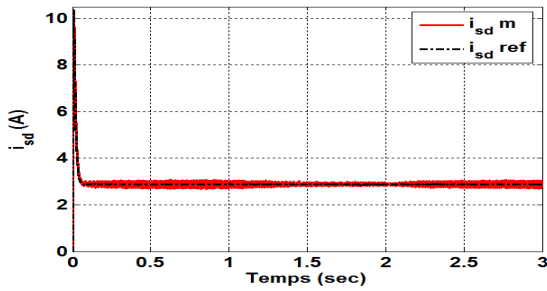


Figure. 10 : Courants statoriques directs (DRFOC-sans rotation de Park)

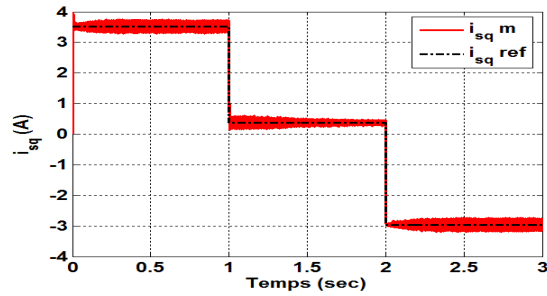


Figure. 11 : Courants statoriques quadratures (DRFOC-avec rotation de Park)

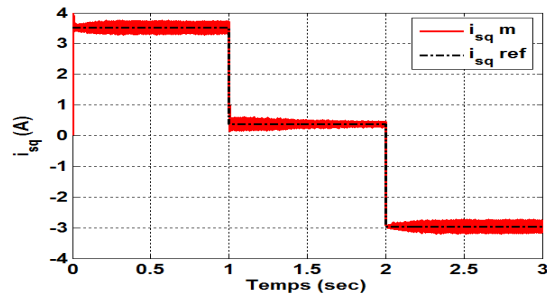


Figure. 12 : Courants statoriques quadratures (DRFOC-sans rotation de Park)

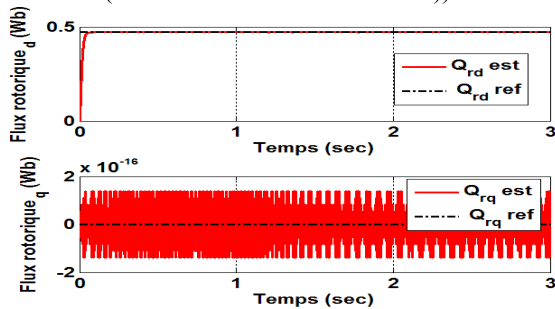


Figure. 13 : Flux rotoriques (DRFOC- avec rotation de Park)

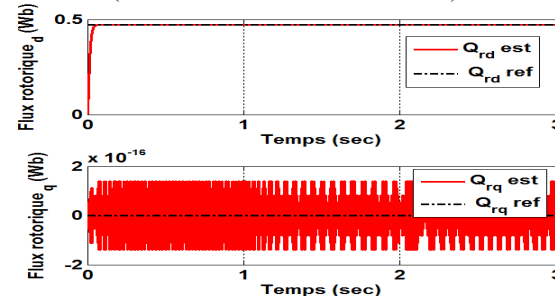


Figure. 14 : Flux rotoriques (DRFOC- sans rotation de Park)

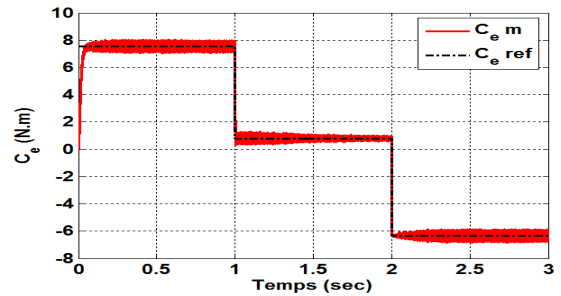


Figure. 15 : Couples électromagnétiques (DRFOC-avec rotation de Park))

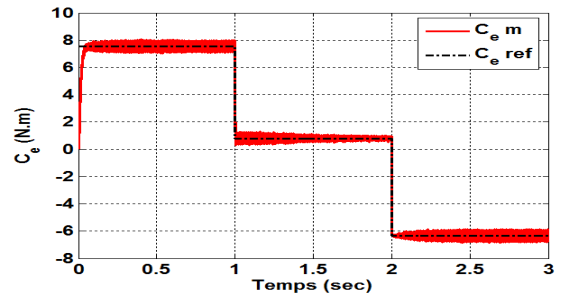


Figure 16. : Couples électromagnétiques (DRFOC- sans rotation de Park)

A partir des figures (9-12), nous remarquons une équivalence parfaite entre les deux méthodes de calcul les courants i_{sd} et i_{sq} . Cette équivalence est renforcée par les résultats identiques obtenus pour les couples et les flux ; voir figures (13-16). En fait, après un régime transitoire très court, nécessaire pour l'établissement du flux, il est très claire que toutes les grandeurs mesurées suivent parfaitement leur références, validant ainsi le bon fonctionnement de la commande DFOC et la similitude entre les deux méthodes de calcul des courants i_{sd} et i_{sq} .

L'objectif du deuxième test est de mettre en épreuve, les deux correcteurs FLC et SIFLC et de comparer leurs performances lors d'un asservissement de vitesse du MAS sans capteur mécanique. Cette comparaison comporte deux essais : un en poursuite et l'autre en rejet de perturbation. Dans le premier essai, effectué à vide, une sinusoïde d'amplitude égale $W_n=1500$ (tr/min) et de période égale à 5 (sec) est prise comme référence de vitesse. Alors que, dans le deuxième essai, la séquence de référence pour la vitesse est prise égale à [1300, 400, -540] (tr/min), et le couple de charge est choisi comme fonction de la vitesse, de tel sorte à avoir un couple charge nominale à vitesse nominale. Pour mieux tester le rejet de perturbations, un autre couple de charge de 4 (N.m) est insérer à l'instant $t=2.3$ et enlever à $t=3.5$ (sec). Les résultats du premier essai sont illustrés par les figures (17-19), tandis que les figures (20-22) présentent ceux du deuxième. Notons que nous avons effectué ce test sans rotation direct de Park.

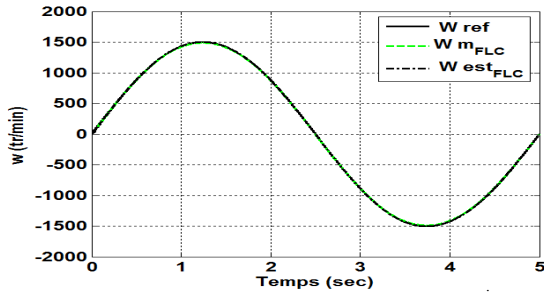


Figure. 17 : Allures des vitesses avec FLC, 1^{er} essai

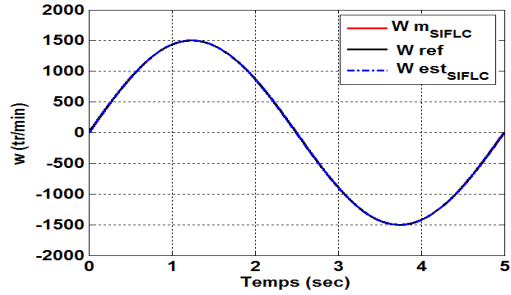


Figure. 18 : Allures des vitesses avec SIFLC, 1^{er} essai

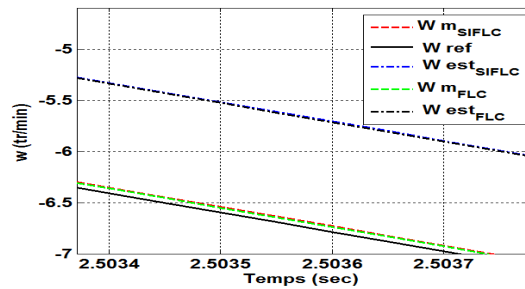


Figure. 19 : zoom sur les allures des différentes vitesses, 1^{er} essai

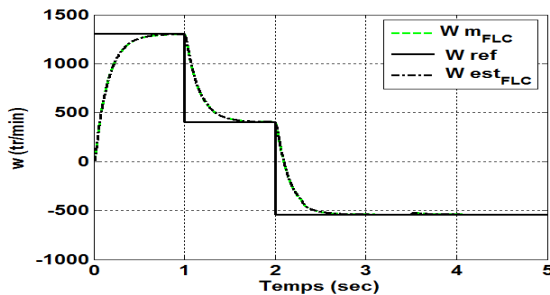


Figure. 20 : Allures des vitesses avec FLC, 2^e essai

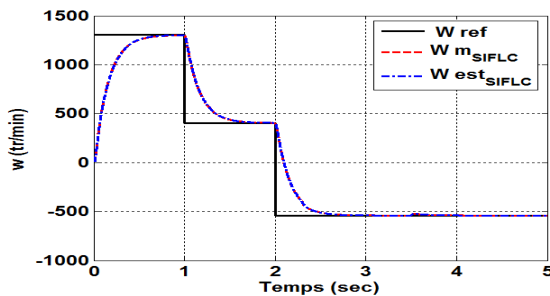


Figure. 21 : Allures des vitesses avec SIFLC, 2^e essai

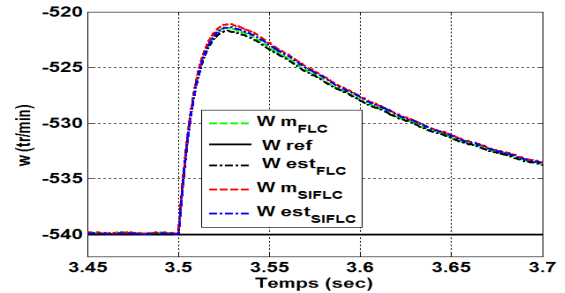


Figure. 22 : zoom sur les allures des différentes vitesses, 2^e essai

A partir de ses réponses, nous pouvons voir que les performances des deux contrôleurs : FLC et SIFLC sont semblables, dans tous les points de fonctionnement choisis. En réalité, que ce soit une poursuite ou une régulation : à vide ou en charge, le contrôleur SIFLC arrive à simuler le comportement du contrôleur FLC avec une erreur qui ne dépasse en aucun cas 0.5 (tr/min) 0.033% $\times W_n$. En effet, pour visualiser cette erreur, il a fallu faire plusieurs agrandissements

VIII. Conclusion & perspective

Dans ce papier, un asservissement de vitesse du MAS, sans capteur mécanique, utilisant un reconstruteur de vitesse type MRAS de courant, un contrôleur FLC standard pour la vitesse et une commande DRFOC. Nous avons proposé de substituer respectivement la rotation de Park directe et le contrôleur flou standard (FLC) de vitesse, par un simple calcul issu de la conservation de puissance et un contrôleur flou à entrée unique (SIFLC). Les résultats de simulation ont montré une équivalence immense entre les performances des deux asservissements, classique et proposé, en poursuite comme rejet de perturbations. Sans doute, cette proposition permettra de diminuer largement le temps de calcul et facilitera ainsi l'implémentation d'un tel asservissement surtout quand il s'agit d'un asservissement sans capteur mécanique utilisant un reconstruteur de vitesse consommateur de temps de calcul. Notre perspective c'est d'implémenter cette commande en temps réel sur une carte DSPACE afin de quantifier ce gain en temps de calcul et valider pratiquement cette théorie.

Table. 3: Valeurs des paramètres du MAS

n_p	2
R_s	4.75 Ω
R_r	1.2 Ω
L_s	0.4 H
L_r	0.07 H
M	0.162 H
$J=J_{IM}+J_{load}$	0.025 Kg.m ²
$f=f_{IM}+f_{load}$	25×10^{-4} Kg.m ² /sec

Références :

- [1] C.W. Park, W.H. Kwon. Simple and robust speed sensorless vector control of induction motor using stator current based MRAC. *Electric Power Systems Research*, 71(3): 257-266, 2004.
- [2] J. K. Ji, S. K. Sul. Kalman filter and LQ based speed controller for torsional vibration suppression in a 2-mass motor drive system. *IEEE Trans. Ind. Electron*, 42(6): 564-571, 1995.
- [3] J. Song, K. B. Lee, J. H. Song, I. Choy, K. B. Kim. *Sensorless vector control of induction motor using a novel reduced-order extended Luenberger observer*. In *Proc. Ind. Applicat. Soc. (IAS) Conf, 2000*, pp. 1828-1834.
- [4] F. Briz, A. Diez, and M. W. Degner. Dynamic operation of carrier-signal injection-based sensorless direct field-oriented AC drives. *IEEE Trans. Ind. Appl*, 36(5): 1360-1368, 2000.
- [5] T. Orłowska, K. M. Dybkowski, and K. Szabat. MRAS-Type Speed and Flux Estimator with Additional Adaptation Mechanism for the Induction Motor Drive. *IEEE TRANSON Electrical Engineering*, 1 (1): 7-12, 2012.
- [6] S. Tamai, H. Sugimoto, and M. Yano. *Speed sensor-less vector control of induction motor with model reference adaptive system*. *Conf IEEE-IAS*, 1987, pp. 189-195.
- [7] C. Schauder. *Adaptive speed identification for vector control of induction motor without rotational transducers*. *Conf IEEE-IAS*, 1989, pp. 493-499.
- [8] F.Z. Peng, T. Fukao. Robust speed identification for speed sensorless vector control of induction motors. *Trans on Ind App*, 30(5): 1234-1240, 1994.
- [9] M. Dybkowski and T. Orłowska-Kowalska. *Application of the stator current-based MRAS speed estimator in the sensorless induction motor drive*. In *Proc. 13th Conf. EPE-PEMC*, 2008, pp: 2306-2311.
- [10] T. Orłowska-K., M. Dybkowski, and K. Szabat. Adaptive Sliding-Mode Neuro Fuzzy Control of the Two-Mass Induction Motor Drive Without Mechanical Sensors. *IEEE TRANSON IND ELECTRO*, 57(2): 553-564, 2010.
- [11] SM. Gadoue, D. Giaouris, JW. Finch. Artificial intelligence-based speed control of DTC induction motor drives, a comparative study. *Electric Power Systems Research*, 79 :210-219, 2009.
- [12] D. Vasanthi, B. Pranavamoorthy, N. Pappa. Design of a self-tuning regulator for temperature control of a polymerization reactor. *ISA Transactions*, 51(1): 9-22, 2012.
- [13] YM. Zhao, WF. Xie, XW. Tu. Performance-based parameter tuning method of model-driven PID control systems. *ISA Transactions*, 51(3): 393-399, 2012.
- [14] M. Uddin Nasir, H. Wen. Development of a self-tuned neuro-fuzzy controller for induction motor drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 43(4):1108-1116, 2007.
- [15] I. Pan, S. Das, A. Gupta. Tuning of an optimal fuzzy PID controller with stochastic algorithms for networked control systems with random time delay. *ISA Transactions*, 50(1): 28-36, 2011.
- [16] A. Lokriti, Y.Zidani, S.Doubabi. *Fuzzy logic control contribution to the direct torque and flux control of an induction machine*. *ICMCS conf*, 2011, pp. 1-6.
- [17] A. Lokriti et al. Induction motor speed drive improvement using fuzzy IP-self-tuning controller. A real time implementation. *ISA Transactions*, 52(3): 406-417, 2013.
- [18] Z. Salamet al. Design and Implementation of a Single Input Fuzzy Logic Controller for Boost Converters. *Journal of Power Electronics*, 11(4): 542-550, 2011.
- [19] A.Nasri, A.Hazzab, I.Bousserhane, S.Hadjeri and P. Sicard. Two Wheel Speed Robust Sliding Mode Control for Electric Vehicle Drive. *SERBIAN JOURNAL OF ELECTRICAL ENGINEERING*, 5(2) : 199-216, 2008.
- [20] A. Lokriti, Y. Zidani, S. Doubabi. *Comparaison des performances des régulateurs PI et IP appliqués pour la commande vectorielle à flux rotorique orienté d'une machine asynchrone*. *8ème Conférence Internationale de Modélisation et Simulation*, 2010.
- [21] K. Nabti, K. Benalla. A fuzzy IRFOC application based speed sensorless control of IM using speed and load torque observer. *Inter Journal of Electrical and Power Engineering*, 2:179-184, 2008.
- [22] A. Barazouk. Estimation par réseaux de neurones de la constante de temps de la machine asynchrones. Thèse de doctorat de l'Ecole polytechnique de Montreal Canada. 1998.
- [23] F. Blaschke. The principle of field orientation as applied to the new transvector closed loop control system in a PWM inverter induction motor drive. *Siemens Rev*, 39: 217-220 1972.
- [24] S. M. Gadoue, D. Giaouris, J.W. Finch, MRAS. Sensorless vector control of an induction motor using new sliding mode and fuzzy logic adaptation mechanisms. *IEEE Transaction on Energ Conversion*, 25(2): 394-402, 2010.
- [25] M. Masiala, B. Vafakhah, J. Salmon, A. Knight. Fuzzy self-tuning speed control of an indirect field-oriented control induction motor drive. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 44:1732-1740, 2008.
- [26] C. Byung-Jae, K. Seong-Woo, K. Byung-Kook. Design and stability analysis of single-input fuzzy logic controller. *IEEE Transactions on Systems*, 30: 303-309, 2000.
- [27] K. Ishaque, SS. Abdullah, SM. Ayob, Z. Salam. A simplified approach to design fuzzy logic controller for an underwater vehicle. *Ocean Engineering*, 38: 271-84, 2011.

Commande basée sur observateur des débits d'air d'un moteur diesel par l'approche floue de type T-S

I. Abidi¹

J. Bosche¹

A. El hajjaji¹

¹ Université de Picardie Jules Verne, MIS

33 rue Saint Leu 80039 Amiens Cedex 1 France

ines.abidi@u-picardie.fr, jerome.bosche@u-picardie.fr, ahmed.hajjaji@u-picardie.fr

Résumé :

Dans cet article, une technique de commande basée sur observateur est proposée pour contrôler les flux d'air et la quantité de fuel d'un moteur diesel dans le but de réduire l'émission de particules polluantes et de réduire la consommation de carburant. La performance H_∞ est utilisée pour garantir le suivi de certains signaux de références. La modélisation de la boucle d'air utilise l'approche floue de type Takagi-Sugeno (T-S). Des conditions suffisantes pour assurer le suivi de références sont établies et écrites sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI).

Mots-clés :

Moteur diesel ; Takagi-Sugeno ; Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs) ; observateur ; H_∞

1 Instructions générales

Les constructeurs automobiles sont confrontés à un réel déficit : concevoir des véhicules rejetant un minimum de polluants. Ils sont contraints à équiper leurs véhicules de dispositifs de plus en plus performants dont l'unique objectif est de minimiser toujours plus les émissions de polluants. Ce qui engendre l'augmentation du prix d'un véhicule. D'autres stratégies consistent d'agir sur le processus de combustion. En effet, les moteurs Diesel sont dorénavant équipés d'actionneurs contrôlables tels que les turbo-compresseurs à géométrie variable VGT (Variable Geometry Turbine) et les vannes de recirculation des gaz d'échappement EGR (Exhaust Gas Recirculation). Le principe de l'EGR est de réinjecter des gaz brûlés dans le collecteur, qui viennent se mélanger à l'air frais et permettent de diminuer la formation de certains polluants (en particuliers les oxydes d'azote NO_x) en abaissant la température de combustion. C'est dans ce contexte que se situent les travaux présentés dans cet article qui consiste

à développer des techniques de commande afin de contrôler les deux vannes EGR et VGT. L'idée est d'agir sur le processus de combustion, c'est à dire sur la boucle d'air : contrôler les masses aspirées dans les cylindres (air frais et gaz brûlés) en agissant sur les ouvertures des deux vannes VGT et EGR. L'objectif du travail est de construire un contrôleur qui permet le suivi de trajectoires de certains signaux de références. Ces signaux doivent être construits expérimentalement de façon à optimiser les émissions de polluants et la consommation de carburant. Dans la littérature, le contrôleur le plus populaire c'est le PID [3], [9]. Pour ce type de contrôle, il faut régler les gains du PID pour chaque marge de fonctionnement du moteur. D'autres lois de commande basées sur des versions linéarisées du modèle du système moteur diesel sont adoptées et là encore les coûts de calibration sont importants, on peut citer la commande prédictive [5].

Différents modèles du système moteur diesel sont proposés dans la littérature [11], [2], [1]. La modélisation de type T-S a été récemment adoptée [4]. Dans cet article, en se basant sur la modélisation T-S du modèle de Jankovic [8], un contrôleur flou est proposé. Des conditions suffisantes sous forme de "LMIs" sont établies afin d'assurer le suivi des signaux de références.

Ce papier est organisé comme suit : dans la section 2, le modèle de Jankovic de la boucle d'air est présenté. Dans la section 3, nous abordons la procédure de modélisation du système sous forme T-S. Dans la section 4, la méthode de commande basée sur observateur pour les systèmes flous de type T-S est présentée. Des résultats de simulation pour illustrer la valida-

tion de l'approche proposée sont présentés dans la section 5.

Notations : \circledast et \mathbb{I} désignent respectivement la matrice nulle et la matrice identité de dimensions appropriées.

2 Modélisation du circuit d'admission d'un moteur diesel

Un schéma de principe d'un moteur diesel turbo-compresseur avec EGR est représenté sur la Fig.1. Dans la littérature, la modélisation

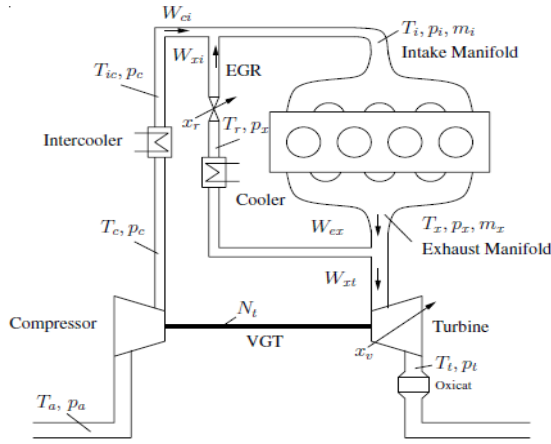


Figure 1 – Schéma de principe d'un moteur diesel Turbo-compresseur avec EGR

du moteur Diesel peut être classée selon deux grandes familles : les modèles basés sur des cartographies réalisées à l'aide de mesures sur des lois physiques ou des modèles dynamiques. Dans cet article, on considère le modèle appartenant à la deuxième famille. Dans ce travail, le modèle adopté est celui de Jankovic [8], c'est un modèle à valeur moyenne décrivant l'évolution de trois variables d'état : la pression dans le collecteur d'échappement et la puissance du Turbo-compresseur

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{RT_i}{V_i} (W_{ci} + W_{xi} - W_{ie}) \\ \dot{p}_x &= \frac{RT_x}{V_x} (W_{ie} - W_{xi} - W_{xt} + W_f) \\ \dot{P}_c &= \frac{1}{\tau} (-P_c + \eta_m P_t) \end{aligned} \quad (1)$$

Avec τ , η_m , V_i et V_x représentent la constante du temps, le rendement mécanique du turbocompresseur et les volumes des deux collecteurs (admission et échappement). Ces paramètres sont constants : $\tau = 0.11$, $\eta_m = 0.98$, $V_i = 0.002m^2$ et $V_x = 0.002m^2$.

Les équations du modèle sont écrites en fonction des différents débits à l'entrée et à la sortie des cylindres.

Le débit d'air entrant dans les cylindres n'est pas mesurable. La solution est d'estimer la masse d'air admise dans les cylindres à chaque cycle de fonctionnement du moteur à partir des variables disponibles à la mesure. Il existe des approximations, plus ou moins complexes de cette variable par exemple

$$W_{ie}(N, p_i) = \eta_v(N, p_i) \frac{NV_d}{120T_i R} p_i \quad (2)$$

où V_d est la cylindrée totale du moteur, N est le régime moyen du moteur, Le coefficient $\eta_v(N, p_i)$ représente le rendement volumétrique, T_i est la température dans le collecteur d'admission.

Le débit d'air en provenance du compresseur W_{ci} est donné par l'expression suivante :

$$W_{ci} = \frac{\eta_c}{c_p T_a} \frac{P_c}{\left(\frac{p_i}{p_a}\right)^\mu - 1} \quad (3)$$

où η_c et T_a , représentent respectivement l'efficacité du turbocompresseur et la température ambiante. $\eta_c = 0.61$, $T_a = 298^\circ C$

c_p , c_v , sont les chaleurs massiques de l'air à volume constant et à pression constante.

$\mu = \frac{c_p - c_v}{c_p}$ est le rapport des chaleurs et p_a est la pression ambiante.

W_{xi} le débit à travers la vanne EGR s'écrit :

$$W_{xi} = \frac{A_{egr}(x_{egr}) \psi_{egr}(p_i, p_x)}{\sqrt{RT_x}} p_x \quad (4)$$

où $A_{egr}(x_{egr})$ est la surface effective fonction de la position de la vanne EGR, T_x est la température dans le collecteur d'échappement. $R = 287 \left(\frac{J}{kgK}\right)$ est la constante modèle des gaz parfaits.

Le débit vers la turbine en sortie du collecteur d'échappement s'écrit :

$$W_{xt} = A_{vgt}(x_{vgt}) \left(c \left(\frac{p_x}{p_a} - 1 \right) + d \right) \frac{p_x}{p_{ref}} \sqrt{\frac{T_{ref}}{T_x}} \sqrt{\frac{2p_a}{p_x} \left(1 - \frac{p_a}{p_x} \right)} \quad (5)$$

où c et d sont des paramètres constants tels que : $c = 0.4$ et $d = 0.6$. P_c est la puissance consommée par le turbocompresseur et donnée par la relation :

$$\dot{P}_c = \frac{1}{\tau} (-P_c + \eta_m P_t) \quad (6)$$

Pour faire tourner le compresseur, la turbine permet de récupérer l'énergie fournie par les gaz à l'échappement et la réinjecter à l'entrée du moteur.

La puissance fournie par la turbine est donnée par cette équation

$$P_t = W_{xt} c_p T_x \eta_t \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_x} \right)^\mu \right) \quad (7)$$

où T_x et p_x sont respectivement la température et la pression à l'échappement, $\eta_t = 0.76$ est le rendement de la turbine. $W_f = \frac{10^{-6}}{120} N n_{cyl} v_\delta$ est le débit massique du carburant dans les cylindres. W_f est contrôlé par v_δ . La donnée nécessaire pour assurer une combustion complète est le débit d'air. La masse d'air entrant dans le moteur est un mélange d'air frais et de gaz brûlés, le débit d'air en provenance du compresseur W_{ci} peut être mesuré (en utilisant un débitmètre massique en amont du compresseur).

Remark 2.1

En réalité, les débits aspiré par les cylindres sont contrôlés en agissant sur les surfaces d'ouverture des vannes A_{egr} et A_{vgt} . Dans cet article, les débits sont directement contrôlés et les surfaces sont déduites à partir de (4) et (5).

3 Modèle flou du moteur diesel sous forme T-S

Considérons $x_1 = p_i$, $x_2 = p_x$, $x_3 = P_c$, $u_1 = W_{xi}$, $u_2 = W_{xt}$ et $u_3 = v_\delta$. Notons : $\alpha_i = \frac{RT_i}{V_i}$, $\beta_i = \frac{1}{T_i R} V_d \frac{1}{120}$, $\alpha_x = \frac{RT_x}{V_x}$, $\beta_x = \eta_m \eta_t c_p T_x$ et $a_f = \frac{10^{-6}}{120} N n_{cyl}$.

Le système non-linéaire (1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha_i \beta_i \eta_\nu N \mathbf{x}_1 + \alpha_i \mathbf{u}_1 + \rho_1(x_1) \mathbf{x}_3 \\ \dot{x}_2 &= \alpha_x \beta_i \eta_\nu N \mathbf{x}_1 - \alpha_x \mathbf{u}_1 - \alpha_x \mathbf{u}_2 + \alpha_x a_f \mathbf{u}_3 \\ \dot{x}_3 &= -c_k \mathbf{x}_3 + \rho_2(x_2) \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Les fonctions non linéaires sont données par :

$$\rho_1 = \alpha_i a_{ci} \frac{1}{\left(\frac{x_1}{p_a} \right)^\mu - 1}, \quad \rho_2 = c_k \beta_x \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_x} \right)^\mu \right] \quad (9)$$

Le système non-linéaire (8) peut être écrit dans l'espace d'état tel que :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_i \\ \dot{p}_x \\ \dot{P}_c \end{bmatrix} = A(x_1, x_2) \begin{bmatrix} p_i \\ p_x \\ P_c \end{bmatrix} + B(x_1, x_2) \begin{bmatrix} W_{xi} \\ W_{xt} \\ v_\delta \end{bmatrix} \quad (10)$$

Les non linéarités $\rho_1(p_i)$ and $\rho_2(p_x)$ sont supposées bornées.

$$\forall i \in 1, \dots, n = 4, \quad \underline{\rho}_i \leq \rho_i \leq \bar{\rho}_i \quad (11)$$

Dans cet article, Le débit dans la vanne EGR et le débit de la turbine sont directement contrôlés, ce qui implique $n = 2$ non linéarités et $r = 2^n = 4$ sous modèles linéaires. Le modèle flou du système moteur diesel s'écrit :

Règle i ,

Si $\rho_1(t)$ est F_{i1} et $\rho_2(t)$ est F_{i2} Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t), \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (12)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $i = 1, \dots, r$. r est le nombre de règles, F_{vi} sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur des entrées, $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ est le vecteur des sortie. $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$.

$\rho_1(t)$ and $\rho_2(t)$ sont les variables de prémisses qui sont des fonctions des variables d'état. A chaque règle est attribué un poids $w_i(\rho(t))$ qui dépend du vecteur $\rho(t) = [\rho_1(t) \ \rho_2(t)]$ et du choix de l'opération logique.

$$h_i(\rho(t)) = \frac{\omega_i(\rho(t))}{\sum \omega_i(\rho(t))}, w_i(\rho(t)) = \prod_{j=1}^{\nu} F_{ji}(\rho_j(t))$$

avec

$$h_i(\rho) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \sum_{i=1}^r h_i(\rho) = 1, \quad \forall t \quad (13)$$

Dans notre cas, x_1 et x_2 correspondent aux sorties mesurées, ce qui rend possible l'utilisation des fonctions $h_i(\rho(t))$ pour l'estimation d'état et la commande.

On obtient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\rho(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (14)$$

Posant :

$x(t) = [p_i \ p_x \ P_c]^T$ et $u(t) = [W_{xi} \ W_{xt}]^T$, les matrices d'état, de sortie et de commande deviennent

$$A_{i\{1,3\}} = \begin{bmatrix} -\alpha_i \beta_i \eta_v N & 0 & \frac{\rho_1}{0} \\ \alpha_x \beta_i \eta_v N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_k \end{bmatrix},$$

$$A_{i\{2,4\}} = \begin{bmatrix} -\alpha_i \beta_i \eta_v N & 0 & \frac{\rho_1}{\rho_1} \\ \alpha_x \beta_i \eta_v N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_k \end{bmatrix},$$

$$B_{i\{1,2\}} = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & 0 \\ -\alpha_x & -\alpha_x & \alpha_x a_f \\ 0 & \frac{\rho_2}{0} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{i\{3,4\}} = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & 0 \\ -\alpha_x & -\alpha_x & \alpha_x a_f \\ 0 & \frac{\rho_2}{\rho_2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La loi de commande floue sera calculée à partir du modèle T-S.

4 Commande H_∞ basée sur observateur

L'idée est de forcer les états de suivre les signaux représentés par un modèle de référence.

En fait, la dynamique de la référence est donnée par [10] :

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + r(t) \quad (15)$$

où $x_r(t)$ est la référence d'état, A_r est une matrice asymptotiquement stable, $r(t)$ est la référence. $x_r(t)$ représente, pour tout $t \geq 0$, une trajectoire souhaitée de $x(t)$. Donc, l'objectif est de concevoir un contrôleur floue basée sur un modèle TS stabilisant le système flou (14) et fait converger l'erreur de suivi $x(t) - x_r(t)$ vers zéro.

La section suivante est consacrée à la synthèse d'un observateur floue basée sur H_∞ . En effet, la puissance du turbocompresseur n'est pas mesurable, l'observateur d'état pour le système (14) est de la forme :

$$\mathbf{R}_i : \text{ Si } \rho_1(t) \text{ est } F_{1i} \text{ et Si } \rho_2(t) \text{ est } F_{2i}, \text{ Alors}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))$$

$$i = 1, 2, \dots, r. \quad (16)$$

où L_i est le gain de l'observateur pour la i ème règle flou et $\hat{y} = C \hat{x}(t)$.

L'observateur flou est représenté comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) \left\{ A_i(t) \hat{x}(t) + B_i(t) u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)) \right\} \quad (17)$$

L'erreur d'observation est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (18)$$

On obtient

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(z) [A_i - L_i C] e(t)$$

$$(19)$$

Le signal de commande est donné par :

$$\mathbf{R}_i : \text{ Si } \rho_1(t) \text{ est } F_{1i} \text{ et Si } \rho_2(t) \text{ est } F_{2i}, \text{ Alors}$$

$$u(t) = K_j [\hat{x}(t) - x_r(t)], \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (20)$$

A partir de (20), le contrôleur flou global est donné par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z) K_j [\hat{x}(t) - x_r(t)] \quad (21)$$

En intégrant la dynamique de l'erreur d'observation et la dynamique de la référence, On obtient le système augmenté suivant :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(z) [\tilde{A}_{ij} \tilde{x}(t) + \tilde{E}_i \tilde{w}(t)] \quad (22)$$

où

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j & 0 & 0 \\ -B_i K_j & A_i + B_i K_j & -B_i K_j \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = [r(t)], \quad \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Considérons la performance H_∞ pour traiter le problème de suivi de référence $x(t) - x_r(t)$ comme suit [7] :

$$\int_0^{t_f} \{ [x(t) - x_r(t)]^T Q [x(t) - x_r(t)] \} dt \leq \varrho^2 \int_0^{t_f} \tilde{w}^T \tilde{w} dt \quad (23)$$

L'objectif est d'atténuer l'effet de \tilde{w} sur $x(t) - x_r(t)$ en dessous d'un niveau désiré ρ . Q est une matric définie positive. Considérons l'état initiale, nous obtenons

$$\tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) \leq \tilde{x}^T(0) \tilde{P} \tilde{x}(0) + \varrho^2 \int_0^{t_f} \tilde{w}^T \tilde{w} dt \quad (24)$$

où \tilde{P} est une matrice de pondération symétrique

$$\text{définie positive et } \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & -Q \\ 0 & -Q & Q \end{bmatrix}$$

Le but est de concevoir un contrôleur flou (21) pour le système augmenté (22) avec la performance H_∞ .

Theorem 1 [10] : Pour tout $t > 0$, $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$, et $i, j=1, 2, \dots, r$, s'il existe une matrice symétrique, définie positive, $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$, une matrice Q et un scalaire positif ρ tels que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P} \tilde{E}_i \tilde{E}_i^T \tilde{P} + \tilde{Q} < 0 \quad (25)$$

Alors, la performance H_∞ pour le suivi de référence est garantie pour une atténuation ρ .

(25) doit être écrit sous forme d'inégalités matricielles linéaires. Alors, on considère la fonction de Lyapunov comme suit :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & p_{22} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Substituant (26) dans (25) et en utilisant le Lemme de Schur, on obtient

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ * & S_{22} & S_{23} & \mathbb{O} \\ * & * & S_{33} & P_{33} \\ * & * & * & -\rho^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

où

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_i^T P_{11} + P_{11} A_i - Z_i C_j - (Z_i C_j)^T \\ S_{12} &= -(B_i K_j)^T P_{22} \\ S_{22} &= (A_i + B_i K_j)^T P_{22} + P_{22} (A_i + B_i K_j) + Q \\ S_{23} &= -P_{22} B_i K_j - Q \\ S_{33} &= A_r^T P_{33} + P_{33} A_r + Q \end{aligned}$$

et $Z_i = P_{11} L_i$

Dans ce qui suit, l'inégalité matricielle (27) est exprimée en termes d'LMI. Les conditions sont résolu en deux étapes. (27) implique que $S_{22} < 0$.

$$(A_i + B_i K_j)^T P_{22} + P_{22} (A_i + B_i K_j) + Q < 0 \quad (28)$$

Prenons $X = P_{22}^{-1}$ et $Y_j = K_j X$, (28) est équivalent à

$$X A_i^T + A_i X + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + X Q X < 0 \quad (29)$$

En appliquant le Lemme de Schur, (29) devient :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & X \\ X & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

où $H_{11} = XA_i^T + A_iX + B_iY_j + Y_j^T B_i^T$.

X and Y_j sont obtenus par la résolution de (30).

En déduit $K_j = Y_j P_{22}$ avec $P_{22} = X^{-1}$.

En second étape, On remplace P_{22} et K_j dans (27). Alors, (27) devient LMI. De même, P_{11} , P_{33} et Z_i sont déterminés à partir de (27) et $L_i = P_{11}^{-1} Z_i$.

5 Résultats de simulation

Dans cette section et afin d'illustrer l'approche proposée, nous appliquons les résultats du théorème précédent au modèle non linéaire (8).

Considérons le modèle du moteur diesel avec $x = [p_i, p_x, P_c]^T$ le vecteur état du système et $u = [W_{xi}, W_{xt}, v_\delta]^T$ le vecteur d'entrée.

Le modèle de référence est choisi comme suit :

$$\dot{x}_r(t) = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & -11 & -10 \end{bmatrix} x_r(t) + \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{bmatrix}.$$

$r_1(t)$, $r_2(t)$ et $r_3(t)$ sont des fonctions sinusoïdales. Fig. 2 montre l'évolution des signaux de commande respectivement, u_1 le débit via la vanne EGR en $[kg/s]$, u_2 le débit à travers la vanne VGT en $[kg/s]$ et u_3 la masse du carburant injecté en $[mg/cycle]$. Fig.

3 montre l'évolution des variables d'état respectivement : les deux pressions d'admission et d'échappement en $[Pa]$ et la puissance du Turbocompresseur en $[W]$. Les surfaces effectives des deux Vannes EGR et VGT sont données par Fig. 4. Pour démontrer l'efficacité de notre approche nous comparons sur la même figure la trajectoire de la référence, la réponse en sortie de l'observateur et la réponse du modèle non-linéaire. En examinant les résultats représenté par Fig. 3, nous pouvons conclure que l'observateur floue fournit une bonne estimation des états du système. En outre, la commande pro-

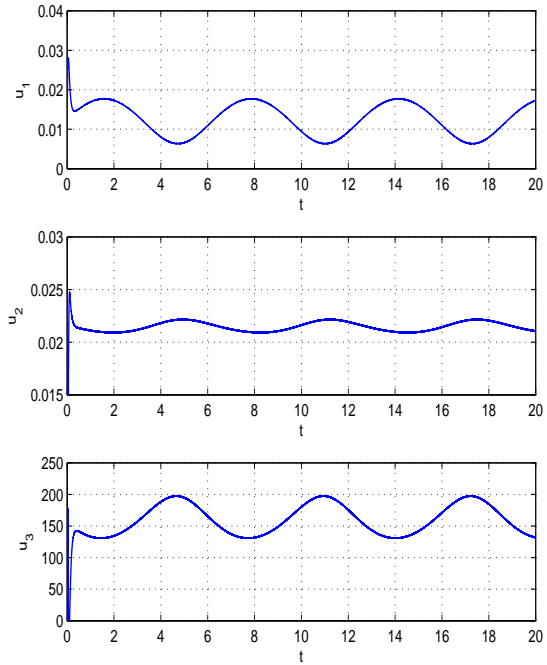


Figure 2 – Les trajectoires des entrées

posée permet d'assurer le suivi des trajectoires des signaux de références.

La résolution des LMI précédentes en utilisant "LMI toolbox" de MATLAB, ces matrices sont obtenues :

$$P_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 5.3513 & -0.0000 & 0.0149 \\ -0.0000 & 5.3513 & 0.0085 \\ 0.0149 & 0.0085 & 6.6949 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0.0161 & -0.0041 & 0.0052 \\ -0.0041 & 0.8234 & -0.6528 \\ 0.0052 & -0.6528 & 5.5940 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1.8850 & 0.9974 & 0.0393 \\ 0.9974 & 1.9066 & 0.1302 \\ 0.0393 & 0.1302 & 0.0563 \end{bmatrix}$$

et

$$Q = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2.0847 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 2.0847 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 2.0824 \end{bmatrix}$$

5.1 Travaux antérieurs

Tous nos travaux mené sur le système moteur diesel utilisent le modèle de Jankovic mis sous

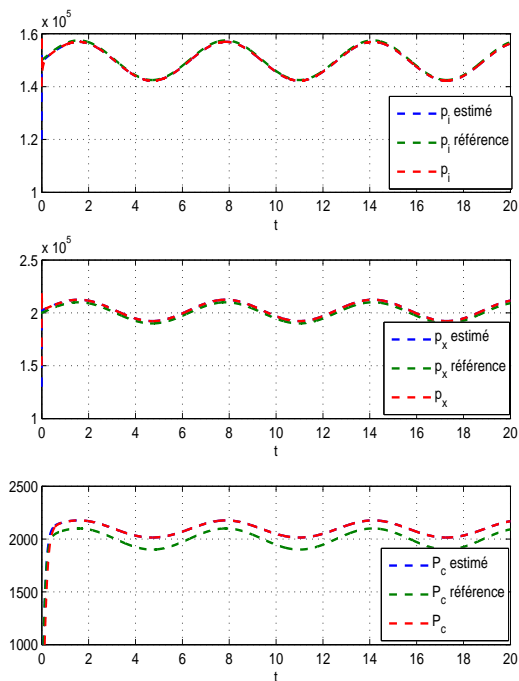


Figure 3 – Les trajectoires des états

forme T-S. Le problème de contrôle est un problème de suivi de références. Dans [6], le modèle de Jankovic a été validé en utilisant le logiciel AMÉsim et une loi de commande par retour d'état pour le modèle flou T-S du moteur diesel avec placement de pôles et D-stabilité est proposée.

Remerciements :

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet SCODECE (Smart Control and Diagnosis for Economic and Clean Engine), un projet de coopération territoriale européenne cofinancé par le Fonds européen de développement régional (FEDER) à travers le programme INTERREG IV A 2 Mers, et la région de Picardie, France.

Références

- [1] A.Ejiri, J.Sasaki, Y.Kinoshita, K.Shimotani, and R.Iizawa. Transient control of air intake system in diesel engines. *SICE Annual Conference*, 6 :503–508, 2010.
- [2] A.Plianos and R.Stobart. Dynamic feed-

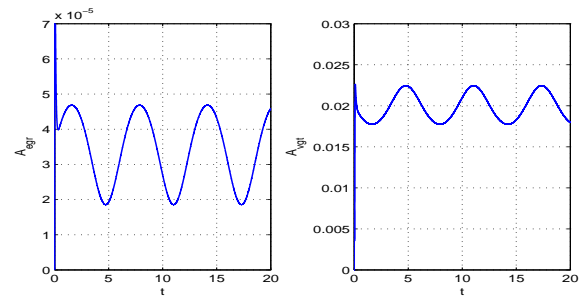


Figure 4 – Surfaces effectives des deux Vannes EGR et VGT

back linearization of diesel engines with intake variable valve actuation. *IEEE International Conference on Control*, pages 455–460, 2007.

- [3] A.Stefanopoulou, I.Kolmanovsky, and J.Freudenberg. Control of variable geometry turbocharged diesel engines for reduced emissions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8, 2000.
- [4] D. Khiar et J. Lauber, T.M. Guerra, T. Floquet, Y. Chamailard, and G. Colin. Non-linear modelling and control approach for a turbocharged si engine. *IEEE Industrial Electronics, IECON*, pages 325–330, 2006.
- [5] M. Herceg, T. Raff, R. Findeisen, and F. Allgöwe. Nonlinear model predictive control of a turbocharged diesel engine. *Computer Aided Control System Design*, pages 2766–2771, 2006.
- [6] I.Abidi, J.Bosche, A.El.Hajjaji, and A.Aitouche. Control of a turbocharged diesel engine with egr system using takagi-sugeno's approach. *MED Conference*, 6, 2012.
- [7] A. Isidori and A. Asolfi. Disturbance attenuation and h_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 37 :1283–1293, 1992.
- [8] M.Jankovic and I.Kolmanovsky. Constructive lyapunov control design for turbocharged diesel engines. *IEEE*

Transactions on Control Systems Technology, 8 :288–299, 2000.

- [9] M. Van Nieuwstadt, P. Moraal, I. Kolmanovsky, A. Stefanopoulou, P. Wood, and M. Criddle. Decentralized and multivariable designs for egr vgt control of diesel engine. *IFAC Workshop on Advances in Automotive Control*, 1998.
- [10] C.S. Tseng, B.S. Chen, and H.J. Uang. Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via ts fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, pages 381–392, 2001.
- [11] Junmin Wang. Robust nonlinear control with singularity avoidance for diesel engines having multiple combustion modes. *American Control Conference*, pages 4401–4406, 2007.

Modélisation et Contrôle Flou du Système d'Air d'un Moteur Essence avec Turbocompresseur

T.A.T Nguyen¹ J. Lauber¹ M. Dambrine¹

¹ Université Lille Nord de France, F-59000 Lille, France

UVHC, LAMIH, F-59313 Valenciennes, France

CNRS, UMR 8530 F-59313 Valenciennes, France

e-mail: {trananhtu.nguyen, jimmy.lauber, michel.dambrine}@univ-valenciennes.fr

Résumé :

La technique, dite downsizing, consistant à réduire la cylindrée du moteur tout en préservant ses performances devient aujourd'hui incontournable pour diminuer la consommation et ainsi que les émissions de CO₂ dans l'industrie automobile. Dans ce contexte, de nombreuses études se sont focalisées sur le contrôle du système d'air ces dernières années. Cet article présente une modélisation de ce système complexe et propose une stratégie de commande basée sur les modèles flous de type Takagi-Sugeno. En comparaison avec les approches existantes, la stratégie choisie permet de traiter plus facilement les non-linéarités, d'alléger considérablement l'effort de calibration ainsi que l'implémentation.

Mots-clés :

Moteur essence, modélisation, turbocompresseur, commande PDC, LMI.

1 INTRODUCTION

1.1 Motivation

Aujourd'hui, les moteurs modernes doivent affronter les défis souvent antagonistes. D'une part, les normes d'antipollution imposées aux constructeurs automobiles à l'échelle internationale deviennent de plus en plus sévères à cause des préoccupations environnementales. D'autre part, les demandes des automobilistes au niveau de performances et de rendement sont toujours plus exigeantes. Tous ces objectifs doivent être réalisés à bas coût pour les véhicules de série. Le downsizing (réduction de la cylindrée du moteur) est une solution très prometteuse pour atteindre ces objectifs. Cette technologie s'appuie sur l'utilisation d'un turbocompresseur permettant d'augmenter la densité des gaz à l'admission du moteur et d'améliorer ses performances. Malheureusement, sa présence provoque le phénomène appelé "turbo lag",

c'est-à-dire la dynamique lente du moteur et le manque de couple à bas régime.

Cette étude présente la conception de contrôleurs basés sur des modèles de type Takagi-Sugeno (TS) [19] pour gérer le circuit d'air d'un moteur essence turbocompressé. Cette technique a déjà été appliquée avec succès dans le même contexte [13] et [14]. L'article est organisé en 6 sections. La Section 1 introduit le travail en présentant le système étudié et la stratégie de commande. La Section 2 rappelle les éléments principaux concernant la modélisation du moteur turbocompressé. Dans la Section 3, la conception de contrôleurs flous pour modèles TS est décrite. Cette théorie est appliquée pour contrôler les actionneurs du circuit d'air dans la Section 4. Les résultats obtenus avec l'approche proposée sont reportés dans la Section 5. Finalement, quelques conclusions et perspectives sont données.

1.2 Description du système et stratégie de contrôle

Dans un moteur turbocompressé, l'énergie contenue dans les gaz d'échappement (sous la forme d'enthalpie) est récupérée pour compresser l'air dans le collecteur d'admission et donc augmenter le débit d'air entrant dans les cylindres D_{cyl} . La Figure 1 illustre l'architecture du moteur essence turbocompressé à 4 cylindres étudié. Il est fortement recommandé de ne pas descendre en dessous de deux niveaux de titre. Les paragraphes ne sont pas décalés. Les sections et sous-sections sont numérotées comme dans cette page. Un saut de ligne est disposé avant et après les titres de section et sous-section.

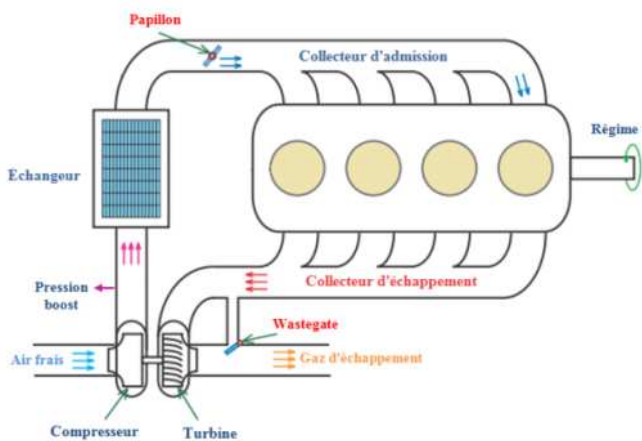


Figure 1 – Schéma du moteur essence turbocompressé

Le fonctionnement du moteur essence à la stœchiométrie (dû aux contraintes de pollution) implique la relation directe entre le couple moteur et la masse d'air enfermé dans les cylindres. Cette masse d'air, quant à elle, dépend fortement de la pression au collecteur d'admission. L'objectif du contrôle du circuit d'air est donc de contrôler cette pression. Les pertes de pompage sont minimisées lorsque l'ouverture du papillon est maximale possible dans la zone de suralimentation [6]. En l'occurrence, la pression $P_{sural} \approx P_{man}$ est contrôlée par la wastegate. Seulement à basse pression, le papillon est activé pour contrôler la pression de collecteur P_{man} .

Concernant le contrôle du système d'air, jusqu'à présent, les lois de commande proposées dans la littérature restent majoritairement basées sur des versions linéarisées du modèle non linéaire ([3], [4] et [11]). L'inconvénient persistant de ce type de contrôleur est que le compromis entre la performance et la robustesse dans toute la plage de fonctionnement du moteur est difficile à satisfaire. De plus, l'effort de calibration est très coûteux car les contrôleurs doivent être réglés pour chaque point de fonctionnement. Seule une stratégie de commande basée sur le modèle peut permettre de surmonter ces limites. Dans ce travail, nous adoptons un modèle similaire à celui de [17] qui propose une planification de trajectoire et une linéarisation par retour d'état. Dans notre cas, une commande basée sur un modèle TS

permet de faciliter l'analyse de la stabilité, et d'implémenter l'ensemble avec coût en calculs réduit.

L'architecture de commande en couple du moteur essence turbocompressé est présentée dans la Figure 2. Le couple moteur est lié directement à la demande du conducteur. Le superviseur (non décrit dans ce travail) a pour but de fournir des consignes (la pression $P_{(man,ref)}$) en tenant compte de tous les compromis faits par les motoristes au niveau de consommation, de polluants, d'agrément de conduite, etc. Le schéma de contrôle proposé combine deux modules de contrôle séparés, mais coordonnés, pour deux actionneurs.

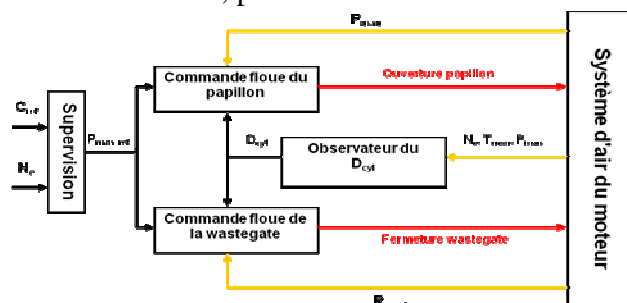


Figure 2 – Schéma général de contrôle du système d'air

2 MODELISATION

Dans cette section, les équations principales gouvernant le comportement du circuit d'air sont rappelées. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [5], [7], et [16].

2.1 Dynamiques de l'air aux collecteurs

Dans cette partie, nous cherchons à modéliser les pressions dans les collecteurs d'admission et d'échappement. Pour cela, ces collecteurs sont supposés à volumes fixes et indéformables et où les conditions thermodynamiques sont supposées homogènes. De plus, la variation de température (i.e. $\dot{T} = 0$) est négligée, alors le modèle de remplissage-vidage proposé par [9] peut être utilisé.

La dynamique de la pression dans le collecteur d'admission est déduite à partir de la relation des gaz parfaits :

$$\dot{P}_{man} = \frac{RT_{man}}{V_{man}} (D_{pap} - D_{cyl}) \quad (1)$$

où la pression P_{man} et la température T_{man} sont mesurées par des capteurs dans le collecteur d'admission. La commande de papillon est la section d'ouverture $u_{pap} \triangleq S_{pap}$. Le débit à travers le papillon D_{pap} est calculé par l'équation Barré de Saint-Venant $D_{pap} = u_{pap} \Phi_{pap}(\Pi_{pap})$ (voir ANNEXE). Ce modèle de débit papillon est utilisé pour développer un observateur de débit d'air cylindre D_{cyl} (Sous-section 2.2) et pour contrôler le papillon par la suite.

De la même façon, la dynamique de la pression à l'échappement s'écrit :

$$\dot{P}_{sch} = \frac{RT_{sch}}{V_{sch}} (D_{adm} - D_{sch}) \quad (2)$$

où $D_{adm} \triangleq D_{cyl} + D_{carb}$ le débit d'admission et $D_{sch} \triangleq D_t + D_{wg}$ le débit d'échappement. Nous avons donc

$$\dot{P}_{sch} = \frac{RT_{sch}}{V_{sch}} (D_{cyl} + D_{carb} - D_t - D_{wg}) \quad (3)$$

où le débit traversant la wastegate D_{wg} est calculé par l'équation Barré de Saint-Venant $D_{wg} = u_{wg} \Phi_{wg}(\Pi_t)$, avec $u_{wg} \triangleq S_{wg}$ la section d'ouverture de la wastegate.

2.2 Modèle de remplissage du moteur

Le débit à travers de la soupape d'admission D_{cyl} peut être calculé par [10]

$$D_{cyl} = \eta_{vol} \frac{n_{cyl} P_{man} V_{cyl} N_e}{RT_{man} 120} \quad (4)$$

Avec $n_{cyl} = 4$ nombre de cylindres et $\eta_{vol} = \eta_{vol}(N_e, P_{man})$ rendement volumétrique donné par une cartographie. Pour un moteur essence turbocompressé à turbine à géométrie fixe, ce terme est également dépendant du fonctionnement de la wastegate [1]. En fait, plus la pression à l'échappement est importante, plus les gaz résiduels restent abondant, limitant le flux d'air entrant dans le cylindre. Une incertitude réside donc au

niveau de masse d'air enfermée dans le cylindre lorsque la wastegate agit. Pour régler ce problème, il est possible d'introduire un terme de compensation $\Delta\eta_{vol}$. Le débit cylindre devient donc

$$D_{cyl} = (\eta_{vol} + \Delta\eta_{vol}) \frac{n_{cyl} P_{man} V_{cyl} N_e}{RT_{man} 120} \quad (5)$$

L'objectif est de reconstruire l'état du système $x = [x_1 \ x_2]^T = [P_{man} \ \Delta\eta_{vol}]^T$ en supposant que le terme de compensation $\Delta\eta_{vol}$ ne varie pas beaucoup (i.e. $\dot{\Delta\eta}_{vol} = 0$), nous aboutissons au modèle de référence

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{man} (D_{pap} - (\eta_{vol} + x_2)) \\ \dot{x}_2 = 0 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6)$$

où $\alpha_{man} \triangleq \frac{RT_{man}}{V_{man}}$ et $\beta_{man} \triangleq \frac{V_{cyl} N_e}{RT_{man} 120}$.

L'observateur adaptatif du débit d'air cylindre est donné par [15]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \alpha_{man} (D_{pap} - (\eta_{vol} + \hat{x}_2)) \\ \quad - \alpha_{man} \beta_{man} K_1 (\hat{x}_1 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_{man} \beta_{man} \hat{x}_1 K_2 (\hat{x}_1 - y) \end{cases} \quad (7)$$

où K_1, K_2 sont les deux gains constants à calibrer.

Par ailleurs, le moteur essence doit fonctionner à la stœchiométrie pour la raison d'antipollution. Le débit de carburant injecté peut déduire donc: $D_{carb} = \frac{1}{\lambda_s} D_{cyl}$.

2.3 Modélisation et performance du turbocompresseur

La vitesse de rotation du turbocompresseur est modélisée en utilisant la seconde loi de Newton :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{tb} N_{tb}^2 \right) = \mathcal{P}_t - \mathcal{P}_c \quad (8)$$

La puissance consommée par le compresseur est :

$$\mathcal{P}_c = D_c C_{p,c} T_{amb} \frac{1}{\eta_c} \left(\frac{\gamma_c - 1}{\Pi_c^{\gamma_c}} - 1 \right) \quad (9)$$

où $\Pi_c \triangleq \frac{P_{sural}}{P_{amb}} > 1$ est le ratio de pression du compresseur. La puissance délivrée par la turbine s'écrit

$$\mathcal{P}_t = D_t C_{p,t} T_{sch} \eta_t \left(1 - \Pi_c^{\frac{1-\gamma_t}{\gamma_t}} \right) \quad (10)$$

où $\Pi_t \triangleq \frac{P_t}{P_{sch}} < 1$ est le ratio de pression de la turbine.

Les caractéristiques du compresseur et de la turbine sont souvent présentées sous forme de cartographies. En général, nous disposons très peu de points de fonctionnements de ces deux composants (qui sont fournis par les fabricants), des phases d'interpolation et d'extrapolation sont indispensables afin d'obtenir des cartographies complètes.

Compresseur La prise en compte des variations des conditions thermodynamiques en amont du compresseur se fait en corrigeant les variables (débit, régime) du compresseur [16]

$$\begin{cases} D_{c,cor} = D_c \sqrt{\frac{T_{amb}}{P_{amb}}} \\ N_{tb,cor} = \frac{N_{tb}}{\sqrt{T_{amb}}} \end{cases}$$

Ces grandeurs sont obtenues via des cartographies qui ne peuvent être fournies pour des raisons de confidentialité.

Turbine De façon similaire, les variables corrigées de la turbine [7]

$$\begin{cases} D_{t,cor} = D_t \sqrt{\frac{(T_{sch}/T_{t,ref})}{(P_{sch}/P_{t,ref})}} \\ N_{tb,cor} = \frac{N_{tb}}{\sqrt{(T_{sch}/T_{t,ref})}} \end{cases}$$

où $P_{t,ref}$ et $T_{t,ref}$ sont les conditions thermodynamiques de référence pour l'interpolation et l'extrapolation des cartographies. De même que précédemment, ces grandeurs cartographiées sont confidentielles.

2.4 Réduction du modèle pour la commande

En regroupant toutes les équations (1), (3), (8), (9), et (10), nous avons les trois dynamiques gouvernant le système d'air du moteur essence turbocompressé

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{tb} N_{tb}^2 \right) = D_t C_{p,t} T_{sch} \eta_t \left(1 - \Pi_c^{\frac{1-\gamma_t}{\gamma_t}} \right) \\ \quad - D_c C_{p,c} T_{amb} \frac{1}{\eta_c} \left(\Pi_c^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} - 1 \right) \\ \dot{p}_{sch} = \frac{RT_{sch}}{V_{sch}} (D_{cyl} + D_{carb} - D_t - D_{wg}) \\ \dot{p}_{man} = \frac{RT_{man}}{V_{man}} (D_{pap} - D_{cyl}) \end{cases} \quad (11)$$

Ce modèle peut permettre de tenir compte des paramètres tels que la température et la pression du turbocompresseur. Pour simplifier la mise en œuvre de la commande, nous adoptons la méthodologie de réduction du modèle (11) utilisée dans [17]. L'objectif est de préserver les dynamiques dominantes ainsi que les couplages. L'idée principale est de négliger les dynamiques rapides des pressions par rapport à la dynamique lente du turbocompresseur suivant la théorie de *perturbations singulières* [12].

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{turbo} N_{turbo}^2 \right) \\ = D_t C_{p,t} T_{sch} \eta_t \left(1 - \Pi_c^{\frac{1-\gamma_t}{\gamma_t}} \right) \\ - D_{cyl} C_{p,c} T_{amb} \frac{1}{\eta_c} \left(\Pi_c^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} - 1 \right) \end{cases} \quad (12)$$

$$D_{cyl} + D_{carb} = D_t + D_{wg}$$

La première équation du système (12) représente le bilan d'énergie entre le compresseur et la turbine et qui donne la dynamique dominante du système. La seconde équation représente le bilan massique des gaz dans les collecteurs à laquelle les dynamiques sont négligées.

3 MODELISATION ET STABILISATION DES MODELES FLOUS TAKAGI-SUGENO

3.1 Modèle flou Takagi-Sugeno

De manière générale, il est possible d'obtenir un modèle TS de la forme [19], à partir d'un modèle non linéaire affine en la commande :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (13)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'états du modèle, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des sorties, et $z(t) \in \mathbb{R}^q$ le vecteur des prémisses dépendant de $x(t)$. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ représente un ensemble de $r = 2^k$ modèles linéaires où k est le nombre de non-linéarités dans le modèle. Les modèles TS sont composés d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires (dites fonctions d'appartenance) $h_i(z(t))$ positives et vérifiant la propriété de somme convexe $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$. Pour obtenir ces fonctions d'appartenance, nous avons choisit ici l'approche de découpage en secteur non linéaire [18].

3.2 Stabilisation des modèles fous TS

Pour la stabilisation système (13), nous utilisons une commande appelée *Parallel Distributed Compensation (PDC)* [21] :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t))F_i x(t) \quad (14)$$

Les matrices de gain $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont alors à déterminer pour assurer la stabilisation globale [20].

Théorème [18]: Le modèle flou TS (13) avec la loi de commande PDC (7) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice $X = X^T > 0$ telle que:

$$\begin{cases} Y_{ii} < 0, & i \in \{1, \dots, r\} \\ Y_{ij} + Y_{ji} < 0, & 1 \leq i < j \leq r \end{cases} \quad (15)$$

avec $Y_{ij} = A_i X + X A_i^T - B_i M_j - M_j^T B_i^T$.

Dans le cas de poursuite de trajectoire, une structure intégrale est ajoutée pour annuler l'erreur statique.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{F}_j) \bar{x}(t) + B y_{ref} \quad (16)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\bar{C}_i \bar{x}(t)$$

avec le vecteur d'état étendu $\bar{x}(t) = [x(t) \ x_{int}(t)]^T$, $y_{ref}(t)$ la consigne, $\dot{x}_{int} = y_{ref}(t) - y(t)$, et les matrices du modèle étendu $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{C}_i = [C_i \ 0]$ and $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$. Par conséquent, la loi de commande PDC étendue est donnée

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= - \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\bar{F}_i \bar{x}(t) \\ &= - \sum_{i=1}^r h_i(z(t))[F_i \ -L_i] \bar{x}(t) \end{aligned}$$

Pour prendre en compte la saturation des actionneurs et le réglage de performance des contrôleurs des contraintes LMI sont ajoutées [Tanaka et Wang, 2001].

4 APPLICATION: CONTRÔLE DU SYSTEME D'AIR DU MOTEUR ESSENCE TURBOCOMPRESSE

4.1 Contrôle du papillon

$$\dot{x}_{1pap} = f_1(\)x_{2pap} - f_2(\)x_{1pap}$$

$$\dot{x}_{2pap} = \frac{1}{\tau_{pap}}(u_{pap} - x_{2pap})$$

$$y = x_{1pap}$$

avec

$$\begin{cases} f_1(\cdot) = \frac{RT_{man}}{x_{2_pap} V_{man}} D_{pap}(x_{1_pap}, x_{2_pap}) \\ f_2(\cdot) = \frac{RT_{man}}{x_{1_pap} V_{man}} D_{cyl}(x_{1_pap}, x_{2_pap}) \end{cases}$$

Dans ce modèle, nous tenons compte la dynamique du papillon avec le constant de temps $\tau_{pap} = 0.02s$ et ϕ_{pap} représente l'ouverture en pourcentage du papillon. Le modèle non-linéaire, affine en la commande a deux non-linéarités bornées $f_i \leq f_i(\cdot) \leq \bar{f}_i$, $i \in \{1,2\}$. Le modèle flou TS correspondant a donc 4 modèles linéaires. Avec la structure intégrale, l'état du système étendu devient $\bar{x}_{pap} = [x_1 \ x_2 \ x_{int_pap}]^T$ où $x_{int_pap} = P_{man_ref} - P_{man}$ et les matrices du modèle flou TS augmenté sont données par :

$$A_{1_pap} = \begin{bmatrix} -\frac{f_2}{\tau_{pap}} & \frac{f_1}{\tau_{pap}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{2_pap} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{f}_2}{\tau_{pap}} & \frac{\bar{f}_1}{\tau_{pap}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3_pap} = \begin{bmatrix} -\frac{f_2}{\tau_{pap}} & \frac{f_1}{\tau_{pap}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{4_pap} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{f}_2}{\tau_{pap}} & \frac{\bar{f}_1}{\tau_{pap}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{1_pap} = B_{2_pap} = B_{3_pap} = B_{4_pap} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C_{1_pap} = C_{2_pap} = C_{3_pap} = C_{4_pap} = [1 \ 0]$$

4.2 Contrôle de la wastegate

Dans l'équation dynamique du turbocompresseur (12), l'état du système est la vitesse au carré du turbocompresseur N_{tb}^2 . Or, cette quantité n'est pas mesurable sur les

véhicule série, elle peut être approximée par une fonction linéaire du ratio de pression du compresseur, i.e. $N_{tb}^2 = A_{tb} \Pi_c + B_{tb}$ [17], comme le montre la Figure 3.

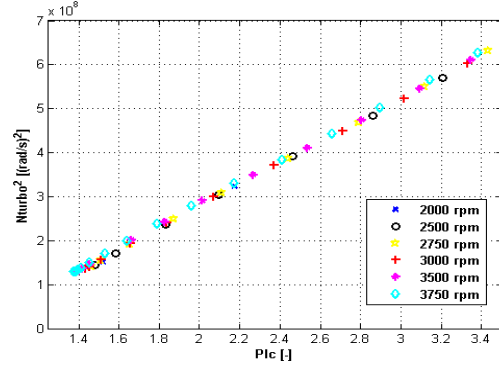


Figure 3 – Vitesse au carré du turbo N_{tb}^2 en fonction de Π_c

Après quelques transformations du modèle (12), la dynamique du turbocompresseur sous la forme de représentation d'état est obtenue :

$$\dot{\Pi}_c = g_1(\Pi_c)\Pi_c + g_2(\cdot)u_{wg} \quad (1)$$

$$\begin{cases} g_1(\Pi_c) = \frac{a_1}{a_2} \left(1 - \Pi_c^{\frac{1-\gamma_c}{\gamma_c}} \right) - a_2 \left(\Pi_c^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} - 1 \right) \\ g_2(\cdot) = -a_1 \left(1 - \Pi_c^{\frac{1-\gamma_c}{\gamma_c}} \right) \Phi_{wg}(\Pi_c) \end{cases}$$

où les paramètres (a_1, a_2, a_3) sont positifs et dépendent des conditions environnementales (voir Annexe). Comme dans le cas de contrôle du papillon, les deux non-linéarités du modèle sont bornées $g_i \leq g_i(\cdot) \leq \bar{g}_i$, $i \in \{1,2\}$. Une structure intégrale est ajoutée, l'état du système étendu devient $\bar{x}_{wg}(t) = [\Pi_c \ x_{int_wg}]^T$ où $x_{int_wg} = \Pi_{c_ref} - \Pi_c$ et les matrices du modèle flou TS sont données par :

$$A_{1_wg} = A_{2_wg} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3_wg} = A_{4_wg} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{1_wg} = B_{3_wg} = \begin{bmatrix} g_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{2_wg} = B_{4_wg} = \begin{bmatrix} \bar{g}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{1_wg} = C_{2_wg} = C_{3_wg} = C_{4_wg} = [1 \ 0]$$

5 RESULTATS DE SIMULATION

Dans cette partie, la stratégie de contrôle proposée est testée avec les données d'un moteur essence 1.2l turbo à 4 cylindres. La partie de modélisation est développée sous la plateforme LMS Imagine.Lab AMESim® avec la possibilité de cosimuler avec Matlab/Simulink® où la stratégie de contrôle est implémentée. Une série de test est réalisée pour montrer les performances des contrôleurs.

5.1 Test 1: Rejet de perturbation

La Figure 4 montre le suivi de pression en fixant le régime du moteur à 2000 tr/mn. A basse pression, la wastegate reste quasiment fermé. Cela permet une vitesse maximale possible du turbocompresseur et donc une amélioration nette au niveau de temps réponse. Maintenant, si nous rajoutons les perturbations statiques aux instants 5s et 7.5s.

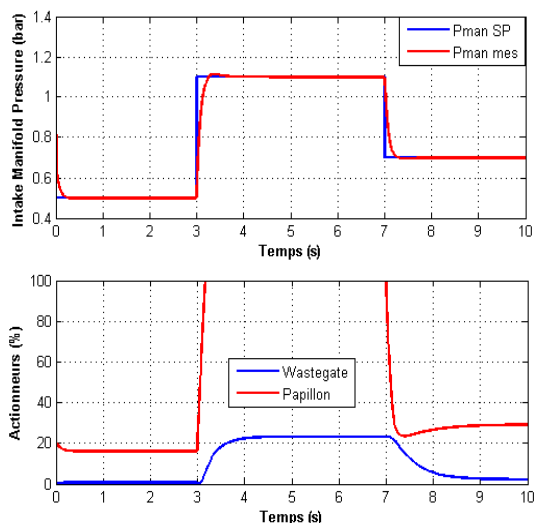


Figure 4 – Suivi de trajectoire P_{man} et commandes associées.

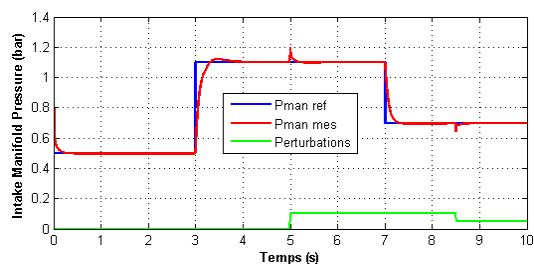


Figure 5 – Rejet de perturbations statiques

La Figure 5 montre bien la capacité de rejet de perturbation du contrôleur.

5.2 Test 2: Variation du régime moteur

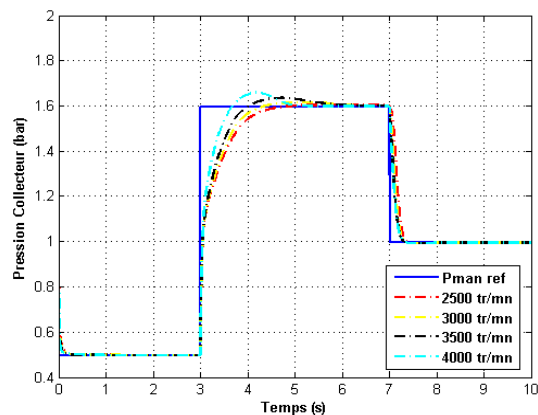


Figure 6 – Suivi de trajectoire de P_{man} en fonction de N_e

Pour cet essais, le régime du moteur varie sur une large gamme, à haut régime, la commande est souvent très agressive, nous pouvons régler le taux de décroissance pour éviter les dépassements. La convergence pour est assurée pour tous les régimes.

6 CONCLUSIONS

Cet article présente tout d'abord un modèle complet du circuit d'air d'un moteur essence turbocompressé. Le modèle est ensuite simplifié en négligeant les dynamiques rapides des pressions dans les collecteurs. Après avoir été mis les modèles sous la forme de représentation de type Takagi-Sugeno, une loi de commande PDC avec structure intégrale est utilisée pour contrôler le papillon et la wastegate. Les résultats de simulation montrent de bonne performances de la stratégie proposée avec un effort de calibration très limité sur toute la zone de fonctionnement du moteur.

Remerciements :

Ce travail est financé par CISIT (Campus International sur la Sécurité et l'Intermodalité dans les Transports), la Délégation Régionale à la Recherche et à la Technologie, le Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, la Région Nord Pas de Calais et le Centre National de la Recherche Scientifique..

Annexe

Les débits traversant le papillon et la wastegate sont calculés à partir de l'équation Barré de Saint-Venant [10] :

$$D(u_{act}, P_{amb}, P_{av}, T_{amb}) = A_g(u_{act}) \Phi_g(\Pi)$$

avec $A_g(u_{act})$ est surface effective en fonction de la commande d'actionneur ($0 = u_{min} \leq u_{act} \leq u_{max} = 1$), $\gamma \approx 1.4$ est le coefficient isentropique et $\Pi \triangleq \frac{P_{av}}{P_{amb}}$ est le rapport de pression en aval et en amont de l'actionneur.

$$\Phi_g(\Pi) = \frac{P_{amb}}{\sqrt{\gamma T_{amb}}} \begin{cases} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\Pi^{\frac{2}{\gamma}} - \Pi^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right)} & \text{si } \Pi \geq 0.5; \\ \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le système (17), les paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont :

$$\alpha_1 = C_{p,c} \sqrt{T_{sch}} P_t \eta_t \frac{2}{J_{tb} A_{tb}}, \alpha_2 = \Psi C_{p,c} T_{amb} \frac{1}{\eta_c J_{tb} A_{tb}},$$

$$\alpha_3 = \frac{P_t}{\Psi \sqrt{T_{sch}} (1 + 1/\lambda_g)}, \Psi = (\eta_{val} + \Delta\eta_{val}) \frac{n_{cyl} V_{cyl} P_{amb}}{RT_{man}} \frac{N_e}{120}$$

Références

[1] Andersson, P., Eriksson, L. (2001). Air-to-Cylinder Observer on a Turbocharged SI-Engine with Wastegate. In Proc. of SAE Conference, no. 2001-01-0262.

[2] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.

[3] Colin, G., Chamaillard, Y., Bloch, G., Corde G (2007). Neural Control of Fast Nonlinear Systems - Application to a Turbocharged SI Engine with VCT. IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 18, no. 4, pp. 1101-1114.

[4] Daubler, L., Bessai, C., and Predelli, O. (2007). Tuning Strategies for Online-Adaptive PI Controllers. Oil & Gas Science and Technology, vol. 62, no. 4, pp. 493-500.

[5] Eriksson, L., Nielsen, L., Brugard, J., Bergstrom, J., Pettersson, F., Andersson, P. (2002a). Modeling of a Turbocharged SI Engine, Annual Reviews in Control.

[6] Eriksson, L., Frei, S., Onder, C., Guzzella, L. (2002b). Control and Optimization of Turbocharged Spark Ignited Engines. 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain.

[7] Eriksson, L. (2007). Modeling and Control of Turbocharged SI and DI Engines, Oil & Gas Science and Technology, vol. 62, no. 4, pp. 523-538.

[8] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J., Chilali, M. (1995). LMI Control Toolbox, The Math Works Inc.

[9] Guzzella, L., et Onder, C.H. (2004). Introduction to Modeling and Control of Internal Combustion Engine Systems. Berlin: Springer ISBN: 3-540-22274-3.

[10] Heywood, J.B. (1988). Internal Combustion Engine Fundamentals. New York: McGraw-Hill ISBN 07-028637-X.

[11] Karnik, A., Buckland, J., Freudenberg, J. (2005). Electronic Throttle and Wastegate Control for Turbocharged Gasoline engines. American Control Conference, 7, pp. 4434-4439.

[12] Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems. Prentice Hall.

[13] Khiar D., Lauber J., Floquet T., Guerra T-M. (2005). An observer design for the instantaneous torque estimation of an IC engine. IEEE VTS-VPP 05, Chicago, USA, septembre.

[14] Lauber J., Guerra T-M., Dambrine M. (2011). Air-fuel ratio control in a gasoline engine. International Journal of Systems Sciences, 42 (2), pp. 277 - 286.

[15] Leroy, T., Chauvin, J., Sollicec, G. L., Corde, G (2007a). Air Path Estimation for a Turbocharged SI Engine with Variable Valve Timing. American Control Conference, pp. 5088-5093.

[16] Moraal, P. et Kolmanovsky, I. (1999). Turbocharger Modeling for Automotive Control Applications, SAE Technical Paper Series, no. 1999-01-0908.

[17] Moulin, P., Chauvin, J. et Youssef B. (2008). Modeling and Control of the Air System of a Turbocharged Gasoline Engine, in Proc. of the IFAC World Conference.

[18] Tanaka, K., et Wang, H. O. (2001). Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach. New York: Wiley, Wiley-Interscience.

[19] Takagi, T., et Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. IEEE Trans. on Syst., Man and Cybernetics, 15 (1), pp. 116-132.

[20] Tanaka, K., Ikeda, T., Wang, H.O. (1998). Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs. IEEE Trans. on Fuzzy Syst., 6 (2), pp. 1-16.

[21] Wang, H.O., Tanaka, K., Griffin, M. (1996). An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 4 (1), pp. 14-23.

Commande floue décentralisée

pour une classe de systèmes interconnectés en réseau

Chedia Latrach¹

Mourad Kchaou²

Ahmed El Hajjaji¹

Abdelhamid Rabhi¹

¹ Université de Picardie Jules Verne Modélisation, MIS, 7 Rue du Moulin Neuf 80000 Amiens, France

² Université de Sfax, Ecole Nationale d'ingénieurs de Sfax

chedia.latrach@yahoo.fr

mouradkchaou@yahoo.fr

2 septembre 2013

Résumé

L'objectif de ce papier concerne la synthèse d'un algorithme de contrôle-commande pour une classe de systèmes continus de grande dimension dans le cas où les fonctions de mesures et de contrôle sont distribuées sur des organes de calcul pouvant être partagés avec d'autres applications et connectés sur un réseau de communication numérique. Dans un premier temps, le système non-linéaire de grande dimension est décrit par un modèle flou Takagi-Sugeno (TS). Ensuite, en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii floue, des conditions suffisantes de stabilité asymptotique du comportement du système commandé en réseau décentralisé (DNCS), sont développées et formulées en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs). Enfin, pour illustrer l'approche proposée, un exemple numérique et des résultats de simulation sont présentés.

Mots-clés : Système de grande dimension, Commande décentralisée, Système commandé en réseau (NCS), fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, Inégalités Matricielles Linéaires LMI.

1 Introduction

La commande décentralisée des systèmes de grande dimension (appelés aussi systèmes interconnectés dans certains ouvrages) a reçu une attention considérable au cours des trois dernières décennies en raison de ses diverses applications tels que les systèmes électriques, les systèmes aéronautiques, les réacteurs nucléaires et les systèmes de contrôle de processus, etc. En effet, diverses techniques de commande décentralisée utilisant les inégalités matricielles linéaires (LMI) ont été récemment étudiées [2, 3, 4, 11]. Les systèmes

de grandes dimensions consistent en un ensemble de sous-systèmes interconnectés, ce qui peut les éloigner les uns des autres, c'est pourquoi nous introduisons la notion de réseau de communication pour les relier, et ainsi les données sont échangées entre les différents sous-systèmes via le réseau de communication. Bien que, l'utilisation de ces réseaux pour la commande décentralisée présente des avantages en termes de flexibilité et de réduction des coûts d'installation et de maintenance, Il est bien connu qu'en raison de la limitation des ressources du réseau, les retards induits par le réseau et les pertes de paquets de données à travers le réseau pourraient dégrader les performances du DNCS et le conduire à l'instabilité. Le retard de communication, qui a des caractéristiques variant dans le temps, est l'une des questions importantes à prendre en considération dans l'analyse et la synthèse des NCSs [6], [7], [9], [10], [12], [13] et [14].

Ce travail rentre dans ce cadre et vise à développer un contrôleur décentralisé par retour d'état qui prend en compte les problèmes du retard dans la transmission et la réception des données et les pertes de paquets d'information pour les systèmes de grande dimension. En utilisant une fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii floue, nous proposons des conditions de stabilisation par une commande décentralisée en réseau de type PDC (Parallel Distributed Com-

pensation), formulées en termes des LMIs, incluant les problèmes liés au retard et aux pertes d'information dans le réseau de communication.

La structure de ce papier est comme suit, la deuxième partie consiste à décrire le système et préliminaires. La troisième section donne les principaux résultats, en décrivant la stratégie de commande en réseau et en présentant les conditions de synthèse de la loi de commande décentralisée qui fonctionne à travers un réseau de communication. La 4ème section est consacrée à la simulation. Finalement une conclusion est donnée dans la section 5.

Notations : $W + W^T$ est noté par $Sym(W)$.

Le symbole (*) représente les entrées symétriques dans une matrice.

2 Description du système et préliminaires

Soit un système flou de grande dimension S composé par J sous-systèmes interconnectés $S_i, i = 1, 2, \dots, J$. Le $i^{ème}$ sous-système flou S_i est décrit par le modèle flou T-S suivant :

$$S_i : \begin{cases} \text{Si } \theta_{i1}(t) \text{ est } F_{i1}^l \text{ est...si } \theta_{ig}(t) \text{ est } F_{ig}^l \\ \text{Alors } \dot{x}_i(t) = A_i^l x_i(t) + B_i^l u_i(t) + \sum_{j=1}^J f_{ij}(x_j(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Pour $i = 1, 2, \dots, J, l = 1, 2, \dots, r_i$, où $x_i(t)$ représente le vecteur d'état, $u_i(t)$ est le signal d'entrée de commande et, A_i^l et B_i^l sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées, $\theta_{i1}(t), \theta_{i2}(t), \dots, \theta_{ig}(t)$, sont les variables de prémisse pour chaque sous-système S_i , $F_{iq}^l (q = 1, 2, \dots, g)$ représentent les ensembles flous linguistiques de la règle floue et $f_{ij}(x_j(t))$ représentent les interconnexions entre le sous-système S_i et sous-système S_j , et r_i représente le nombre des règles floues dans le sous-système S_i . En utilisant la défuzzification du centre de gravité, le système flou T-S peut

s'écrire sous la forme :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t)) [A_i^l x_i(t) + B_i^l u_i(t) + \sum_{j=1}^J f_{ij}(x_j(t))] \quad (2)$$

Où

$$h_i^l(\theta_i(t)) = \frac{v_i^l(\theta_i(t))}{\sum_{l=1}^{r_i} v_i^l(\theta_i(t))}, \quad (3)$$

$$v_i^l(\theta_i(t)) = \prod_{q=1}^g F_{iq}^l(\theta_{iq}(t))$$

Où $F_{iq}^l(\theta_{iq}(t))$ est le degré d'appartenance de $\theta_{iq}(t)$ dans l'ensemble flou F_{iq}^l . $h_i^l(\theta_i(t))$ est la fonction d'appartenance pour chaque règle floue, qui représente le degré d'appartenance normalisé, et satisfait

$$0 \leq h_i^l(\theta_i(t)) \leq 1, \text{ for } l = 1, 2, \dots, r_i, \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t)) = 1$$

On suppose que le système S sera commandé à travers un réseau. La Fig. 1 suivante représente la structure de la commande en réseau d'un système S_i induisant des retards, où τ_{sci} est le retard entre le capteur-contrôleur et τ_{cai} est le retard contrôleur-actionneur. On suppose que le temps de calcul du contrôleur pour chaque sous-système peut être absorbée soit τ_{sci} ou τ_{cai} .

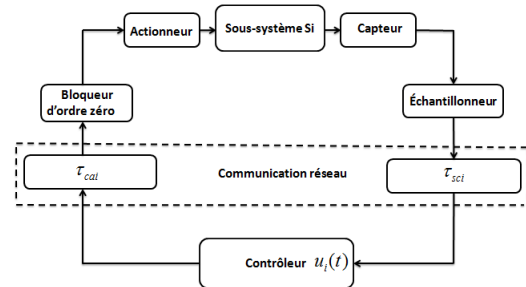


Figure 1 – Schéma du système commandé en réseau pour chaque sous-système S_i

Dans ce travail, nous considérons les hypothèses suivantes :

1. Toutes les paires (A_i^l, B_i^l) ($i = 1, 2, \dots, J$ et $l = 1, 2, \dots, r_i$) sont stabilisables.[8]

2. L'interconnexion $f_{ij}(x_j(t))$ satisfait les conditions suivantes : $f_{ij}(x_j(t)) = B_i^l f_{ij}^l(x_j(t))$ et $\|f_{ij}^l(x_j(t))\| \leq \bar{f}_{ij}^l \|x_j(t)\|$, où $\bar{f}_{ii}^l = 0$, $\bar{f}_{ij}^l (i \neq j)$ est une constante positive et B_i^l est une matrice réelle avec des dimensions appropriées. [8]
3. Les capteurs sont commandés par une horloge, le contrôleur et les actionneurs sont pilotés par des événements.
4. Les données sont transmises dans un seul paquet, soit à partir de la mesure ou de la commande et les variables d'état sont mesurables.
5. L'effet de la quantification du signal et le mauvais code de communication ne sont pas pris en compte.
6. La commande réelle $u_i(t)$ pour chaque sous-système est réalisée grâce à un bloqueur d'ordre zéro.

Il est à noter que la période d'échantillonnage d'un capteur est pré-déterminée pour la conception d'algorithme de contrôle, et donc le capteur peut être supposé être commandé par une horloge. Toutefois, un dispositif d'action ne change pas sa sortie à partir du système sous le contrôle jusqu'à ce qu'un signal de commande mis à jour soit reçu, ce qui implique que l'actionneur est piloté par des événements.

Afin d'obtenir les principaux résultats de cette étude, les lemmes suivants sont nécessaires :

Lemme 1 [5] Pour tout vecteur réel ζ et ρ , il vient que

$$2\zeta^T \rho \leq \zeta^T Z \zeta + \rho^T Z^{-1} \rho \quad (4)$$

avec $Z > 0$

Lemme 2 [8] L'inégalité suivante est vérifiée pour tout vecteur réel $\nu_i \in \mathbb{R}^n$

$$\left[\sum_{i=1}^m \nu_i \right]^T \left[\sum_{i=1}^m \nu_i \right] \leq m \sum_{i=1}^m \nu_i^T \nu_i. \quad (5)$$

3 Résultats principaux

Dans cette section, notre attention sera focalisée sur la synthèse d'un contrôleur retour d'état pour stabiliser le système. En effet, on suppose que les états du système (2) sont mesurables pour réaliser une commande par retour d'état, le schéma de commande de type PDC sera considéré pour chaque sous système S_i . Le contrôleur flou PDC global en réseau qui correspond à S_i peut être décrit comme suit :

$$u_i(t_k) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t_k)) K_i^l x_i(t_k - \tau_{ki}).$$

En utilisant le BOZ, le signal d'entrée pour chaque sous-système S_i pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ est donné par

$$u_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t_k)) K_i^l x_i(t_k - \tau_{ki}) \quad (6)$$

- Retard induit par le réseau (τ_{ki}) : Le retard induit par le réseau existe toujours quand la donnée est transmise à travers le réseau, et évidemment, il possède deux bornes supérieure et inférieure. Alors, une représentation claire du retard serait une fonction variant dans le temps. Une hypothèse naturelle de τ_{ki} peut être faite comme suit :

$$0 < \tau_{mi} \leq \tau_{ki} \leq \tau_{Mi} \quad (7)$$

- Paquets perdus : L'effet de paquets perdus dans la chaîne de communication peut être décrit par le fait que le BOZ n'est pas mis à jour pendant l'intervalle de temps de cet événement, qui est désigné comme l'échantillonnage vacant. Ainsi, l'effet de perte de paquet dans la transmission n'est qu'un cas où le délai d'une période d'échantillonnage est induite dans l'intervalle de la mise à jour du BOZ.

$$t_{k+1} - t_k = (\sigma_{ki+1} + 1)h + \tau_{ki+1} - \tau_{ki} \quad (8)$$

où h représente la période d'échantillonnage et σ_{ki+1} est le nombre de paquets perdus accumulés dans cette période. En utilisant les

équations (2) et (6), le sous-système commandé en réseau en boucle fermée peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + H(t)x_i(t_k - \tau_{ki}) \\ \quad + f(x_i(t)), t_k \leq t \leq t_{k+1} \end{cases} \quad (9)$$

Avec

$$A(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l A_i^l, \quad B(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l B_i^l,$$

$$H(t) = B(t) \sum_{s=1}^{r_i} h_i^s K_i^s,$$

$$f(x_i(t)) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l \sum_{j=1}^J f_{ij}(x_j),$$

Soit $\eta_i(t) = t - t_k + \tau_{ki}$, $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, alors

$$\tau_{mi} \leq \tau_{ki} \leq \eta_i(t) \leq (\bar{\sigma}_i + 1)h + \tau_{ki+1} \quad (10)$$

Où $\bar{\sigma}_i$ représente le nombre maximum de paquets perdus dans les périodes de mise à jour, $\eta_{1i} = \tau_{mi}$ et $\eta_{2i} = (\bar{\sigma}_i + 1)h + \tau_{Mi}$. Ainsi nous obtenons à partir de [1] que

$$\eta_{1i} \leq \eta_i(t) \leq \eta_{2i}, \quad \dot{\eta}_i(t) \leq h_{di} \quad (11)$$

Comme $\sum_{k=0}^{\infty} [t_k, t_{k+1}) = [0, \infty)$, alors nous avons

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + H(t)x_i(t - \eta_i(t)) \\ \quad + f(x_i(t)) \\ x_i(t) = \phi_i(t), t \in [t_0 - \eta_{2i}, t_0] \end{cases} \quad (12)$$

Où $\phi_i(t)$ peut être considérée comme la condition initiale du système de contrôle en boucle fermée. En prenant en compte (11), il est à noter que le NCS (12) est équivalent à un système avec un retard à temps variant. Dans cette section, nous allons présenter notre résultat principal basé sur l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée contrôlé en réseau (12) en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii floue. D'où, la synthèse des contrôleurs K_i^s est développée par le Théorème suivant :

Théorème 1 Soient les scalaires $\eta_{1i} > 0, \eta_{2i} > 0, \mu_{1i}, \mu_{2i}$, et μ_{3i} , le système en boucle fermée (12) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices symétriques positives $\bar{P}_i, \bar{Q}_{1i}, \bar{Q}_{2i}, \bar{Q}_{3i}, \bar{Z}_{1i}, \bar{Z}_{2i}$ et des matrices \bar{G}_i inversibles, et $Y_i^s, \bar{L}_i, \bar{W}_i$ avec des dimensions appropriées, vérifiant la condition suivante :

$$\bar{\Phi}_{ls} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11il} & \bar{\Phi}_{12ijls} & \bar{Z}_{1i} + \eta_{ri} \bar{L}_{1i} & -\eta_{ri} \bar{W}_{1i} \\ * & \bar{\Phi}_{22ijls} & \eta_{ri} \bar{L}_{2i} & -\eta_{ri} \bar{W}_{2i} \\ * & * & -\bar{Q}_{2i} - \bar{Z}_{1i} & 0 \\ * & * & * & \bar{Q}_{3i} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \bar{\Phi}_{15il} & \bar{L}_{1i} & \bar{W}_{1i} & \bar{G}_i^T \\ \bar{\Phi}_{25ijls} & \bar{L}_{2i} & \bar{W}_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\Phi}_{55i} & 0 & 0 & 0 \\ * & \bar{\Phi}_{66i} & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{77i} & 0 \\ * & * & * & \bar{\Phi}_{88ij} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11il} &= \bar{Q}_{1i} + \bar{Q}_{2i} + \bar{Q}_{3i} - \mu_{1i} \text{sym}(A_i^l \bar{G}_i) - \bar{Z}_{1i} - \mu_{1i}^2 I, \\ \bar{\Phi}_{12il} &= -\mu_{2i} \bar{G}_i^T (A_i^l)^T - \mu_{1i} B_i^l Y_i^s + \eta_{ri} (-\bar{L}_{1i} + \bar{W}_{1i}), \\ \bar{\Phi}_{22il} &= -\mu_{2i} \text{sym}(B_i^l Y_i^s) - (1 - h_{di}) \bar{Q}_{1i} \\ &\quad - \eta_{ri} (\text{Sym}(\bar{L}_{2i} - \bar{W}_{2i})) - \mu_{2i}^2 I, \\ \bar{\Phi}_{15il} &= \bar{P}_i + \mu_{1i} \bar{G}_i - \mu_{3i} \bar{G}_i^T (A_i^l)^T, \\ \bar{\Phi}_{25ijls} &= \mu_{2i} \bar{G}_i - \mu_{3i} (Y_i^s)^T (B_i^l)^T, \\ \bar{\Phi}_{55i} &= \eta_{1i}^2 \bar{Z}_{1i} + \eta_{ri}^2 \bar{Z}_{2i} + \mu_{3i} \text{sym}(\bar{G}_i) - \mu_{3i}^2 I, \\ \bar{\Phi}_{66i} &= (-\eta_{2i} \eta_{ri})^{-1} \bar{Z}_{2i}, \quad \bar{\Phi}_{77i} = (-\eta_{2i} \eta_{ri})^{-1} \bar{Z}_{2i}, \\ \bar{\Phi}_{88ij} &= (3J \sum_{j=1}^J \hat{f}_{ij}^2 \|\hat{B}_j\|^2)^{-1} I \\ \eta_{ri} &= \eta_{2i} - \eta_{1i}, \quad \hat{f}_{ij} = \max_l \hat{f}_{ij}^l, \quad \|\hat{B}_i\| = \max_l \|B_i^l\|. \end{aligned}$$

avec $Y_i^s = K_i^s \bar{G}_i$.

Preuve 1 Soit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii donnée par $V = \sum_{i=1}^J v_i$, $i = 1, 2, \dots, J$, où v_i représente la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii correspondante au sous-

système S_i . Chaque v_i est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 v_i(t) &= x_i^T(t)P_i x_i(t) + \int_{t-\eta_i(t)}^t x_i^T(s)Q_{1i}x_i(s) ds \\
 &+ \int_{t-\eta_{1i}}^t x_i^T(s)Q_{2i}x_i(s) ds \\
 &+ \int_{t-\eta_{2i}}^t x_i^T(s)Q_{3i}x_i(s) ds \\
 &+ \eta_{1i} \int_{t-\eta_{1i}}^0 \left(\int_{t+s}^t \dot{x}_i^T(v)Z_{1i}\dot{x}_i(v) dv \right) ds \\
 &+ \eta_{ri} \int_{t-\eta_{2i}}^{-\eta_{2i}} \left(\int_{t+s}^t \dot{x}_i^T(v)Z_{2i}\dot{x}_i(v) dv \right) ds
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_i(t) &\leq 2\dot{x}_i^T(t)P_i x_i(t) + x_i^T(t)(Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{3i})x_i(t) \\
 &- (1 - h_{di})x_i^T(t - \eta_i(t))Q_{1i}x_i(t - \eta_i(t)) \\
 &- x_i^T(t - \eta_{1i})Q_{2i}x_i(t - \eta_{1i}) \\
 &- x_i^T(t - \eta_{2i})Q_{3i}x_i(t - \eta_{2i}) \\
 &+ \dot{x}_i^T(t)(\eta_{1i}^2 Z_{1i} + \eta_{ri}^2 Z_{2i})\dot{x}_i(t) \\
 &- \eta_{1i} \int_{t-\eta_{1i}}^t \dot{x}_i^T(v)Z_{1i}\dot{x}_i(v) dv \\
 &- \eta_{ri} \int_{t-\eta_{2i}}^{t-\eta_{1i}} \dot{x}_i^T(v)Z_{2i}\dot{x}_i(v) dv
 \end{aligned} \tag{15}$$

Notons $\psi_{1i} = x_i(t) - x_i(t - \eta_{1i})$, $\psi_{2i} = x_i(t - \eta_{1i}) - x_i(t - \eta_i(t))$ et $\psi_{3i} = x_i(t - \eta_i(t)) - x_i(t - \eta_{2i})$, en appliquant l'inégalité de Jensen, nous trouvons

$$-\eta_{1i} \int_{t-\eta_{1i}}^t \dot{x}_i^T(v)Z_{1i}\dot{x}_i(v) dv \leq -\psi_{1i}^T Z_{1i} \psi_{1i} \tag{16}$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 1 nous avons :

$$\begin{aligned}
 &- 2\Psi_i^T(t)L_i \int_{t-\eta_i(t)}^{t-\eta_{1i}} \dot{x}_i(\alpha) d\alpha \\
 &\leq \eta_i(t)\Psi_i^T(t)L_i Z_{2i}^{-1}L_i^T \Psi_i(t) \\
 &+ \int_{t-\eta_i(t)}^{t-\eta_{1i}} \dot{x}_i^T(\alpha)Z_{2i}\dot{x}_i(\alpha) d\alpha \\
 &\leq \eta_{2i}\Psi_i^T(t)L_i Z_{2i}^{-1}L_i^T \Psi_i(t) + \int_{t-\eta_i(t)}^{t-\eta_{1i}} \dot{x}_i^T(\alpha)Z_{2i}\dot{x}_i(\alpha) d\alpha
 \end{aligned} \tag{17}$$

et

$$\begin{aligned}
 &- 2\Psi_i^T(t)W_i \int_{t-\eta_{2i}}^{t-\eta_i(t)} \dot{x}_i(\alpha) d\alpha \\
 &\leq (\eta_{2i} - \eta_i(t))\Psi_i^T(t)W_i Z_{2i}^{-1}W_i^T \Psi_i(t) \\
 &+ \int_{t-\eta_{2i}}^{t-\eta_i(t)} \dot{x}_i^T(\alpha)Z_{2i}\dot{x}_i(\alpha) d\alpha \\
 &\leq \eta_{2i}\Psi_i^T(t)W_i Z_{2i}^{-1}W_i^T \Psi_i(t) + \int_{t-\eta_{2i}}^{t-\eta_i(t)} \dot{x}_i^T(\alpha)Z_{2i}\dot{x}_i(\alpha) d\alpha
 \end{aligned} \tag{18}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 &- \eta_{ri} \int_{t-\eta_{2i}}^{t-\eta_{1i}} \dot{x}_i^T(v)Z_{2i}\dot{x}_i(v) dv \\
 &\leq \eta_{ri} \left(\eta_{2i}\dot{x}_i^T(t)Z_{2i}\dot{x}_i(t) + \eta_{2i}\Psi_i^T(t)L_i Z_{2i}^{-1}L_i^T \Psi_i(t) \right. \\
 &+ \eta_{2i}\Psi_i^T(t)W_i Z_{2i}^{-1}W_i^T \Psi_i(t) \\
 &+ 2\Psi_i^T(t)L_i \begin{bmatrix} 0 & -I & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi_i(t) \\
 &+ \left. 2\Psi_i^T(t)W_i \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi_i(t) \right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

A partir de (12) et pour toute matrice de dimension appropriée G_i , nous avons l'équation nulle suivante

$$\begin{aligned}
 &2[x_i^T(t)G_{1i}^T + x_i^T(t - \eta_i(t))G_{2i}^T + \dot{x}_i^T(t)G_{3i}^T] \\
 &\times [\dot{x}_i(t) - A(t)x_i(t) - H(t)x(t - \eta_i(t)) - f(x_i(t))] = 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\text{où } L_i = \begin{bmatrix} L_{1i}^T & L_{2i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{1i}^T & W_{2i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ et } \Psi_i^T(t) = \begin{bmatrix} x_i^T(t) & x_i^T(t - \eta_i(t)) & x_i^T(t - \eta_{1i}) & x_i^T(t - \eta_{2i}) & \dot{x}_i^T(t) \end{bmatrix}.$$

Basée sur les Lemmes 1, 2, l'hypothèse 1, et l'hypothèse 2, et en définissant $\hat{f}_{ij} = \max_l \hat{f}_{ij}^l$ et $\|\hat{B}_i\| = \max_l \|B_i^l\|$, et soient, $G_{1i} = \mu_1 G_i$, $G_{2i} = \mu_2 G_i$, et $G_{3i} = \mu_3 G_i$, avec μ_1, μ_2, μ_3 des scalaires positifs, la dérivée (14) au long de la trajectoire du système en boucle fermée (12) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \sum_{i=1}^J \dot{v}_i \leq \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{s=1}^{r_i} h_i^l h_i^s \\
 &\Psi_i^T(t) \bar{\Gamma}_{ls} \Psi_i(t)
 \end{aligned}$$

$$\text{Où } \bar{\Gamma}_{ls} = \Phi_{ls} + \eta_{2i}L_i Z_{2i}^{-1}L_i^T + \eta_{2i}W_i Z_{2i}^{-1}W_i^T$$

$$\Phi_{ls} = \begin{bmatrix} \Phi_{11ijls} & \Phi_{12ils} & Z_{1i} + \eta_{ri}L_{1i} & -\eta_{ri}W_{1i} & \Phi_{15il} \\ * & \Phi_{22ils} & \eta_{ri}L_{2i} & -\eta_{ri}W_{2i} & \Phi_{25ijls} \\ * & * & -Q_{2i} - Z_{1i} & 0 & 0 \\ * & * & * & Q_{3i} & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55il} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{11ijl} &= Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{3i} - \text{sym}(G_{1i}^T A_i^l) - Z_{1i} \\ &\quad - G_{1i}^T G_{1i} - \sum_{j=1}^J f_{ij}(x_j(t))^T \sum_{j=1}^J f_{ij}(x_j(t)), \\ \Phi_{12ils} &= -(A_i^l)^T G_{2i} - G_{1i}^T B_i^l K_i^s + \eta_{ri}(-L_{1i} + W_{1i}), \\ \Phi_{22ils} &= -\text{sym}(G_{2i}^T B_i^l K_i^s) - (1 - h_{di})Q_{1i} - G_{2i}^T G_{2i} \\ &\quad - \eta_{ri}(\text{Sym}(L_{2i} - W_{2i})), \\ \Phi_{15il} &= P_i + G_{1i}^T - (A_i^l)^T G_{3i}, \\ \Phi_{25ijls} &= G_{2i}^T - (K_i^s)^T (B_i^l)^T G_{3i}, \\ \Phi_{55i} &= \eta_{1i}^2 Z_{1i} + \eta_{ri}^2 Z_{2i} + \text{sym}(G_{3i}) - G_{3i}^T G_{3i}\end{aligned}$$

Sous les conditions du Théorème 1, une solution est faisable si et seulement si la condition $\bar{\Phi}_{55i} < 0$ est satisfaite, ce qui implique que \bar{G}_i est inversible. Définissons $G_i = \bar{G}_i^{-1}$, $\bar{P}_i = \bar{G}_i^T P_i \bar{G}_i$, $\bar{Q}_{1i} = \bar{G}^T Q_{1i} \bar{G}_i$, $\bar{Q}_{2i} = \bar{G}^T Q_{2i} \bar{G}_i$, $\bar{Q}_{3i} = \bar{G}^T Q_{3i} \bar{G}_i$, $\bar{Z}_{1i} = \bar{G}^T Z_{1i} \bar{G}_i$, $\bar{Z}_{2i} = \bar{G}^T Z_{2i} \bar{G}_i$, $\bar{L}_{1i} = \bar{G}^T L_{1i} \bar{G}_i$, $\bar{L}_{2i} = \bar{G}^T L_{2i} \bar{G}_i$, $\bar{W}_{1i} = \bar{G}^T W_{1i} \bar{G}_i$, et $\bar{W}_{2i} = \bar{G}^T W_{2i} \bar{G}_i$. En appliquant la transformation de congruence à (13) par $\text{diag}\{G_i, G_i, G_i, G_i, G_i, G_i, G_i, G_i\}$, et en utilisant le complément de schur, nous obtenons $\bar{\Gamma}_{ls} < 0$. Par conséquent, nous avons $\dot{V}(x(t)) < 0$ si $h_i^l \geq 0$, donc, le système (12) est asymptotiquement stable.

4 Résultats de simulation

Pour illustrer la méthode proposée, nous considérons l'exemple donné dans [8], composé par trois sous-systèmes flous S_i , $i = 1, 2, 3$, comme suit, dans lequel chaque état de chaque sous-système possède deux dimensions. Les fonctions d'appartenance pour chaque état sont montrées dans la figure 1 de l'article [8]. Les paramètres liés au réseau pour chaque sous-système S_i sont supposés égal à : $h = 5ms$, le retard minimum $\eta_{1i} = 6ms$, le retard maximum $\eta_{2i} = 20ms$ et le nombre maximum de pertes de paquets est $\bar{\sigma}_i = 3$. Les retards variables entre les capteurs et les contrôleurs aussi bien entre contrôleurs et actionneurs sont générés aléatoirement tels que $\min(\tau_{sci} + \tau_{cai}) \geq \eta_{1i}$, et $\max(\tau_{sci} + \tau_{cai} + (\bar{\sigma}_i + 1)h) \leq \eta_{2i}$ et les pertes de paquets sont aussi générés aléatoirement tel que $\max(Ne) \leq 3$,

où Ne est le nombre de pertes de paquets, $h_{di} = 0.1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.5$ et $\mu_3 = 0.9$.

En appliquant le Théorème 1, les solutions des LMIs peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}K_1^1 &= \begin{bmatrix} -10.9839 & -6.8409 \end{bmatrix}, \\ K_1^2 &= \begin{bmatrix} -2.9569 & -1.6003 \end{bmatrix}, \quad K_1^3 = \\ &= \begin{bmatrix} -1.3481 & -0.6249 \end{bmatrix} \quad \text{pour le sous-} \\ &\text{système S1, } K_2^1 = \begin{bmatrix} -0.8492 & -3.0854 \end{bmatrix}, \\ K_2^2 &= \begin{bmatrix} -1.4386 & -0.7997 \end{bmatrix} \quad \text{pour le sous-} \\ &\text{système S2, et } K_3^1 = \begin{bmatrix} -1.2208 & -1.8195 \end{bmatrix}, \\ K_3^2 &= \begin{bmatrix} -2.8164 & -2.9984 \end{bmatrix} \quad \text{pour le sous-} \\ &\text{système S3.}\end{aligned}$$

Pour la simulation, les conditions initiales sont $x_1(0) = [1.5 \quad -1]^T$, $x_2(0) = [-0.5 \quad 0.5]^T$, et $x_3(0) = [0.7 \quad 0.3]^T$. L'évolution des variables d'états des systèmes NCSs et les entrées de commande sont illustrées dans les figures 2, 3, 4 et 5 à partir des quelles nous pouvons constater que tous les états convergent vers zéro et les retards introduits par le réseau et les pertes de paquets de données sont générés aléatoirement et sont montrés dans les figures 6 et 7. Par conséquent, selon le Théorème 1, le système global flou de grande dimension en boucle fermée composé de trois sous-systèmes S1, S2 et S3 est asymptotiquement stable. Les résultats de simulation sont conformes avec l'analyse et soutiennent l'efficacité de la stratégie de synthèse développée.

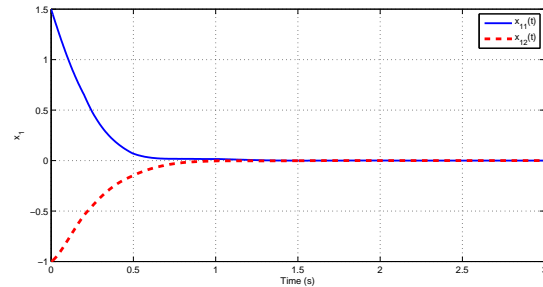


Figure 2 – Réponse de l'état x dans S_1

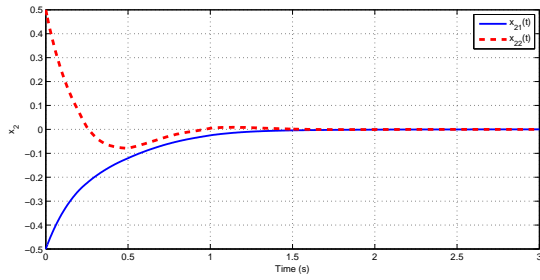


Figure 3 – Réponse de l'état x dans S_2 .

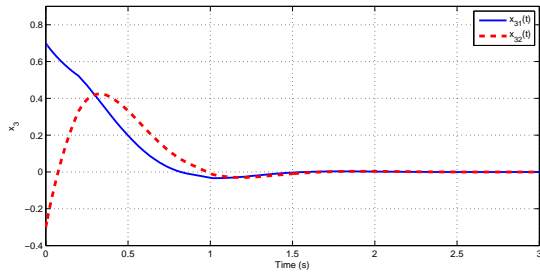


Figure 4 – Réponse de l'état x dans S_3 .

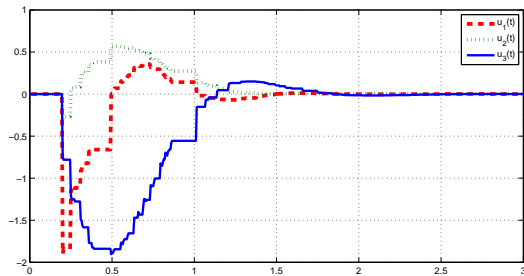


Figure 5 – Trajectoires des signaux de commandes $u_i(t)$.

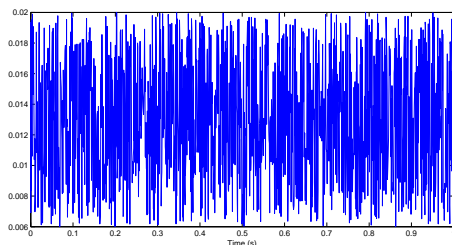


Figure 6 – Retard induit par le réseau.

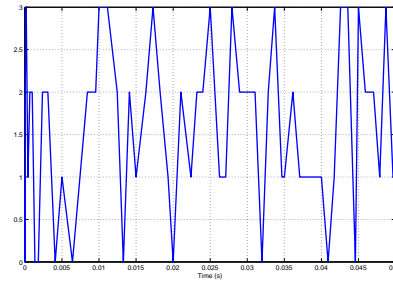


Figure 7 – Pertes de paquets de données.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une méthode de synthèse du contrôleur flou de type PDC pour le système de grande dimension commandé en réseau en considérant le retard et les pertes de paquets dans la communication en réseau. Nous avons montré que le retard optimal admissible dans le réseau et les gains du contrôleur peuvent être déterminés en résolvant un ensemble de contraintes LMIs. Un exemple numérique ainsi que des résultats de simulation sont présentés pour valider l'approche proposée.

Références

- [1] JM Gomes da Silva Jr, Alexandre Seuret, Emilia Fridman, and Jean-Pierre Richard. Stabilisation of neutral systems with saturating control inputs. *International Journal of Systems Science*, 42 :1093–1103, 2011.
- [2] Scorletti G and Duc G. An lmi approach to decentralized H_∞ control. *Int J Control*, 74 :211224, 2001.
- [3] Park JH. Design of robust decentralized dynamic controller for uncertain large-scale interconnected systems with time delays. *IEICE Trans Fundam Electron Commun Comput Sci*, page 17471754, 2001.
- [4] Park JH. Robust nonfragile decentralized controller design for uncertain large-scale interconnected systems with time delays.

Trans ASME J Dyn Syst Meas Control, 124 :332336, 2002.

- [5] C. Latrach, M. Kchaou, A. Toumi, and A. El Hajjaji. Robust stabilization for continuous fuzzy systems with time varying delay. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ)*, pages 1411–1416, 2011.
- [6] Chen Peng, Yu-Chu Tian, Moses, and O TadState feedback controller design of networked control systems with interval time-varying delay and nonlinearity. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18 :1285–1301, 2008.
- [7] Y. Shi, H. Fang, and M. Yan. Kalman filter-based adaptive control for networked systems with unknown parameters and randomly missing outputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19 :1976–1992, 2008.
- [8] Wen-June Wang and Wei-Wei Lin. Decentralized pdc for large -scale T-S fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13 :779–786, 2005.
- [9] Jing Wu, Liqian Zhang, and Tongwen Chen. Model predictive control for networked control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19 :1016–1035, 2009.
- [10] Ligang Wu, James Lam, Xiuming Yao, and Junlin Xiong. Robust guaranteed cost control of discrete-time networked control systems. *Optimal control applications and methods*, 32 :95–112, 2010.
- [11] Xiaoshi Xiao and Zhizhong Mao. Decentralized guaranteed cost stabilization of time-delay large-scale systems based on reduced-order observers. *Journal of the Franklin Institute*, 348 :26892700, 2011.
- [12] Hongjiu Yang, Yuanqing Xia, and Peng Shi. Stabilization of networked control systems with nonuniform random sampling periods. *International Journal Of Robust And Nonlinear Control*, 21 :501–526, 2010.
- [13] Bo Yu, Yang Shi, and Yang Lin. Discrete-time H_2 output tracking control of wireless networked control systems with markov communication models. *Wireless communications and mobile computing*, 11 :1107–1116, 2009.
- [14] Hui Zhang, Yang Shi, and Aryan Saadat Mehr. Robust weighted H_∞ filtering for networked systems with intermittent measurements of multiple sensors. *International Journal of adaptive control and signal processing*, 25 :313–330, 2011.

Commande Multi-Actionneurs du Châssis en Situations Critiques Par l'Approche Takagi-Sugeno

Multi-Actuator Chassis Control in Critical Situations Using Takagi-Sugeno Fuzzy Model

H. Dahmani, O. Pagès and A. El Hajjaji

Laboratoire Modélisation, Information et Systèmes, UPJV-MIS (EA4290)

33 rue St Leu, 80039 Amiens Cedex 1, France

(hamid.dahmani, opages, ahmed.hajjaji)@u-picardie.fr

Résumé :

Cet article présente une commande globale du châssis basée sur des systèmes, de braquage et de suspension actifs dans le but de préserver la stabilité de la dynamique latérale et celle du roulis du véhicule dans les situations critiques. Un modèle flou de type Takagi-Sugeno (*TS*) du véhicule a été utilisé afin de considérer les non-linéarités des forces latérales. Le modèle ainsi obtenu a permis de développer une loi de commande basée sur un observateur *TS*. Ce dernier a été développé avec des variables de prémisses non mesurables pour estimer l'angle de dérive du véhicule ainsi que l'angle de roulis. L'objectif du contrôleur consiste à contraindre la dynamique latérale ainsi que le taux de transfert de charge à suivre un modèle de référence dans les situations critiques. Les conditions de stabilité ont été obtenues en utilisant l'approche H_∞ et formulées en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (*LMI*).

Mots-clés :

Modèle flou de type Takagi-Sugeno ; commande de la dynamique du véhicule ; observateur et contrôleur flou ; H_∞ ; *LMI*.

Abstract:

This paper introduces global chassis control using a four-wheel active steering system as well as an active suspension in order to insure the stability of the lateral and roll dynamics of the vehicle in critical situations. The Takagi-Sugeno (*TS*) representation has been used in order to take into account the non-linearities of the lateral forces. Based on the obtained fuzzy model, a *TS* observer has been designed with unmeasurable premise variables in order to consider the unavailability of the sideslip angle and roll angle measurement. The objectives of the proposed controller are to force the lateral dynamics as well as the load transfer ratio to track reference trajectories in critical situations. The observer and controller design has been formulated in terms of Linear Matrix Inequality (*LMI*) constraints using H_∞ approach.

Keywords:

TS fuzzy model ; vehicle dynamics ; fuzzy controller ; fuzzy observer ; H_∞ ; *LMI*.

1 Introduction

Dans ces dernières années, la plupart des constructeurs automobiles ont équipé leurs véhicules de systèmes de sécurité actifs. L'*ABS* (Anti-lock Braking System) pour améliorer les performances lors d'un freinage d'urgence, l'*ESP* (Electronic Stability Program) pour une meilleure stabilité de la trajectoire du véhicule, sont deux exemples les plus répandus. Les systèmes de sécurité et les systèmes d'aide à la conduite réduisent considérablement les risques potentiels d'accidents. Les dernières recherches menées ont permis le développement de plusieurs nouveaux systèmes de sécurité active et passive qui couvrent plusieurs types d'accidents (choc frontal, choc latéral, sortie de route, etc.). Cependant, certains types d'accidents tels que les renversements restent sans protection adéquate. Aux États Unis, seulement 3% des accidents sont causés par les renversements de véhicule, cependant, le nombre de tués lors de ce genre d'accident représentent 33% des victimes [1]. Ces statistiques montrent indéniablement le danger potentiel encouru par les passagers en cas de renversement du véhicule. Réduire le risque de renversement des véhicules est un challenge important pour baisser le nombre de tués dans les routes, ce qui montre la nécessité d'intégrer la stabilité de roulis dans les systèmes de sécurité active. L'efficacité d'un tel système repose sur la connaissance précise des états du véhicule, notamment

la vitesse du lacet, l'angle de dérive et l'angle de roulis du véhicule. Si la vitesse de lacet peut être mesurée par des capteurs peu coûteux, les angles de dérive et de roulis sont eux inaccessibles à la mesure par des capteurs standards. Il doivent alors être estimés par des techniques d'observation avancées [2], pour être utilisés par les systèmes de commande. Dans [3], un contrôleur robuste a été développé pour améliorer la stabilité du lacet du véhicule. Bien que ces techniques permettent d'améliorer la stabilité latérale du véhicule, elles restent insuffisantes pour garantir la stabilité globale du châssis et éviter les risques d'accidents.

Dans ce travail de recherche, une méthode de commande globale du châssis basée sur observateur est présentée. Le contrôleur développé agit sur le braquage actif des roues avant et arrière ainsi que sur un moment de roulis actif pour garantir la stabilité globale dans les situations de conduite critiques telles que les évitements d'obstacles. La représentation *TS* a été utilisée dans le but de prendre en compte les non linéarités des forces latérales qui apparaissent particulièrement dans les manoeuvres brusques et les situations d'évitement d'obstacles. Cette dernière a été largement utilisée dans la littérature pour modéliser des systèmes non linéaires [4]-[5]. Un observateur *TS* avec variables de prémisses non mesurables a été proposé afin d'estimer les variables de la dynamique du véhicule qui ne sont pas mesurables. Des trajectoires de références sont en outre imposées à certaines variables dans la synthèse du contrôleur. Afin de garantir la stabilité de l'erreur d'estimation ainsi que celle de l'erreur de poursuite, des contraintes *LMI* basées sur l'approche H_∞ sont obtenues pour le calcul des gains de l'observateur et du contrôleur. Un scénario d'évitement d'obstacle a été simulé sur Matlab/Simulink afin d'illustrer l'efficacité des techniques développées.

Ce travail est organisé comme suit : dans le paragraphe 2, nous présentons le modèle du véhicule utilisé et sa représentation par un modèle flou de type *TS*. Ensuite, nous

présentons dans le paragraphe 3 la synthèse du contrôleur ainsi que celle de l'observateur et les conditions de stabilité sous forme de contraintes *LMI*. Enfin, le paragraphe 4 est consacré aux résultats de simulations et aux comparaisons entre les réponses du véhicule avec et sans contrôleur.

2 Modélisation du véhicule

Le modèle utilisé dans ce travail correspond à la dynamique latérale et celle du roulis du véhicule. Il est obtenu en considérant le modèle bicyclette avec un degré de liberté supplémentaire donné par le mouvement du roulis (Fig. 1). Sous l'hypothèse d'angles petits et d'une vitesse constante, le modèle de véhicule est donné alors par les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_s a_{ys} + m_u a_{yu} = 2F_{yf} + 2F_{yr} \\ I_z \ddot{\psi} = 2F_{yf} l_f - 2F_{yr} l_r \\ I_x \ddot{\phi}_v = m_s g h \phi_v + m_s a_{ys} h - k_\phi \phi_v - C_\phi \dot{\phi}_v + M_x \end{cases} \quad (1)$$

a_{ys} et a_{yu} représentent respectivement les accélérations des masses suspendue et non-suspendue et sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} a_{ys} = v(\dot{\beta} + \dot{\psi}) - h\ddot{\phi}_v \\ a_{yu} = v(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \end{cases} \quad (2)$$

Ces deux masses ne sont pas considérées séparément dans les modèles utilisés dans la littérature. Nous les avons introduites dans ce travail afin d'améliorer la modélisation du véhicule.

Les variables β , ψ et ϕ_v sont respectivement les angles de dérive, du lacet et du roulis du véhicule. M_x représente le moment du roulis généré par le système de suspension active (Voir Figure 1 et table 1 pour tous les paramètres du modèle). Les forces latérales avant et arrière F_{yf} et F_{yr} dépendent des angles de glissement latéral α_f et α_r , des paramètres du véhicule ainsi que de l'état de la chaussée. Plusieurs modèles ont été proposés pour exprimer ces forces (Pacejka, Dugoff, Burckhardt/Kiencke). Ces derniers ont tous l'avantage de prendre en compte les non-linéarités des forces latérales mais sont trop complexes pour être utilisés dans la synthèse d'observateur et de contrôleur. Cette complexité a donc amené les chercheurs à considérer uniquement la partie linéaire des

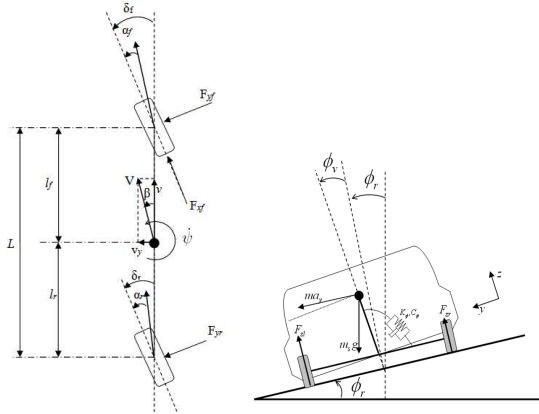


Figure 1 – Dynamique latérale et du roulis

Tableau 1 – Paramètre du véhicule

Par.	Description	Unité
δ_f	Angle de braquage avant	[rad]
δ_r	Angle de braquage arrière	[rad]
m_s	Masse suspendue	[kg]
m_u	Masse non-suspendue	[kg]
m	Masse totale ($m_u + m_s$)	[kg]
v	Vitesse du véhicule	[m/s]
I_x	Moment d'inertie du roulis	[kgm ²]
I_z	Moment d'inertie du lacet	[kgm ²]
h	Hauteur du centre de gravité	[m]
C_ϕ	Amortissement global	[Nm/s/rad]
k_ϕ	Raideur globale	[Nm/rad]

forces qui est proportionnelle aux angles de glissement latéral. Cependant, une telle simplification affectera beaucoup la précision du modèle dans les situations critiques notamment suite aux manoeuvres brusques du conducteur induisant la saturation des forces latérales. Afin de considérer les non-linéarités, nous proposons dans ce travail d'utiliser un système flou de type *TS* pour modéliser les forces latérales.

Considérons les ensembles flous M_{fi} et M_{ri} ($i = 1, 2$) définis pour les régions de petites et grandes valeurs des angles de glissement latéral. Les forces latérales avant et arrière sont

alors définies par les bases de règles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Si } |\alpha_f| \text{ est } M_{f1} \text{ alors } F_{yf} &= C_{f1}\alpha_f \\
 \text{Si } |\alpha_f| \text{ est } M_{f2} \text{ alors } F_{yf} &= C_{f2}\alpha_f \\
 \text{Si } |\alpha_r| \text{ est } M_{r1} \text{ alors } F_{yr} &= C_{r1}\alpha_r \\
 \text{Si } |\alpha_r| \text{ est } M_{r2} \text{ alors } F_{yr} &= C_{r2}\alpha_r
 \end{aligned} \quad (3)$$

avec C_{fi} , C_{ri} sont respectivement les coefficients de rigidité pneumatique avant et arrière. En considérant les règles floues décrites ci-dessus, les forces latérales peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{cases} F_{yf} = \mu_{f1}(\alpha_f)C_{f1}\alpha_f + \mu_{f2}(\alpha_f)C_{f2}\alpha_f \\ F_{yr} = \mu_{r1}(\alpha_r)C_{r1}\alpha_r + \mu_{r2}(\alpha_r)C_{r2}\alpha_r \end{cases} \quad (4)$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha_f = \delta_f - \frac{l_f \psi}{v} - \beta \\ \alpha_r = \delta_r + \frac{l_r \psi}{v} - \beta \end{cases} \quad (5)$$

où μ_{fi} and μ_{ri} ($i = 1, 2$) sont les fonctions d'appartenance représentant la signification floue des ensembles M_{fi} et M_{ri} et sont données par :

$$\mu_{fi} = \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{|\alpha_f| - c_{fi}}{a_{fi}}\right|\right)^{2b_{fi}}}, \quad \mu_{ri} = \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{|\alpha_r| - c_{ri}}{a_{ri}}\right|\right)^{2b_{ri}}} \quad (6)$$

Les paramètres a_i , b_i et c_i ainsi que les coefficients de rigidité C_{fi} , C_{ri} sont déterminés en utilisant un algorithme d'optimisation de type Levenberg-Marquadt [6].

Dans le cas d'une route sèche les valeurs suivantes ont été obtenues :

$$\begin{aligned}
 C_{f1} &= 82946, C_{f2} = 64847, C_{r1} = 16194, C_{r2} = 12784, \\
 a_{f1} &= 0.0910, a_{f2} = 0.3608, a_{r1} = 0.1237, a_{r2} = 0.5185, \\
 b_{f1} &= 1.1636, b_{f2} = 7.3138, b_{r1} = 1.6138, b_{r2} = 10.1680, \\
 c_{f1} &= 0.0535, c_{f2} = 0.4284, c_{r1} = -0.0004, c_{r2} = 0.5807.
 \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression des forces F_{yf} et F_{yr} (4), dans les équations (1) et en prenant comme vecteur d'état du système $x = [\beta \ \psi \ \dot{\phi}_v \ \dot{\phi}_r]^T$, les quatre règles du modèle flou *TS* s'écrivent :

Si $|\alpha_f|$ est M_{fi} et $|\alpha_r|$ est M_{ri} alors :

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + B_{fk} \delta_f + B_{rk} \delta_r + B_m M_x$$

pour $i = 1, 2$ et $k = 1, 4$

Où $|\alpha_f|$ et $|\alpha_r|$ sont les entrées. La sortie du modèle *TS* s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(\alpha) [A_i x(t) + B_{fi} \delta_f + B_{ri} \delta_r] + B_m M_x \quad (7)$$

où les matrices A_i , B_{fi} , B_{ri} ($i = 1, 4$) et B_m sont données par :

$$A_i = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma_i I_{x_1}}{m I_{x_2} v} & \frac{\rho_i I_{x_1}}{m I_{x_2} v^2} - 1 & -\frac{m_s h C_\phi}{m I_{x_2} v} & \frac{m_s h (m_s g h - k_\phi)}{m I_{x_2} v} \\ \frac{\rho_i}{I_z} & -\frac{\tau_i}{I_z v} & 0 & 0 \\ -\frac{m_s h \sigma_i}{m I_{x_2}} & \frac{m_s h \rho_i}{m I_{x_2} v} & -\frac{C_\phi}{I_{x_2}} & \frac{(m_s g h - k_\phi)}{I_{x_2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{f1}, B_{f2} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{f1} I_{x_1}}{m I_{x_2} v} \\ \frac{2C_{f1} l_f}{m I_{x_2}} \\ \frac{I_z}{2m_s h C_{f1}} \\ 0 \end{bmatrix}, B_{f3}, B_{f4} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{f2} I_{x_1}}{m I_{x_2} v} \\ \frac{2C_{f2} l_f}{m I_{x_2}} \\ \frac{I_z}{2m_s h C_{f2}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{r1}, B_{r3} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{r1} I_{x_1}}{m I_{x_2} v} \\ \frac{2C_{r1} l_f}{m I_{x_2}} \\ \frac{I_z}{2m_s h C_{r1}} \\ 0 \end{bmatrix}, B_{r2}, B_{r4} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{r2} I_{x_1}}{m I_{x_2} v} \\ \frac{2C_{r2} l_f}{m I_{x_2}} \\ \frac{I_z}{2m_s h C_{r2}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_m = \begin{bmatrix} \frac{m_s h}{m I_{x_2} v} \\ 0 \\ \frac{1}{I_{x_2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ où } I_{x_1} \text{ et } I_{x_2} \text{ sont les moments}$$

auxiliaires d'inertie du roulis donnés par

$$I_{x_1} = I_x + m_s h^2, \quad I_{x_2} = I_x + m_e h^2 \text{ et } m_e = m_s - \frac{m_s^2}{m}$$

Les variables auxiliaires σ_i , ρ_i et τ_i sont introduites pour simplifier l'écriture du modèle et sont données par :

$$\sigma_1 = 2(C_{r1} + C_{f1}), \quad \sigma_2 = 2(C_{r2} + C_{f1}), \quad \sigma_3 = 2(C_{r1} + C_{f2}), \quad \sigma_4 = 2(C_{r2} + C_{f2}),$$

$$\rho_1 = 2(l_r C_{r1} - l_f C_{f1}), \quad \rho_2 = 2(l_r C_{r2} - l_f C_{f1}), \quad \rho_3 = 2(l_r C_{r1} - l_f C_{f2}), \quad \rho_4 = 2(l_r C_{r2} - l_f C_{f2}),$$

$$\tau_1 = 2(l_f^2 C_{f1} + l_r^2 C_{r1}), \quad \tau_2 = 2(l_f^2 C_{f1} + l_r^2 C_{r2}), \quad \tau_3 = 2(l_f^2 C_{f2} + l_r^2 C_{r1}), \quad \tau_4 = 2(l_f^2 C_{f2} + l_r^2 C_{r2})$$

et les fonctions d'activation $h_i(\alpha)$ sont données sous la forme simplifiée suivante :

$$h_i(\alpha) = \frac{\omega_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^4 \omega_i(\alpha)}, \text{ avec } \omega_i(\alpha) = \mu_{fj}(\alpha_f) \mu_{rk}(\alpha_r)$$

$$i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, 2 \text{ et } k = 1, 2$$

3 Synthèse du contrôleur multi-actinieur pour la commande globale du châssis

L'objectif principal du contrôleur sera de contraindre le véhicule à suivre les sorties d'un modèle de référence donné par un véhicule stable dans une situation de conduite idéale. Le contrôleur doit agir sur trois actions de commande : le braquage actif avant, le braquage actif arrière et la suspension active pour générer un moment de roulis actif (Fig.2). Afin de faire apparaître toutes les entrées de commande, le modèle flou (7) est réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(\alpha) \left[A_i x(t) + B_{fi} (\delta_d + \delta_c) + B_{ri} \delta_r + B_m M_x \right]$$

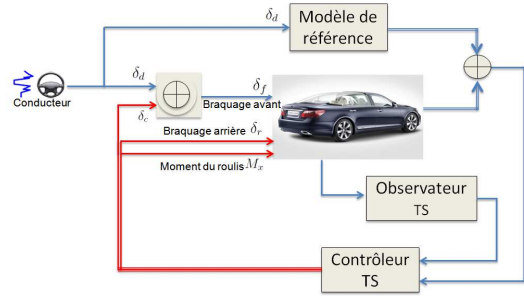


Figure 2 – Structure du contrôleur et de l'observateur

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(\alpha) [A_i x(t) + B_i u(t) + B_{fi} \delta_d(t)]$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} \delta_c(t) \\ \delta_r(t) \\ M_x(t) \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_{fi} & B_{ri} & B_m \end{bmatrix}$$

où $\delta_d(t)$ et $\delta_c(t)$ sont respectivement l'angle de braquage du conducteur et l'action du contrôleur sur les roues avant (braquage actif), $\delta_r(t)$ est l'action du contrôleur sur les roues arrières et M_x est l'action du contrôleur sur le roulis actif.

Le contrôleur doit donc assurer le suivi des trajectoires de références $z_{ref} = [\beta_{ref}, \psi_{ref}, LTR_{ref}]$ qui représentent le comportement désiré et connu du véhicule suite aux manoeuvres du conducteur. La variable LTR représente le taux de transfert de charge et indique le risque de renversement. Afin de garantir la stabilité du véhicule vis à vis du renversement, le LTR doit être inférieur à un. Ce dernier est calculé en fonction des forces verticales de contact pneu/chaussée mais peut également être approximé en fonction de la dynamique du roulis du véhicule par l'équation suivante [8] :

$$LTR = \frac{F_{zl} - F_{zr}}{F_{zl} + F_{zr}} = \frac{2}{mgT} (C_\phi \dot{\phi}_v + k_\phi \phi_v) \quad (8)$$

où T représente la longueur des essieux du véhicule.

La loi de commande flou développée dans ce travail est basée sur un retour d'état, cependant, certains états du modèle du véhicule tels que la dérive et l'angle de roulis ne sont pas mesurables (ou bien les capteurs sont excessivement chers). La synthèse du contrôleur sera

donc basée sur un observateur *TS* qui estimera d'abord les état du modèle considéré. L'observateur proposé est basé sur le modèle flou (8) avec des variables de prémisses non mesurables car ces dernières dépendent aussi de l'angle de dérive. Il est donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^4 h_i(\hat{\alpha}) [A_i \hat{x} + B_i u + B_{fi} \delta_d + L_i (y - \hat{y})] \\ y = Cx, \quad \hat{y} = C\hat{x} \\ z = C_z x, \quad \hat{z} = C_z \hat{x} \end{cases} \quad (9)$$

Il s'agit d'une combinaison convexe d'observateurs de type Luemberger avec :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{mgT} C_\phi & \frac{2}{mgT} k_\phi \end{bmatrix}$$

où $y = [\dot{\psi} \quad \dot{\phi}_v]^T$ est la sortie mesurée, $z = [\beta \quad \psi \quad LTR]^T$ est le vecteur de variables à commander et L_i sont les gains de l'observateur.

La loi de commande proposée est donnée sous la forme suivante :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^4 h_j(\hat{\alpha}) \left[K_{Pj} \hat{x} + K_{Ij} \int_0^t (\hat{z}(\tau) - z_{ref}(\tau)) d\tau \right] \quad (10)$$

Outre le retour d'état, l'ajout d'un integrateur permettra le suivi des trajectoires pour le vecteur z

Soit e_c l'erreur de poursuite définie par :

$$\dot{e}_c = \hat{z} - z_{ref}$$

et e_o l'erreur d'estimation définie par :

$$e_o = x - \hat{x}$$

A partir des équations (8) et (9), la dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit sous la forme :

$$\dot{e}_o = \sum_{i,j=1}^4 h_i(\hat{\alpha}) [(A_i - L_i C) e_o + v] \quad (11)$$

avec $v = \sum_{i=1}^4 (h_i(\alpha) - h_i(\hat{\alpha})) [A_i x + B_i u + B_{fi} \delta_d]$

Un système augmenté avec $\tilde{x}(t) = [x \quad e_c \quad e_o]^T$ peut être écrit sous la forme :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 h_i(\hat{\alpha}) h_j(\hat{\alpha}) [\tilde{A}_{ij} \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{wi} W(t)] \quad (12)$$

$$\text{avec } \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_{Pj} & -B_i K_{Ij} & B_i K_{Pj} \\ C_z & 0 & -C_z \\ 0 & 0 & A_i - L_i C \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{wi} = \begin{bmatrix} B_{fi} & 0 & I \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad W(t) = \begin{bmatrix} \delta_d(t) \\ z_{ref}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Afin de simplifier les contraintes de stabilité du système en boucle fermée, les matrices \tilde{A}_{ij} et \tilde{B}_{wi} sont réécrites sous la forme :

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i - \bar{B}_i K_j & S + R_i K_{Pj} \\ 0 & A_i - L_i C \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{wi} = \begin{bmatrix} B_{1wi} \\ B_{2w} \end{bmatrix}$$

où :

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ C_z & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_j = \begin{bmatrix} K_{Pj} & K_{Ij} \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_z \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{1wi} = \begin{bmatrix} B_{fi} & 0 & I \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B_{2w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Afin de garantir la stabilité du système augmenté (12) en présence du terme $W(t)$, le critère d'atténuation H_∞ suivant doit être satisfait :

$$\int_0^\infty (e_c(t)^T Q_1 e_c(t) + e_o(t)^T Q_2 e_o(t)) dt \leq \rho^2 \int_0^\infty W(t)^T W(t) dt$$

Ce critère peut être réécrit sous la forme :

$$\int_0^\infty \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt \leq \tilde{x}(0)^T \tilde{P} \tilde{x}(0) + \rho^2 \int_0^\infty W(t)^T W(t) dt \quad (13)$$

où $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ et \tilde{P} est une matrice symétrique définie positive

Le lemme suivant donne les conditions de stabilité du système (12) sous la contrainte H_∞ (13).

Lemme 1 *S'il existe une matrice définie positive \tilde{P} , et un scalaire ρ , tel que les inégalités matricielles suivantes sont satisfaites [7] :*

$$\tilde{P} \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P} \tilde{B}_{wi} \tilde{B}_{wi}^T \tilde{P} + \tilde{Q} < 0, \quad i, j = 1, 4 \quad (14)$$

Alors le système (12) est stable et le critère H_∞ (13) est satisfait avec une atténuation ρ^2 .

Corollaire 1 *Soit deux matrices prédéfinies Q_1 et Q_2 , s'il existe deux matrices symétriques définies positives X et P_2 , des matrices V_j , W_i , K_i et un scalaire $\rho > 0$, tel que les inégalités matricielles suivantes sont satisfaites pour $i, j = 1, 4$:*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{ij} & S + R_i K_{Pj} & B_{1wi} \\ * & \Theta_{ij} & P_2 B_{2w} \\ * & * & -\rho^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad i, j = 1, 4 \quad (15)$$

où * représente les termes transposés

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij} &= \bar{A}_i X - \bar{B}_i V_j + X \bar{A}_i^T - V_j^T \bar{B}_i^T + X C_1^T \bar{Q}_1 C_1 X \\ \Theta_{ij} &= P_2 A_i - W_i C + A_i^T P_2 - C^T W_i^T + Q_2 \\ V_j &= K_j X, \quad W_i = P_2 L_i \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \text{et } \bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Alors le système décrit par (12) est stable et le critère d'atténuation H_∞ (13) est satisfait avec un niveau d'atténuation ρ^2 .

Preuve 1 Considérons une forme particulière de la matrice \tilde{P} définie par : $\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ et $X = P_1^{-1}$ En remplaçons les expressions des matrices \tilde{A}_{ij} et \tilde{B}_{wi} , l'inégalité (14) devient :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ij} & \Upsilon_{ij} \\ * & \Psi_{ij} \end{bmatrix} < 0, \quad i, j = 1, 4 \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} &= P_1(\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j) + (\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j)^T P_1 + \frac{1}{\rho^2} P_1 B_{1wi} B_{1wi}^T P_1 + C_1^T \bar{Q}_1 C_1 \\ \Psi_{ij} &= P_2(A_i - L_i C) + (A_i - L_i C)^T P_2 + \frac{1}{\rho^2} P_2 B_{2w} B_{2w}^T P_2 + Q_2 \\ \Upsilon_{ij} &= P_1(S + R_i K_{Pj}) + \frac{1}{\rho^2} P_1 B_{1w} B_{2w}^T P_2\end{aligned}$$

En multipliant l'inégalité (16) à gauche et à droite par la matrice de rang plein $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et en utilisant les changements de variables $V_j = K_j X$ et $W_i = P_2 L_i$, les inégalités suivantes sont obtenues :

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{ij} & \bar{\Upsilon}_{ij} \\ * & \bar{\Psi}_{ij} \end{bmatrix} < 0, \quad i, j = 1, 4 \quad (17)$$

$$\bar{\Omega}_{ij} = \bar{A}_i X - \bar{B}_i V_j + X \bar{A}_i^T - V_j^T \bar{B}_i^T + \frac{1}{\rho^2} B_{1wi} B_{1wi}^T + X C_1^T \bar{Q}_1 C_1 X$$

$$\bar{\Psi}_{ij} = P_2 A_i - W_i C + A_i^T P_2 - C^T W_i^T + \frac{1}{\rho^2} P_2 B_{2w} B_{2w}^T P_2 + Q_2$$

Enfin, par un complément de Schur, les conditions (15) sont obtenues.

Les conditions décrites ci-dessus n'étant pas linéaires, elle peuvent être résolues en deux étapes. Dans la première étape, sachant que (15) implique l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i X + \bar{B}_i V_j + X \bar{A}_i^T + V_j^T \bar{B}_i^T + & X C_1^T \\ \frac{1}{\rho^2} B_{1wi} B_{1wi}^T & \\ C_1 X & -\bar{Q}_1^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

Cette inégalité linéaire permet de calculer X et V_j (et donc $K_j = V_j X^{-1}$).

Dans la seconde étape, en rapportant $K_j = [K_{Pj} \quad K_{Ij}]$ et X dans l'inégalité (15), cette dernière devient une inégalité linéaire qui permettra alors de calculer les matrices P_2 et W_i (et donc $L_i = W_i P_2$).

4 Résultat de simulation

Afin d'illustrer l'efficacité du contrôleur et de l'observateur développés, nous avons simulé un scénario de conduite sur Matlab/Simulink avec le modèle de la dynamique latérale et du roulis du véhicule (1). Le scénario représente une situation d'évitement d'obstacle avec une manœuvre brusque du conducteur à une vitesse constante du véhicule de 50km/h (Voir figure 3 pour l'angle de braquage du conducteur).

La résolution des LMI (18) puis (15) sur Matlab donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}K_{P1} &= \begin{bmatrix} 9.3 & 1.2 & -0.7 & -3.9 \\ 13.5 & -1.4 & -0.8 & -3.5 \\ -2300.9 & 9.9 & 234.1 & 2703.5 \end{bmatrix}, \\ K_{P2} &= \begin{bmatrix} 10.7 & 1.0 & -0.9 & -5.3 \\ 21.5 & -2.2 & -1.2 & -4.6 \\ -3393.5 & 132.5 & 301.3 & 3027.5 \end{bmatrix}, \\ K_{P3} &= \begin{bmatrix} 14.5 & 1.4 & -1.4 & -10.6 \\ 12.5 & -1.4 & -0.8 & -3.6 \\ -1773.9 & 30.0 & 221.6 & 2904.2 \end{bmatrix}, \\ K_{P4} &= \begin{bmatrix} 12.7 & 1.6 & -1.3 & -10.1 \\ 15.2 & -1.6 & -0.9 & -4.9 \\ -1502.6 & -3.8 & 210.5 & 2861.8 \end{bmatrix}, \\ K_{I1} &= \begin{bmatrix} 99 & 142 & 3 \\ 130 & -3 & 6 \\ -21944 & -13820 & 9624 \end{bmatrix}, \quad K_{I2} = \begin{bmatrix} 117 & 140 & -8 \\ 216 & -11 & 10 \\ -33980 & -12640 & 9618 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$K_{I3} = \begin{bmatrix} 153 & 190 & -28 \\ 0120 & -0011 & 3 \\ -16666 & -8774 & 11559 \end{bmatrix}, \quad K_{I4} = \begin{bmatrix} 137 & 191 & -28 \\ 144 & -12 & 0.1 \\ -14698 & -8971 & 11668 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 159.8 & -68.4 \\ 144.5 & 4.1 \\ 17.0 & 85.7 \\ -194.0 & -50.3 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -313.5 & -42.6 \\ 125.5 & -3.8 \\ -123.3 & 109.8 \\ 242.8 & -75.8 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 520.0 & -7.7 \\ 72.5 & 1.7 \\ 53.1 & 117.5 \\ -517.1 & -107.2 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 87.7 & 19.5 \\ 158.2 & 0.1 \\ -50.4 & 119.6 \\ -115.0 & -128.9 \end{bmatrix}, \quad \rho_{min} = 0.24$$

Des trajectoires de références pour l'angle de dérive, la vitesse du lacet et le LTR sont données et correspondent au comportement idéal du véhicule dans cette situation spécifique. Afin de contraindre le comportement du véhicule à suivre ces trois références, trois actions de commande calculées par le contrôleur ont été nécessaires.

La figure 3 montre les angles de braquage actif avant et arrière calculés par le contrôleur.

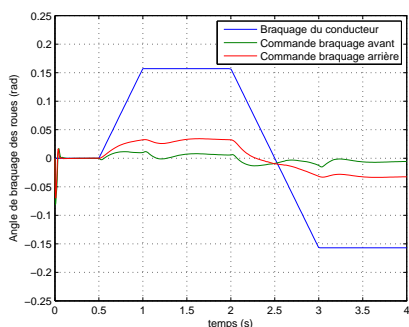


Figure 3 – Braquage des roues avant et arrière

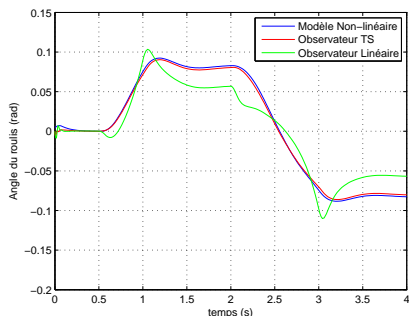
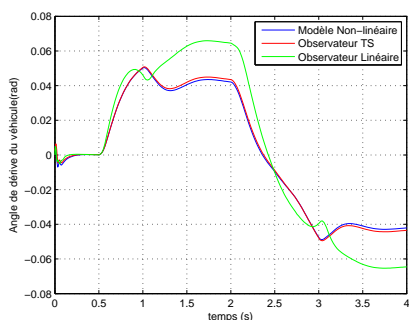


Figure 4 – Estimation du roulis et de la dérive du véhicule

Les résultats de l'estimation par l'observateur *TS* comparés à un observateur de Luenberger basé sur le modèle linéaire sont montrés sur la figure (4). Ces résultats démontrent clairement l'efficacité de l'observateur *TS* à estimer la dynamique latérale et du roulis du véhicule dans de telles manoeuvres.

La figure (5) montrent une comparaison entre le véhicule muni de la loi de commande et le véhicule sans loi de commande. Les états du véhicule contrôlé suivent avec succès les trajec-

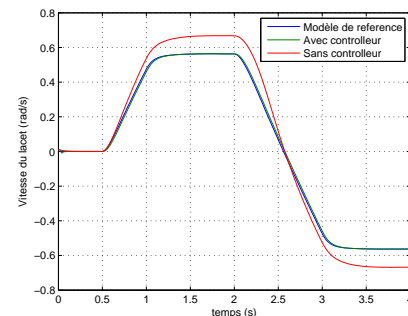
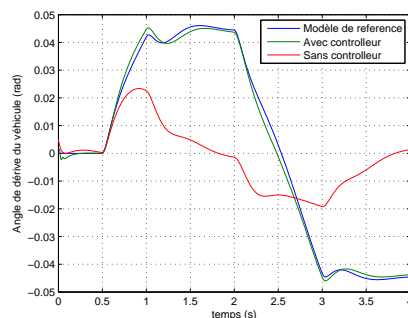


Figure 5 – Dynamique latérale du véhicule avec et sans contrôleur

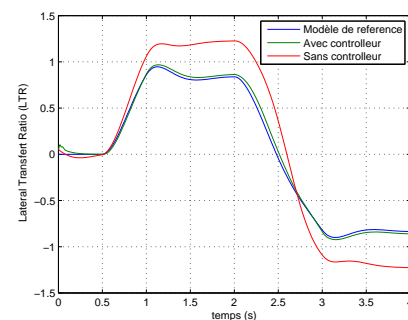


Figure 6 – Évolution du taux de transfert de charge du véhicule avec et sans contrôleur

toires de référence, alors que le véhicule non contrôlé est complètement instable. La figure (6) illustre le *LTR* calculé pour le véhicule avec et sans contrôleur comparé au modèle de référence. Elle montre que le *LTR* qui représente un indicateur de risque de renversement et plus important dans le cas du véhicule sans contrôleur, tandis que le véhicule contrôlé présente un *LTR* très proche de la référence désirée. Le véhicule sans contrôleur a répondu aux actions du conducteur avec un retard sur la

trajectoire, ce qui amène le conducteur à vouloir sur-braquer, tandis que le véhicule avec contrôleur a montré une bonne stabilité et une réponse plus adéquate sur la trajectoire.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons développé une méthode de commande par retour d'état basée sur observateur pour la stabilité globale du châssis. Le contrôleur agit sur un système de braquage actif sur les roues avant et arrière du véhicule ainsi qu'un système de suspension qui génère un moment de roulis actif afin d'assurer la stabilité latérale et éviter les renversements dans les situations critiques. L'objectif principal du contrôleur est de forcer la réponse du véhicule à suivre des références de l'angle de dérive, de la vitesse du lacet et du taux de transfert de charge données par un modèle de véhicule en situation idéale. La représentation *TS* a été utilisée dans le but de prendre en compte les non linéarités des forces latérales qui apparaissent particulièrement dans les manœuvres brusques et les situations d'évitement d'obstacle. Un observateur *TS* avec variables de prémisses non mesurables a été proposé afin d'estimer les variables de la dynamique du véhicule qui ne sont pas mesurables. Afin de garantir la stabilité de l'erreur d'estimation ainsi que celle de l'erreur de poursuite, des contraintes *LMI* basées sur l'approche H_∞ sont obtenues pour le calcul des gains de l'observateur et du contrôleur. Les états estimés sont utilisés par le contrôleur flou pour un retour d'état avec l'ajout d'un intégrateur sur l'erreur de poursuite. Un scénario d'évitement d'obstacle a été simulé sur Matlab/Simulink afin d'illustrer l'efficacité des techniques développées. Les résultats en simulations montrent clairement l'avantage du véhicule équipé d'un contrôleur au niveau de sa stabilité et de sa capacité à éviter un renversement en situations critiques. Dans les prochains travaux, le contrôleur sera testé sur un simulateur de véhicule professionnel afin de s'approcher d'une validation expérimentale.

Références

- [1] "Cooperative Agreement to Support Biomechanical Research - Rollover Tasks". UNITED STATES DEPARTMENT OF TRANSPORTATION (U.S. DOT) National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA), 2011
- [2] A. Nishio et al., Development of vehicle stability control system based on vehicle sideslip angle estimation, *SAE Paper*, no.01-0137, 2001.
- [3] B. A. Güvenç, T. Bünte, D. Odenthal and L. Güvenç, Robust Two Degree-of-Freedom Vehicle Steering controller Design, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp.627-636, July 2004.
- [4] W. El Messoussi, O. Pagès and A. El Hajjaji, Observer-Based Robust Control of Uncertain Fuzzy Dynamic Systems with Pole Placement Constraints : An *LMI* Approach, *American Control conference*, Minneapolis, Minnesota USA, pp. 2203-2208, June 2006.
- [5] T.M. Guerra and L. Vermeiren, LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno form, *Automatica*, vol. 40, pp. 823-829, 2004.
- [6] [A. El Hajjaji, M. Chadli, M. Oudghiri-Bentaie and O. Pages (2006)] Observer-based robust fuzzy control for vehicle lateral dynamics, *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE-ACC Minneapolis, Minnesota, USA ,p. 4664-4669, June 14-16.
- [7] C.S. Tseng, B.S. Chen and H.J. Uang, Fuzzy Tracking control design for Nonlinear dynamics systems via *TS* Fuzzy Model, *IEEE Trans. on Fuzzy systems*, vol. 9, No.3, pp. 381-392, 2001.
- [8] H. Dahmani, M. Chadli, A. Rabhi and A.El Hajjaji Road angle considerations for detection of impending vehicle rollover, *IFAC AAC*, Munich, Germany, 2010, do :10.3182/20100712-3-DE-2013.00141.

Fuzzy logic techniques for Cybercars: a control and decision approach.

O. Rojas Michelena¹

J. Pérez Rastelli¹

F. Nashashibi¹

¹ IMARA team at INRIA research center, Paris – ROCQUENCOURT, oriana.rojas_michelena@inria.fr, joshue.perez_rastelli@inria.fr, Fawzi.Nashashibi@inria.fr

Abstract:

In the context of Intelligent Transportation Systems (ITS) one of the aims is to reach autonomous vehicle capabilities based on human driver experiences in different situations. This problem can be treated from two points of view: by tracking a reference (curve lines -lateral control- or speed -longitudinal control-) and by the decision approach (in specific or dangerous situations). In this paper, fuzzy logic techniques have been implemented in real time control tools to translate human knowledge to driverless control processes, considering risk/warning situation. A comparison with previous works (based in classic control laws) for driving, was carried out in urban areas. Moreover, a new approach to give the driver, a reference speed when the vehicle is arriving to a traffic light intersection was developed. Some simulations show that fuzzy logic techniques are promising in the development of ITS applications.

Keywords:

Autonomous Vehicle, Fuzzy Logic Controllers, Intelligent Transportation Systems, Cybercars, Speed Control, Lateral Control tracking

1 Introduction

Autonomous driving is one of the most expanding topics in the ITS field, because it is directly beneficial to drivers. For this reason, different research centres and manufacturers around the world are working together developing solutions for driver assistant systems, intelligent infrastructure and autonomous vehicles.

Different approaches have been developed in order to control autonomous vehicles in urban and highway scenarios. The control of a dynamic system, as real vehicles, it is not a simple task because of the complexity of the system modelling and the tuning process. In this context, intelligent control techniques offer powerful methods for the control of autonomous vehicles [1][7][5].

Fuzzy logic translates human knowledge for the driverless control process, by rule bases and membership input and output functions, for tracking (control) and decision (risk/warning situation) point of view.

This approach is framed in the IMARA [13] team goals, which are focused on ITS researches, especially in autonomous driving systems (Cybercars). In this work, the focus is the control and decision stages [2]. A new fuzzy tool able to control the lateral and longitudinal actions is proposed.

The rest of this work is organized as follows. In section 2, a summary of some of previous fuzzy logic approaches, as well the proposed in this work are presented. *Lateral control tracking* and *speed reference* in traffic light intersections are described in section 3 and 4. Section 5 explains the simulations carried out with RTMaps [15] and ProSiVIC [17]. Finally, the conclusions and future works are presented in section 6.

2 Fuzzy logic approach

Fuzzy logic techniques have been widely implemented in different industrial process in the last decade [4][12]. For this reason, many libraries, mainly developed in C++, are easily found in the literature.

Conventional controllers frequently use differential equations to describe the system behavior. Sometimes, this information is incomplete because some assumptions in the modeling process. For this reason, fuzzy controllers are an interesting alternative, because they use the expert knowledge (in our case the driver), which can be represented in natural languages.

Specifically in autonomous driving applications, the experimental fuzzy coprocessor, called ORBEX, was used by the Autopia [14] team in different situations as follows: lateral and longitudinal control, overtaking with three vehicles, intersections, merging, car racing simulations, among others [6][7][1].

In 2012, this library was updated, improving its previous performance in terms of computing time, structure and adding new membership input and output functions [1].

The goal is to achieve the autonomous driving of the vehicle using simple sentences defined in a rule base. Then, it is necessary to define the input and output membership functions [8].

2.1 Real time implementation

Regarding to real time simulations, two algorithms were developed in different situations (lateral control and longitudinal speed reference), using RTMaps and Microsoft Visual Studio [16] softwares.

RTMaps is a multitasking environment that allows embedded systems and its applications to interact with multi-task processes. It has a user-friendly graphical interface where different modules can be connected for real time applications [10]. Some modules are predefined or programmed in C++ with Microsoft Visual Studio.

In this work, two modules based on fuzzy logic libraries were created. One of them was developed in order to compare the classic controller of a previous work with a fuzzy controller to improve the lateral control tracking presented in [2]. Moreover, another module to warn speed references at intersections with traffic lights was proposed. The idea was that the vehicle is able to know at which speed it must travel to avoid abrupt braking and save fuel.

V2I (Vehicle to Infrastructure) communications are considered in this last module. This allows the vehicle to know the position of the infrastructure and the traffic light time (time to red and time to green) up to 200 meters before arriving to the intersection. This information is

used by the vehicle to achieve a better increasing, decreasing or maintaining of the reference (recommended) speed, or even stop slowly and wait for the next green light or the next *green wave* if it is necessary.

3 Lateral control tracking

For the fuzzy controller applied to lateral control, two input variables were considered, as proposed in [8], the “Heading Error” and the “Lateral Error”, where:

Heading error: it is the angle between the vehicle direction and the predetermined trajectory, measured in radians (Figure 1).

Lateral error: is the deviation of the front of the vehicle from that same predefined route (Figure 1).

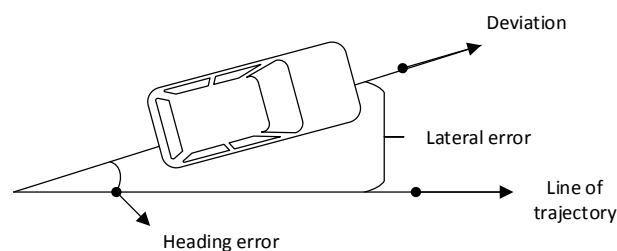


Figure 1– Input variables for the fuzzy controller.

Figure 1 shows the input variables. The surface control is showed in Figure 2. Moreover, the curvature is also considered in control law, as proposed in [2]. This variable is calculated in each segment of the path. Then, the output of the fuzzy controller is added at the end of the *defuzzification* process. The rules used in the lateral steering control are described as follows [8]:

```
IF Lat_error Right THEN Steer_Pos Left
IF Lat_error Center THEN Steer_Pos Center
IF Lat_error Left THEN Steer_Pos Right
IF Head_error Right THEN Steer_Pos Left
IF Head_error Center THEN Steer_Pos Center
IF Head_error Left THEN Steer_Pos Right
```

The *Steering Position* is the output variable of the controller and has three *singletons* (*Left* (0.5), *Right* (-0.5) and *Center* (0)). Each *singleton* represents the basic positions of the steering wheel.

The inference method (*center-of-area method*) uses each output variable according to each linguistic label, as proposed in [5]. The fuzzy controller allows to write the rules in an almost natural language, so if the controller read that the vehicle is coming out of the path, it orders the vehicle to steer in the opposite direction.

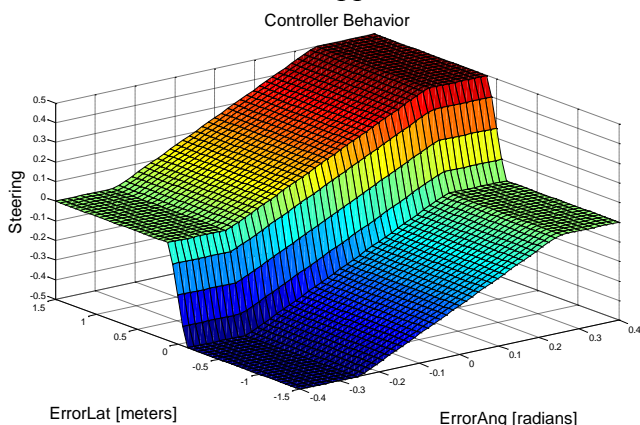


Figure 2 – Surface Controller Behavior

4 Speed reference in traffic light intersections

For this application it was necessary to use three input variables, which are the traffic light times, red light, green light and the distance to interception (DTI) (Figure 3).

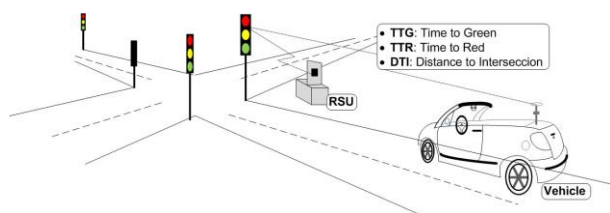


Figure 3 – Input variables for the speed reference fuzzy controller

Figure 4 and Figure 5 shows the membership functions for each input variable.

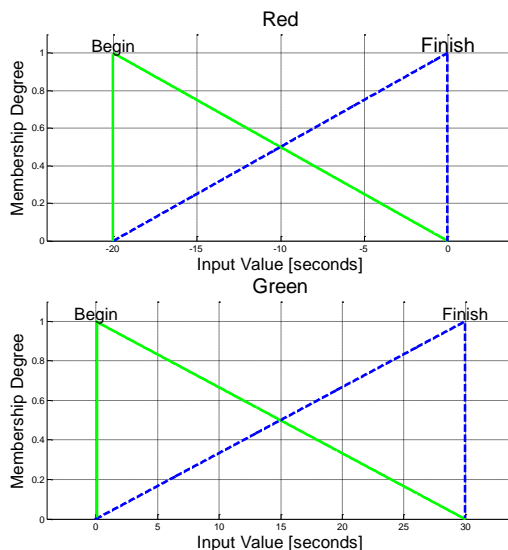


Figure 4 – Membership functions for the traffic light time, red and green respectively

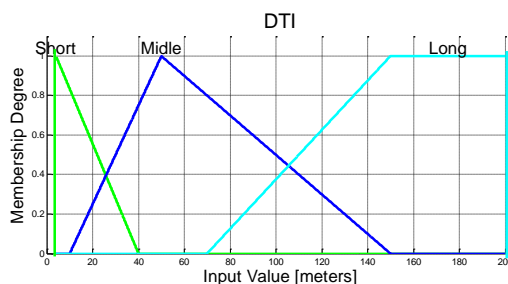


Figure 5 – Membership function for the distance to interception (DTI)

Two variables are used for the traffic light (Red and Green), where each has defined two membership functions completely symmetrical covering all the possible inputs. In this application the time cycle of the lights are 30 seconds for green and 20 seconds for red. The values of input membership functions were defined considering these times.

The reason to use two different variables for green light and red light is that the algorithm considers them as two principal cases; this approach is based on the scenarios described in [9], as follows:

- Scenario 1: maintain speed
- Scenario 2: accelerate and overtake
- Scenario 3: reduce speed and overtake
- Scenario 4: brake and wait for the next green

The DTI membership function (Figure 5) gives more weight to the distance when the vehicle is closer at the intersection. In this situation, the vehicle can be inside the “short” or the “middle” label, because in these cases the response has to be faster than in the case where the vehicle is in the “long” label.

The cross rule base, based on driver knowledge when is arriving to an intersection, is defined as follows:

```
IF Green Begin AND DTI Short THEN Acc MidAcc
IF Green Begin AND DTI Midle THEN Acc Acc
IF Green Begin AND DTI Long THEN Acc Keep
IF Green Finish AND DTI Short THEN Acc Brake
IF Green Finish AND DTI Midle THEN Acc MidBrake
IF Green Finish AND DTI Long THEN Acc Keep
```

```
IF Red Begin AND DTI Short THEN Acc Brake
IF Red Begin AND DTI Midle THEN Acc MidBrake
IF Red Begin AND DTI Long THEN Acc BrakeFew
IF Red Finish AND DTI Short THEN Acc Few
IF Red Finish AND DTI Midle THEN Acc Few
IF Red Finish AND DTI Long THEN Acc Keep
```

Here the *inference method* is the same as proposed in [5][8]. The *singletons* represent accelerations and decelerations, selected to improve the drivers comfort and avoid abrupt velocity changes [11].

To obtain the reference speed, two equations, based on the uniformly accelerated rectilinear motion, were used. The first equation is used for accelerate/maintain, and the other for decrease/break (Eq.1 and Eq. 2).

$$V = at + Vo \quad (1)$$

$$V = \sqrt{2da} \quad (2)$$

“ Vo ” is the initial speed at the first iteration, and then it is the current speed; “ d ” is the DTI variable; “ t ” is the time to interception; and “ a ” is the acceleration given by the controller.

5 Experimentation and results

5.1 ProSiVIC and RTMaps

The algorithms for both applications were tested and validated in a virtual simulation

environment with ProSiVIC (Connected to the RTMaps modules). This software offers a multisensory platform and provides the possibility to work with different parameters of a real vehicle, such as longitudinal and lateral speeds, steering wheel response, pitch, and roll and yaw angles, weather conditions, and friction coefficients, among others. [2]

The ProSiVIC platform allows synchronization of many variables. Among these are camera viewports, steering position, simulation time and acceleration.

5.2 Lateral Control Tracking Validation

Figure 6 and Figure 7 show the results regarding the fuzzy and classic controller. Specifically, Figure 6 shows the superposition of the lateral and heading error for each control. The heading errors graphic is similar for both controllers, because values of maximum deviation in the turning inside the roundabout are approximately 0.3 rad.

However the most important behaviour in this graphic is the lateral error result, where the difference is actually remarkable, since the maximum lateral error introduced with the fuzzy controller is only the 10% of the error obtained with the classic control.

It should be noted that this test was made considering the same scenario and conditions, with low speed (no more than 30 km/h) and simulated in a roundabout.

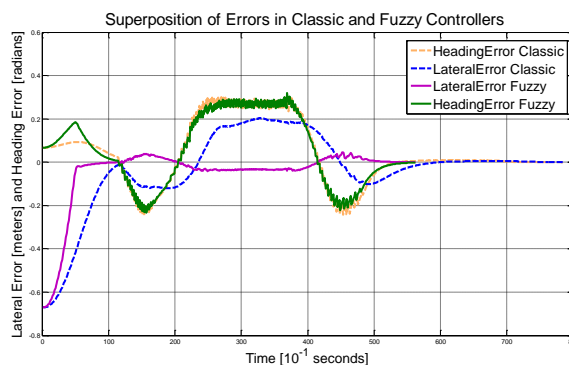


Figure 6 – Lateral and heading errors for classic and fuzzy controllers

In the Figure 7 the steering output result for both controllers are shown. It can be appreciated that the decision in both

controllers are similar. The difference is at the beginning, where the fuzzy control is more drastic, but in the roundabout the fuzzy response looks more stable than the “Steering with the classic controller” response. In general the peak values are the same, but this was an expected behavior, after all the difference between lateral errors is only 0.18 m.

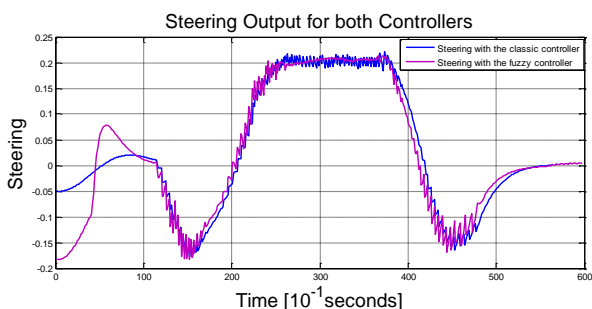


Figure 7 – Steering output of controllers, the classic and the fuzzy control

5.3 Speed Reference Tool Validation

For this experiment, several parameters have to be shown, e.g.: distance to interception, traffic light time, time to interception and current speed.

Here two simulations were performed; one for long distance (126m) and one for short distance (22m), in order to evaluate the fuzzy controller speed reaction.

Figure 8 shows how the parameters move when the vehicle is approaching the intersection. The distance to interception decreases, and the time to interception is directly proportional to the current speed. In Figure 9, the controllers response with the traffic lights (dotted lines) can be appreciated. In this figure the real speed represents the decision taken by the driver. The purple and blue lines are the recommended speed given by the tool with the fuzzy and classic controller, respectively.

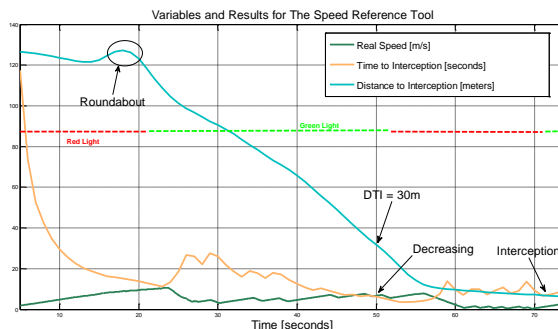


Figure 8 – Speed reference tool variable behaviors for the intersection problem in long distance

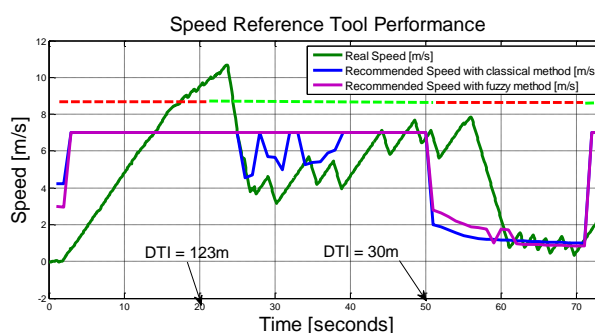


Figure 9 – Speed reference tool performance for long distance (126m)

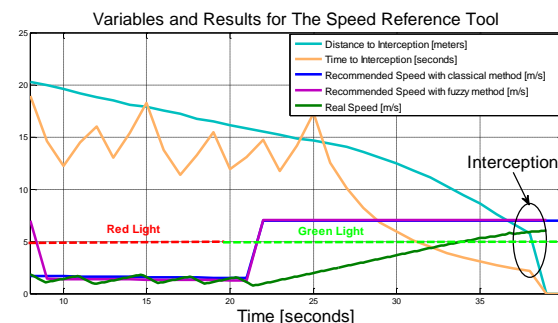


Figure 10 – Speed reference tool performance for the intersection problem in short distance

Figure 10 and Figure 11 the same experiment was done, but with a shorter distance. The results for both controllers were similar. The difference was the simplicity in the tuning process of the fuzzy controller.

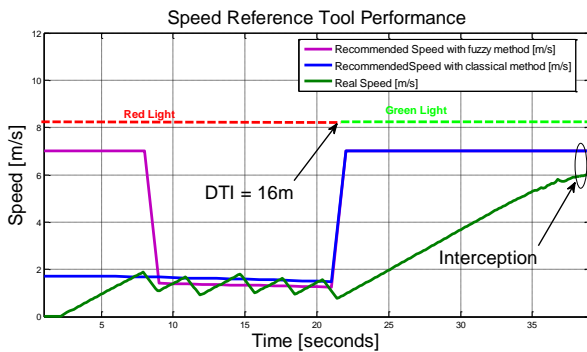


Figure 11 – Speed reference tool performance for short distance (22m)

Figure 11 shows the current and recommended speed. The first one doesn't follow exactly the recommended by the module; this is due to the lack of capacity in the graphic card for the simulation software (ProSiVIC) in our computer, thereby altering the different variables. However, this behavior is useful, because the controller does responds to inaccurate speed inputs, analogous to a real vehicle driver behavior.

6 Conclusions and future works

This work describes two ways to use fuzzy logic techniques to improve vehicle maneuvers. The behavior of a human driver was emulated, both cases: steering wheel and a reference longitudinal speed in traffic lights intersections.

These controllers worked very well, even exceeded expectations, improving previous works, and giving an easy way to translate human knowledge in the driving process. For future works other algorithms based on neuro-fuzzy systems will be considered, which are able to learn from a human driver.

Acknowledgements:

This works was supported by the project Co-Drive (Co-Pilote pour une Route Intelligente et des Véhicules Communicants) –Mov'eo, System @TIC pole de compétitivité (Paris) and Pôle Véhicule de Futur-

References

[1] E. Onieva, J. Godoy, J. Villagrà, V. Milanés, J. Pérez, *On-line learning of a fuzzy controller for a precise vehicle cruise control system*, Expert

Systems with Applications, Volume 40, Issue 4, March 2013.

- [2] Gonzalez, D. y Pérez, J. *Control architecture for Cybernetic Transportation Systems in urban environments*, 2013.
- [3] Lopez, H. (2012). *Tool for Design of Fuzzy Controllers for Automatic Driving Vehicles*. Degree Thesis. Universidad Simon Bolivar, Sartenejas, Venezuela.
- [4] M. Sugeno and M. Nishida, "Fuzzy control of model car", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 16, no. 2, pp. 103–113, Jul. 1985.
- [5] Mamdani, E. *Application of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant*. *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 121(12), páginas 1585–1588, 1974.
- [6] Milanés, V., Pérez, J., Onieva, E., González, C., & de edro, T. (2010). *Lateral power controller for unmanned vehicles*. *Przeład Elektrotechniczny*, Electrical Review, 86, 207–211.
- [7] Naranjo, J. E., Gonzalez, C., Garcia, R., & de Pedro, T. (2008). *Lane-change fuzzy control in autonomous vehicles for the overtaking maneuver*. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 9, 438–450.
- [8] Pérez, J., Milanés, V. y Onieva, E. *Cascade architecture for lateral control in autonomous vehicle*. *Intelligent Transportation Systems*, IEEE Transactions on, vol. 12, NO. 1(6), páginas 73-82, 2011.
- [9] Rakha, H., Kamalanathsharma, R. and Ahn, K. *Eco-Vehicle Speed Control at signalized intersections using I2V communication*. 2012
- [10] RTMaps, version 4.x, *User's manual*, Intempora S.A, 2011.
- [11] Solea, R. and Nunes U. *Trajectory Planning and Sliding-Mode Control Based Trajectory for Cybercars*. 2007.
- [12] T. H. S. Li and S.-J. Chang, "Autonomous fuzzy parking control of a carlike mobile robot," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. A, Syst., Humans*, vol. 33, no. 4, pp. 451–465, Jul. 2003.
- [13] <http://imara.inria.fr/>
- [14] <http://www.car.upm-csic.es/autopia/equipo.php>
- [15] www.intempora.com
- [16] www.microsoft.com/visualstudio
- [17] www.civitec.com

Delay-Dependent Approach to Robust H_∞ control and Stabilization Analysis for Uncertain Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with State and Input Time-Delays

BOURAHALA Fayçal
QUERE Laboratory, Electrotechnic Department, University Setif 1 (19000)
Bourahala1981@yahoo.fr

KHABER Farid
jfkhaber@yahoo.fr

Abstract:

This paper presents the robust H_∞ control problems for a class of uncertain Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems with time-delay where uncertainties involved in the state and input matrices. The T-S fuzzy model is employed to represent uncertain delayed nonlinear systems. A delay-dependent stabilization criterion is first presented and new conditions of stabilization for uncertain T-S fuzzy model with time-delay are given in the form of linear matrix inequalities (LMI) and based on Lyapunov-Krasovskii functional approach. The fuzzy feedback robust H_∞ controller is designed to stabilize the T-S fuzzy system to achieve the prescribed disturbance attenuation level. Numerical example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords:

T-S fuzzy model, time-delay systems, robust stability, LMI, uncertain systems, delay-dependent conditions.

1 Introduction

In recent years, the nonlinear systems in the form of Takagi and Sugeno fuzzy model has been extensively investigated due to its effectiveness in control system [1]. This fuzzy model has shown its advantages in using a small number of fuzzy rules for modeling the higher-order nonlinear systems. It is described by fuzzy IF-THEN rules which represent local linear input-output relations in various operating points of the nonlinear systems. The overall T-S fuzzy model is obtained by interconnecting of all subsystems through the fuzzy membership functions.

The stability and stabilization problem of T-S fuzzy model based on the candidate Lyapunov function has been extensively studied over the past two decades [2-3] and references therein. By the parallel distributed compensation (PDC) technique the state feedback stabilization conditions can be obtained and expressed in terms of the feasibility of a set of LMI which can be solved numerically and

effectively using convex programming techniques [4].

In the original T-S fuzzy model formulation, there is no delay in the control input, output and state. However, time delays often appear in industrial systems and information networks such as chemical processes, metallurgical processing systems, network systems and long transmission lines in pneumatic, hydraulic and so on. Hence, the existence of time-delays usually becomes the source of instability and deteriorated performance of systems. Thus, it is also important to develop system theory and extend the stability and stabilization issues to nonlinear time-delay systems. Therefore, The study of delay systems has been the subject of many studies in automatic in recent years [5-7], in which some LMI conditions for stability and stabilization have been proposed and based on Lyapunov-Krasovskii functional method.

It is clear that the stability analysis and stabilization are important issues in analysis and design of fuzzy control systems with time delay. In general, there are two ways for the stability analysis and control synthesis of T-S fuzzy model with time-delay, they are delay-independent and delay-dependent approaches. For both approaches, they have their own advantages on dealing of T-S fuzzy models with time-delay. Much attention has been paid to the study of delay-dependent stability and stabilization for time-delay systems because delay-dependent results for time-delay systems are less conservative than those for the delay-independent cases, especially for time-delay systems with actually small delay. Delay-independent conditions that are independent of the size of the time delay have been proposed in [8-9], where as delay-dependent conditions have been obtained in [10-13].

In this paper, we present some sufficient conditions for the solvability of the problem of delay-dependent stability and stabilization for T-S fuzzy systems with state and input delay with parameter uncertainties.

Here we give generalized delay-dependent sufficient conditions for stability of fuzzy time-delay systems. In fact, our generalized conditions guarantee the stability of a wider class of systems than other conditions in the literature. The principal idea to obtain such generalized conditions is an appropriate selection of Lyapunov–Krasovskii functional that give us new stability conditions (less conservative) than other conditions in the literature. The delay-dependent robust stability and stabilization conditions will be presented in terms of LMI.

In this paper, we consider the problem of robust H_∞ control design for T–S fuzzy model with time-delay. it is organized as follows; we introduce a class of T–S fuzzy model with time-delay in section 2. In section 3, state feedback fuzzy control law for fuzzy systems with time delay is proposed and based on the PDC and Lyapunov–Krasovskii functional using LMI. Section 4 establishes the delay-dependent stability and stabilization of uncertain T-S fuzzy models results in terms of LMI. One example of simulation in the Matlab environment is shown in section 5 to illustrate the effectiveness of our results. Finally, concluding remarks are given in section 6.

2 Problem statement

Consider a continuous-time uncertain fuzzy system with time state and input delays, which are represented by a following T–S fuzzy model [1].

Plant Rule i

IF $z_1(t)$ is μ_{i1} and ...and $z_g(t)$ is μ_{ig} THEN

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_{id} + \Delta A_{id})x(t - \tau_1(t)) \\ \quad + (B_i + \Delta B_i)u(t) + (B_{id} + \Delta B_{id})u(t - \tau_2(t)) + B_{iw}W(t) \\ y(t) = C_i x(t) + C_{id}x(t - \tau_1(t)) + D_i u(t) + B_{iz}W(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\max(\tau_{01}, \tau_{02}), 0], \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (1)$$

where r is the number of IF-THEN rules, $\mu_{ij}(i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, g)$ are fuzzy sets and $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]^T \in R^p$ are known as premise variables depending linearly or not on

$x(t)$, A_i , A_{id} , B_i , B_{id} , C_i , C_{id} , B_{iw} , B_{iz} and D_i are known constant matrices with appropriate dimensions, $x(t) \in R^n$ is the state variable vector; $u(t) \in R^m$ is the control input vector, $y(t) \in R^q$ is the controlled output, $W(t) \in R^p$ which is assumed to belong to $L_2 \in [0, \infty]$, denotes the external perturbation. $\tau_1(t)$ and $\tau_2(t)$ are the continuous functions represents a time-varying delays in state and input respectively, satisfying;

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_{0i} \leq \infty, \quad \dot{\tau}_i(t) \leq \mu_i \leq \infty, \quad (i = 1, 2) \quad \forall t \geq 0$$

where τ_{0i} and μ_i are constants. ΔA_i , ΔA_{id} , ΔB_i and ΔB_{id} are time-varying matrices with appropriate dimensions, defined as;

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= H_i F_i(t) E_{ai}, \quad \Delta A_{id} = H_i F_i(t) E_{aid}, \quad \Delta B_i = H_i F_i(t) E_{bi} \\ \Delta B_{id} &= H_i F_i(t) E_{bid} \end{aligned} \quad (2)$$

where $H_i, E_{ai}, E_{aid}, E_{bi}$ and E_{bid} are known constant real matrices with appropriate dimensions that characterize the structures of uncertainties, $F_i(t)$ is an unknown real matrix function satisfying the inequality:

$$F_i^T(t) F_i(t) \leq I \quad (3)$$

By using center-average defuzzifier, product inference and singleton fuzzifier, the final outputs of the T-S fuzzy systems (1) can be inferred as follows

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \times \\ \quad ((A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_{id} + \Delta A_{id})x(t - \tau_1(t)) \\ \quad + (B_i + \Delta B_i)u(t) + (B_{id} + \Delta B_{id})u(t - \tau_2(t)) + B_{iw}W(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \times \\ \quad C_i x(t) + C_{id}x(t - \tau_1(t)) + D_i u(t) + B_{iz}W(t) \end{cases} \quad (4)$$

where

$$h_i(z(t)) = w_i(z(t)) / \sum_{i=1}^r w_i(z(t)), \quad w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g \mu_{ij}(z(t))$$

The term $\mu_{ij}(z(t))$ is the degree of membership of $z_j(t)$ in fuzzy set μ_{ij} . In this paper, it is assumed that $w_i(z(t)) \geq 0 \quad i = 1, \dots, r$ and $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$ for all t . Therefore,

$$h_i(z(t)) \geq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1.$$

In this paper, a state feedback T–S fuzzy-model-based controller will be designed for stabilizing T–S fuzzy system (4) via PDC low.

This law of control shares the same fuzzy sets than the T-S fuzzy model. The gains of the controller can be determined by using a LMI formulation.

Control rule i:

IF $z_1(t)$ is μ_{i_1} and, ..., $z_g(t)$ is μ_{i_g} THEN

$$u(t) = K_i x(t) \quad i = 1, \dots, r \quad (5)$$

Hence, the overall fuzzy control law is represented by:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad (6)$$

where $K_i (i=1,2,\dots,r)$ are the local control gains to be determined later.

Remark1: The existence of input delay leads

to the term $u(t - \tau_2) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t - \tau_2)) K_i x(t - \tau_2)$,

so, it is natural and necessary to make an assumption that the functions $h_i(z(t))$ $i=1,\dots,r$ are well defined for all $t \in [-\tau_2, 0]$ and also satisfy the equality $h_i(z(t - \tau_2)) \geq 0$ $i=1,\dots,r$ and

$\sum_{i=1}^r h_i(z(t - \tau_2)) = 1$. For notational simplicity, we use h_i and $h_i^{\tau_2}$ to represent $h_i(z(t))$ and $h_i(z(t - \tau_2))$ respectively in the following description.

The design of the fuzzy controller is to determine the feedback gains $K_i (i=1,2,\dots,r)$ such that the resulting closed-loop system is asymptotically stable.

Associated with the control law (6), the resulting closed-loop system can be expressed as follows:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j^{\tau_2} \times (\bar{A}_i x(t) + \bar{A}_{id} x(t - \tau_1(t)) + \bar{B}_i K_j x(t) + \bar{B}_{id} K_j x(t - \tau_2(t)) + B_w W(t))$$

Then

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i^2 [(\bar{A}_i + \bar{B}_i K_j) x(t) + \bar{A}_{id} x(t - \tau_1(t)) + B_w W(t)] \\ \quad + \sum_{j=1}^r h_i h_j^{\tau_2} [\bar{B}_{id} K_j x(t - \tau_2(t))] \\ y(t) = \sum_{r=1}^r \sum_{j=1}^r h_r [C_r + D_r K_j] x(t) + C_{id} x(t - \tau_1(t)) + B_z W(t) \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\bar{A}_i = A_i + \Delta A_i, \bar{A}_{id} = A_{id} + \Delta A_{id}, \quad \bar{B}_i = B_i + \Delta B_i \quad \text{and} \\ \bar{B}_{id} = B_{id} + \Delta B_{id}.$$

For a prescribed scalar $J > 0$, the performance index J is defined as

$$J = \int_0^{\infty} (y^T(s)y(s) - \gamma^2 W^T(s)W(s)) ds \quad (8)$$

The purpose of this work is to design a robust H_{∞} controller (6) for the T-S fuzzy model (7) such that the following requirement is satisfied:

- Under the zero initial condition, system (7) with controller (6) satisfies $\|y(t)\|_2 < \gamma \|W(t)\|_2$ for any nonzero $W(t) \in L_2[0, \infty]$, where $\gamma > 0$ is a prescribed scalar.

3 Design of robust H_{∞} controller and stabilization analysis

In this section, we will derive the delay-dependent LMI conditions for H_{∞} performance analysis for the systems (7).

The objective of this paper is to determine the feedback control law

$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)$ such that systems (7) to be

robust asymptotically stable with an H_{∞} norm bound $\gamma > 0$. Before stating our main results, the following lemmas are first presented, which will be used in the proofs of our results.

Lemma1: For any constant matrix $M > 0$, any scalars a and b with $a < b$, and any vector function $x(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that the integrals concerned are well defined, then, the following inequality holds [11]:

$$\left[\int_a^b x(s) ds \right]^T M \left[\int_a^b x(s) ds \right] \leq (b-a) \int_a^b x^T(s) M x(s) ds \quad (9)$$

Lemma2: For any constant matrices Q_{11}, Q_{22} ,

$$Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q_{11} \geq 0, Q_{22} \geq 0, \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \text{ scalar } \tau(t) \leq \tau_0$$

and vector function $\dot{x} : [-\tau_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that the following integration is well defined, then [13];

$$-\tau_0 \int_{-\tau_0}^t \begin{bmatrix} x^T(s) & \dot{x}^T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} ds \leq$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \\ \int_{-\tau(t)}^t x(t) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q_{22} & Q_{22} & -Q_{12}^T \\ Q_{22} & -Q_{22} & Q_{12}^T \\ -Q_{12} & Q_{12} & -Q_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \\ \int_{-\tau(t)}^t x(t) ds \end{bmatrix} \quad (10)$$

Lemma3: Let $Q = Q^T$, D, E and $F(t)$ be real matrices of appropriate dimensions and $F(t)$ satisfying $F^T(t)F(t) \leq I$ then, the following inequality [14];

$$Q + DF(t)E + E^T F^T(t)D^T \leq 0 \quad (11)$$

is true, if and only if the following inequality holds for $\lambda > 0$

$$Q + \lambda DD^T + \lambda^{-1} E^T E \leq 0 \quad (12)$$

Our first theorem is given as follows;

Theorem1: For given scalars $\tau_{0i} > 0, \mu_i > 0, (i=1,2)$ and $\nu_i > 0, (i=1-4)$ as well as the given matrices $K_j (j=1, \dots, r)$ systems (7) is asymptotically stable via PDC technique for any time-delay $\tau_i(t)$ satisfying $0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_{0i} (i=1,2)$ if there exist matrices $M_{11} > 0, M_{22} > 0, N_{11} > 0, N_{22} > 0, V_{11} > 0, V_{22} > 0, \tilde{W}_{11} > 0, \tilde{W}_{22} > 0, S_1, S_2$ and real matrices $T_i (i=1-4), M_{12}, N_{12}, V_{12}, W_{12}, K_j (j=1,2, \dots, r)$ such that the following conditions hold for $i, j=1, \dots, r (i \leq j)$.

$$\Omega_{ii} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (13)$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0 \quad i < j < r \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ * & N_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ * & V_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ * & W_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (15)$$

with

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & \Omega_{15} & \Omega_{16} & \Omega_{17} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} & \Omega_{25} & \Omega_{26} & \Omega_{27} \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} & \Omega_{35} & \Omega_{36} & \Omega_{37} \\ * & * & * & \Omega_{44} & \Omega_{45} & \Omega_{46} & \Omega_{47} \\ * & * & * & * & \Omega_{55} & \Omega_{56} & \Omega_{57} \\ * & * & * & * & * & \Omega_{66} & \Omega_{67} \\ * & * & * & * & * & * & \Omega_{77} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{11} = M_{12} + M_{12}^T + N_{12} + N_{12}^T - V_{22} - W_{22} + S_1 + S_2 + \tau_{01}^2 V_{11} + \tau_{02}^2 W_{11} + T_1(\bar{A}_1 + \bar{B}_1 K_j) + (\bar{A}_1 + \bar{B}_1 K_j)^T T_1^T + (C_1 + D_1 K_j)^T (C_1 + D_1 K_j)$$

$$\Omega_{12} = -c_1 M_{12} + V_{22} + T_1 \bar{A}_{id} + (\bar{A}_1 + \bar{B}_1 K_j)^T T_2^T + (C_1 + D_1 K_j)^T C_{id}$$

$$\Omega_{13} = M_{22}^T - V_{12}^T,$$

$$\Omega_{14} = -c_2 N_{12} + W_{22} + T_1 \bar{B}_{id} K_j + (\bar{A}_1 + \bar{B}_1 K_j)^T T_3^T$$

$$\Omega_{15} = N_{22}^T - W_{12}^T$$

$$\Omega_{16} = M_{11} + N_{11} + \tau_{01}^2 V_{12} + \tau_{02}^2 W_{12} + (\bar{A}_1 + \bar{B}_1 K_j)^T T_4^T - T_1$$

$$\Omega_{17} = T_1 B_{iw} + (C_1 + D_1 K_j)^T B_{iz}$$

$$\Omega_{22} = -c_1 S_1 - V_{22} + T_2 \bar{A}_{id} + \bar{A}_{id}^T T_2^T + C_{id}^T C_{id}$$

$$\Omega_{23} = -c_1 M_{22}^T - V_{12}^T, \Omega_{24} = T_2 \bar{B}_{id} K_j + \bar{A}_{id}^T T_3^T, \Omega_{25} = 0$$

$$\Omega_{26} = -T_2 + \bar{A}_{id}^T T_4^T, \Omega_{27} = T_2 B_{iw} + C_{id}^T B_{iz}, \Omega_{33} = -V_{11},$$

$$\Omega_{34} = 0, \Omega_{35} = 0, \Omega_{36} = M_{12}^T, \Omega_{37} = 0,$$

$$\Omega_{44} = -c_2 S_2 - W_{22} + T_3 \bar{B}_{id} K_j + K_j^T \bar{B}_{id}^T T_3^T, \Omega_{45} = -c_2 N_{22}^T + W_{12}^T,$$

$$\Omega_{46} = -T_3 + K_j^T B_{id}^T T_4^T, \Omega_{47} = T_3 B_{iw}$$

$$\Omega_{55} = -W_{11}, \Omega_{56} = 0, \Omega_{57} = 0,$$

$$\Omega_{66} = \tau_{01}^2 V_{22} + \tau_{02}^2 W_{22} - T_4 - T_4^T$$

$$\Omega_{67} = T_4 B_{iw}, \Omega_{77} = B_{iz}^T B_{iz} - \gamma^2 I$$

Proof: To prove the theorem, we consider the following Lyapunov–Krasovskii functional candidate:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t) + V_6(t) \quad (16)$$

where

$$V_1(t) = \mathcal{G}_1^T(t) M \mathcal{G}(t)$$

$$V_2(t) = \mathcal{G}_2^T(t) N \mathcal{G}(t)$$

$$V_3(t) = \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) S_1 x(s) ds$$

$$V_4(t) = \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) S_2 x(s) ds$$

$$V_5(t) = \tau_{01} \int_{t-\tau_{01}(t)}^t (s-t+\tau_{01}) \phi^T(s) V \phi(s) ds$$

$$V_6(t) = \tau_{02} \int_{t-\tau_{02}(t)}^t (s-t+\tau_{02}) \phi^T(s) W \phi(s) ds$$

with

$$\mathcal{G}_1(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right)^T \end{bmatrix}^T, M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G}_2(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right)^T \end{bmatrix}^T, N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ * & N_{22} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}^T, V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ * & V_{22} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ * & W_{22} \end{bmatrix}$$

and

$$M = M^T > 0, N = N^T > 0, V = V^T \geq 0, W = W^T \geq 0; S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, c_1 = (1 - \mu_1), c_2 = (1 - \mu_2)$$

The time derivative of $V(t)$ is taken along state trajectory (7), yielding;

$$\dot{V}_1(t) = \dot{\mathcal{G}}_1^T(t) M \mathcal{G}(t) + \mathcal{G}_1^T(t) M \dot{\mathcal{G}}(t) = 2 \mathcal{G}_1^T(t) M \dot{\mathcal{G}}(t) \leq$$

$$2 \begin{bmatrix} x^T(t) & \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right) \end{bmatrix} \leq$$

$$2 \begin{bmatrix} x^T(t) & \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) - c_1 x(t - \tau_1) \end{bmatrix}$$

$$\leq x^T(t) M_{11} \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) M_{11} x(t) + \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right)^T M_{12}^T \dot{x}(t) +$$

$$\dot{x}^T(t) M_{12} \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right) + x^T(t) M_{12} x(t) + x^T(t) M_{12}^T x(t)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right)^T M_{22} x(t) + x^T(t) M_{22} \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right) \\
 & - c_1 x^T(t) M_{12} x(t - \tau_1) - c_1 x^T(t - \tau_1) M_{12}^T x(t) \\
 & - c_1 \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right)^T M_{22} x(t - \tau_1) \\
 & - c_1 x^T(t - \tau_1) M_{22} \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(s) ds \right)
 \end{aligned}$$

From same method we obtains

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(t) & = \dot{g}_2^T(t) N g(t) + g_2^T(t) N \dot{g}(t) = 2g_2^T(t) N \dot{g}(t) \leq \\
 & 2 \left[x^T(t) \quad \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right)^T \right] \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ * & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) - c_2 x(t - \tau_2) \end{bmatrix} \\
 & \leq x^T(t) N_{11} \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) N_{11} x(t) + \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right)^T N_{12}^T \dot{x}(t) \\
 & + \dot{x}^T(t) N_{12} \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right) + x^T(t) N_{12} x(t) + x^T(t) N_{12}^T x(t) \\
 & + \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right)^T N_{22} x(t) + x^T(t) N_{22} \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right) \\
 & - c_2 x^T(t) N_{12} x(t - \tau_2) - c_2 x^T(t - \tau_2) N_{12}^T x(t) \\
 & - c_2 \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right)^T N_{22} x(t - \tau_2) \\
 & - c_2 x^T(t - \tau_2) N_{22} \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right) \\
 \dot{V}_3(t) & = x^T(t) S_1 x(t) - (1 - \dot{\tau}_1) x^T(t - \tau_1) S_1 x(t - \tau_1) \\
 & \leq x^T(t) S_1 x(t) - (1 - \mu_1) x^T(t - \tau_1) S_1 x(t - \tau_1) \\
 \dot{V}_4(t) & = x^T(t) S_2 x(t) - (1 - \dot{\tau}_2) x^T(t - \tau_2) S_2 x(t - \tau_2) \\
 & \leq x^T(t) S_2 x(t) - (1 - \mu_2) x^T(t - \tau_2) S_2 x(t - \tau_2) \\
 \dot{V}_5(t) & = \tau_{01} \int_{t-\tau_{01}(t)}^t (s - t + \tau_{01}) \phi^T(s) V \phi(s) ds \\
 & \leq \tau_{01}^2 \phi^T(s) V \phi(s) - \tau_{01} \int_{t-\tau_{01}(t)}^t \phi^T(s) V \phi(s) ds
 \end{aligned}$$

By using lemma 2, we obtain;

$$\begin{aligned}
 & - \tau_{01} \int_{t-\tau_{01}(t)}^t \phi^T(s) V \phi(s) ds = \\
 & - \tau_{01} \int_{t-\tau_{01}(t)}^t \begin{bmatrix} x^T(s) & \dot{x}^T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \\
 & \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \\ \int_{t-\tau_1(t)}^t x(t) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -V_{22} & V_{22} & -V_{12}^T \\ V_{22} & -V_{22} & V_{12}^T \\ -V_{12} & V_{12} & -V_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \\ \int_{t-\tau_1(t)}^t x(t) ds \end{bmatrix} \\
 \dot{V}_5(t) & = x^T(s) (\tau_{01}^2 V_{11}) x(s) + \dot{x}^T(s) (\tau_{01}^2 V_{12}^T) x(s) + \\
 & x^T(s) (\tau_{01}^2 V_{12}) \dot{x}(s) + \dot{x}^T(s) (\tau_{01}^2 V_{22}^T) \dot{x}(s) + x^T(t) (-V_{22}) x(t) + \\
 & x^T(t - \tau_1) (V_{22}) x(t) + \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(t) ds \right)^T (-V_{12}) x(t) + \\
 & x^T(t) (V_{22}) x(t - \tau_1) + x^T(t - \tau_1) (-V_{22}) x(t - \tau_1) + \\
 & \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(t) ds \right)^T (V_{12}) x(t - \tau_1) + x^T(t) (-V_{12}^T) \int_{t-\tau_1(t)}^t x(t) ds + \\
 & x^T(t - \tau_1) (V_{12}^T) \int_{t-\tau_1(t)}^t x(t) ds + \\
 & \left(\int_{t-\tau_1(t)}^t x(t) ds \right)^T (-V_{11}) \int_{t-\tau_1(t)}^t x(t) ds
 \end{aligned}$$

Using same method to calculate $\dot{V}_6(t)$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_6(t) & = \tau_{02} \left[\int_{t-\tau_{02}(t)}^t -\phi^T(s) W \phi(s) + (s - t + \tau_{02}) \frac{d}{dt} \phi^T(s) V \phi(s) \right] ds \\
 & \leq x^T(s) (\tau_{02}^2 W_{11}) x(s) + \dot{x}^T(s) (\tau_{02}^2 W_{12}^T) x(s) + x^T(s) (\tau_{02}^2 W_{12}) \dot{x}(s) \\
 & + \dot{x}^T(s) (\tau_{02}^2 W_{22}^T) \dot{x}(s) + x^T(t) (-W_{22}) x(t) + x^T(t - \tau_2) (W_{22}) x(t) \\
 & + \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(t) ds \right)^T (-W_{12}) x(t) + x^T(t - \tau_2) (-W_{22}) x(t - \tau_2) \\
 & + x^T(t) (W_{22}) x(t - \tau_2) + \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(t) ds \right)^T (W_{12}) x(t - \tau_2) \\
 & + x^T(t) (-W_{12}^T) \int_{t-\tau_2(t)}^t x(t) ds + x^T(t - \tau_2) (W_{12}^T) \int_{t-\tau_2(t)}^t x(t) ds \\
 & + \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(t) ds \right)^T (-W_{11}) \int_{t-\tau_2(t)}^t x(t) ds
 \end{aligned}$$

Now define;

$$\zeta = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau_1) & \left(\int_{t-\tau_1}^t x(s) ds \right)^T & x^T(t - \tau_2) \\ \left(\int_{t-\tau_2}^t x(s) ds \right)^T & \dot{x}^T(t) & W^T(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

From $\dot{V}_1(t), \dot{V}_2(t), \dot{V}_3(t), \dot{V}_4(t), \dot{V}_5(t), \dot{V}_6(t)$ we obtain;

$$\dot{V}(t) \leq \zeta^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} & 0 \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -V_{11} & 0 & 0 & M_{12}^T & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -W_{11} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi} \zeta \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{11} & = M_{12} + M_{12}^T + N_{12} + N_{12}^T - V_{22} - W_{22}^T + S_1 + S_2 + \tau_{01}^2 V_{11} + \tau_{02}^2 W_{11} \\
 \Phi_{12} & = -c_1 M_{12} + V_{22} \\
 \Phi_{13} & = M_{22}^T - V_{12}^T \\
 \Phi_{14} & = -c_2 N_{12} + W_{22} \\
 \Phi_{15} & = N_{22}^T - W_{12}^T \\
 \Phi_{16} & = M_{11} + N_{11} + \tau_{01}^2 V_{12} + \tau_{02}^2 W_{12} \\
 \Phi_{22} & = -c_1 S_1 - V_{22} \\
 \Phi_{23} & = -c_1 M_{22}^T - V_{12}^T \\
 \Phi_{44} & = -c_2 S_2 - W_{22} \\
 \Phi_{45} & = -c_2 N_{22}^T + W_{12}^T \\
 \Phi_{66} & = \tau_{01}^2 V_{22} + \tau_{02}^2 W_{22}
 \end{aligned}$$

Next, we will introduce some free variables as following:

$$\begin{aligned}
 & 2 \times \{ x^T(t) T_1 + x^T(t - \tau_1) T_2 + x^T(t - \tau_2) T_3 + \dot{x}^T(t) T_4 \} \times \\
 & \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j^T \left[\begin{bmatrix} (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_j) x(t) + \bar{A}_{id} x(t - \tau_1(t)) \\ \bar{B}_{id} K_j x(t - \tau_2(t)) + B_{iw} W(t) \end{bmatrix} - \dot{x}(t) \right] \right\} = 0
 \end{aligned}$$

This equality can be writing as follows

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j^T \zeta^T \left(\Theta_{ij} + \Lambda_{Hi} F_i \Lambda_{Eij} + \Lambda_{Eij}^T F_i^T \Lambda_{Hi}^T \right) \zeta = 0 \quad (19)$$

where

$$\Lambda_{Hi}^T = \begin{bmatrix} H_i^T T_1^T & H_i^T T_2^T & 0 & H_i^T T_3^T & 0 & H_i^T T_4^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{Eij}^T = \begin{bmatrix} E_{ai} + E_{bi} K_j & E_{aid} & 0 & E_{bid} K_j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{ij} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1(A_i + B_i K_j) + \\ (A_i + B_i K_j)^T T_1^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} T_1 A_{id} + \\ (A_i + B_i K_j)^T T_2^T \end{pmatrix} \\ * & T_2 A_{id} + A_{id}^T T_2^T \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \begin{pmatrix} T_1 B_{id} K_j + \\ (A_i + B_i K_j)^T T_3^T \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} (A_i + B_i K_j)^T T_4^T \\ -T_1 \end{pmatrix} & T_1 B_{iw} \\ 0 & T_2 B_{id} K_j + A_{id}^T T_3^T & 0 & -T_2 + A_{id}^T T_4^T & T_2 B_{iw} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & T_3 B_{id} K_j + K_j^T B_{id}^T T_3^T & 0 & -T_3 + K_j^T B_{id}^T T_4^T & T_3 B_{iw} \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -T_4 - T_4^T & T_4 B_{iw} \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} = 0$$

According to the definition of $y(t)$, we have

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^6 V_i(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j^2 \zeta^T (\Theta_{ij} + \Lambda_{Hi} F_i \Lambda_{Eij} + \Lambda_{Eij}^T F_i^T \Lambda_{Hi}^T) \zeta$$

$$+ y^T(t) y(t) - \gamma^2 W^T(t) W(t) \leq 0$$

By Lemma 3, it is obtained

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^6 V_i(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j^2 \zeta^T (\Theta_{ij} + \varepsilon_{ij} \Lambda_{Hi} \Lambda_{Hi}^T + \varepsilon_{ij}^{-1} \Lambda_{Eij}^T \Lambda_{Eij}) \zeta$$

$$+ y^T(t) y(t) - \gamma^2 W^T(t) W(t) \leq 0$$

where

$$y^T(t) y(t) = \quad (21)$$

$$2 \sum_{i=1}^r \sum_{j<i}^r h_i h_j^2 [(C_i + D_i K_j) x(t) + C_{id} x(t - \tau_1(t)) + B_{iz} W(t)]$$

$$\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j<i}^r h_i h_j^2 \zeta^T \times$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (C_i + D_i K_j)^T \\ \times (C_i + D_i K_j) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (C_i + D_i K_j)^T \\ \times C_{id} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} (C_i + D_i K_j)^T \\ \times B_{iz} \end{pmatrix} \\ * & C_{id}^T C_{id} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{id}^T B_{iz} \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & B_{iz}^T B_{iz} \end{bmatrix} \zeta$$

$$\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j<i}^r h_i h_j^2 \zeta^T \times G_{ij}^T G_{ij} \zeta \quad (22)$$

where $G_{Hi}^T = [(C_i + D_i K_j)^T \quad C_{id}^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad B_{iz}^T]^T$

From (18)-(21) and (22) we can obtain $\dot{V}(t)$ as;

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j^2 \zeta^T \Omega_{ij} \zeta \quad (23)$$

From (23), we arrive at (13)- (14) and (15). This completes the proof.

Theorem2: For given scalars $\tau_{0i} > 0, \mu_i > 0, (i=1,2)$ and $\nu_i > 0, (i=1-4)$ as well as the given matrices $K_i (i=1, \dots, r)$ systems (4) is asymptotically stable via PDC technique for any time-delay $\tau_i(t)$ satisfying $0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_{0i} (i=1,2)$ if there exist matrices $\bar{M}_{11} > 0, \bar{M}_{22} > 0, \bar{N}_{11} > 0, \bar{N}_{22} > 0, \bar{V}_{11} > 0, \bar{V}_{22} > 0, \bar{W}_{11} > 0, \bar{W}_{22} > 0, \bar{S}_1, \bar{S}_2$ and real matrices $X, \bar{M}_{12}, \bar{N}_{12}, \bar{V}_{12}, \bar{W}_{12}, \bar{K}_j (j=1,2, \dots, r)$ such that the following LMIs hold for $i, j=1, \dots, r (i \leq j)$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ii} & G_{ii}^T & \Lambda_{Hi} & \Lambda_{Eii}^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \quad i=1,2, \dots, r \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{jj} & G_{jj}^T & \Lambda_{Hj} & \Lambda_{Ejj}^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_j I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_j I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{ji} & G_{ji}^T & \Lambda_{Hj} & \Lambda_{Eji}^T \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ * & \bar{M}_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ * & \bar{N}_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \bar{V}_{11} & \bar{V}_{12} \\ * & \bar{V}_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} \\ * & \bar{W}_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (26)$$

where

$$\Omega_{11} = \bar{M}_{12} + \bar{M}_{12}^T + \bar{N}_{12} + \bar{N}_{12}^T - \bar{V}_{22} - \bar{W}_{22} + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \tau_{01}^2 \bar{V}_{11} + \tau_{02}^2 \bar{W}_{11} + A_1 X^T + B_1 \bar{K}_j + X A_1^T + \bar{K}_j^T B_1^T$$

$$\Omega_{12} = -c_1 \bar{M}_{12} + \bar{V}_{22} + \bar{A}_{id} X^T + \nu_2 X A_{id}^T + \nu_2 \bar{K}_j^T B_{id}^T$$

$$\Omega_{13} = \bar{M}_{22}^T - \bar{V}_{12}^T,$$

$$\Omega_{14} = -c_2 \bar{N}_{12} + W_{22} + B_{id} \bar{K}_j + \nu_3 X A_{id}^T + \nu_3 \bar{K}_j^T B_{id}^T$$

$$\Omega_{15} = \bar{N}_{22}^T - \bar{W}_{12}^T$$

$$\Omega_{16} = \bar{M}_{11} + \bar{N}_{11} + \tau_{01}^2 \bar{V}_{12} + \tau_{02}^2 \bar{W}_{12} + \nu_4 X A_{id}^T + \nu_4 \bar{K}_j^T B_{id}^T - X^T$$

$$\Omega_{17} = B_{iw}, \quad \Omega_{ij22} = -c_1 \bar{S}_1 - \bar{V}_{22} + \nu_2 A_{id} X^T + \nu_2 X A_{id}^T$$

$$\Omega_{23} = -c_1 \bar{M}_{22}^T - \bar{V}_{12}^T, \quad \Omega_{ij24} = \nu_2 B_{id} \bar{K}_j + \nu_2 X A_{id}^T, \quad \Omega_{25} = 0$$

$$\Omega_{26} = -\nu_2 X^T + \nu_4 X A_{id}^T$$

$$\Omega_{27} = \nu_{22} B_{iw}, \quad \Omega_{33} = -\bar{V}_{11}, \quad \Omega_{34} = 0, \quad \Omega_{35} = 0$$

$$\Omega_{36} = \bar{M}_{12}^T, \quad \Omega_{37} = 0$$

$$\Omega_{ij44} = -c_2 \bar{S}_2 - \bar{W}_{22} + \nu_3 B_{id} \bar{K}_j + \nu_3 \bar{K}_j^T B_{id}^T$$

$$\Omega_{45} = -c_2 \bar{N}_{22}^T + \bar{W}_{12}^T, \quad \Omega_{46} = -\nu_3 X^T + \nu_4 \bar{K}_j^T B_{id}^T, \quad \Omega_{47} = \nu_3 B_{iw}$$

$$\Omega_{55} = -\bar{W}_{11}, \quad \Omega_{56} = 0, \quad \Omega_{57} = 0,$$

$$\Omega_{66} = \tau_{01}^2 \bar{V}_{22} + \tau_{02}^2 \bar{W}_{22} - \nu_4 X^T T_4 - \nu_4 X$$

$$\Omega_{67} = \nu_4 B_{iw}, \quad \Omega_{77} = -\gamma^2 I$$

Proof: Noting that (13) and (14) are not an LMI, we cannot solve them directly using

Matlab LMI Toolbox. In order to solve (13) and (14) efficiently, pre- and post-multiply both sides of (13) and (14) with $diag[X \ X \ X \ X \ X \ X \ I \ I \ I \ I]$ and their transpose, respectively. And define new variables

$$\begin{aligned} X &= T_1^{-1}, \bar{M}_{11} = XM_{11}X^T, \bar{M}_{12} = XM_{12}X^T, \bar{M}_{22} = XM_{22}X^T \\ \bar{N}_{11} &= XN_{11}X^T, \bar{N}_{12} = XN_{12}X^T, \bar{N}_{22} = XN_{22}X^T \\ \bar{V}_{11} &= XV_{11}X^T, \bar{V}_{12} = XV_{12}X^T, \bar{V}_{22} = XV_{22}X^T \\ \bar{W}_{11} &= XW_{11}X^T, \bar{W}_{12} = XW_{12}X^T, \bar{W}_{22} = XW_{22}X^T \\ \bar{S}_1 &= XS_1X^T, \bar{S}_2 = XS_2X^T, \bar{K}_j = K_jX^T \quad (j=1,\dots,r) \\ T_2 &= \nu_2T_1, T_3 = \nu_3T_1, T_4 = \nu_2T_1 \end{aligned}$$

we can obtain (24)-(25) and (26), respectively. This completes the proof,

Moreover, the control gain K_j is given by

$$K_j = \bar{K}_j(X^T)^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (27)$$

4 Illustrative Example

In this section, we provide a numerical example and simulation to illustrate the effectiveness of the methods presented in this paper. We employed the stability conditions in Theorem 2 to obtain the feedback gains of the fuzzy controller to stabilize a time-delayed uncertain nonlinear system. Consider the following truck-trailer model with a time-state and input delay represented by T-S fuzzy model [10]:

Rule1:

$$IF \quad z(t) = x_2 + a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} x_1(t) + (1-a) \frac{v\bar{t}}{2L} x_1(t - \tau_1) \quad is \quad h_1$$

THEN

$$\dot{x}(t) = A_1x(t) + A_{1d}x(t - \tau_1(t)) + B_{1d}u(t - \tau_2(t))$$

Rule2:

$$IF \quad z(t) = x_2 + a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} x_1(t) + (1-a) \frac{v\bar{t}}{2L} x_1(t - \tau_1) \quad is \quad h_2$$

THEN

$$\dot{x}(t) = A_2x(t) + A_{2d}x(t - \tau_1(t)) + B_{2d}u(t - \tau_2(t))$$

here $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$ and

$$\begin{aligned} B_1 &= B_2 = [v\bar{t}/Lt_0 \quad 0 \quad 0]^T \\ B_{1w} &= B_{2w} = [0.02 \quad 0; \quad 0 \quad 0.02; \quad 0 \quad 0.02] \\ B_{1d} &= B_{2d} = 0.1 \times B_1, B_{1z} = B_{2z} = [0 \quad 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{v^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{v\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ ad \frac{v^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{dv\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix} \\ A_{1d} &= \begin{bmatrix} -(1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{v^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{2d} = \begin{bmatrix} -(1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a) \frac{v\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a)d \frac{v^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$E_{a1d} = E_{a2d} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$H_1 = H_2 = [0.255 \quad 0.255 \quad 0.255]^T, E_{b1} = E_{b2} = 0.3$$

$$E_{b1d} = E_{b2d} = 1$$

$$E_{a1} = E_{a2} = [0.03 \quad 0.03 \quad 0.03], F(t) = 2 \times \sin(t)$$

and

$$a = 0.7, l = 2.8, L = 5.5, v = -1, t_0 = 0.5, \bar{t} = 2$$

$$d = 10t_0 / \pi$$

The disturbance input is assumed to be

$$W(t) = \sin(2t) \times \exp(-0.2t)$$

The membership functions h_1 and h_2 are chosen as:

$$\begin{aligned} h_1 &= \left(1 - \frac{1}{1 + \exp(-2z - 0.5\pi)} \right) \left(\frac{1}{1 + \exp(-2z + 0.5\pi)} \right) \\ h_2 &= 1 - h_1 \end{aligned}$$

in the simulations, we use $\phi(t) = [1 \quad -1 \quad 1]^T$, let $a = 0.5, \nu_2 = 0.5, \nu_3 = 0.2$ and $\nu_4 = 1.2$.

By applying the stability conditions in Theorem 2, with the aid of the Matlab LMI control toolbox, the design problem to determine the feedback gains can be defined as follows:

Find

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} > 0, \bar{M}_{22} > 0, \bar{N}_{11} > 0, \bar{N}_{22} > 0, \bar{V}_{11} > 0, \bar{V}_{22} > 0, \bar{W}_{11} > 0 \\ \bar{W}_{22} > 0, \bar{S}_1, \bar{S}_2 \text{ and real matrices } X, \bar{M}_{12}, \bar{N}_{12}, \bar{V}_{12}, \bar{W}_{12} \\ \text{and } \bar{K}_{1,2} \end{aligned}$$

Satisfying $P > 0$, (24), (25) and (26)

We obtains the following fuzzy control law with $\tau_{01} = 0.1, \tau_{02} = 0.2$;

$$\begin{aligned} u(t) &= h_1 [2.6748 \quad -3.8269 \quad 0.8130]x(t) \\ &\quad + h_2 [3.1411 \quad -5.2073 \quad 1.0026]x(t) \end{aligned}$$

The response of the closed-loop system (7) with control law (6) is shown in Fig.1 under initial condition $\phi(t)=[1 \ -1 \ 1]^T$, The response of controller is shown in Fig.2. It shows that the closed-loop fuzzy system with time-delays has been effectively controlled using the designed fuzzy controller and the state response of this system has been uniformly asymptotically stable.

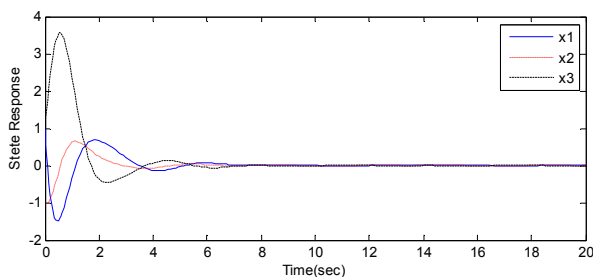


Fig.1. Response of the closed-loop system in Example 1 under fuzzy controller (6)

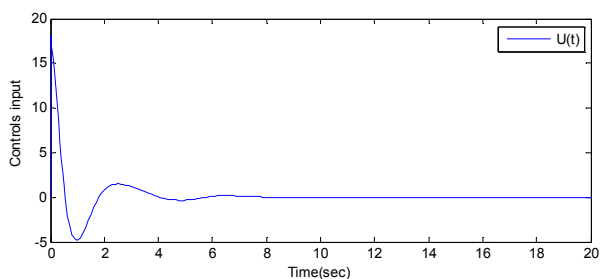


Fig.2. Controls input $u(t)$

5 Conclusion

In this paper, we have discussed the robust stabilization analysis and H_∞ controller design problems for uncertain nonlinear systems described by T–S fuzzy models with time-state and input delay. Based on Lyapunov–Krasovskii functional method. Delay-dependent sufficient conditions for robust stability of the closed-loop system have been obtained and a design method of robustly stabilizing controllers has been given, these conditions are presented in terms of LMI format. The numeric example has also been given to demonstrate the effectiveness of the new stabilisation conditions obtained for the truck-trailer model with a time-state and input delay and to demonstrate the use and the less conservativeness of the present method.

References

- [1] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116–132, Feb. 1985
- [2] Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 250-265, 1998
- [3] Tanaka K., Hua O., Wang H.O., Fuzzy control systems design and analysis a Linear Matrix Inequality, *John Wiley and Sons, New York*, 2001.
- [4] Boyd S., El Ghaoui L., Linear Matrix Inequalities in system and control theory, *Philadelphia, PA: SIAM*, 1994
- [5] J. Yoneyama, Robust stability and stabilization for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy time-delay systems. *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 158, no. 2, pp. 115–134, Jan. 2007
- [6] X. Jiang and Q.-L. Han. Robust H_∞ control for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with interval time-varying delay. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* vol. 15, no. 2, pp. 321–331, Apr. 2007.
- [7] Chen Peng and all. Sampled-data robust H_∞ control for T–S fuzzy systems with time delay and uncertainties. *Fuzzy Sets and Systems* 179 (2011) 20–33
- [8] Y.Y. Cao, P.M. Frank, Analysis and synthesis of nonlinear time-delay system via fuzzy control approach, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8 (2) (2000) 200–211.
- [9] Y. Zhang, A.H. Pheng, Stability of fuzzy systems with bounded uncertain delays, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10 (1) (2002) 92–97
- [10] Chen Peng, Dong Yue, and Yu-Chu Tian. New Approach on Robust Delay-Dependent H_∞ Control for Uncertain T–S Fuzzy Systems With Interval Time-varying delay. *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 17, no. 4, august 2009
- [12] H. N. Wu and H. X. Li. New approach to delay-dependent stability analysis and stabilization for continuous time fuzzy systems with time-varying delay. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 15, no. 3, pp. 482–493, Jun. 2007.
- [11] P. Chen, Y.C. Tian. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2007)doi:10.1016/j.cam.2007.03.009.
- [13] Li Li,b, Xiaodong Liu. New results on delay-dependent robust stability criteria of uncertain fuzzy systems with state and input delays. *Information Sciences* 179 (2009) 1134–1148
- [14] L. Xie, Output feedback H_1 control of systems with parameter uncertainty, *International Journal of Control* 63 (4) (1996) 741–750.

Interprétation possibiliste d'une analyse de sentiments multicritère pour un système de recommandation sur le web

Possibilistic interpretation of a sentiment analysis for a web recommender system

A. Imoussaten¹ B. Duthil² F. Troussel¹ J. Montmain¹

¹ LGI2P, Ecole des Mines d'Alès

² L3i, Université de La Rochelle

Site EERIE – Parc Scientifique G. Besse, 30035 Nîmes Cedex,
abdelhak.imoussaten@mines-ales.fr, francois.troussel@mines-ales.fr, jacky.montmain@mines-ales.fr
Avenue M. Crépeau, 17042 La Rochelle cedex 01,
benjamin.duthil@univ-lr.fr

Résumé :

Cet article propose un système de recommandation (SR) original basé sur l'extraction automatique d'opinions et l'aide à la décision multicritère multi acteurs. Notre SR cherche à optimiser l'automatisation du traitement de l'information disponible sur le web pour éviter aux utilisateurs les phases d'évaluation par critère et d'identification des préférences généralement complexes et fastidieuses dans les SR. Pour exposer notre approche, nous nous focalisons sur la recommandation de films, mais elle resterait valide dans de nombreux domaines. Elle s'applique dès lors que l'on dispose i) d'évaluations globales par la presse spécialisée des entités entre lesquelles il faut choisir et ii) de critiques d'internautes portant sur les différentes caractéristiques des entités rédigées en texte libre. La recommandation repose alors sur l'association d'un internaute et d'un journal spécialisé réputé avoir les mêmes valeurs que l'utilisateur et donc constituer une référence fiable et personnalisée. L'extraction automatique d'opinions multiples ne pouvant fournir que des évaluations imprécises et incertaines sur chaque critère, notre modèle se place ainsi dans le cadre de la théorie des possibilités.

Mots-clés :

Théorie de possibilités, Fusion d'intervalles, Agrégation multicritère, Système de recommandation, Extraction d'opinions.

Abstract:

This paper proposes an original recommender system (RS) based upon an automatic extraction of trends from opinions and a multicriteria multi actors assessment model. Our RS tries to optimize the use of the available information on the web to reduce as much as possible the complex and fastidious steps for multicriteria assessing and for identifying users' preference models. The particular case of RS for moviegoers is dealt to

simplify our presentation, but this approach is applicable in many other domains. It may be applied as soon as i) overall assessments of competing entities are provided by trade magazines and ii) web users' critics in natural languages and related to some characteristics of the assessed entities are available. Recommendation is then based on the capacity of the RS to associate a web user with a trade magazine that conveys the same values as the user and thus represents a reliable personalized source of information. Precise assessments related to multiple criteria cannot be expected from automatic opinion mining. Our RS thus relies on possibility theory elements.

Keywords:

Possibility theory, Intervals merging, Multicriteria aggregation, Recommender system, Opinion-mining.

1 Introduction

Ces dernières années, de nombreuses entreprises et sites Web ont mis en place des systèmes permettant l'analyse des préférences de leurs utilisateurs afin de mieux répondre aux attentes de ces derniers. À ce jour, les systèmes de recommandation sont présents dans de multiples domaines comme le tourisme/les loisirs [17], la publicité [3], le commerce électronique [13], les films [19], etc. En raison de l'explosion de la quantité de données diffusées sur l'Internet ces dernières années, rechercher et trouver des produits, des services ou des contenus pertinents est devenu une tâche difficile pour l'utilisateur souvent noyé par la masse d'informations. Ceci

explique l'intérêt croissant porté aux systèmes de recommandation tant par les utilisateurs que par les sites commerciaux.

La problématique de recommandation a été identifiée comme étant le moyen d'aider les individus à trouver des informations, ou des éléments, qui sont susceptibles de les intéresser. Généralement, on considère un ensemble d'utilisateurs *Users* et un ensemble d'éléments *Items* (services ou produits) pouvant être recommandés à chacun des utilisateurs. Par ailleurs, une recommandation multicritère contribue à améliorer la qualité d'un SR car elle permet d'explicitier les caractéristiques pour lesquelles un item a été proposé à l'utilisateur [10], [1], [2] et [18].

Un SR qui utilise un Modèle Multicritère basé sur la découverte des Préférences à partir d'Évaluations (MMPE) permet d'obtenir des recommandations détaillées plus pertinentes vis-à-vis de l'utilisateur [1], [2]. Cependant, la mise en place d'un tel modèle nécessite une base de connaissances où les items sont évalués par rapport à un ensemble de critères. Cette contrainte imposée par le modèle est très lourde pour l'utilisateur. Des approches ont tenté d'automatiser l'évaluation multicritère d'items par des techniques de datamining [20], mais elles restent spécifiques à un domaine d'utilisation, car une adaptation à un autre domaine nécessite un nouvel apprentissage supervisé quasi rédhitoire (annotation manuelle d'un nouveau corpus d'apprentissage). Cette charge de travail nuit largement à la diffusion des MMPE.

Dans [11] et [12], une méthode non-supervisée d'extraction d'opinions multicritères est proposée. Elle permet aux utilisateurs de s'affranchir de la contraignante évaluation partielle sur chaque critère des items à recommander : les utilisateurs déposent simplement leurs critiques comme à l'accoutumé, sous la forme de textes en langage naturel exprimant leurs opinions, et le système se charge de les analyser automatiquement. Il les décompose d'abord selon les critères d'évaluation (segmentation thématique) avant de calculer les polarités ou

opinions pour chacun des extraits résultant de la segmentation (opinion-mining/sentiment analysis). En combinant cette méthode à un système interactif d'aide à la décision multicritère (SIAD), il devient possible d'avoir un système automatisé pour la recommandation. Cependant l'affectation automatisée d'un score à un item pour un critère reste une opération au résultat imprécis fourni sous la forme d'un intervalle. Le SIAD doit donc gérer ensuite les multiples évaluations imprécises issues de l'analyse de sentiments sur chaque critère d'évaluation (fusion d'intervalles), puis agréger sur l'ensemble des critères. Pour exposer notre approche, nous nous focalisons sur la recommandation de films, mais elle resterait valide dans de nombreux domaines. De plus, l'évaluation des films sera limitée à deux critères *scénario* et *acteur* dans cet article.

La section 2 résume l'approche de détection d'opinions que nous avons développée dans [10]. Des critiques d'internautes sont donc extraits et calculés des scores d'opinions relativement à un groupe de critères. La section 3 explique comment fusionner ces scores imprécis pour un critère donné. La section 4 détaille comment agréger les scores obtenus à l'étape précédente pour évaluer les films dans un espace d'évaluation multicritère. La section 5 montre comment ces approches peuvent être combinées pour répondre à la problématique de la recommandation multicritère.

2 Extraction d'opinions

Sur la base de méthodes statistiques, notre approche construit un dictionnaire de descripteurs d'opinion pour une thématique donnée. Ce dictionnaire est ensuite utilisé pour extraire automatiquement la polarité d'extraits de texte. Deux étapes sont distinguées dans cette évaluation multicritère :
 – dans un premier temps, les portions de texte se rapportant à l'un des critères d'évaluation sont extraites avec notre approche *Synopsis* décrite dans [9]. Il s'agit donc de segmenter le texte par thème (ici, les critères) ;

– ensuite, pour chaque critère, la polarité des segments qui lui ont été affectés par *Synopsis* est calculée. Il s’agit là de l’étape d’opinion-mining à proprement parler [12].

2.1 Segmentation thématique par critère

L’approche non supervisée *Synopsis* est utilisée pour identifier les extraits de texte qui traitent des critères considérés et se compose de 3 étapes :

1. Construction automatique du corpus d’apprentissage utilisé pour apprendre les mots caractéristiques d’un critère ;
2. Apprentissage automatique de ces mots caractéristiques, appelés descripteurs, et construction d’un lexique associé au critère ;
3. Segmentation du texte en utilisant le lexique associé au critère.

L’approche utilise un ensemble de mots appelés « mots germes ». Ces mots germes permettent d’une part de caractériser sémantiquement le critère considéré, et d’autre part d’amorcer l’apprentissage des descripteurs caractéristiques d’un critère [9]. La construction du corpus d’apprentissage est automatique. Très schématiquement, plus un mot est fréquemment repéré dans le voisinage d’un mot germe du critère (comptage sur fenêtre glissante), plus on considère comme « forte » l’appartenance (sémantique) de ce mot au champ lexical du critère.

Synopsis construit son corpus d’apprentissage à partir de documents du web. La phase de segmentation permet également de gérer l’imprécision du langage en proposant non pas une segmentation unique pour un texte donné, mais plusieurs segmentations possibles pour des granularités de langage différentes [9]. Cette granularité correspond à l’idée que les passages identifiés comme traitant d’un thème (critère ici) peuvent varier en fonction du niveau d’expertise de l’utilisateur. Les méthodes statistiques qui supportent notre approche permettent de construire un dictionnaire de descripteurs caractéristiques d’une thématique donnée et peuvent être paramétrées afin de contrôler la taille de ce

dictionnaire (i.e., le niveau d’expertise). Plus l’utilisateur veut être certain de l’appartenance des segments de texte à un critère, plus le vocabulaire appris devra être sélectif. L’appartenance d’un descripteur au champ lexical du critère résulte du calcul d’une fonction de discrimination ; un seuil sur cette fonction permet de définir l’étiquette « forte » sur l’appartenance au critère. Plus ce seuil est haut, plus la phase d’apprentissage des descripteurs du dictionnaire de *Synopsis* est sélective (figure 1). Les seuils retenus sont calculés automatiquement à partir de l’analyse des paliers de la fonction d’appartenance au critère [10].

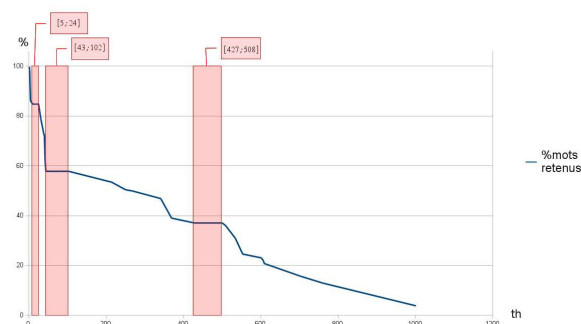


Figure 1 : pourcentage de mots retenus en fonction du seuil de discrimination

2.2 Analyse de sentiments

L’approche d’extraction d’opinions (ou d’analyse de sentiments) est une adaptation de l’approche *Synopsis* à l’extraction d’opinions pour les phases de construction automatique du corpus d’apprentissage et d’apprentissage des descripteurs. Notons que les descripteurs d’opinion appris sont généralement propres au domaine d’analyse (ici le cinéma) [14]. Les mots germes deviennent des mots germes d’opinion [12]. Deux ensembles de mots d’opinion sont initialement distingués : les positifs (P) et les négatifs (N) :

$P = \{good, nice, excellent, positive, fortunate, correct, superior\};$

$N = \{bad, nasty, poor, negative, unfortunate, wrong, inferior\}.$

Partant de l’hypothèse qu’un document qui contient au moins un mot de P (resp. N) et aucun de N (resp. P) est porteur d’une opinion positive (resp. négative), un ensemble de

documents associé à un mot germe est construit à l'aide d'un moteur sur le web comme dans *Synopsis* (requête pour le mot germe « good » dans le cinéma : *movie + good – bad – nasty – negative – poor – unfortunate – wrong – inferior*). Les descripteurs d'opinions sont limités aux adjectifs et groupes adjectivaux [10], [12]. Les techniques de filtrage statistiques par fenêtre glissante de *Synopsis* sont adaptées au comptage des descripteurs d'opinions.

Enfin, notre approche calcule pour un texte segmenté, un score d'opinion pour un critère sous la forme d'une somme pondérée des appartenances des segments au critère et aux descripteurs positifs ou négatifs. Ainsi, puisque l'extraction des segments thématiques dépend du seuil de précision exigé, le score d'opinion du texte pour le critère sera lui aussi affecté par ce seuil. Nous avons mis au point un algorithme de segmentation suffisamment performant pour calculer plusieurs segmentations d'un texte en fonction du seuil (échantillonnage) sur la fonction d'appartenance au critère. Ce résultat nous permet donc de calculer l'expression d'opinion du texte sur le critère d'analyse pour plusieurs valeurs du paramètre modélisant le niveau de connaissance de l'utilisateur. Il existe une borne inférieure et une borne supérieure pour ce score. Par conséquent, le score d'opinion est une entité imprécise que nous représentons par un intervalle dont les extrémités sont les bornes précédentes [10]. Cet intervalle sera noté par la suite I_i^j où i est le $i^{\text{ème}}$ critère et j la $j^{\text{ème}}$ critique (texte).

3 Fusion d'intervalles

A l'issue de l'analyse de sentiments automatique, une critique fournit un score imprécis relativement à un critère sous la forme d'un intervalle dont les valeurs correspondent à différentes segmentations possibles du texte (obtenues en faisant varier la précision de l'extraction comme décrit dans la section 2). Cette imprécision permet d'intégrer la subjectivité des critiques dans le

processus d'évaluation d'un critère. Cette « subjectivité » techniquement liée à la précision de l'extraction est « homogénéisée » par le traitement automatique de la segmentation. La multiplicité d'avis imprécis recueillis automatiquement pour un critère est par ailleurs source d'incertitude sur l'évaluation du critère. Pour synthétiser ces avis, faciliter leur représentation et leur manipulation dans la suite du processus de recommandation tout en respectant l'imprécision et l'incertitude des scores, la théorie des croyances fournit le cadre approprié. Les distributions de possibilité donnent une bonne approximation des fonctions de croyances et sont très pratiques des points de vue de la représentation et du calcul.

Soient un espace d'évaluation discret et fini Ω et 2^Ω l'ensemble des parties de Ω . Nous proposons un bref rappel sur la théorie des possibilités [7] et la théorie des croyances [4], [23].

3.1 Théorie des possibilités

Une distribution de possibilité π est une fonction définie sur l'ensemble Ω à valeurs dans $[0,1]$ telle que : $\sup_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$. A partir de

π , sont définies respectivement deux mesures, une mesure de possibilité : $\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega)$

et une mesure de nécessité : $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ $\forall A \subseteq \Omega$. $\Pi(A)$ quantifie à quel degré l'événement A est plausible alors que $N(A)$ quantifie la certitude de A . Une α -coupe d'une distribution de possibilité π est l'ensemble : $E_\alpha(\pi) = \{\omega \in \Omega / \pi(\omega) \geq \alpha\}$, $\alpha \in]0,1]$.

3.2 Théorie des croyances

Une *masse de croyance* notée m , est une fonction de 2^Ω dans $[0,1]$ telle que :

$$\sum_{A \in P(\Omega)} m(A) = 1 \text{ et } m(\emptyset) = 0. \text{ Un ensemble } E$$

de Ω tel que $m(E) > 0$ est appelé *élément focal*. L'ensemble des éléments focaux est noté \mathbb{F} . La fonction m peut être représentée par deux mesures : la *fonction de croyance* $Bel(A) = \sum_{\{E \in \mathbb{F} / A \supseteq E\}} m(E)$ où $\{E \in \mathbb{F} / A \supseteq E\}$ est l'ensemble des témoignages en faveur de A et la *fonction de plausibilité* $Pl(A) = \sum_{\{E \in \mathbb{F} / A \cap E \neq \emptyset\}} m(E)$ où $\{E \in \mathbb{F} / A \cap E \neq \emptyset\}$ est l'ensemble des éléments focaux qui ont une relation avec A et le rendent possible. Les éléments focaux peuvent représenter des observations imprécises sous forme d'intervalles. Dans ce cas, la probabilité d'un événement $A \subseteq \Omega$ noté $Pr(A)$, est imprécise et elle appartient à l'intervalle $[Bel(A), Pl(A)]$ ($Bel(A)$ et $Pl(A)$ représentent respectivement la probabilité inférieure et la probabilité supérieure de A).

3.3 Fusion possibiliste

Les règles de combinaison classiques présupposent que les sources sont toutes fiables (mode conjonctif) ou au moins une source est fiable (mode disjonctif) [4]. Plusieurs autres règles dites de *compromis* entre les modes conjonctifs et disjonctifs ont été proposées [8]. La règle utilisée ici pour construire les distributions de possibilité est de forme *compromis*.

Soit $\{I_j \mid j = 1, NI\}$ l'ensemble des intervalles distincts en sortie de l'analyse de sentiments pour un critère. La probabilité d'occurrence d'un intervalle I_j est considérée comme sa masse de croyance $m(I_j)$.

Dans le cas de singletons, les évaluations sont précises, nous avons :

$$\forall A \in P(\Omega), Pr(A) = Bel(A) = Pl(A).$$

Lorsque les intervalles sont emboîtés $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_{NI}$, une distribution de possibilités π est calculée à partir de la mesure de *plausibilité* : $\forall \omega \in \Omega$, $\pi(\omega) = Pl(\{\omega\}) = \sum_{j=1, NI} m(I_j) \cdot 1_{I_j}(\omega)$.

Lorsque les intervalles sont seulement cohérents ($\bigcap_{j=1, NI} I_j = I \neq \emptyset$: les opinions

partagent au moins une valeur), mais pas emboîtés, deux distributions de possibilité sont construites. D'abord, $\forall \omega \in \Omega$,

$$\pi_1(\omega) = \sum_{j=1, NI} m(I_j) \cdot 1_{I_j}(\omega).$$

Ensuite, on note $E_s = E_{s-1} \cup E_{\alpha_s}(\pi_1)$ ($s = 2, r$) ($E_1 = I$) les nouveaux intervalles emboîtés construits à partir de $\{I_j \mid j = 1, NI\}$. Dans [6] les masses de croyances $m(E_s)$ sont calculées selon

$$m(E_s) = \sum_{\{I_j \text{ associé à } E_s\}} m(I_j)$$

(chaque opinion I_j est associée de façon unique au plus petit ensemble E_s qui peut la contenir). Ainsi, une distribution de possibilité π_2 peut être définie :

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_2(\omega) = \sum_{s=1, r} m(E_s) \cdot 1_{E_s}(\omega).$$

Les distributions π_1 and π_2 sont les meilleures approximations inférieure et supérieure pour les opinions $\{I_j \mid j = 1, NI\}$ [6].

Les données ne sont généralement ni précises, ni cohérentes. Les probabilités d'une part et la possibilité-nécessité, d'autre part, correspondent à des situations extrêmes et idéales [6]. Dans notre problématique, les opinions exprimées par les internautes peuvent évidemment correspondre à des évaluations contradictoires. Cela signifie que la contrainte de cohérence n'est pas toujours vérifiée dans la pratique, *i.e.*, $\bigcap_{j=1, NI} I_j = \emptyset$. Pour faire face à

cette situation, [16] propose une méthode qui consiste à considérer la cohérence des groupes d'intervalles avec une intersection non vide à partir des intervalles initiaux $\{I_j, j = 1, NI\}$, ce qui revient à chercher les sous-ensembles $K_\beta \subset \{1, \dots, NI\}$, $\beta = 1, g$ tels que :

$$\bigcap_{j \in K_\beta} I_j \neq \emptyset, \text{ où } g \text{ est le nombre de sous}$$

ensembles K_β . Chaque sous-ensemble d'intervalles est appelé Sous ensemble Maximal Cohérent (SMC). Cette notion a été initialement introduite dans [21], comme

moyen de raisonnement dans le cas de bases logiques inconsistantes et a été étendue aux cas de représentations probabilistes imprécises dans [24] et [5]. Pour chaque groupe K_β , deux distributions sont construites π_1^β et π_2^β , les approximations possibilistes inférieure et supérieure de $\{I_j \mid j \in K_\beta\}$. Soit π_1 (resp. π_2) la distribution de possibilité union des distributions de possibilité $\pi_1^\beta \mid \beta = 1, g$ (resp. $\pi_2^\beta \mid \beta = 1, g$) :

$$\pi_1 = \tilde{\cup}_{\beta=1,g} \pi_1^\beta \text{ (resp. } \pi_2 = \tilde{\cup}_{\beta=1,g} \pi_2^\beta), \quad (1)$$

alors π_1 et π_2 sont les approximations (possibilistes) inférieure et supérieure des données $\{I_j \mid j = 1, NI\}$. Les distributions π_1 et π_2 sont dites g -modales.

Pour de simples raisons pratiques de gestion de la complexité et de l'interprétation, on peut ne garder qu'une seule distribution, synthèse approchée des deux distributions π_1 et π_2 (ex.: une approximation affine par morceaux de type moyenne). L'idéal est de garder les deux distributions inférieure et supérieure tout au long du processus de fusion et d'introduire une fonction de décision sur la conclusion portée par chacune des deux distributions au moment du choix final (ex.: un ordre de Pareto sur la valeur moyenne et l'imprécision moyenne des distributions).

On peut aussi choisir l'une des distributions π_1 et π_2 en fonction de l'attitude souhaitée par rapport au risque inhérent à la décision : raisonner avec la distribution inférieure (resp. la distribution supérieure) peut correspondre à une attitude d'aversion au risque lié à la croyance dans l'information (resp. une attitude flexible d'acceptation du risque).

Dans tous les cas de figures, les calculs de la section 4 restent les mêmes pour chacune de ces distributions. Ainsi, le traitement n'est illustré dans cet article que pour une distribution indifférenciée notée π .

4 Agrégation et modèle de préférences

Lors d'une évaluation multicritère (n critères), l'agrégation est une opération qui permet de modéliser le système de préférence du décideur (ordre partiel sur \mathbb{R}^n) par une forme analytique et l'ordre classique sur \mathbb{R} . L'objectif est alors de déterminer la fonction d'agrégation que le décideur utilise, et qui synthétise l'expression de ses préférences lors de l'évaluation. L'opérateur le plus communément utilisé est la moyenne pondérée, elle permet de donner des rôles non symétriques aux critères de l'agrégation. Pour une moyenne pondérée MP_ω il s'agit d'identifier le vecteur des poids relatifs à chacun des critères $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in [0, 1]^n$ qui la caractérise.

La méthode des moindres carrés est classiquement utilisée pour les quantités agrégées précises. Imaginons que le décideur ait affecté une note globale à un ensemble d'items constituant la base d'apprentissage pour l'identification de son système de préférence. Soit x^k la note agrégée des évaluations pour un item k . La méthode des moindres carrés recherche le vecteur de poids ω^* qui minimise l'écart entre x^k et la valeur calculée avec le modèle linéaire MP_ω sur l'ensemble des items de la base d'apprentissage :

$$\omega^* = \underset{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in [0, 1]^n}{\text{Arg min}} \sum_{k \in \text{items}} (MP_\omega(x_1^k, \dots, x_n^k) - x^k)^2 \text{ où}$$

$$MP_\omega(x_1^k, \dots, x_n^k) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^k, \quad n \text{ est le nombre de}$$

critères et ω_i le poids associé au $i^{\text{ème}}$ critère.

La solution de ce problème d'optimisation fournit le jeu de poids des critères modélisant *au mieux* la stratégie du décideur.

La presse spécialisée fournit en général une simple évaluation globale x^k d'un film accompagnée d'une critique plus ou moins détaillée selon le journal. Il est donc difficile pour l'utilisateur de savoir si les raisons

(critères) pour lesquelles un film est bien perçu par un journal correspondent à ses critères personnels. Comme nous l'évoquons en introduction, fournir les scores partiels x_i^k est une tâche qui rebute les internautes. Ceux-ci veulent bien participer à un RS collaboratif, mais préfèrent exprimer leur opinion en langage naturel sous la forme d'une critique unique, évoquant dans leur texte les seuls critères qui les ont marqués en bien ou en mal pour le film qu'ils analysent. C'est la raison pour laquelle nous avons voulu automatiser l'extraction de critères et l'analyse d'opinions. En revanche, les scores établis automatiquement à partir des critiques sont imprécis. Cette section propose une technique d'identification des poids adaptée à la nature des données dont on dispose dans notre problématique.

La stratégie que l'on cherche à identifier est celle d'un journal spécialisé : quels sont les critères qui caractérisent les valeurs véhiculées par ce journal ? Un utilisateur saura ensuite quel journal est le plus à même de lui fournir des recommandations adaptées à son propre système de choix.

Un journal spécialisé attribue des évaluations globales à des films à l'aide d'échelles du type : nombre d'étoiles, nombre de barres, etc. Ces scores sont imprécis et nous les modélisons à l'aide d'une partition de $\Omega = [0, 20]$ en distributions de possibilité trapézoïdales : $\tilde{\pi}^k, k \in items$.

Selon la méthode de fusion présentée dans la section précédente, nous calculons à partir des opinions extraites du web, pour chaque critère i et chaque item k , une distribution de possibilité $\pi_i^k, i \in \{1, \dots, n\}, k \in items$ (ou $\pi_{1,i}^k$ et $\pi_{2,i}^k$ si l'on ne fait pas d'approximation des distributions inférieure et supérieure). Notons $\bar{\pi}^k = MP_\omega(\pi_1^k, \dots, \pi_n^k)$ l'agrégation des distributions π_1^k, \dots, π_n^k pour un item k par l'opérateur d'agrégation MP_ω . On cherche alors pour un journal donné la distribution de poids ω qui fera correspondre au mieux $\tilde{\pi}^k$ et $\bar{\pi}^k$ sur l'ensemble des items évalués.

Autrement dit, la question que l'on se pose, est : connaissant les π_1^k, \dots, π_n^k quelle distribution ω permettrait d'inférer au mieux l'avis du journal $\tilde{\pi}^k$? Mathématiquement, la question se ramène à : quelle distribution de poids maximise $\bar{\pi}^k \Rightarrow \tilde{\pi}^k$ pour un journal donné sur l'ensemble des items évalués ?

En logique floue, il existe plusieurs propositions pour l'implication. Les implications de Willmott, Mamdani, Rescher-Gaines, Kleene-Dienes, Brouwer-Gödel, Goguen, Lukasiewicz, Fodor, Reichenbach sont soit restrictives soit trop permissives [15], [22]. Un compromis consiste à calculer la surface commune entre $\tilde{\pi}^k$ et $\bar{\pi}^k$ telle que cette mesure représente leur pourcentage de recouvrement :

$$Imp(\bar{\pi}^k, \tilde{\pi}^k) = 100 \cdot \frac{\int \wedge(\bar{\pi}^k, \tilde{\pi}^k)}{\int \tilde{\pi}^k} \quad (2)$$

Pour les distributions de possibilité multimodales, nous avons décidé de ne considérer que le mode qui représente l'opinion de la majorité des internautes dans le contexte de cet article.

Nous proposons maintenant de déterminer les poids de chacun des critères par l'intermédiaire d'une analyse de sensibilité. Cette dernière consiste à faire varier les poids de chacun des critères et d'évaluer, pour chaque variation des ω_i , l'implication de $\tilde{\pi}^k$ par $\bar{\pi}^k$ sur l'ensemble des items. La distribution de poids ω^* retenue pour un journal donné est :

$$\omega^* = \max_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in [0, 1]^n} \sum_{k \in items} (\bar{\pi}^k \Rightarrow \tilde{\pi}^k) \quad (3)$$

Ce résultat donne les critères prioritaires pour un journal spécialisé donné.

5 Cas d'étude

Le prototype logiciel qui supporte notre système de recommandation de films repose sur l'association d'un internaute avec un journal spécialisé qui porte les mêmes priorités ou valeurs que lui. Ce prototype utilise le module d'extraction d'opinions multicritères

de la section 2, ainsi qu’une base de critiques de films écrites en langage naturel, issues du célèbre site de critiques cinématographiques IMDB. Les critiques fournies par IMDB (environ 3000 critiques par film) fournissent assez d’information pour avoir une idée représentative de la diversité des opinions des internautes sur un film. Chaque critique de film a été scorée par notre système d’extraction d’opinions multicritères selon deux critères : *acteur* et *scénario*. Avec le processus de fusion de la section 3, nous obtenons par exemple pour les films « Drive » et « Avatar », à partir de 324 opinions extraites pour le premier et 1191 pour le second, les distributions des deux critères (section 3) :

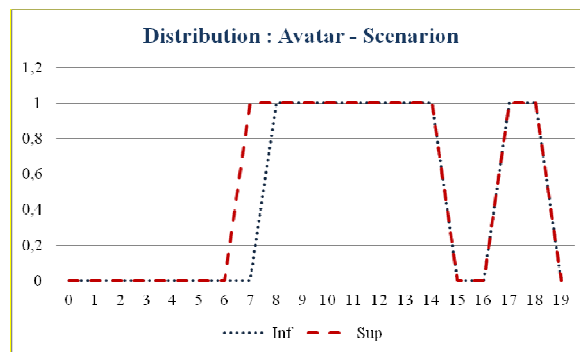
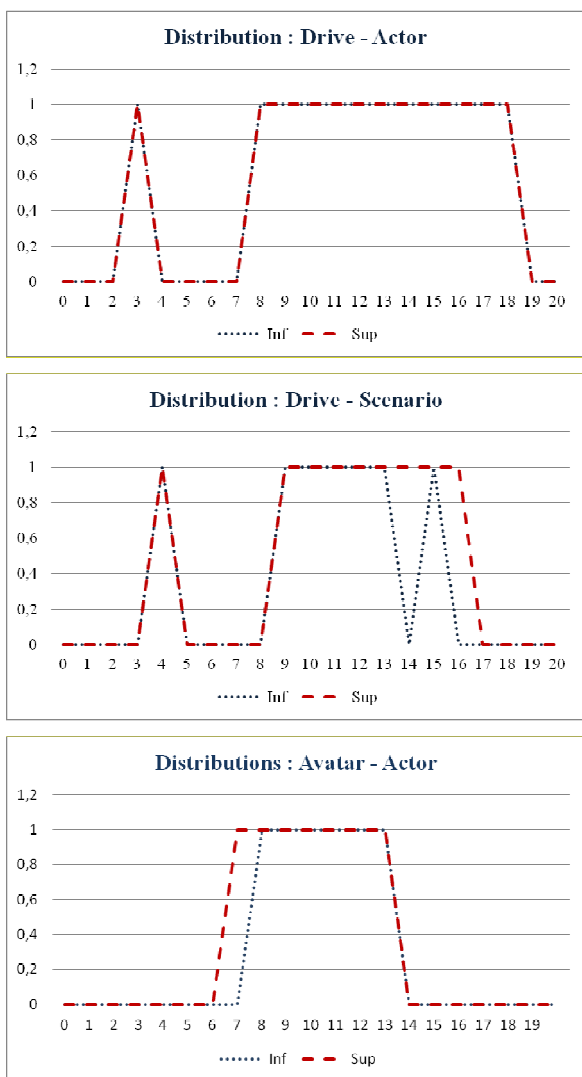


Figure 2 – Distributions de possibilité des critères pour les films « Drive » et « Avatar »

Nous disposons par ailleurs, pour chacun des films de la base, d’évaluations globales sous la forme d’un nombre d’étoiles (transformées en $\tilde{\pi}^k$) attribuées par la presse spécialisée. Nous avons retenu 20 journaux dans cette application.

Pour chaque journal est calculée la distribution de poids qui synthétise le mieux la stratégie d’évaluation du journal, c’est-à-dire la distribution qui explique au mieux les notes $\tilde{\pi}^k$ attribuées par le journal aux films de la base d’apprentissage. Sur cet exemple, la stratégie d’évaluation d’un journal est modélisée par les poids qu’il accorde aux deux critères (figure 3). On remarque qu’il existe de grandes différences entre les politiques d’évaluation des journaux (par exemple pour *Les Cahiers du Cinéma*, les poids sont de 0.7 et 0.3 alors qu’à l’inverse ils sont de 0.3 et 0.7 pour *Charlie Hebdo*).

Il est évident que la conception d’un système de recommandation opérationnel nécessite que bien d’autres critères que les deux retenus *acteur* et *scénario* soient intégrés dans notre modèle pour une recommandation plus fiable. L’automatisation des phases de segmentation et d’opinion-mining que nous proposons laisse néanmoins envisager sereinement cette extension dans notre démonstrateur.

L’utilisation de ces résultats pour de la recommandation dépend de l’information dont on dispose sur l’utilisateur (préférences, évaluations antérieures, etc.). A minima, la figure 3 fournit à l’internaute les critères importants selon les 20 journaux de la base. Il

peut alors simplement choisir le journal qui véhicule les valeurs qui s’approchent le plus de son humeur du moment et aller consulter le hitparade de ce journal pour une recommandation personnalisée. Il n’y a ainsi pas de modèle de préférence de l’utilisateur à

identifier, c’est lui-même qui repère le journal qui lui convient le mieux. Notons que ce principe simple permet à l’utilisateur de changer de « système de préférence » selon son humeur chaque fois qu’il va au cinéma !

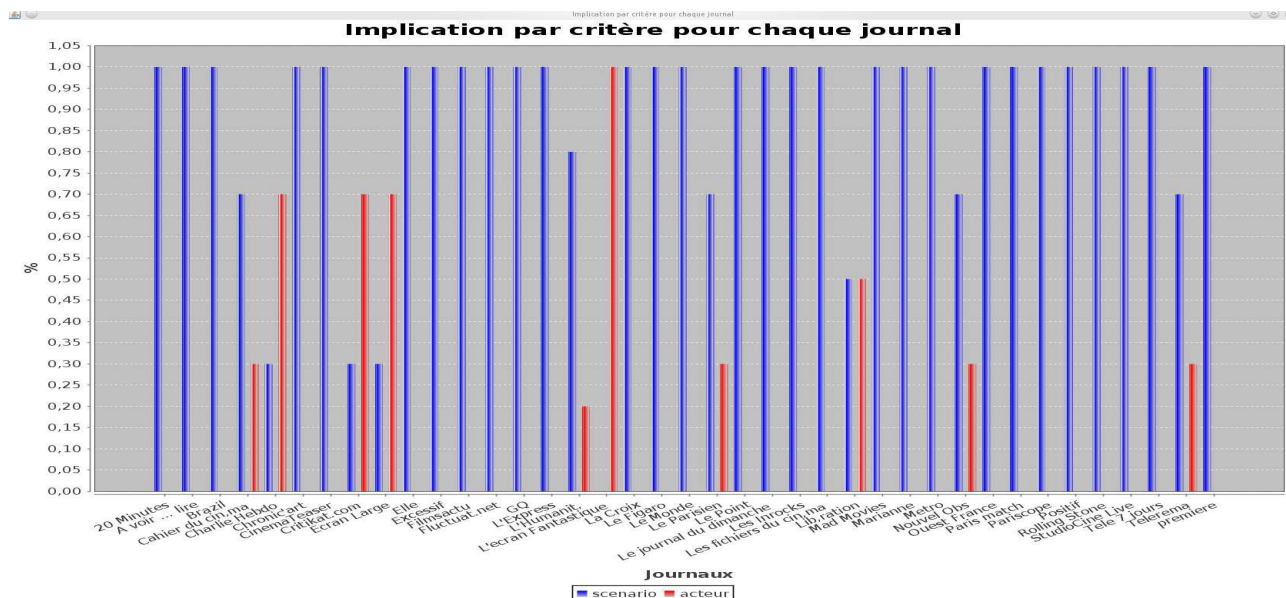


Figure 3 – Stratégies d’évaluation des 20 journaux de la base

Il est également possible d’imaginer que l’on identifie un modèle de préférence de l’utilisateur sur une base de films mythiques réduite ou sur des critiques qu’il aurait postées antérieurement. Tout dépend de l’investissement que l’on souhaite des utilisateurs du système collaboratif de recommandation. On calculerait ensuite une distance entre les distributions de poids des journaux et de l’utilisateur pour la recommandation.

Dans nos futurs travaux, nous projetons de garder tous les modes calculés par la méthode de fusion pour chaque critère et mettre en place un calcul des poids qui tienne compte des modes afin de préserver au mieux la disparité des avis des internautes.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un système de recommandation qui permet d’extraire automatiquement de critiques en

langage naturel des opinions (scores) relativement à un ensemble de critères. Nous avons expliqué pourquoi les scores restitués étaient imprécis. Nous avons alors développé une méthode de fusion pour calculer l’opinion collective des internautes sur un film au regard d’un critère donné. Enfin, nous avons proposé une méthode d’identification de la stratégie d’évaluation d’un journal spécialisé. La recommandation la plus simple qui soit avec notre système consiste alors à montrer les critères prioritaires de la presse spécialisée à l’utilisateur afin qu’il choisisse le journal selon son humeur.

Cette approche permet donc de développer des systèmes de recommandation de type MMPE en s’affranchissant des tâches les plus contraignantes de ce type de systèmes collaboratifs. Ceci constitue une avancée importante car jusqu’à présent la nécessité d’évaluer manuellement un grand nombre de documents et cela selon plusieurs critères, représentait un frein majeur à la mise en place

de tels systèmes. La chaîne de traitement que nous proposons établit un processus d'automatisation cognitive qui laisse raisonnablement envisager un large déploiement et la généralisation des RS de type MMPE dans les années à venir pour traiter des données issues du web.

Références

- [1] G. Adomavicius, Y. Kwon. New recommendation techniques for multicriteria rating systems, *Intelligent Systems, IEEE*, 2007, **22**(3), pp. 48-55.
- [2] G. Adomavicius, N. Manouselis, Y. Kwon. Multi-criteria recommender systems. In *Recommender systems handbook*, 2011, pp.769-803, Springer US.
- [3] K. W. Cheung, J. T. Kwok, M. H. Law, K. C. Tsui. Mining customer product ratings for personalized marketing. *Decision Support Systems*, 2003, **35**(2), pp.231-243.
- [4] Dempster, A.P. Upper and Lower probabilities induced by multivalued mapping, *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, **38**, pp. 325–339.
- [5] S. Destercke, D. Dubois, E. Chojnacki. Possibilistic information fusion using maximal coherent subsets, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, **17**, pp. 79–92.
- [6] D. Dubois, H. Prade. Fuzzy sets and statistical data, *European Journal of Operational Research*, 1986, **25**, pp. 345–356.
- [7] D. Dubois, H. Prade. Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty, *Plenum Press, New York*, 1988.
- [8] D. Dubois, H. Prade. Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures. *Computational Intelligence*, 1988, **4**(3), pp. 244-264.
- [9] B. Duthil, F. Troussset, M. Roche, G. Dray, M. Plantié, J. Montmain, P. Poncelet. Towards an automatic characterization of criteria, In *Database and Expert Systems Applications, DEXA*, pp. 457-465, Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [10] B. Duthil. De l'extraction des connaissances à la recommandation. *Université de Montpellier II, Thèse de doctorat*, 2012.
- [11] B. Duthil, F. Troussset, G. Dray, P. Poncelet, J. Montmain. Extraction d'opinions appliquée à des critères, *EGC*, 2012.
- [12] B. Duthil, F. Troussset, G. Dray, J. Montmain, P. Poncelet. Opinion extraction applied to criteria. *DEXA, 2012*, Part II, LNCS 7447, pp. 489--496. Springer, Heidelberg, 2012.
- [13] R. Ghani, A. Fano. Building recommender systems using a knowledge base of product semantics. In *Proceedings of the Workshop on Recommendation and Personalization in ECommerce, 2nd International Conference on Adaptive Hypermedia and Adaptive Web based Systems*, 2002, pp. 27-29.
- [14] A. Harb, M. Plantié, G. Dray, M. Roche, F. Troussset, P. Poncelet. Web opinion mining: how to extract opinions from blogs? *International Conference on Soft Computing as Transdisciplinary Science and Technology*, 2008, pp. 211-217, Cergy, France.
- [15] I. Iancu. A Mamdani Type Fuzzy Logic Controller, In: *E. P. Dadios, Ed., Fuzzy Logic: Controls, Concepts, Theories and Applications, InTech Croatia, Rijeka*, 2012, pp. 55-54.
- [16] A. Imoussaten. Modélisation et pilotage de la phase de délibération dans une décision collective - vers le management d'activités à risques, *Mines ParisTech, Thèse de doctorat*, 2011.
- [17] S. Loh, F. Lorenzi, R. Saldaña, D. Lichnow. A tourism recommender system based on collaboration and text analysis. *Information Technology & Tourism*, 2003, **6**(3), pp. 157-165.
- [18] N. Manouselis, C. Costopoulou. Analysis and classification of multi-criteria recommender systems. *World Wide Web*, 2007, **10**(4), pp. 415-441.
- [19] M. Plantié, J. Montmain, G. Dray. Movies recommenders systems: automation of the information and evaluation phases in a multi-criteria decision-making process. *16th International Conference on Database and Expert Systems Applications, DEXA'05*, 2005, Copenhagen.
- [20] M. Plantié. Extraction automatique de connaissances pour la décision multicritère, *Université Jean Monnet, Thèse de doctorat*, 2006.
- [21] N. Rescher, R. Manor. On inference from inconsistent premises, *Theory and Decision*, 1970. **1**, pp. 179-219.
- [22] D. Ruan, E. Kerre. Fuzzy implication operators and generalized fuzzy method of cases. *Fuzzy Sets and systems*, 1993, **54**(1), 23-37.
- [23] G. Shafer. A mathematical theory of evidence, *Princeton University Press*, 1976.
- [24] P. Walley. The elicitation and aggregation of beliefs. *PhD thesis, University of Warwick*, 1982.

Mesures d'adéquation entre vocabulaire expert et structure de données

Adequacy between an expert vocabulary and a data structure

Marie-Jeanne Lesot¹

Grégory Smits²

Olivier Pivert³

¹ LIP6, UPMC Univ Paris 06, CNRS, UMR 7606, 4 place Jussieu, 75005 Paris, marie-jeanne.lesot@lip6.fr

² IRISA - IUT, 3, rue E. Branly - BP 30219, 22302 Lannion cedex, gregory.smits@irisa.fr

³ IRISA - ENSSAT, 6, rue de Kerampont - BP 80518, 22305 Lannion cedex, pivert@enssat.fr

Résumé :

L'adéquation entre un vocabulaire expert utilisé pour décrire linguistiquement un ensemble de données et la structure de ces dernières est requise pour garantir la pertinence et la cohérence de l'expression des résultats d'un processus de découverte des données personnalisées. Cet article propose deux mesures pour répondre à cette tâche : la première est basée sur la comparaison des partitionnements respectivement obtenus à partir de la représentation initiale des données et à partir des données réécrites ; la seconde évalue, dans l'espace réécrit, les regroupements identifiés dans l'espace initial. Les expérimentations sur des données artificielles montrent qu'elles permettent d'identifier des vocabulaires pertinents.

Mots-clés :

Variables linguistiques, classification non supervisée, adéquation, structure des données

Abstract:

The adequacy between an expert vocabulary used to linguistically describe a data set and the structure of the latter is required to guarantee the relevance and consistency of the expression of the results obtained in a personalised knowledge discovery task. This paper proposes two measures to address this task : the first one is based on the comparison between the partitions obtained from the initial data and the rewritten data representations ; the second one assesses, in the rewritten space, the clusters obtained from the initial data. Experimental results obtained from artificial data show these measures make it possible to identify relevant vocabularies.

Keywords:

Linguistic variables, clustering, adequacy, data structure

1 Introduction

La prise en compte des préférences et des besoins des utilisateurs permet de personnaliser le processus de découverte de connaissances dans des ensembles de données et d'augmenter leur pertinence [2]. Ces préférences peuvent en particulier être exprimées par le biais d'un vocabulaire expert, modélisé par des variables

linguistiques floues, qui permet de décrire des propriétés des données qui ont du sens pour l'analyste. La pertinence de l'utilisation de tels vocabulaires pour la personnalisation a été démontrée dans de nombreux contextes applicatifs, parmi lesquels la recherche par facettes [12], les requêtes flexibles coopératives [1] ou le résumé de données [10, 13].

Il est alors nécessaire que la définition du vocabulaire soit cohérente par rapport à la structure sous-jacente des données : le vocabulaire induit une relation d'indistinguabilité sur les données, puisque deux objets ne peuvent être distingués s'ils satisfont une modalité floue au même degré. Cette relation est légitime, puisqu'elle correspond à des données qui sont également appréciées par l'expert ; toutefois, elle doit être définie de sorte à être compatible avec la structure des données. En effet, d'une part, deux données similaires par leurs descriptions numériques ne doivent pas être séparées par leurs descriptions linguistiques. Réciproquement, deux données indistinguables d'après le vocabulaire ne doivent pas appartenir à des sous-groupes de données distincts. De telles inadéquations devraient conduire à nuancer le vocabulaire de l'analyste, afin de préserver à la fois l'adéquation avec les données et la compatibilité avec ses préférences subjectives exprimées par les modalités floues.

Le problème de l'adéquation entre vocabulaire expert et structure de données a été soulevé [10, 13], mais n'a pas été étudié. Dans cet article, nous proposons de l'interpréter comme un

problème de compatibilité entre deux processus de classification non supervisée de données, plus précisément la compatibilité entre la structure sous-jacente des données, extraite par un processus de clustering appliqué aux données initiales et la structure induite par le vocabulaire, identifiée par un processus de clustering appliqué aux données réécrites comme des vecteurs de leurs degrés d'appartenance aux modalités floues considérées. Nous proposons deux critères pour mesurer cette compatibilité : le premier évalue l'accord des partitions obtenues par les deux processus de clustering cités ; le second mesure à quel point les clusters obtenus par clustering des données initiales sont pertinents en les évaluant dans l'espace de représentation réécrit induit par le vocabulaire considéré.

L'article présente successivement les différentes étapes de la méthode proposée : la section 2 décrit l'étape de réécriture des données selon le vocabulaire à évaluer ; la section 3 décrit l'étape de clustering, justifiant l'algorithme ainsi que les mesures de comparaison de données choisies ; la section 4 présente les critères d'adéquation proposés. La section 5 décrit les résultats obtenus sur une base de données artificielles.

2 Etape de réécriture

2.1 Données et vocabulaire

Les données, notées \mathcal{D} , sont constituées d'objets $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ décrits par m attributs $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, catégoriels ou numériques, respectivement définis sur les domaines \mathcal{D}_j .

Le vocabulaire \mathcal{V} dont l'adéquation est à mesurer est défini comme un ensemble de variables linguistiques, qui associent chaque attribut à une étiquette linguistique et une partition floue de type Ruspini [11] : formellement, pour l'attribut A_j , $j = 1..m$, on note a_j le nombre de modalités associées et $\mathcal{V}_j = \{v_{j1}, \dots, v_{ja_j}\}$ les sous-ensembles flous associés. La propriété de partition de Ruspini impose $\forall j = 1..m, \forall x \in$

$$\mathcal{D}_j, \sum_{k=1}^{a_j} \mu_{v_{jk}}(x) = 1.$$

2.2 Données réécrites

Chaque donnée peut alors être réécrite, en calculant les degrés d'appartenance à chaque modalité de chaque variable linguistique puis en concaténant ceux-ci : la donnée x est représentée par le vecteur à $\sum_{j=1}^m a_j$ composantes $\langle \mu_{v_{11}}(x), \dots, \mu_{v_{1a_1}}(x), \dots, \mu_{v_{m1}}(x), \dots, \mu_{v_{ma_m}}(x) \rangle$.

Il faut noter que chaque point ne peut satisfaire partiellement que deux modalités pour chaque attribut. Aussi le vecteur ci-dessus comporte au plus $2m$ composantes non nulles.

2.3 Indistinguabilité

Les représentations numériques ou catégorielles offrent des descriptions précises mais peu interprétables d'un objet. Au contraire, les variables linguistiques floues améliorent l'interprétabilité, en particulier lorsqu'elles sont définies par l'expert en charge de l'analyse des données. Elles induisent cependant une imprécision qui ne permet pas de distinguer des objets qui satisfont au même degré une modalité floue. Cette relation d'indistinguabilité est légitime puisqu'elle correspond à des objets qui ne sont pas différenciés par l'expert, mais également préférés.

Néanmoins, pour garantir la pertinence et la cohérence des résultats exprimés avec ce vocabulaire, elle ne doit pas être décorrélée de la structure sous-jacente des données, mais être compatible avec celle-ci. La Figure 1 par exemple illustre deux types d'incompatibilité non souhaitables : les données du cluster C'_3 , qui appartiennent à un même cluster d'après la structure sous-jacente, ont des descriptions linguistiques distinctes qui les affectent à 3 clusters différents, C_2 , C_3 et C_4 . Réciproquement, les objets des clusters C'_1 et C'_2 ont la même réécriture, mais devraient être distingués d'après la structure sous-jacente.

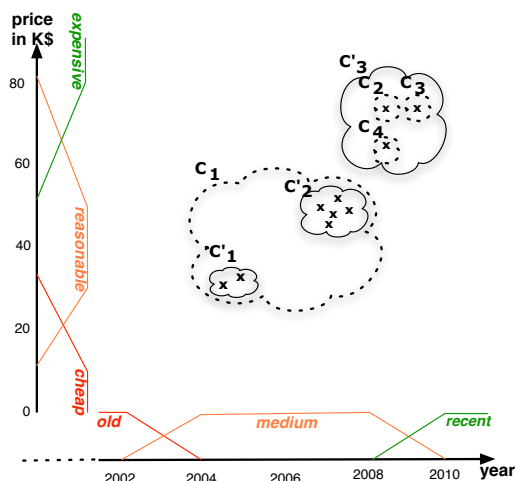


Figure 1 – Comparaison des partitions basées sur le vocabulaire expert (clusters C_1 à C_4) et sur la représentation initiale des données (clusters C'_1 à C'_3).

3 Etape de clustering

3.1 Choix de l'algorithme de clustering

De nombreux algorithmes de clustering peuvent être envisagés a priori [6], toutefois le contexte applicatif impose des contraintes qui guident la sélection : l'algorithme doit être capable de traiter de grands volumes de données, de déterminer automatiquement le nombre de clusters, que l'utilisateur ne peut indiquer a priori, et de traiter des données hétérogènes, décrites par des attributs numériques et catégoriels.

Nous proposons d'utiliser l'algorithme *l-fcmed-select* [8] qui constitue une extension de l'algorithme des *c*-médoïdes linéarisé *l-fcmed* [7]. Ce dernier présente 3 caractéristiques motivant son utilisation : il définit les centres des clusters comme des médoïdes, c'est-à-dire les données qui minimisent la distance aux membres du cluster, et non comme des points fictifs calculés comme des moyennes par exemple, ceci permet une application à des données hétérogènes ; il effectue une affectation floue, ce qui lui apporte robustesse et indépendance à l'initialisation aléatoire ; il met en œuvre une approximation pour la mise à jour des médoïdes, en re-

cherchant la nouvelle position dans le voisinage de la position précédente, ce qui diminue son temps de calcul.

L'extension *l-fcmed-select* [8] constitue une variante incrémentale de *l-fcmed*, qui est appliqué à des échantillons de données, conduisant à des résultats locaux fusionnés ultérieurement par clustering hiérarchique. De plus, lorsqu'un échantillon a été traité, une étape d'augmentation des clusters teste si les données non encore traitées peuvent être affectées aux clusters identifiés. Cette étape permet d'une part de diminuer la quantité de données restant à traiter et d'autre part d'éviter l'identification de clusters trop similaires aux clusters déjà identifiés. Elle réduit donc le temps de calcul, à la fois pour les étapes de *l-fcmed* et pour leur fusion finale.

En outre, afin de sélectionner le nombre de clusters, *l-fcmed-select* ajoute une étape de sélection de médoïdes : *l-fcmed* identifie *c* clusters, que cette valeur soit pertinente ou non pour les données. Aussi, *l-fcmed-select* applique à chaque échantillon *l-fcmed* avec une valeur élevée de *c* et sélectionne ensuite uniquement les clusters pertinents, selon des critères de taille et de compacité [8].

3.2 Choix des mesures de distance

Pour l'espace de représentation initial, nous définissons la distance comme la moyenne des distances calculées pour chaque attribut, c'est-à-dire $d(x, y) = 1/q \sum_{j=1}^m d_i(x_j, y_j)$, où d_j est la distance associée à l'attribut A_j , définie comme d_{cat} pour les attributs catégoriels et d_{num} pour les attributs numériques :

$$d_{cat}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

$$d_{num}(x, y) = \frac{|x - y|}{\max(x, y)} \quad (2)$$

La distance pour attribut catégoriel est binaire et vaut 0 si les deux valeurs comparées sont identiques, 1 sinon. La distance pour attributs numériques calcule un écart relatif : ainsi, une différence de prix de 2000€ n'a pas le même

effet suivant que les valeurs comparées sont de l'ordre de 100 000€ ou de 10 000€.

Pour les données réécrites, nous proposons de définir la distance comme la somme des distances obtenues pour chaque variable linguistique, en utilisant pour celle-ci la distance proposée par [3]. Pour un attribut A associé à une variable linguistique à a modalités définissant une partition forte, ordonnées de telle sorte que leurs noyaux $[\underline{K}_i, \bar{K}_i]$ vérifient $\bar{K}_i \leq \underline{K}_{i+1}$, en notant $x = (x_i)_{i=1..a}$ et $y = (y_i)_{i=1..a}$ deux vecteurs de degrés d'appartenance, I la fonction telle que $I(x) = i \Leftrightarrow x \in [\underline{K}_i, \bar{K}_{i+1}]$, et $\eta(x) = I(x) - \mu_{I(x)}(x)$, la distance est définie comme

$$d_A(x, y) = \frac{1}{a-1} |\eta(x) - \eta(y)| \quad (3)$$

4 Mesures d'adéquation proposées

Deux critères d'évaluation de l'adéquation du vocabulaire considéré à l'ensemble de données sont proposés, basés sur les résultats de l'étape de clustering décrite dans la section précédente.

4.1 Comparaison des partitions

Une première approche consiste à comparer les partitions obtenues lorsque les données \mathcal{D} sont respectivement décrites dans l'espace initial et réécrites selon le vocabulaire \mathcal{V} . Ces partitions sont respectivement notées $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{RD}_{\mathcal{V}})$.

La comparaison de partitions a donné lieu à de multiples critères [9], beaucoup s'expriment en fonction des 4 quantités suivantes : a est le nombre de paires de données affectées au même cluster dans $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ et également au même cluster dans $\mathcal{C}(\mathcal{RD}_{\mathcal{V}})$, b le nombre de paires de données affectées au même cluster dans $\mathcal{C}(\mathcal{R})$, mais à des clusters différents dans $\mathcal{C}(\mathcal{RD}_{\mathcal{V}})$, c , symétriquement, le nombre de paires affectées à des clusters différents dans $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ mais un même cluster dans $\mathcal{C}(\mathcal{RD}_{\mathcal{V}})$, d est le nombre de paires affectées à des clusters différents dans $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ et dans $\mathcal{C}(\mathcal{RD}_{\mathcal{V}})$.

L'un des critères les plus utilisés est l'indice de Rand ajusté [5], noté ira dans la suite :

$$ira = \frac{\frac{n(n-1)}{2}(a+d) - Z}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 - Z}$$

où $Z = (a+b)(a+c) + (c+d)(b+d)$. Il normalise l'indice de Rand par rapport à une distribution de référence des données.

La mesure d'adéquation du vocabulaire à la base de données s'écrit alors

$$ad_{IRA}(\mathcal{V}, \mathcal{D}) = ira(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \mathcal{C}(\mathcal{RD}_{\mathcal{V}})) \quad (4)$$

4.2 Evaluation croisée

La mesure précédente requiert d'appliquer l'algorithme de clustering deux fois, pour chacun des espaces de représentation considérés, ce qui peut être coûteux. Le second critère mesure la qualité du résultat du clustering effectué dans l'un des espaces de représentation en utilisant la seconde représentation.

Plus précisément, le critère évalue si les clusters identifiés en utilisant la représentation initiale des données sont compacts et séparables au sens des données réécrites. En effet, si deux médoïdes apparaissent indistinguables dans l'espace réécrit, cela signifie que ce dernier n'est pas approprié pour représenter la structure des données.

Il existe de nombreuses définitions de compacité et de séparabilité, ainsi que de nombreuses combinaisons de ces critères [4]. Nous considérons l'indice de Xie-Beni [14]

$$xieBeni(U, \mathcal{W}, \mathcal{D}) = \frac{C(U, \mathcal{W}, \mathcal{D})}{S(\mathcal{W})}$$

$$\text{où } C(U, \mathcal{W}, \mathcal{D}) = \frac{1}{n} \sum_{x_i \in \mathcal{D}} \sum_{w_r \in \mathcal{W}} u_{ri} d(x_i, w_r)$$

$$\text{et } S(\mathcal{W}) = \min_{w_r, w_s \in \mathcal{W}} d(w_r, w_s)$$

où U désigne la matrice d'affectation des données, telle que $u_{ri} = 1$ si la donnée x_i est

affectée au cluster r , et 0 sinon. $\mathcal{W} = \{w_r\}$ représente l'ensemble des centres des clusters, et d la mesure de distance. L'indice de Xie-Beni doit être minimisé.

Le critère proposé consiste alors à calculer dans l'espace réécrit la compacité et la séparabilité des clusters identifiés dans l'espace initial :

$$q_{XB}(\mathcal{V}, \mathcal{D}) = \text{xieBeni}(U(\mathcal{D}), \mathcal{RW}_{\mathcal{V}}, \mathcal{RD}_{\mathcal{V}}) \quad (5)$$

où $U(\mathcal{D})$ représente l'affectation obtenu en partitionnant les données \mathcal{D} dans l'espace initial, \mathcal{W} les centres de clusters associés et $\mathcal{RD}_{\mathcal{V}}$ leur réécriture par le vocabulaire \mathcal{V} .

5 Résultats expérimentaux

Cette section décrit l'étude des critères proposés réalisée sur une petite base de données artificielle représentative, en deux dimensions.

5.1 Données considérées

Les données, représentées sur la Figure 2, ont été générées par un mélange de trois gaussiennes non sphériques générant chacune 150 points. Plusieurs vocabulaires sont comparés, comme représenté à gauche et dans la partie inférieure de la figure : la variable linguistique associée à l'attribut y est définie par une partition appropriée, qui correspond à la distribution des données : les deux modalités isolent le cluster d'en haut des clusters inférieurs et induit des zones indistinguables au sein de chaque cluster.

Pour l'attribut x , 7 partitions sont considérées, classées par ordre croissant de nombre de modalités : $P1$ contient une unique modalité et peut donc être considérée comme trop générale. En effet, toutes les données appartiennent à son noyau et sont donc indistinguables. La partition $P2$ est la partition appropriée, qui correspond à la structure des données. La partition $P2a$ présente également 2 modalités, mais peut être décrite comme absurde : elle est en double contradiction avec la structure des données : d'abord elle conduit à une

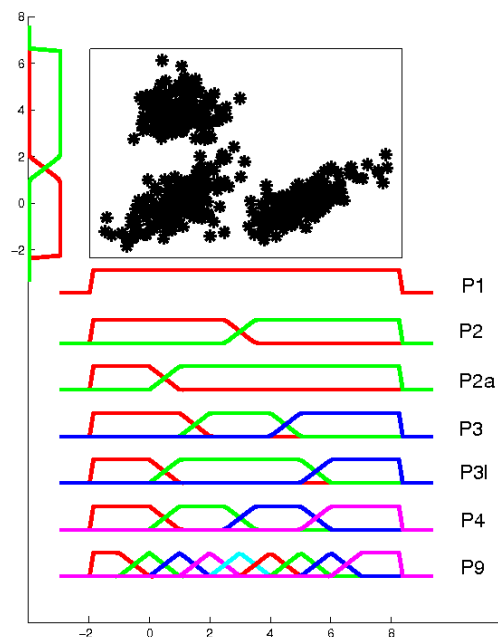


Figure 2 – Données et vocabulaire considérés

distinction artificielle des données du cluster inférieur de gauche ; de plus, elle ne fait pas de différence entre les données du cluster inférieur de droite et certaines des données du cluster inférieur de gauche. La partition $P3$ définit trois modalités qui rendent la partie centrale des données indistinguable, regroupant les deux clusters inférieurs et ignorant leur structure. La partition $P3l$ est une variante de $P3$ où la région de chevauchement entre les deux clusters est plus large. Les partitions $P4$ et $P9$ sont d'autres exemples de partitions trop détaillées, possédant trop de modalités.

5.2 Protocole expérimental

Le Tableau 1 montre, pour chacune des partitions considérées, les valeurs des deux critères proposés, ad_{IRA} et q_{XB} , en donnant la moyenne et l'écart-type pour 100 initialisations. Chaque initialisation tire aléatoirement un premier médoïde puis sélectionne les autres médoïdes de façon à maximiser leurs distances deux à deux. Des analyses non détaillées ici montrent que, quelle que soit la représentation de données considérée, les résultats du clustering sont stables et peu dépendants de l'initialisation, ce

Tableau 1 – Moyenne et écart-type des critères proposés pour 100 initialisations aléatoires.

\mathcal{V}	c	ad_{IRA}	q_{XB}
$P1$	2.0 ± 0	0.54 ± 0.05	Inf
$P2$	3.0 ± 0	0.95 ± 0.06	0.04 ± 0.03
$P2a$	5.0 ± 0.32	0.55 ± 0.03	Inf
$P3$	2.1 ± 0.37	0.56 ± 0.05	0.20 ± 0.03
$P3l$	2.0 ± 0	0.56 ± 0.05	Inf
$P4$	3.0 ± 0.10	0.94 ± 0.06	0.33 ± 0.05
$P9$	2.0 ± 0.10	0.56 ± 0.07	0.23 ± 0.02

qu'indiquent également les faibles écarts-types des valeurs du Tableau 1. La Figure 3 montre les affectations les plus fréquentes obtenues pour chaque représentation.

On peut observer qu'avec la représentation initiale des données, l'algorithme de clustering obtient le résultat attendu. L'indice de Rand ajusté, qui compare les affectations obtenues et attendues d'après le processus de génération des données, vaut 0.96 ± 0.05 : quelques affectations sont erronées, aux frontières des clusters, mais ces erreurs sont rares.

5.3 Résultats de l'adéquation IRA

La mesure ad_{IRA} indique clairement deux types de vocabulaires : le premier, associé à des valeurs proches de 0.94, contient les partitions $P2$ et $P4$; le second, associé à des valeurs autour de 0.56, groupe les autres partitions $P1$, $P2a$, $P3$, $P3l$ et $P9$. On ne note pas de différence significative au sein de ces deux types.

Les partitions $P2$ et $P4$ identifient les trois clusters attendus, correspondant à la structure identifiée par la représentation initiale des données. L'adéquation élevée obtenue correspond donc à un résultat attendu. Comme l'illustre la Figure 3, les affectations sont les mêmes pour $P2$ et $P4$ et ne diffèrent de la partition obtenue à partir de la représentation initiale que pour la partie supérieure du cluster situé en bas à gauche : pour l'attribut x , ces données sont indistinguables des clusters situés en haut et en bas à gauche, pour l'attribut y , elles se situent

dans la zone de chevauchement des deux modalités et sont plutôt dans la partie haute. Il est aussi intéressant de noter que le point qui maximise y pour le cluster en bas à droite est affecté au cluster du haut et non au cluster attendu, pour $P2$ comme $P4$: après réécriture, ce point est à égale distance de certains des points du cluster de droite, en raison d'une distance nulle pour l'attribut x mais non nulle pour y , et de certains des points du cluster du haut, en raison de la configuration inverse (distance non nulle pour l'attribut x mais nulle pour y).

Les partitions $P1$, $P2a$, $P3$, $P3l$ et $P9$ échouent à identifier le nombre de clusters obtenu par la représentation initiale : à part $P2a$, elles ne distinguent que 2 clusters, fusionnant les deux clusters du bas en un seul groupe. Le plus souvent, $P2a$ décompose les données en 5 clusters, bien qu'elle soit légèrement plus instable que les autres partitions. Plus précisément, elle identifie 3 clusters correspondant aux combinaisons des modalités définies sur x et y , ainsi que 2 clusters correspondant aux données situées dans les régions de chevauchement des modalités, pour les attributs x comme y .

Il est intéressant de noter que le nombre de clusters identifiés n'est donc pas corrélé au nombre de modalités : la partition trop précise $P9$ n'identifie pas plus de clusters que la partition $P3$. En effet, la différence en termes de distance qu'un nombre trop important de modalités pourrait induire est d'une part atténuée par la normalisation par le nombre de modalités (cf. Eq. 3) et d'autre part dominée par la distance induite par les partitions définies sur les autres attributs.

Ces résultats montrent que la méthode proposée identifie le vocabulaire approprié et pénalise les vocabulaires incorrects. Toutefois, elle ne distingue pas parmi ces derniers, ce qui peut être un inconvénient dans le cas où l'objectif est d'aider un expert à adapter un vocabulaire.

On peut observer que les deux types de vocabulaires ne sont pas justifiés par le nombre

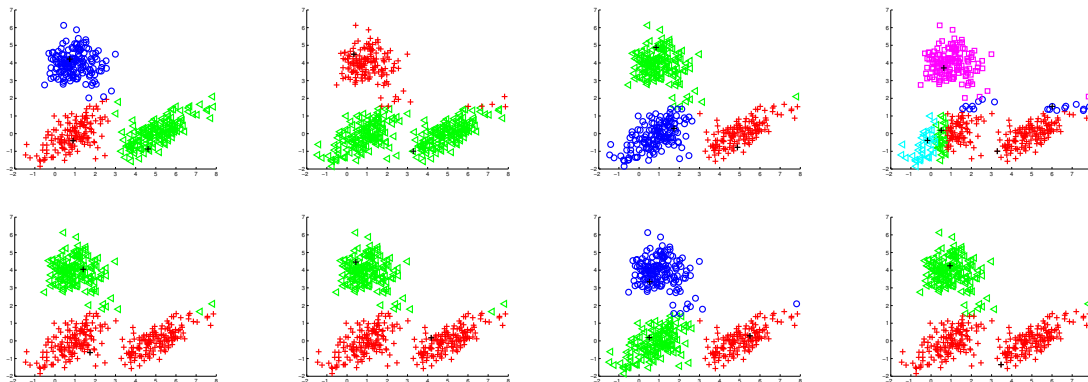


Figure 3 – Affectations obtenues : (première ligne) représentation initiale et après réécriture avec les partitions $P1$, $P2$, $P2a$; (seconde ligne) après réécriture avec les partitions $P3$, $P3l$, $P4$, $P9$.

de modalités, par exemple selon que ce dernier est trop élevé ou trop faible, mais par la présence ou l'absence d'une modalité reliant les deux clusters du bas : pour les deux partitions obtenant une valeur élevée de ad_{IRA} , $P2$ et $P4$, la frontière entre les clusters correspond à une transition entre des modalités. Au contraire, pour les vocabulaires obtenant une valeur faible, la région frontalière est rendue indistinguishable par une modalité à cheval entre les deux clusters. Pour ces données, la taille du chevauchement n'a pas d'influence : qu'elle soit élevée ($P1$, $P2a$ ou $P3l$), moyenne ($P3$) ou faible ($P9$), la mesure prend la même valeur.

5.4 Résultats de l'adéquation XB

La dernière colonne du Tableau 1 donne les valeurs de q_{XB} , qui doit être minimisé. A titre de référence, l'évaluation dans l'espace de représentation initiale, c'est-à-dire la mesure de la compacité et de la séparabilité dans l'espace où le clustering a lieu, conduit à 0.10 ± 0.02 .

On peut observer que $P2$ est significativement la meilleure partition : représenter les données par ce vocabulaire rend les clusters encore plus compacts et séparables que dans l'espace initial. En effet, toutes les données situées dans les noyaux des modalités sont bien affectées à un même cluster, et donc à distance nulle : les diamètres des clusters sont donc très faibles. De plus, les médoïdes sont à distance maximale les

uns des autres, car ils sont décrits par les modalités extrêmes de chaque modalité.

Les partitions $P3$ et $P9$ sont classées deuxième ex aequo : elles ont également une séparabilité maximale, mais une compacité plus faible. Il faut souligner que ces comparaisons de compacité et séparabilité sont basées sur l'interprétation, et restent conceptuelles et non numériques : les échelles de distance sont différentes, et une normalisation est difficile.

La partition $P4$, classée quatrième, a une compacité comparable à celles de $P3$ et $P9$, mais n'obtient pas une séparabilité maximale : pour l'attribut x , les médoïdes sont respectivement réécrits comme $(0, 1, 0, 0)$ and $(0, 0, 1, 0)$ et non plus affectés aux modalités extrêmes.

Enfin, pour les partitions $P1$, $P2a$ et $P3l$, q_{XB} est infini en raison d'un dénominateur nul : au moins 2 médoïdes ne sont pas distinguables selon le vocabulaire, ce qui en indique le manque d'adéquation. Cette valeur infinie, qui ne permet pas de faire de différence entre ces trois vocabulaires, pourrait être raffinée par le nombre de paires de médoïdes indistinguishables.

Le classement des partitions pertinentes est donc plus fin et différent de celui induit par la mesure ad_{IRA} , ce qui indique la complémentarité de ces mesures de sémantiques différentes.

6 Conclusion

Dans le but de personnaliser le processus de découverte, nous avons considéré le problème de l'adéquation entre un vocabulaire expert et la structure des données, en proposant deux mesures. La première repose sur la comparaison de deux partitionnements des données, obtenus à partir de la représentation initiale des données et d'une réécriture des données. La seconde mesure, moins coûteuse en temps de calcul, est basée sur l'évaluation dans l'espace réécrit des regroupements identifiés dans l'espace initial. Les expérimentations préliminaires ont montré que les deux mesures permettent d'identifier les vocabulaires pertinents.

Les travaux en cours visent à étendre les expérimentations à des bases de données plus complexes, plus bruitées ou en dimensions supérieures, et en particulier pour des données réelles, qui posent également le problème des valeurs manquantes. La comparaison de vocabulaire différant par le degré de flou des partitions est également envisagée. Les perspectives incluent aussi l'interprétation plus détaillée des mesures proposées, en particulier pour proposer des adaptations du vocabulaire, pour améliorer l'adéquation à la structure des données tout en conservant la subjectivité du vocabulaire expert.

Références

- [1] P. Bosc, A. Hadjali, O. Pivert, and G. Smits. An approach based on predicate correlation to the reduction of plethoric answer sets. In *Advances in Knowledge Discovery and Management*, volume 398, pages 213–233. Springer, 2012.
- [2] J. Chomicki. Preference formulas in relational queries. *ACM Transactions on Database Systems*, 28 :1–40, 2003.
- [3] S. Guillaume, B. Charnomordic, and P. Loisel. Fuzzy partitions : a way to integrate expert knowledge into distance calculations. *Information sciences*, pages 76–95, 2012.
- [4] M. Halkidi, Y. Batistakis, and M. Vazirgiannis. On clustering validation techniques. *Journal of Intelligent Information Systems*, 17 :107–145, 2001.
- [5] L. Hubert and P. Arabie. Comparing partitions. *Journal of classification*, 2(1) :193–218, 1985.
- [6] A. Jain, M. Murty, and P. Flynn. Data clustering : a review. *ACM Computing survey*, 31(3) :264–323, 1999.
- [7] R. Krishnapuram, A. Joshi, O. Nasraoui, and L. Yi. Low complexity fuzzy relational clustering algorithms for web mining. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 9(4) :595–607, 2001.
- [8] M.-J. Lesot and A. Revault d'Allonnes. Credit-card fraud profiling using a hybrid incremental clustering methodology. In *Scalable Uncertainty Management*, pages 325–336. Springer, 2012.
- [9] M. Meila. Comparing clustering, an axiomatic view. In *Proc. of the Int. Conf. on Machine Learning*, pages 577–584, 2005.
- [10] G. Raschia and N. Mouaddib. Sainteti : a fuzzy set-based approach to database summarization. *Fuzzy Sets and Systems*, 129(2) :137 – 162, 2002.
- [11] E. Ruspini. A new approach to clustering. *Information and Control*, 15(1) :22 – 32, 1969.
- [12] G. Smits and O. Pivert. A fuzzy-summary-based approach to faceted search in relational databases. In *Advances in Databases and Information Systems*, volume 7503, pages 357–370. Springer, 2012.
- [13] L. Ughetto, W. Voglozin, and N. Mouaddib. Database querying with personalized vocabulary using data summaries. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(15) :2030–2046, 2008.
- [14] X. Xie and G. Beni. A validity measure for fuzzy clustering. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 13(4) :841–846, 1991.

Caractérisation de motifs graduels par des clauses du type “surtout si”

Characterization of gradual itemsets through “especially if” clauses

A. Oudni^{1,2}

M.-J. Lesot^{1,2}

M. Rifqi^{1,2,3}

¹ Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 7606, LIP6, F-75005, Paris, France

² CNRS, UMR 7606, LIP6, F-75005, Paris, France

³ Université Panthéon-Assas - Paris 2, F-75005, Paris, France

Résumé :

Les motifs graduels de la forme “*plus/moins A, plus/moins B*” résumant et caractérisent les données par leurs tendances internes exprimées comme des corrélations entre les valeurs des attributs. Cet article propose de caractériser les motifs graduels en les enrichissant par une clause introduite par l’expression linguistique “surtout si”. Ils sont de la forme “*I, surtout si $J \in R$* ” où *I* est un motif graduel, *J* est un ensemble d’attributs inclus dans *I* et *R* est un ensemble d’intervalles définis pour chaque attribut dans *J*. La méthode proposée est basée sur des outils de morphologie mathématique et tient compte de la densité des données. La pertinence de l’approche proposée est illustrée sur un ensemble de données réelles.

Mots-clés :

Motif graduel, caractérisation, densité, fouille de données, extraction d’intervalles.

Abstract:

Gradual itemsets of the form “*the more/less A, the more/less B*” summarise data through the description of their internal tendencies, identified as correlation between attribute values. This paper proposes to characterize gradual patterns by enriching them by a clause introduced by the linguistic expression “especially if”. They are of the form “*I, especially if $J \in R$* ”, where *I* is a gradual itemset, *J* is a set of attributes occurring in *I* and *R* is a set of intervals defined for each attribute in *J*. The proposed method is based on appropriate mathematical morphology tools and takes into account the data density. The relevance of the proposed approach is illustrated on a real data set.

Keywords:

Gradual itemsets, characterisation, density, data mining, interval extraction.

1 Introduction

Les motifs graduels fournissent des informations résumant un ensemble de données sous la forme “*plus/moins A, plus/moins B*”. Initialement introduits dans le formalisme des implications floues [8, 9], ces motifs ont ensuite été interprétés comme des contraintes de co-variation des valeurs d’attributs, pour des don-

nées floues ou numériques. Plusieurs interprétations de ces contraintes ont été proposées, sous la forme de régression [10], de corrélation d’ordres induits [2, 11] ou d’identification de sous-ensembles d’objets compatibles [4, 5]. Ces interprétations conduisent à différentes définitions de supports et à des méthodes d’identification de motifs fréquents.

Dans le cas de données floues, un enrichissement des motifs graduels par renforcement a été proposé. Il consiste à identifier des sous-ensembles des données sur lesquels le motif est plus satisfait que sur la base totale. Ces sous-ensembles sont définis par des contraintes de présence de modalités floues. Les motifs renforcés sont exprimés linguistiquement par une clause introduite par “d’autant plus que” [3], comme par exemple “plus on est proche du mur, plus on freine fort, d’autant plus que la vitesse est élevée”.

Cet article propose un nouveau type d’enrichissement par une caractérisation des motifs graduels, pour des données numériques. Cet enrichissement considère des restrictions définies par des contraintes d’intervalles identifiés automatiquement et non des modalités existantes dans les données. Linguistiquement, la caractérisation est exprimée par des clauses introduites par l’expression “surtout si”. Les motifs graduels caractérisés peuvent être illustrés par l’exemple “plus on est proche du mur, plus on freine fort, surtout si la distance au mur est dans $[0, 50]$ m”, ou plus généralement “*plus/moins A, plus/moins B, surtout si $J \in R$* ”,

où J est un ensemble d'attributs appartenant à $A \cup B$ et R est un ensemble d'intervalles définis pour chaque attribut dans J . L'approche proposée dans cet article considère des contraintes de densité, afin de mettre en évidence les régions appropriées du domaine qui sont fortement peuplées.

L'article est organisé de la façon suivante : la section 2 rappelle le formalisme des motifs graduels et présente les travaux existants. La section 3 décrit l'interprétation des motifs graduels caractérisés et leur formalisation. La section 4 décrit le processus de transcription de données, la section 5 présente la méthode proposée basée sur des outils de morphologie mathématique et la section 6 le post-traitement nécessaire pour le cas général. Enfin, la section 7 illustre les résultats obtenus sur des données réelles.

2 Contexte et travaux liés

2.1 Définition des motifs graduels

On note \mathcal{D} un ensemble de données constitué de n objets décrits par m attributs numériques.

Un *item graduel* A^* est un couple constitué d'un attribut A et d'une variation, notée $*$ $\in \{\geq, \leq\}$. Un *motif graduel* est un ensemble d'items graduels, interprété comme leur conjonction. A un motif $I = \{(A_j, *_{j}), j = 1..k\}$, on associe sa longueur, k , définie comme le nombre d'attributs qu'il implique, et le pré-ordre induit \preceq_I défini sur \mathcal{D}^2 tel que $o \preceq_I o'$ ssi $\forall j \in [1, k] A_j(o) *_{j} A_j(o')$ où $A_j(o)$ représente la valeur de l'attribut A_j pour l'objet o .

L'interprétation des contraintes de co-variation par identification de sous-ensembles compatibles [4, 5] consiste à identifier des sous-ensembles D de \mathcal{D} , appelés *chemins*, qui peuvent être ordonnés de façon à ce que tous les couples de données de D vérifient le pré-ordre induit. Ainsi pour un motif I , $D = \{o_1, \dots, o_p\} \subseteq \mathcal{D}$ est un chemin si et seulement s'il existe une permutation π telle que

$$\forall l \in [1, p-1], o_{\pi_l} \preceq_I o_{\pi_{l+1}}.$$

Un tel chemin est dit *complet* si aucun objet ne peut lui être ajouté sans violer la contrainte d'ordre imposée par I . On note $\mathcal{L}(I)$ l'ensemble des chemins complets associés à I . On appelle chemin *maximal* un chemin complet de longueur maximale. Le support graduel de I , $SG_{\mathcal{D}}(I)$, est défini comme :

$$SG_{\mathcal{D}}(I) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \max_{D \in \mathcal{L}(I)} |D| \quad (1)$$

2.2 Renforcement des motifs graduels

Les motifs graduels renforcés sont des motifs enrichis auxquels une clause introduite par l'expression "d'autant plus que" est ajoutée [3]. La clause de renforcement se compose de modalités floues des attributs. L'interprétation en termes de présence renforcée proposée dans [3] considère de tels motifs enrichis comme des motifs qui sont mieux satisfaits quand l'ensemble de données est limité aux objets satisfaisant la clause de renforcement.

La caractérisation proposée dans cet article compare aussi la validité du motif évaluée sur l'ensemble total de données à celle mesurée sur un ensemble restreint. Toutefois cette restriction n'est pas définie par la présence de modalités pré-définies, mais par des contraintes d'intervalles, identifiés automatiquement.

2.3 Identification d'intervalles d'intérêt

La caractérisation considérée peut être rapprochée de travaux visant à identifier des intervalles d'intérêt, comme c'est le cas pour l'extraction de règles d'association quantitatives et pour l'identification de partitions floues.

Les règles d'association quantitatives sont une extension des règles d'association classiques aux attributs numériques [1, 15] : un item est défini comme un couple constitué d'un attribut et d'un intervalle, par exemple (âge, [27, 38]). Il est alors possible de calculer la proportion de données possédant un item pour évaluer son

support, et donc d'appliquer des algorithmes classiques d'extraction de motifs. Les méthodes proposées pour identifier ces intervalles peuvent être distinguées suivant qu'elles reposent sur une discrétisation avant [1, 12, 15] ou pendant le processus d'apprentissage [6, 7, 16, 14].

Le problème d'identification d'intervalles d'intérêt se rapproche également du problème de discrétisation pour la construction d'arbre de décision. L'approche proposée dans [13] utilise des outils de morphologie mathématique [18], plus précisément un filtre alterné, pour regrouper les valeurs d'un attribut qui sont associées à la même classe, tolérant un certain niveau de bruit dans les groupes identifiés. Ce filtre est appliqué à un mot, obtenu par transcription de l'univers numérique unidimensionnel, où chaque exemple est représenté par un caractère symbolisant sa classe. Cette transcription tient compte de l'écart entre deux valeurs successives dans la base d'apprentissage.

3 Interprétation des motifs graduels caractérisés

Cette section présente l'interprétation et le principe de la caractérisation des motifs graduels, en l'illustrant sur un exemple.

3.1 Restriction de données

La Figure 1 représente un ensemble de données décrit par deux attributs, pour lequel le motif graduel $I = A \geq B \geq$ est supporté par le chemin représenté par \bullet . Son support graduel vaut $15/23 = 65\%$. Or, il peut être observé que la covariation entre A et B est particulièrement vérifiée si les données sont limitées aux objets pour lesquels A prend des valeurs dans l'intervalle $[32; 65]$: pour ces données le support du motif est plus élevé, il vaut $12/14 = 85\%$. Ceci motive l'extraction du motif graduel caractérisé " $A \geq B \geq$; surtout si $A \in [32; 65]$ ".

Plus généralement, nous proposons d'interpréter la caractérisation des motifs

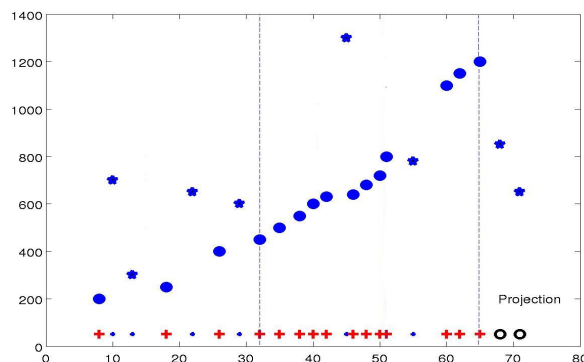


Figure 1: Exemple de caractérisation d'un motif graduel, conduisant à "plus A , plus B , surtout si $A \in [32; 65]$ ".

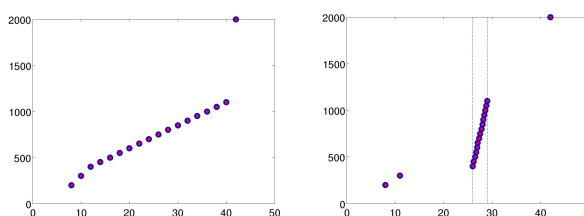


Figure 2: Effet de la densité.

graduels comme validité accrue quand les données sont restreintes aux objets satisfaisant la clause de caractérisation. Cependant, afin d'être informative, une telle caractérisation ne doit pas limiter les données trop drastiquement : il est facile d'atteindre 100% de support, par exemple en restreignant les données à un unique couple d'objets satisfaisant l'ordre induit. Pourtant, la caractérisation dérivée serait trop spécifique. Dans l'exemple précédent, restreindre les données au plus petit intervalle $[32; 42]$ augmente le support à 100%, mais conduit à une caractérisation trop spécifique.

Le principe de la caractérisation est donc de trouver un compromis entre un support élevé et un nombre élevé d'objets lors de la restriction de l'ensemble de données.

3.2 Prise en compte de la densité

Dans le cas général, deux sous-ensembles de données différant par leur densité mais de même

cardinalité peuvent donner le même intervalle caractéristique, comme illustré sur la Figure 2. Dans les deux cas, on représente un sous-ensemble d'une base de données pour lequel le support est de 100% qui conduit à un intervalle caractéristique [8, 42]. Or, pour le cas de droite, il semble plus satisfaisant de restreindre encore l'intervalle, pour définir la clause surtout si $A \in [26; 29]$: le fait d'ignorer les deux premiers et le dernier objet qui sont isolés du reste des objets permet d'identifier une zone dense qui est en effet plus caractéristique du motif, où la densité est mesurée par le nombre d'objets rapporté à la taille de l'intervalle.

3.3 Objectif global

Ainsi l'objectif de la caractérisation d'un motif graduel I est d'identifier un ensemble d'attributs $J \subset I$ et une région R conduisant à l'expression linguistique "surtout si $J \in R$ ". La région R induit une restriction \mathcal{D}' de l'ensemble de données \mathcal{D} , en considérant uniquement les données satisfaisant la contrainte de valeur exprimée par R . Le principe consiste à maximiser à la fois le support du motif considéré I sur \mathcal{D}' , le nombre d'objets dans \mathcal{D}' et la densité des données dans R .

La méthode proposée s'inscrit dans un cadre supervisé. Elle est donc plus proche de l'identification de partition floue telle que proposé dans [13] que des règles d'association quantitatives. Elle est basée également sur des outils de morphologie mathématique, comme détaillé dans les sections suivantes. Elle exploite aussi un filtre alterné appliqué à une transcription tenant compte de la densité des données.

4 Transcription

Étant donné un motif graduel I , un chemin maximal D identifié par GRITE [4] par exemple et un attribut A pour lequel un intervalle d'intérêt est recherché, l'information du chemin est codée à travers un processus de transcription

en un mot composé des symboles $\{+, -, \circ\}$.

4.1 Représentation symbolique

Afin de prendre en compte la densité, nous proposons de générer des objets fictifs : on les insère entre les objets de la base de données pour garantir que l'écart entre deux valeurs successives observées pour l'attribut A soit inférieur ou égal à e où e est un écart minimum fixé par l'utilisateur, appelé *écart de base*.

On ordonne les objets selon leur valeur pour l'attribut considéré A , le i ème caractère est ensuite obtenu comme la transcription du i ème objet, comme :

- si o est un objet fictif
- + si $o \in D$
- si $(o \notin D) \wedge (A_{mD} \leq A(o) \leq A_{MD})$
- o sinon

où A_{mD} et A_{MD} représentent respectivement les valeurs minimale et maximale de A sur D . Le symbole \circ code les données en dehors des limites du chemin traité : il est nécessaire pour traiter le cas de plusieurs chemins maximaux (voir la section 6).

Les données à droite de la Figure 2 conduisent par exemple au mot v pour $e = 2$.

$v = +---+-----+++++++-----+$

4.2 Définition du support d'un mot

L'objectif décrit dans la sous-section 3.3 peut alors être transposé à la représentation d'un chemin en un mot : la restriction de l'ensemble de données correspond à une sous-partie du mot, et $|\mathcal{D}'|$ à sa longueur à laquelle on soustrait le nombre d'objets fictifs insérés. Le support restreint $SG_{\mathcal{D}'}(I)$ est égal à la proportion de + dans cette sous-partie.

Formellement, en notant un mot v , $NP(v)$ le nombre de + qu'il contient et $NF(v)$ son nombre d'objets fictifs, le support des motifs graduels est étendu aux mots comme $supp(v) = NP(v)/(|v| - NF(v))$.

L'objectif est alors d'extraire des séquences

de + consécutifs en tolérant quelques symboles - : il est alors possible d'augmenter la taille de la sous-séquence considérée, avec une diminution limitée de la proportion de +. Comme détaillé ci-dessous, de tels effets de lissage peuvent être obtenus en appliquant un opérateur φ , conduisant à $v' = \varphi(v)$ afin de fusionner les séquences de + proches, puis en identifiant la plus longue séquence de + dans v' , $S(v')$, et en évaluant la séquence correspondante dans v , $S_v(v')$, avec un support $NP(S_v(v'))/(|S_v(v')| - NF(S_v(v')))$.

5 Morphologie mathématique

Cette section présente les outils de morphologie mathématique proposés pour répondre à l'objectif global décrit dans la section 3.3, ainsi que leurs propriétés et leur pertinence.

La morphologie mathématique [18] a été largement utilisée pour le traitement d'images et l'analyse fonctionnelle. Les opérateurs utilisés ici sont des transpositions des opérateurs classiques au cas unidimensionnel et s'appliquent à des mots obtenus à l'issue d'une transcription de l'univers numérique.

5.1 Opérateurs considérés

Étant donné un mot défini sur $\{+, -, \circ\}$, l'opérateur d'érosion, noté Er_1 , diminue la taille des séquences de + en remplaçant leurs extrémités par des - : pour tout m entier positif, indiquant le nombre de + du mot considéré

$$\begin{array}{ccccccc} - & +^{m+2} & - & \longrightarrow & - & - & +^m & - & - \\ \circ & +^{m+1} & - & \longrightarrow & & \circ & +^m & - & - \\ - & +^{m+1} & \circ & \longrightarrow & - & - & +^m & \circ & \end{array}$$

Les deux dernières lignes montrent la spécificité du symbole \circ qui n'est pas modifié.

Er_n , où n est un paramètre entier, désigne la combinaison de n érosions successives : elle efface les séquences de + de longueur inférieure à $2n$, chacun de leurs éléments étant progressivement remplacé par -.

Réciproquement, l'opérateur de dilatation,

noté Di_1 , diminue les séquences de - et allonge les séquences de + : pour tout $m \geq 0$

$$\begin{array}{ccccccc} + & -^{m+2} & + & \longrightarrow & + & + & +^m & + & + \\ \circ & -^{m+1} & + & \longrightarrow & & \circ & -^m & + & + \\ + & -^{m+1} & \circ & \longrightarrow & + & + & -^m & \circ & \end{array}$$

Di_n est la combinaison de n dilatations successives ; elle efface les séquences de - de longueur inférieure à $2n$.

L'opérateur d'ouverture est défini, comme dans la morphologie mathématique classique, par $Ouv_n = Di_n \circ Er_n$. Par rapport au mot initial, l'opérateur d'ouverture fusionne les séquences de - séparées par des séquences de moins de $2n + 1$. Réciproquement, l'opérateur de fermeture est défini comme $Fer_n = Er_n \circ Di_n$: il fusionne les séquences de + séparées par des séquences de moins de $2n - 1$.

Le filtre alterné est la combinaison récursive d'ouvertures et de fermetures :

$$\begin{array}{l} n = 1 \quad Filt_1 = Fer_1 \circ Ouv_1 \\ n > 1 \quad Filt_n = Fer_n \circ Ouv_n \circ Filt_{n-1} \end{array}$$

Une combinaison $Fer_n \circ Ouv_n$ supprime d'abord les séquences de + de longueur inférieure à $2n$, puis regroupe les séquences de + de longueur supérieure à $2n + 1$, si elles sont séparées par moins de $2n$ symboles -.

5.2 Propriétés

Il faut noter que le filtre alterné est à la fois tolérant et exigeant lorsque n est élevé. En effet, il permet, d'une part, de remplacer de longues séquences de - dans des séquences de + : il est tolérant aux - dans les blocs de +. D'autre part, pour effectuer de telles modifications, les séquences de - doivent être entourées par de longues séquences de + : il est exigeant pour fusionner les séquences de +. C'est la raison pour laquelle il représente un compromis entre la longueur et la proportion de symboles +, fournissant un outil intéressant pour extraire les intervalles d'intérêt de caractérisation.

La combinaison d'ouvertures et de fermetures conduit de plus à une asymétrie intéressante du filtre $Filt_n$: les séquences courtes de + sont inconditionnellement remplacées par des séquences de -, alors que le remplacement de séquences courtes de - impose des conditions sur la longueur des séquences de + qui les entourent. Cette propriété est très pertinente dans le contexte de la caractérisation qui se concentre sur les symboles +, et est liée à l'obligation de ne pas dégrader la valeur du support lorsque les séquences de + sont fusionnées en ajoutant quelques symboles -. En effet, alors qu'un opérateur de fermeture fusionne les séquences de + indépendamment de leur longueur, ce qui peut conduire à de longues séquences avec un support faible, le filtre alterné permet de fusionner les séquences de - uniquement sous la condition qu'elles soient entourées de séquences de + plus longues.

6 Etape de post-traitement : agrégation de multiples chemins

Dans le cas général, un motif graduel est basé sur plusieurs chemins complets [17], qui peuvent correspondre à plusieurs intervalles caractéristiques. Cette section décrit l'opérateur d'agrégation proposé pour combiner les résultats obtenus à partir de ces chemins.

La fonction d'agrégation, Agg , s'applique à des mots définis sur $\{+, -, \circ\}$ ayant la même longueur, égale à la somme du nombre d'objets dans le jeu de données \mathcal{D} et du nombre d'objets fictifs ajoutés. Elle s'applique successivement à chaque élément de la séquence et fournit en sortie un mot défini sur $\{+, \emptyset\}$. Le symbole \emptyset dénote les valeurs sur lesquelles le motif n'est pas caractérisé. La fonction Agg proposée est symétrique et définie comme suit, pour toutes les paires possibles de symboles

$$\frac{\begin{array}{l} s_1 \quad + + + - \circ \circ \\ s_2 \quad + \circ - - - \circ \end{array}}{Agg(s_1, s_2) + + \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset}$$

L'intervalle de caractérisation est finalement défini par ses limites, définies comme les

valeurs minimale et maximale de l'attribut considéré.

7 Expérimentations et résultats

Nous avons effectué une étude expérimentale de la méthode de caractérisation proposée. L'analyse des résultats est basée sur la comparaison des supports des motifs graduels avant et après caractérisation et le nombre de motifs extraits dans chacun des cas.

7.1 Données

Nous avons utilisé une base de données réelles météorologiques de la station de Saint-Germain-des-Prés téléchargée à partir du site <http://www.meteo-paris.com/ile-de-france/station-meteo-paris/pro>. Elle contient 2133 observations réalisées pendant 8 jours, décrites par 22 attributs numériques tels que la température (C), la pluie (mm), l'humidité (%), la pression (hPa) ou la vitesse du vent (km/h).

7.2 Motifs extraits

Pour les expérimentations, nous fixons le seuil de support graduel minimal à 20% et l'ordre du filtre à $n = 4$. L'écart de base e est fixé à l'écart moyen entre deux valeurs successives pour chaque attribut.

835 motifs sont extraits avant la caractérisation ; 461 sont enrichis par une clause de caractérisation, ce qui correspond à plus de 55% des motifs extraits. Les motifs caractérisés peuvent être illustrés par les exemples suivants : (i) plus la température est élevée, moins la vitesse du vent est élevée surtout si la vitesse du vent appartient à $[1, 7.4]$, $SG = 36.3\%$, $SG_{\mathcal{D}'} = 86.2\%$; (ii) moins l'humidité est élevée, moins la température est élevée surtout si la température appartient à $[9, 11.8]$, $SG = 22.8\%$, $SG_{\mathcal{D}'} = 76.5\%$; (iii) plus la pression est élevée, plus la température est élevée surtout si la température appartient à $[13, 19.2]$, $SG = 22\%$, $SG_{\mathcal{D}'} = 76\%$.

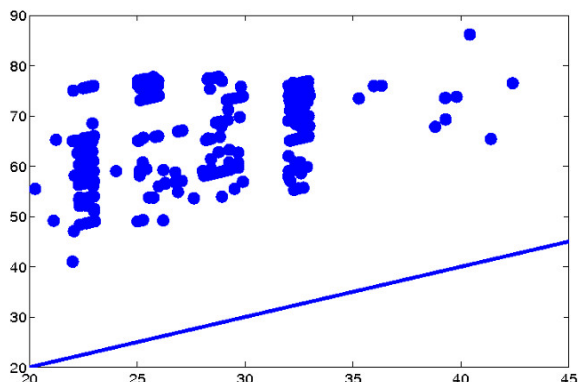


Figure 3: Supports des motifs graduels avant (abscisses) et après (ordonnées) caractérisation.

7.3 Comparaison de $SG_{\mathcal{D}}$ et $SG_{\mathcal{D}'}$

La Figure 3 compare les supports graduels des motifs avant et après caractérisation. Elle montre bien que tous les supports graduels obtenus après caractérisation sont supérieurs à ceux avant caractérisation. Ceci confirme la validité accrue des motifs graduels. Le SG le plus élevé avant caractérisation est de 42.4%, en revanche, le SG le plus élevé après caractérisation est de 86.2%, qui lui est bien supérieur.

7.4 Résultats de variation de l'écart de base

La méthode proposée dépend du paramètre e , qui détermine le nombre d'objets fictifs introduits et donc le niveau de prise en compte de la densité : plus la valeur de e est faible, plus la contrainte imposée par la densité est importante. Si e est inférieur à l'écart minimal observé entre deux données consécutives, e_{min} , aucune clause de caractérisation ne peut être identifiée : les objets transcrits par des + sont tous séparés par des objets fictifs transcrits par des -, et aucune séquence de + n'est identifiée. Si e est supérieur à l'écart maximal, e_{max} , entre deux valeurs successives, aucun objet fictif n'est introduit, et la densité n'a pas d'influence sur le résultat, aussi, le nombre de clauses de caractérisation identifiées est maximal.

De façon plus précise, quand e est faible, les

Tableau 1: Nombre de motifs caractérisés extraits en fonction de l'écart utilisé e pour l'attribut "vitesse du vent"

e	$e_{max} = 0.1$	0.01	0.005	$e_{min} = 0.003$
nb motifs	51	37	7	0

longueurs des séquences identifiées sont de plus en plus faibles car de nombreux objets fictifs sont ajoutés ; de plus, le support est faible également. Aussi, le nombre de clauses de caractérisation identifiées diminue.

A titre d'exemple, le tableau 1 montre le nombre de motifs caractérisés extraits en fonction de la valeur de e , pour l'attribut "vitesse du vent".

8 Conclusion et travaux futurs

Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle approche pour la caractérisation des motifs graduels, en utilisant la clause de caractérisation "surtout si", afin d'extraire plus d'information résumant un ensemble de données. Elle repose sur l'identification d'intervalles d'intérêt pour les attributs apparaissant dans le motif considéré et vérifiant une contrainte de densité des données. Nous avons proposé un support graduel de caractérisation pour mesurer la pertinence de ces motifs et interprété la caractérisation comme une validité accrue du motif. L'approche proposée est basée sur les outils de morphologie mathématique.

Une première perspective consiste à étudier la sélection des valeurs des paramètres de l'approche proposée, en particulier l'ordre du filtre n . Une autre perspective de ce travail consiste à caractériser les motifs avec une clause non incluse dans le motif à caractériser, par exemple : "plus la température augmente, plus la pression diminue, surtout si l'humidité appartient à $[50, 65]$ ". Cela soulève des problèmes concernant le temps de calcul et la consommation mémoire, et dépend de la façon d'éliminer efficacement les motifs caractérisés non pertinents dès leur détection.

References

- [1] R. Agrawal and Srikant R. Fast algorithms for mining association rules in large databases. pages 487–499. Proc. of the Int. Conf. on VLDB, 1994.
- [2] F. Berzal, J. C. Cubero, D. Sanchez, M. A. Vila, and J. M. Serrano. An alternative approach to discover gradual dependencies. pages 559–570. Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2007.
- [3] B. Bouchon-Meunier, A. Laurent, M. J. Lesot, and M. Rifqi. Strengthening fuzzy gradual rules through "all the more" clauses. pages 1–7. Proc of FuzzIEEE, 2010.
- [4] L. Di Jorio, A. Laurent, and M. Teisseire. Fast extraction of gradual association rules: a heuristic based method. pages 205–210. Proc. of the Int. Conf. on Soft Computing as Transdisciplinary Science and Technology, 2008.
- [5] L. Di Jorio, A. Laurent, and M. Teisseire. Mining frequent gradual itemsets from large databases. pages 297–308. Advances in Intelligent Data Analysis, 2009.
- [6] T. Fukuda, Y. Morimoto, S. Morishita, and T. Tokuyama. Data mining using tow-dimensional optimized association rules: Scheme, algorithm and visualisation. pages 12–23. Proc. of the Int. Conf. ACM SIGMOD, 1996.
- [7] T. Fukuda, Y. Morimoto, S. Morishita, and T. Tokuyama. Mining optimized association rules for numeric attributes. pages 12–23. Proc. of the 15th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART, 1996.
- [8] S. Galichet, D. Dubois, and H. Prade. Imprecise specification of ill-known functions using gradual rules. pages 205–222. IJAR, 2004.
- [9] E. Hüllermeier. Implication-based fuzzy association rules. pages 241–252. Principles of Data Mining and Knowledge Discovery, 2001.
- [10] E. Hüllermeier. Association rules for expressing gradual dependencies. pages 200–211. Principles of Data Mining and Knowledge Discovery, 2002.
- [11] A. Laurent, M-J. Lesot, and M. Rifqi. Graank: Exploiting rank correlations for extracting gradual itemsets. pages 382–393. Proc. of the Int. Conf. on FQAS, 2009.
- [12] B. Lent, A. N. Swami, and J. Widom. Clustering association rules. pages 220–231. Proc. of the Int. Conf. on Data Engineering, 1997.
- [13] C. Marsala and B. Bouchon-Meunier. Fuzzy partitioning using mathematical morphology in a learning scheme. pages 1512–1517. Proc of the Int. Conf. on Fuzzy Systems, 1996.
- [14] J. Mata, J. L. Alvarez, and J. C. Riquelme. An evolutionary algorithm to discover numeric association rules. pages 590–594. Proc. of ACM symposium on Applied computing, 2002.
- [15] R. J. Miller and Y. Yang. Association rules over interval data. pages 452–461. Proc. of the Int. Conf. on Management of Data, 1997.
- [16] C. Nortet, A. Salleb, T. Turmeaux, and C. Vrain. Mining quantitative association rules in a atherosclerosis dataset. pages 495–506. Proc. of the 6th PKDD, 2006.
- [17] A. Oudni, M-J. Lesot, and M. Rifqi. Gestion de la contradiction dans l'extraction de motifs graduels. pages 218–225. LFA, 2012.
- [18] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Inc., 1983.

Données multidimensionnelles floues et Graphe de similarité

Fuzzy Multidimensional Data and Similarity Graph

A. Nourizadeh^{1,2}

F. Blanchard²

B. Delemer¹

M. Herbin²

¹ Service Endocrinologie-Diabétologie-Nutrition, CHU Reims

² Laboratoire CReSTIC (EA 3804), Université de Reims Champagne-Ardenne

Résumé :

L'analyse de données nécessite une phase exploratoire pour effectuer des rapprochements par similarité et extraire les informations pertinentes. Dans cette communication, nous proposons une approche par graphes sur un échantillon de données. Les graphes sont construits à partir de données floues. Dans une première étape, nous fuzzifions des données multidimensionnelles qualitatives ou quantitatives. Par une opération d'agrégation, nous définissons ensuite un indice de représentativité dans l'échantillon. Le voisinage de chaque donnée est défini par α -coupes. Enfin nous connectons chaque donnée à son voisin le plus représentatif pour construire un graphe dépendant du seuil α utilisé. Cette approche est illustrée par une étude sur l'insulinothérapie dans le cas du diabète de type 2 des personnes âgées.

Mots-clés :

Données multidimensionnelles, Fuzzification, Agrégation, Graphe, Représentants

Abstract:

Data analysis requires an exploratory phase to make connections between similar data and extract relevant information. In this paper, we propose an approach based on graphs of data. The graphs are constructed from fuzzy data. In a first step, we fuzzify both qualitative and quantitative multidimensional data. Then we define an index of representativeness within the data samples using an aggregation operator. The neighborhood of each data is defined by α -cuts. Finally we connect each data to its most representative neighbor to build a graph which depends on the used threshold α . This approach is exemplified to study insulin-therapy in the case of type 2 diabetes in the elderly.

Keywords:

Multidimensional Data, Fuzzification, Agregation, Graph, Representatives

1 Introduction

L'analyse de données nécessite généralement une phase exploratoire pour déterminer le traitement le plus adapté. Dans ce contexte, la logique floue est souvent mise à contribution pour gérer l'incertitude et l'imprécision, elle permet aussi une évaluation plus flexible des similarités entre objets [2]. Classiquement la

relation de similarité au sens de Zadeh [1] est symétrique. Dans cette communication, la contrainte de symétrie sera levée : à l'aide d'opérateurs d'agrégation, nous proposons une méthode pratique utilisant le flou pour définir un indice de similarité entre données multidimensionnelles, sans se préoccuper de la propriété de symétrie. Une proposition d'analyse exploratoire des données est ensuite développée en utilisant cet indice de similarité.

À l'instar des méthodes de raisonnement à base de cas [3], l'indice de similarité permet d'extraire de l'échantillon des observations ou données particulières. Ces observations représentent :

- soit des regroupements de données,
- soit des données individuelles (i.e. des cas rares).

Cette communication prolonge nos travaux sur la représentativité des données [8], communication dans laquelle ces observations particulières sont appelées représentants de l'échantillon.

Plusieurs remarques préliminaires peuvent être soulignées dans ce type d'approche de l'analyse exploratoire des données. Les cas rares peuvent être très nombreux dépassant largement 10% de l'effectif total (par exemple 18% dans [11]). Les connaissances a priori sont minimales comme dans le démarrage à froid d'un raisonnement à base de cas ou d'un système de recommandation. Aucun clustering préalable n'est imposé, contrairement aux approches par typicalité [7]. Si l'approche proposée vise à imposer peu de contraintes, en revanche elle nécessite une étape d'interprétation des résultats qui sera propre à chaque application. Comme pour toute analyse exploratoire, une étape de visualisation est

impérative. Cette étape peut être sophistiquée comme dans [6] ou au contraire très simple comme nous le proposons dans cette communication. Nous développons une méthode de construction de graphes de similarité pour structurer l'échantillon et permettre d'observer des connexions induites entre données par notre indice de similarité. Notre objectif est de rendre plus facile l'exploration d'un ensemble des données et de faciliter l'interprétation par des représentations graphiques simplifiées.

2 Données multidimensionnelles et domaine de définition

Soit E un échantillon de n données défini par : $E = \{X_i / 1 \leq i \leq n\}$. Les données appartiennent à un espace de dimension p . Autrement dit, chaque donnée X appartenant à E a p composantes. Ainsi la donnée X est définie par : $X = (x_r)_{1 \leq r \leq p}$. Les composantes d'une donnée X sont :

- soit quantitatives et définies dans un intervalle de \mathbb{R} . La valeur quantitative x_r appartient alors à un domaine D_r où : $D_r = [a_r, b_r]$.
- soit qualitatives. La composante x_r appartient alors à un domaine D_r avec $D_r = \{1, 2, 3, \dots, v\}$ où v est le nombre de valeurs que peut prendre x_r .

Le domaine de définition de l'échantillon E est alors défini par : $\Omega = \prod_{1 \leq r \leq p} (D_r)$ où \prod est le produit cartésien des p domaines des composantes.

3 Fuzzification des données

Une valeur qu'elle soit quantitative ou qualitative est souvent imprécise et incertaine et il est classique de la représenter soit par un nombre flou, soit par une quantité floue.

Soit une donnée X de l'échantillon E . Chaque des p composantes x_r de X peut ainsi être représentée par un sous-ensemble flou de son domaine D_r . La fonction d'appartenance à ce

sous-ensemble flou est alors telle que :

$$\begin{aligned} \mu_{x_r}: D_r &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto \mu_{x_r}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Dans cet article, ces sous-ensembles flous sont normés avec : $\mu_{x_r}(x_r) = 1$.

En utilisant une classique méthode d'agrégation (voir par exemple [4] ou [5]), nous proposons de définir X comme une donnée floue de E dont la fonction d'appartenance μ_X est définie par :

$$\begin{aligned} \mu_X: E &\longrightarrow [0, 1] \\ Y &\longmapsto \mu_X(Y) \end{aligned} \quad (2)$$

X et Y étant deux observations de E . Si $X = (x_r)$ et $Y = (y_r)$ avec $1 \leq r \leq p$, nous proposons de définir μ_X sur E par :

$$\mu_X(Y) = \text{agreg}(\mu_{x_r}(y_r)) \quad (3)$$

avec *agreg* comme opérateur d'agrégation des p degrés d'appartenance. Pour illustrer cette communication, nous utilisons une approche très empirique où *agreg* est simplement la moyenne arithmétique.

4 Indice de similarité

Cette fuzzification de la donnée X donne lieu à plusieurs remarques. L'observation X est considérée comme une donnée floue sur E et non sur le domaine Ω . Ce sous-ensemble flou de E est normé car $\mu_X(X) = 1$ pour la méthode *agreg*. Soient deux observations X et Y de E , le sous-ensemble flou associé à X définit une relation valuée de comparaison de Y avec X et :

- Y est similaire à X si $\mu_X(Y) = 1$,
- et Y est dissimilaire à X si $\mu_X(Y) = 0$.

Ainsi μ_X définit un *indice de similarité* à X . La relation de similarité induite sur E n'est pas nécessairement symétrique car $\mu_X(Y)$ n'est pas toujours égal à $\mu_Y(X)$.

5 Indice de représentativité dans l'échantillon

En agréant les données floues de E , on définit un sous-ensemble flou dont la fonction d'appar-

tenance est :

$$\begin{aligned} \mu: E &\longrightarrow [0, 1] \\ X &\longmapsto \mu(X) \end{aligned} \quad (4)$$

avec :

$$\mu(X) = \text{agreg}(\mu_{X_i}(X)) \quad (5)$$

pour $1 \leq i \leq n$ avec la méthode d'agrégation notée *agreg*. Le couple (E, μ) définit alors un échantillon flou de données (sous-ensemble flou de E). Dans cette communication, nous utilisons de nouveau la moyenne arithmétique comme opérateur d'agrégation.

Deux remarques découlent des propriétés élémentaires des opérateurs d'agrégation. Plus l'observation X est similaire aux autres observations de E , plus $\mu(X)$ est proche de 1. Si X était similaire à toutes les données de E , alors on aurait $\mu(X) = 1$. Plus l'observation X est dissimilaire des autres observations de E , plus $\mu(X)$ est proche de 0. Si X était dissimilaire à toutes les données de E , alors on aurait $\mu(X) = 0$. La valeur $\mu(X)$ devient alors un indicateur de similarité de X avec l'ensemble E dans sa globalité. Dans cet article $\mu(X)$ est appelé *un indice de représentativité* de X dans E .

6 Voisinage d'une donnée et graphe de voisinage

Soit X une observation de E considérée comme une donnée floue (voir partie 3) de fonction d'appartenance μ_X . Une α -coupe définit un voisinage de X dans E par :

$$V_\alpha(X) = \{Y \in E / \mu_X(Y) \geq \alpha\} \quad (6)$$

$V_\alpha(X)$ n'est pas vide et contient au moins X . Pour chaque valeur de α , on définit alors un graphe sur E en connectant chaque donnée X à la donnée voisine Z_X ayant la plus grande représentativité :

$$Z_X = \arg \max_{Y \in V_\alpha(X)} (\mu(Y)) \quad (7)$$

Ce graphe a plusieurs composantes connexes. Nous noterons par k le nombre de composantes

connexes. On remarque que, dans chaque composante connexe, il existe une et une seule donnée qui est connectée à elle-même. Ces données connectées à elles-mêmes sont appelées représentants de E .

Si $\alpha = 1$, alors $k = n$, il y a n représentants dans E . Si $\alpha = 0$, alors $k = 1$, il y a un seul représentant dans E (aux cas d'égalités près). Dans cette approche exploratoire de E , α permet de définir les représentants de E .

7 Application

Nous avons appliqué cette approche à des données médicales extraites d'une étude en cours au CHU de Reims [12] et portant sur le diabète de type 2 chez des sujets âgés sous traitement insulinaire.

En 2030, l'OMS estime qu'il y aura 438 millions de personnes touchées par le diabète. En France en 2009, plus de 3,5 millions de personnes sont diabétiques dont 26% ont plus de 76 ans [9]. La plupart des systèmes d'aide à l'insulinothérapie concernent le diabète de type 1 [10]. Pour concevoir un système d'aide aux patients diabétiques de type 2, nous avons entrepris une première étude prospective dans le but de modéliser leur insulinothérapie.

Dans cette communication, nous présentons les résultats obtenus sur un échantillon de 44 données (44 sujets diabétiques de type 2, âgés de plus de 65 ans). Les variables sont :

- l'âge en années modélisé par un nombre flou triangulaire ($age - 10, age, age + 10$),
- le poids en kg modélisé à l'aide d'une fonction trapèzoïdale ($poids - 10, poids - 2, poids + 2, poids + 10$),
- l'objectif glycémique modélisé par un trapèze dépendant des limites minimales et maximales fixées par l'équipe médicale ($obj_{min} - 0.1, obj_{min} + 0.1, obj_{max} - 0.1, obj_{max} + 0.1$),
- le sexe en variable binaire avec deux valeurs 0 ou 1,
- la dose basale en unités d'insuline modélisée par un trapèze ($basal - 5, basal - 1, basal + 1,$

- $basal + 5$),
- la dose bolus en unités d’insuline modélisée par un trapèze ($bolus - 5$, $bolus - 1$, $bolus + 1$, $bolus + 5$),
- la durée du diabète en années modélisée par un trapèze ($duree - 6$, $duree - 2$, $duree + 2$, $duree + 6$),
- la glycémie HbA1c en % modélisée par un trapèze ($HbA1c - 0.5$, $HbA1c - 0.2$, $HbA1c + 0.2$, $HbA1c + 0.5$),
- la fonction rénale rénale $MDRD$ modélisée par un trapèze ($MDRD - 7$, $MDRD - 2$, $MDRD + 2$, $MDRD + 7$),
- la présence de traitement associé $metvic$ en variable binaire,
- la présence de complication $IDMAVC$ en variable binaire.

La méthode de traitement décrite dans cette communication a été appliquée à cet échantillon. Après l’étape de fuzzification de chaque donnée, nous procédons au calcul de l’indice de représentativité de chaque individu dans l’échantillon, puis à la construction du graphe de similarité pour différentes valeurs du paramètre α . Les figures 1(a), 1(b) et 1(c) représentent les graphes obtenus avec $\alpha = 0.35$, $\alpha = 0.42$ et $\alpha = 0.60$.

Lorsque α augmente, la taille des voisinages diminue et le nombre de représentants (i.e. le nombre de composantes connexes du graphe) augmente. Le graphique de la figure 2 représente l’évolution du nombre de composantes connexes en fonction des valeurs de α . On constate la propriété triviale suivante :

- lorsque $\alpha = 1$, chaque individu est un représentant et il y a n représentants,
- lorsque $\alpha = 0$, il a un seul représentant dans tout l’ensemble.

Dans cette application, nous ne disposons pas d’information *a priori* nous permettant de choisir une valeur de α . Empiriquement, nous avons fixé $\alpha = 0.42$. Au delà de cette valeur, une faible augmentation de α provoque un morcellement important du graphe. Elle correspond à une sorte de valeur limite au delà de laquelle le graphe de similarité est instable ou trop peu structuré.

Le graphe de la figure 1(b) représente donc le graphe de similarité de notre étude permettant de relier les cas médicaux étudiés. La première information apportée est relative aux arcs orientés du fait de l’indice de similarité non nécessairement symétrique. Ces arcs permettent de rattacher chaque patient à un autre, relativement à sa situation « insulinique ». La seconde information est celle fournie par le regroupement opéré par les composantes connexes. On obtient ainsi des groupes de patients dont chacun possède un représentant. Cette information est comparable à celle obtenue par les méthodes de *clustering* de type *k-medoids* [12]. L’intérêt de notre approche est de structurer la base de cas des diabétiques et de permettre au praticien d’observer des analogies et des similitudes parmi les patients de l’étude. Nous sommes bien dans une approche à base de cas.

L’observation du graphe de similarité sur la base de patients diabétiques nous montre qu’un patient (ici représenté par le numéro 39) a une position particulière puisqu’il est un représentant isolé (i.e. une composante connexe constituée d’un seul sommet). Ce type d’information permet d’extraire de la base de cas, les patients dont la situation n’est pas assimilable à celle d’autres sujets, ils constituent des cas atypiques (par exemple : caractéristiques physiques différentes, prescription insulinique particulière) qu’il convient de considérer différemment.

L’étude de ces individus isolés peut être complétée en observant l’évolution de leur nombre et de l’état d’isolement lorsque α varie. La courbe de la figure 3 représente l’évolution du nombre de sommets isolés en fonction de la valeur de α . L’allure de cette courbe est proche de celle représentant le nombre de composantes connexes (le nombre de composantes connexes augmente d’autant plus que le nombre de sommets isolés croît). Les figures 4 et 5 représentent les évolutions des demi-degrés intérieurs, des demi-degrés extérieurs et de l’état d’isolement des individus 39 et 43. Le demi-degré extérieur (courbe bleue) ne peut (par construction) pas être supérieur strictement

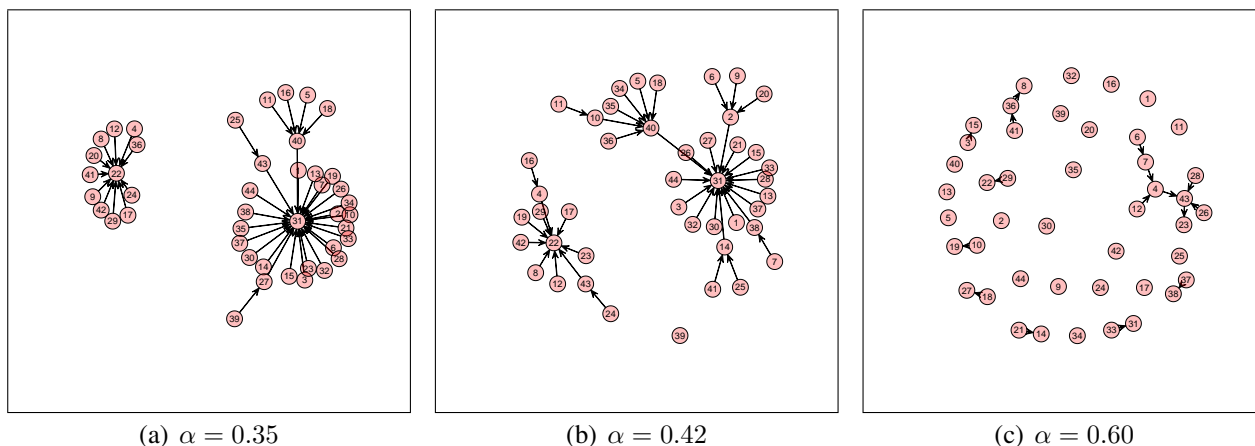


Figure 1 – Graphes de similarité pour différentes valeurs de α .

à 1 (on ne relie un sommet qu'à un seul autre). Cette courbe représente donc, pour un individu, la valeur de α à partir de laquelle cet individu devient un représentant. Ainsi dès que les demi-degrés extérieurs et intérieurs sont nuls simultanément, le sommet est isolé. La courbe magenta représente cette information. On peut ainsi constater que l'individu 39 est isolé beaucoup plus tôt que l'individu 43 (i.e. pour une valeur de α plus petite). Ce constat traduit une atypicité plus prononcée de l'individu 39 lorsque l'on compare sa situation avec celle de l'individu 43 (on remarque d'ailleurs que le sommet 39 est isolé dès $\alpha \simeq 0.4$ avant de l'être définitivement à $\alpha \simeq 0.55$).

8 Conclusion

On a défini, d'une part, un graphe à partir d'un échantillon de données multidimensionnelles qualitatives et quantitatives et, d'autre part, une méthode pour extraire des représentants de cet échantillon. La méthode met à contribution le concept de flou pour définir un indice de similarité entre données. La méthode permet de :

- structurer l'échantillon E par un graphe,
- sous-échantillonner E par k représentants,
- faciliter la compréhension de E à l'aide de ces k exemples qui ne sont pas des prototypes virtuels.

Ainsi les représentants peuvent permettre de définir une typologie à l'intérieur de

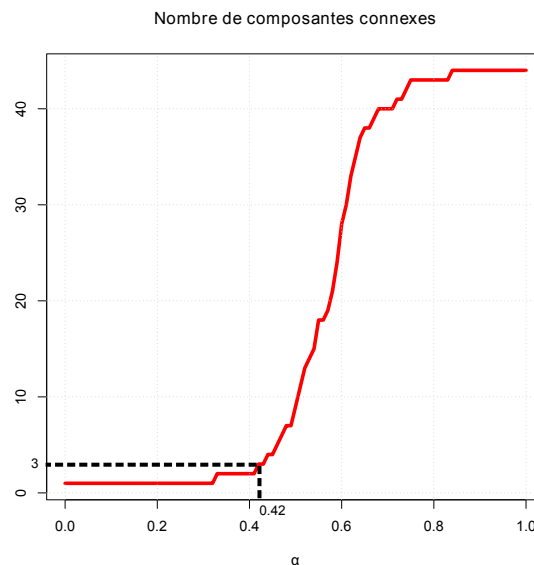


Figure 2 – Nombre de composantes connexes en fonction de α (3 composantes connexes lorsque $\alpha = 0.42$).

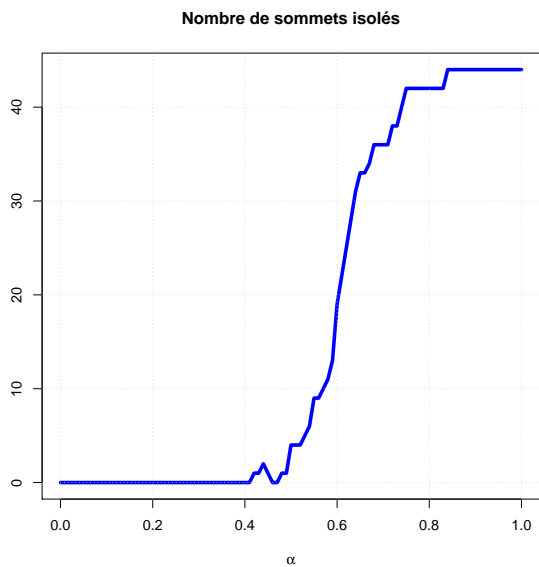


Figure 3 – Nombre de sommets isolés en fonction de α .

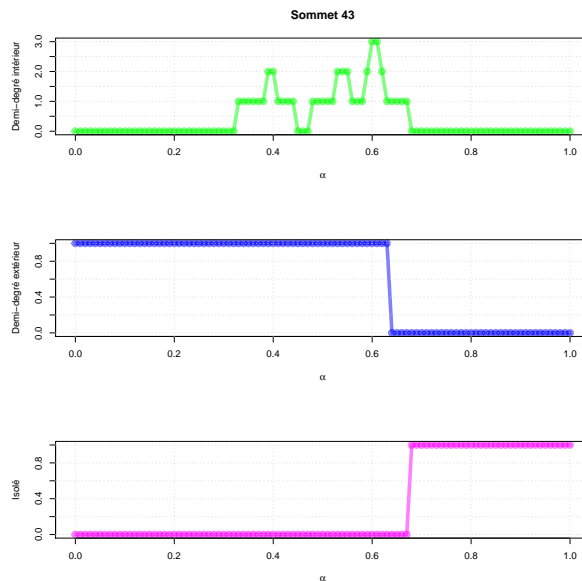


Figure 5 – Demi-degré intérieur, demi-degré extérieur et fonction indicatrice de l'isolement de l'individu 43.

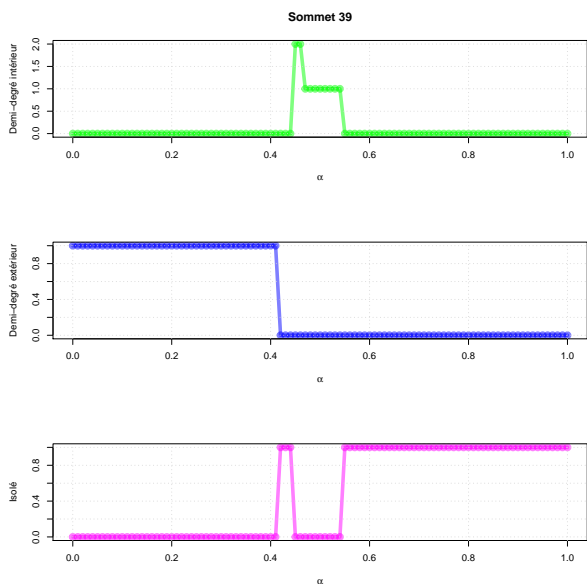


Figure 4 – Demi-degré intérieur, demi-degré extérieur et fonction indicatrice de l'isolement de l'individu 39.

l'échantillon E . Cette approche sans contrainte préalable de clustering ne nécessite pas d'effort important et s'adapte à l'initialisation d'une base de cas pour un démarrage à froid d'un raisonnement.

Cette approche exploratoire d'un échantillon de données est illustrée par l'utilisation de données médicales en vue de déterminer les différents modèles de traitements insuliniques dans le cas du diabète de type 2 chez des sujets âgés. Ce cas d'étude est complexe car ces patients souffrent souvent de multiples pathologies rendant difficile l'extraction d'une typologie insulinique pour le diabète de type 2. Si l'insulinothérapie est si difficile à modéliser dans le type 2, cela tient à la fois à la variabilité biologique intrinsèque et à la conjugaison des phénomènes d'insulino-résistance et d'insulino-sensibilité spécifique de chaque patient. L'approche que nous proposons est une première étape exploratoire vers la modélisation de l'aide à l'insulinothérapie pour des patients diabétiques âgés.

Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier les relecteurs anonymes pour leurs remarques et suggestions pertinentes.

Références

- [1] L. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *information Science*, 3 : 177-200, 1971.
- [2] W.J. Wang. New similarity measures on fuzzy sets and on elements. *Fuzzy Sets and Systems*, : 305-309, 1997.
- [3] P. Bonissone, W. Cheetham. Fuzzy Case-Based Reasoning for Residential Property Valuation. *Handbook on Fuzzy Computing*. Oxford University Press, 1998.
- [4] M. Detyniecki. Mathematical aggregation operators and their application to video querying. *Research Report, LIP6, Paris*, 2001.
- [5] D. Dubois, H. Prade. On the use of aggregation operations in information fusion processes. *Fuzzy Sets and Systems*, 142 : 143-161, 2004.
- [6] F. Blanchard, L. Lucas, M. Herbin. A New Pixel-Oriented Visualization Technique Through Color Image. *Information Visualization*, 4(4), 257-265, 2005.
- [7] M.J. Lesot, M. Rifqi, B. Bouchon-Meunier. Fuzzy prototypes : From a cognitive view to a machine learning principle. *Fuzzy Sets and Their Extensions : Representation, Aggregation and Models* Springer : 431-452, 2007.
- [8] F. Blanchard, P. Vautrot, H. Akdag, M. Herbin. Data Representativeness Based on Fuzzy Set Theory. *Journal of Uncertain Systems* 4(3), 216-228, 2010.
- [9] P. Ricci, P.O. Blotiere, A. Weill, D. Simon, P. Tuppin et al. Diabète traité : quelles évolutions entre 2000 et 2009 en France ? *Bulletin épidémiologique hebdomadaire*, BEH 42-43 : 425-431, novembre 2010.
- [10] S. Franc, A. Daoudi, S. Mounier, B. Boucherie, H. Laroye et al. Télémedecine et diabète : état de l'art et perspectives. *Sang Thrombose Vaisseaux*, 23(4) : 178-186, 2011.
- [11] M.U. Ahmed, P. Funk. A Computer Aided System for Post-operative Pain Treatment Combining Knowledge Discovery and Case-Based Reasoning. *International Conference Case-Based Reasoning Research and Development*, ICCBR : 3-16, septembre 2012.
- [12] A. Nourizadeh, F. Blanchard, A. Aït-Younès, B. Delemer, M. Herbin. Analyse exploratoire de données d'insulinothérapie du diabète de type 2. *JETSAN, Fontainebleau*, 2013.

Index par auteurs

A	
Abidi, Ines	187
Allouche, Benyamine	155
Aupetit, Michaël	33
Ayachi, Raouia	17
Azzoune, Hamid	95

B	
Banerjee, Mohua	49
Batton-Hubert, Mireille	57, 69
Belhadi, Asma	67
Ben Amor, Nahla	17
Ben Fredj, Ines	129
Ben Slimen, Yosra	17
Ben Yaghlane, Boutheina	59, 127
Blanchard, Frédéric	259
Bourahala, Fayçal	225
Bosche, Jérôme	187
Bouchon-Meunier, Bernadette	41

C	
Duong, Chinh-Cuong	163
Chojnacki, Eric	57
Couceiro, Miguel	145

D	
Dahmani, Hamid	211
Dambrine, Michel	155, 195
De Aldama, Ricardo	33
Debernard, Serge	171
Delmotte, François	111
Dequidt, Antoine	155
Delemer, Brigitte	259
Destercke, Sébastien	119, 127
Detyniecki, Marcin	41
Djouadi, Yassine	103
Doubabi, Said	179
Dubois, Didier	25, 49
Dupouy, Guillaume	57
Duthil, Benjamin	233

E	
Ennaceur, Amel	137
El Hajjaji, Ahmed	187, 203, 211
Elouedi, Zied	137
Essaid, Amira	59

G	
Gentils, Aurelien	69
Girault, Thomas	77
Guelton, Kevin	163
Guerra, Thierry-Marie	3

H	
Hachour, Samir	111
Haddi, Adil	85
Hadjali, Allel	95
Harizi, Yazid	95
Michel Herbin	259

I	
Imoussaten, Abdelhak	233

K	
Khaber, Farid	225
Kallel, Rania	127
Kchaou, Mourad	203
Khellaf-Haned, Faiza	67

L	
Latrach, Chedia	203
Lauber, Jimmy	195
Lefèvre, Eric	111, 137
Lehtonen, Erkkko	145
Lokriti, Abdesslam	179
Lesot, Marie-Jeanne	243, 251

M	
Manamanni, Noureddine	163
Marichal, Jean-Luc	153
Marsala, Christophe	7
Martin, Arnaud	59
Masson, Mylène	119
Mauris, Gilles	9
Mercier, David	111
Montmain, Jacky	233
Moubêche, Benjamin	41

N	
Naji, A.	85
Nashashibi, Fawzi	214
Nassif, Roula	119
Nguyen, Tran Anh Tu	195
Nourizadeh, Afshan	267

O

Oudni, Amal	251
Ouni, Kais	129

P

Pagès, Olivier	211
Pérez Rastelli, Joshué	214
Pivert, Olivier	77, 243
Popieul, Jean-Christophe	171
Prade, Henri.....	25, 49, 67

R

Rabhi, Abdelhamid	203
Radja, Hakim.....	103
Rico, Agnès	25
Rifqi, Maria	251
Rojas Michelena, Oriana	214

S

Salhi, Issam	179
Schölzel, Karsten	145
Schockaert, Steven	49
Sentouh, Chouki	171
Smits, Grégory	59, 77, 243
Soualmi, Boussaad	171

T

Teheux, Bruno	153
Trousset, François.....	233

V

Vermeiren, Laurent	155
--------------------------	-----