



**HAL**  
open science

## Contrôle dynamique stochastique : une approche à base de modèles semi-Markov

Cleynen Alice, Benoîte de Saporta, Orlane Rossini, Régis Sabbadin

### ► To cite this version:

Cleynen Alice, Benoîte de Saporta, Orlane Rossini, Régis Sabbadin. Contrôle dynamique stochastique : une approche à base de modèles semi-Markov. 10èmes Rencontres des Jeunes Statisticien.ne.s, Société Française de Statistique (SFdS), Mar 2024, PORQUEROLLES, France. hal-04552358

**HAL Id: hal-04552358**

**<https://hal.science/hal-04552358v1>**

Submitted on 19 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contrôle dynamique stochastique : une approche à base de modèles semi-Markov

## Application à l'optimisation d'un traitement médical

Orlane Rossini <sup>1</sup>, Alice Cleynen <sup>1,2</sup>, Benoîte de Saporta <sup>1</sup> et Régis Sabbadin <sup>3</sup>

<sup>1</sup>IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

<sup>2</sup>John Curtin School of Medical Research, The Australian National University, Canberra, ACT, Australia

<sup>3</sup>Univ Toulouse, INRAE-MIAT, Toulouse, France

13 Mars 2024



UNIVERSITÉ DE  
MONTPELLIER

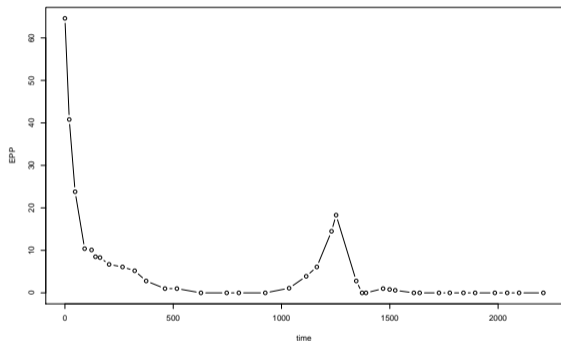
INRAE

IMAG  
INSTITUT MONTPELLIERAIN  
ALEXANDER GROTHENDIECK



anr<sup>®</sup>

# Le contexte médical

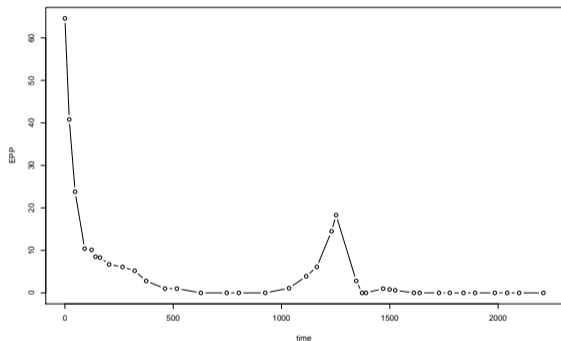


- Des patients ayant eu un **cancer** bénéficiant d'un **suivi régulier**;
- La concentration d'**immunoglobuline clonale** est mesurée **dans le temps**;
- Le médecin doit prendre de nouvelles **décisions** à chaque visite.

Figure: Exemple de données d'un patient<sup>a</sup>

<sup>a</sup>IUCT Oncopole et CRCT, Toulouse, France

# Le contexte médical



- Des patients ayant eu un **cancer** bénéficient d'un **suivi régulier**;
- La concentration d'**immunoglobuline clonale** est mesurée **dans le temps**;
- Le médecin doit prendre de nouvelles **décisions** à chaque visite.

⇒ **Contrôle dynamique stochastique**

Figure: Exemple de données d'un patient<sup>a</sup>

<sup>a</sup>IUCT Oncopole et CRCT, Toulouse, France

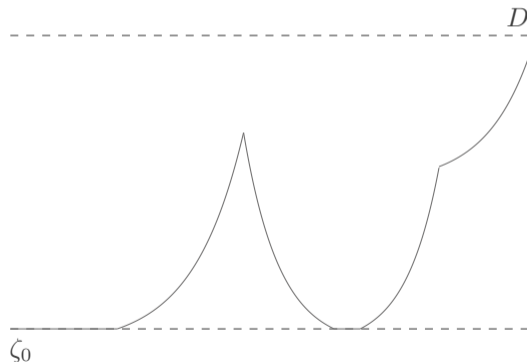
# Sommaire

- ▶ **Modélisation de la Trajectoire d'un Patient**
- ▶ Problème Partiellement Observé et Modèle Inconnu
- ▶ Apprentissage par Renforcement
- ▶ Conclusion et Perspectives



# Le modèle PDMP<sup>1</sup> contrôlé

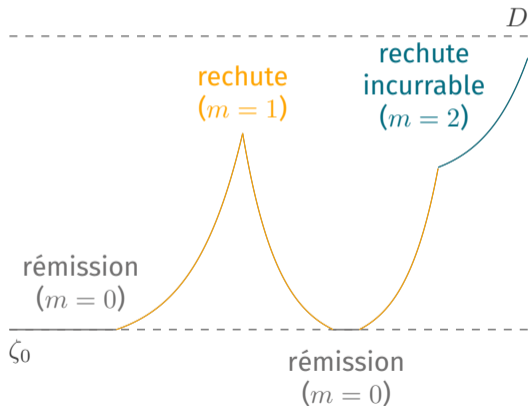
On passe aléatoirement d'un régime déterministe à un autre.



<sup>1</sup>Processus Markovien Déterministe par Morceaux

# Le modèle PDMP<sup>1</sup> contrôlé

On passe aléatoirement d'un régime déterministe à un autre.



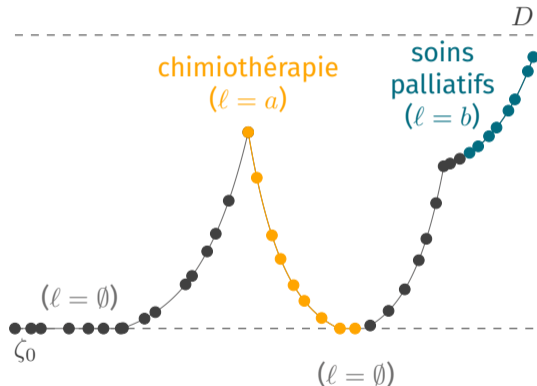
Soit l'état du patient  $x = (m, k, \zeta, u)$ :

- $m$  le régime;
- $k$  le nombre de rechute;
- $\zeta$  le biomarqueur;
- $u$  le temps depuis le dernier saut.

<sup>1</sup>Processus Markovien Déterministe par Morceaux

# Le modèle PDMP<sup>1</sup> contrôlé

On passe aléatoirement d'un régime déterministe à un autre.



Soit l'état du patient  $x = (m, k, \zeta, u)$ :

- $m$  le régime;
- $k$  le nombre de rechute;
- $\zeta$  le biomarqueur;
- $u$  le temps depuis le dernier saut.

Soit  $d$  la **décision** telle que:  $d = (\ell, r)$ :

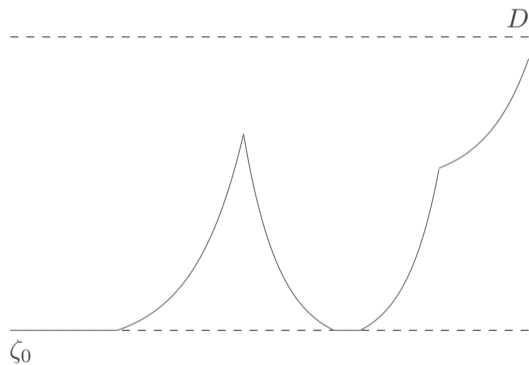
- $\ell$  le traitement;
- $r$  le temps avant la prochaine visite.

<sup>1</sup>Processus Markovien Déterministe par Morceaux



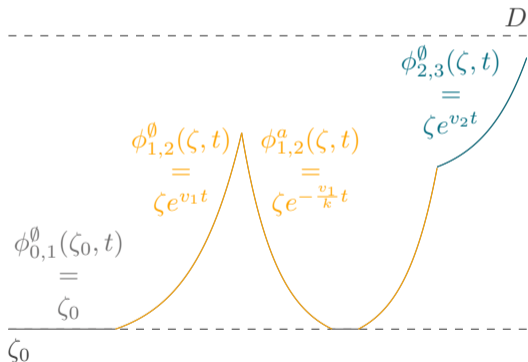
# Caractérisation d'un PDMP

Un PDMP se définit par trois caractéristiques locales.



# Caractérisation d'un PDMP

Un PDMP se définit par trois caractéristiques locales.



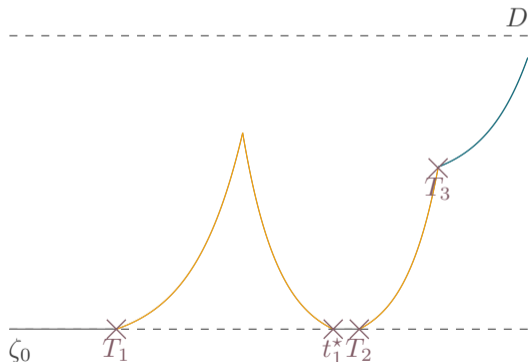
## Le flot

Description de la partie déterministe du processus.

$$\Phi^\ell(x, t) = (m, k, \phi_{m,k}^\ell(\zeta, t), u + t)$$

# Caractérisation d'un PDMP

Un PDMP se définit par trois caractéristiques locales.



## L'intensité de saut

Description des mécanismes de saut du processus.

- Saut à la frontière (déterministe)

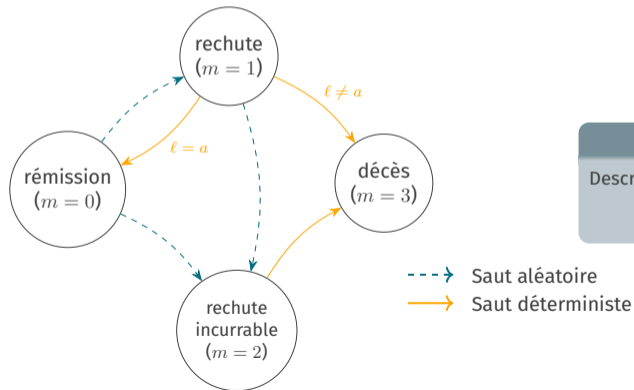
$$t^*(x) = t_m^{\ell^*}(\zeta) = \inf\{t > 0 : \phi_{m,k}^{\ell}(\zeta, t) \in \{\zeta_0, D\}\}$$

- Saut aléatoire

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\int_0^t \lambda_m^{\ell}(\Phi^{\ell}(x,s)) ds}$$

# Caractérisation d'un PDMP

Un PDMP se définit par trois caractéristiques locales.



## Le noyau

Description de l'état du processus après chaque saut.

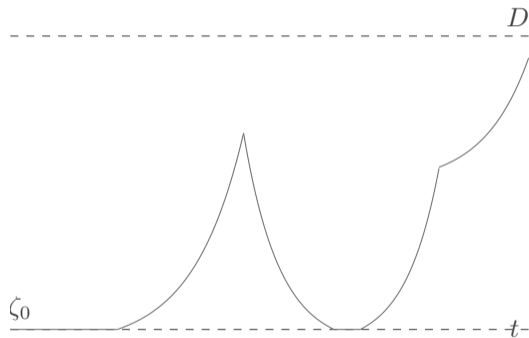
$$\mathbb{P}(X' \in A | X = x) = \int_A Q_m^d(\Phi^\ell(x, T), dx')$$

# Sommaire

- ▶ Modélisation de la Trajectoire d'un Patient
- ▶ **Problème Partiellement Observé et Modèle Inconnu**
- ▶ Apprentissage par Renforcement
- ▶ Conclusion et Perspectives

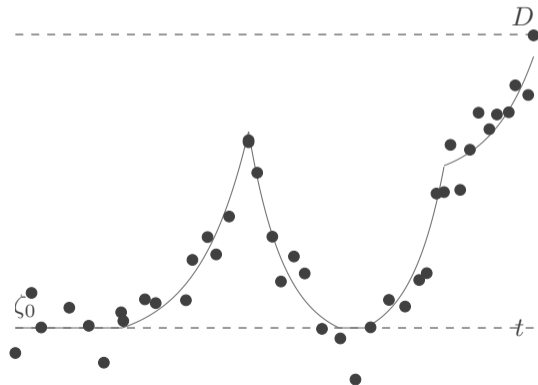


# Un processus partiellement observé



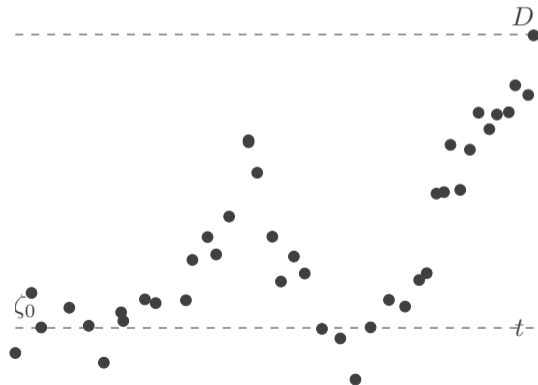
# Un processus partiellement observé

L'état de santé du patient n'est **pas observé** et les mesures sont **bruitées**.  
De plus, les données sont obtenues en **temps discret**.  
De plus, les données sont obtenues en **temps discret**.



# Un processus partiellement observé

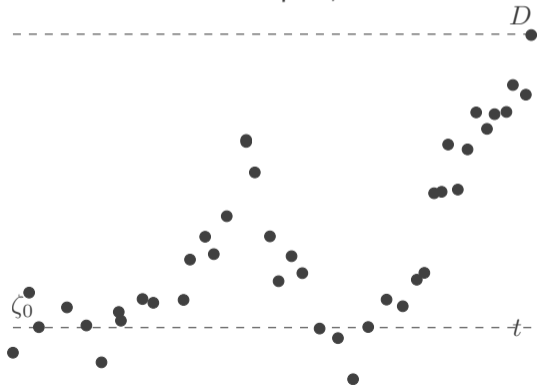
L'état de santé du patient n'est **pas observé** et les mesures sont **bruitées**.  
De plus, les données sont obtenues en **temps discret**.  
De plus, les données sont obtenues en **temps discret**.





# Un processus partiellement observé

L'état de santé du patient n'est **pas observé** et les mesures sont **bruitées**.  
De plus, les données sont obtenues en **temps discret**.  
De plus, les données sont obtenues en **temps discret**.

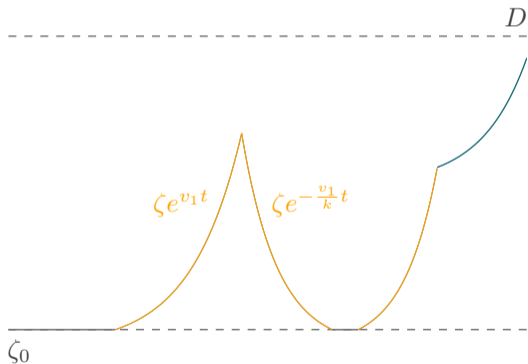


Il y a des **contraintes** dans les décisions:

- Une chimiothérapie dure 45 jours au minimum;
- La date du prochain rendez-vous ne peut dépasser la date de suivi;
- Un mort ne reçoit pas de traitement.

# Un modèle partiellement connu

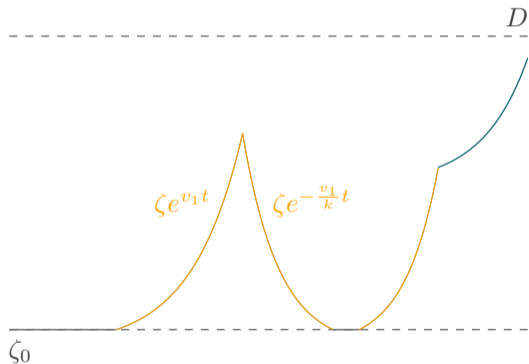
On ne connaît pas le paramètre de pente  $v_1$  de la maladie.



Hypothèse:  
 $v_1 \sim \text{log-normale}(\mu, \sigma^{-2}).$

# Un modèle partiellement connu

On ne connaît pas le paramètre de pente  $v_1$  de la maladie.



Hypothèse:

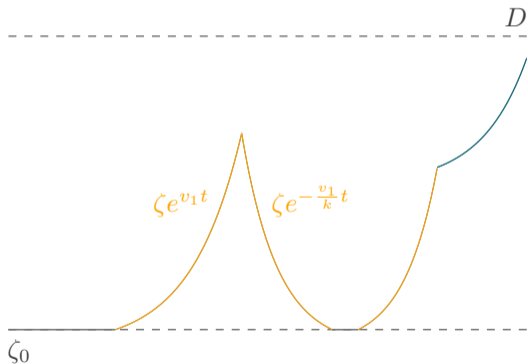
$$v_1 \sim \text{log-normale}(\mu, \sigma^{-2}).$$

Inférence bayésienne:

$$(\mu, \sigma^{-2}) \sim \text{gamma-log-normale}(\alpha, \beta, \kappa, \nu).$$

# Un modèle partiellement connu

On ne connaît pas le paramètre de pente  $v_1$  de la maladie.



Hypothèse:

$$v_1 \sim \text{log-normale}(\mu, \sigma^{-2}).$$

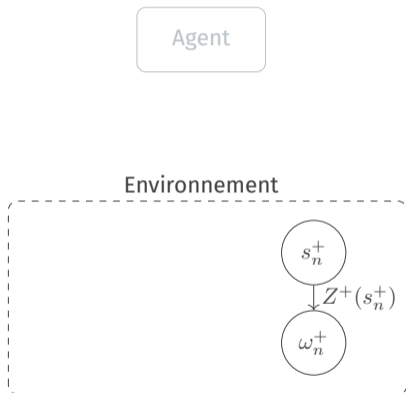
Inférence bayésienne:

$$(\mu, \sigma^{-2}) \sim \text{gamma-log-normale}(\alpha, \beta, \kappa, \nu).$$

Mise à jour des hyperparamètres

- $\alpha_{n+1} = \frac{\beta_n \alpha_n + \log(v_1)}{\beta_n + 1}$
- $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$
- $\kappa_{n+1} = \kappa_n + \frac{1}{2}$
- $\nu_{n+1} = \nu_n + \frac{\beta_n (\log(v_1 - \alpha_n))^2}{2(\beta_n + 1)}$

# Un BAMDP<sup>2</sup> partiellement observé



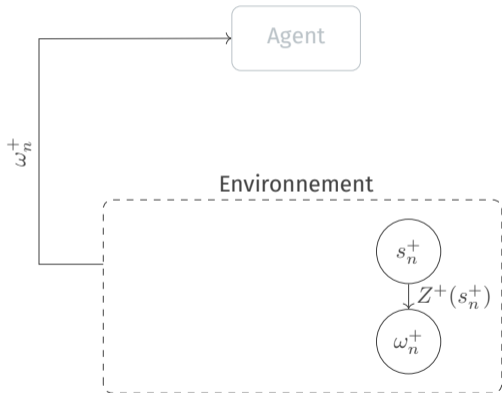
## BAMDP PO

Un BAMDP-PO se définit par un tuple  $(\mathcal{S}^+, \mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{P}^+, \Omega^+, \mathcal{Z}^+, C)$ .

- L'hyper-état du patient  
 $s^+ = (m, k, \zeta, u, \tau, t, \alpha, \beta, \kappa, \nu)$ ;
- Les décisions restent inchangées;
- $\mathcal{K}(\omega) \subseteq D$  l'espace des décisions admissibles selon l'observation  $\omega$ ;
- La probabilité de transition  $\mathcal{P}(s^+, d)(s')$ ;
- Les observations  $\omega^+ = (z, F(\zeta), \tau, t, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\nu})$ ;
- La fonction d'observations  $\mathcal{Z}(s^+)(\omega^+)$ ;
- La fonction de coût  $C : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ .

<sup>2</sup>Processus de décision Markovien Bayes adaptatif

# Un BAMDP<sup>2</sup> partiellement observé



## BAMDP PO

Un BAMDP-PO se définit par un tuple  $(\mathcal{S}^+, \mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{P}^+, \Omega^+, \mathcal{Z}^+, C)$ .

- L'hyper-état du patient  $s^+ = (m, k, \zeta, u, \tau, t, \alpha, \beta, \kappa, \nu)$ ;
- Les décisions restent inchangées;
- $\mathcal{K}(\omega) \subseteq \mathcal{D}$  l'espace des décisions admissibles selon l'observation  $\omega$ ;
- La probabilité de transition  $\mathcal{P}(s^+, d)(s')$ ;
- **Les observations**  $\omega^+ = (z, F(\zeta), \tau, t, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\nu})$ ;
- **La fonction d'observations**  $\mathcal{Z}(s^+)(\omega^+)$ ;
- La fonction de coût  $C : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ .

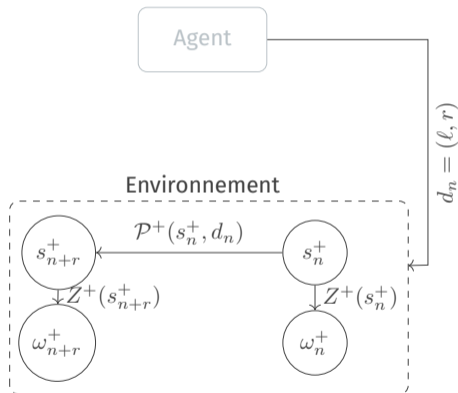
La fonction d'observation est:

$$Z(s_n) = \omega_n = (\mathbb{1}_{m=3}, F(\zeta), \tau, t),$$

avec  $F(\zeta) = \zeta e^\epsilon$  et où  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

<sup>2</sup>Processus de décision Markovien Bayes adaptatif

# Un BAMDP<sup>2</sup> partiellement observé



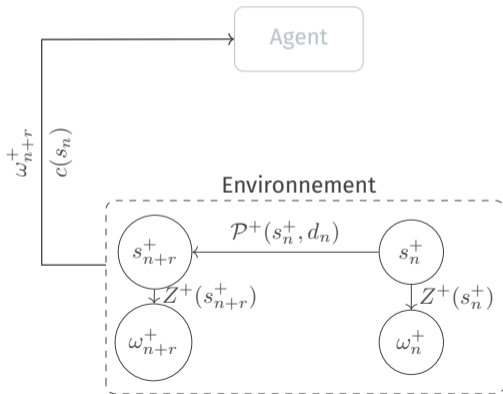
## BAMDP PO

Un BAMDP-PO se définit par un tuple  $(\mathcal{S}^+, \mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{P}^+, \Omega^+, \mathcal{Z}^+, C)$ .

- L'hyper-état du patient  $s^+ = (m, k, \zeta, u, \tau, t, \alpha, \beta, \kappa, \nu)$ ;
- Les décisions restent inchangées;
- $\mathcal{K}(\omega) \subseteq \mathcal{D}$  l'espace des décisions admissibles selon l'observation  $\omega$ ;
- **La probabilité de transition**  $\mathcal{P}(s^+, d)(s')$ ;
- Les observations  $\omega^+ = (z, F(\zeta), \tau, t, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\nu})$ ;
- La fonction d'observations  $\mathcal{Z}(s^+)(\omega^+)$ ;
- La fonction de coût  $C : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ .

<sup>2</sup>Processus de décision Markovien Bayes adaptatif

# Un BAMDP<sup>2</sup> partiellement observé

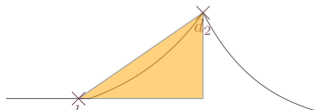


## BAMDP PO

Un BAMDP-PO se définit par un tuple  $(\mathcal{S}^+, \mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{P}^+, \Omega^+, \mathcal{Z}^+, C)$ .

- L'hyper-état du patient  $s^+ = (m, k, \zeta, u, \tau, t, \alpha, \beta, \kappa, \nu)$ ;
- Les décisions restent inchangées;
- $\mathcal{K}(\omega) \subseteq \mathcal{D}$  l'espace des décisions admissibles selon l'observation  $\omega$ ;
- La probabilité de transition  $\mathcal{P}(s^+, d)(s')$ ;
- Les observations  $\omega^+ = (z, F(\zeta), \tau, t, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\nu})$ ;
- La fonction d'observations  $\mathcal{Z}(s^+)(\omega^+)$ ;
- **La fonction de coût**  $C : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$c(s_n) = r \times \frac{1}{2} |\zeta_{n+r} - \zeta_0| (+ \dots)$$





# Sommaire

- ▶ Modélisation de la Trajectoire d'un Patient
- ▶ Problème Partiellement Observé et Modèle Inconnu
- ▶ **Apprentissage par Renforcement**
- ▶ Conclusion et Perspectives



# Introduction à l'apprentissage par renforcement

Objectif:

Identifier une **politique**  $\pi : S \rightarrow A$  qui **minimise les coûts** le long d'une trajectoire

# Introduction à l'apprentissage par renforcement

## Objectif:

Identifier une **politique**  $\pi : S \rightarrow A$  qui **minimise les coûts** le long d'une trajectoire

Critère d'optimisation

$$V(\pi, s) = \mathbb{E}_s^\pi \left[ \sum_{n=0}^{N-1} c(S_n, d_n, S_{n+1}) \right]$$

# Introduction à l'apprentissage par renforcement

## Objectif:

Identifier une **politique**  $\pi : S \rightarrow A$  qui **minimise les coûts** le long d'une trajectoire

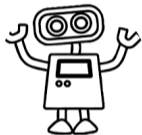
## Critère d'optimisation

$$V(\pi, s) = \mathbb{E}_s^\pi \left[ \sum_{n=0}^{N-1} c(S_n, d_n, S_{n+1}) \right]$$

## Le problème d'optimisation

Soit  $\pi^*$  la politique optimale tel que :  $V^*(s) = \min_{\pi \in \Pi} V(\pi, s)$

# Introduction à l'apprentissage par renforcement



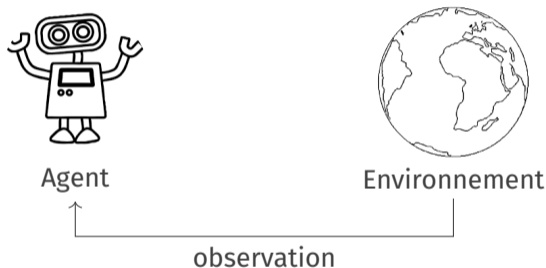
Agent



Environnement

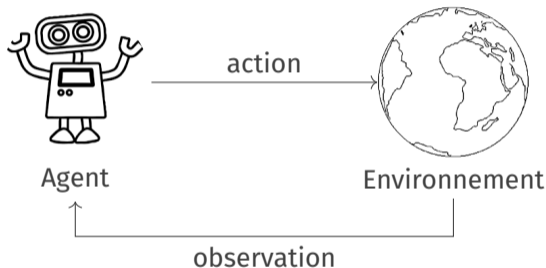
L'objectif est d'**apprendre les actions** à mener en fonction des expériences passées et des coûts perçus.

# Introduction à l'apprentissage par renforcement



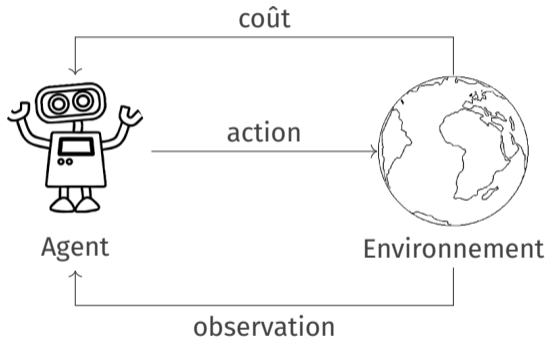
L'objectif est d'**apprendre les actions** à mener en fonction des expériences passées et des coûts perçus.

# Introduction à l'apprentissage par renforcement



L'objectif est d'**apprendre les actions** à mener en fonction des expériences passées et des coûts perçus.

# Introduction à l'apprentissage par renforcement



L'objectif est d'**apprendre les actions** à mener en fonction des expériences passées et des coûts perçus.



# Pour un MDP partiellement observé

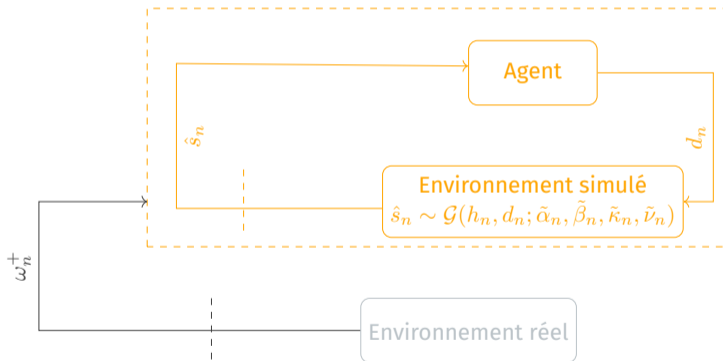
Le problème d'optimisation

Soit  $h_t = (\omega_0, d_0, \omega_1, d_1, \dots, \omega_t)$  l'historique des observations passées:  
$$V^*(h_t) = \min_{\pi \in \Pi} V(\pi, h_t)$$

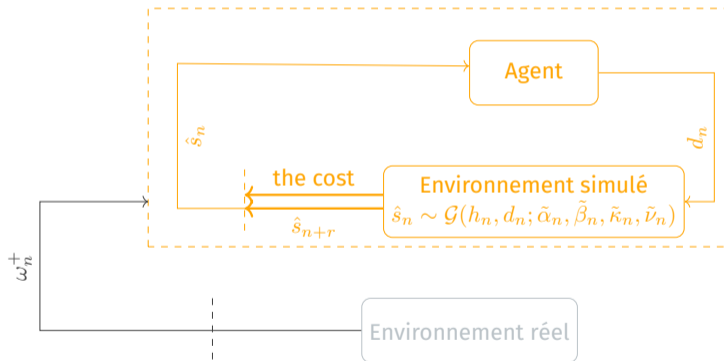
Problème : on a besoin de **beaucoup d'interactions** avec l'environnement

Idée : à partir du **modèle** on **simule un environnement** pour interagir avec lui.

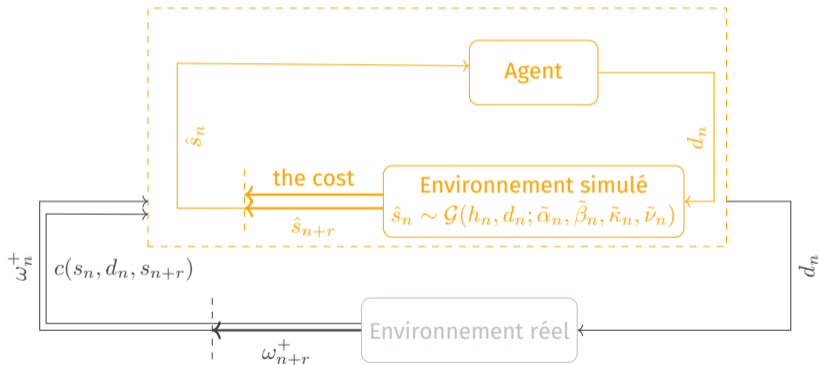
# Une suggestion de résolution



# Une suggestion de résolution



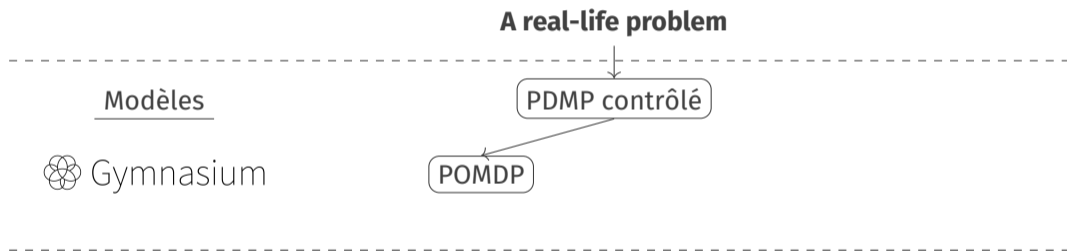
# Une suggestion de résolution



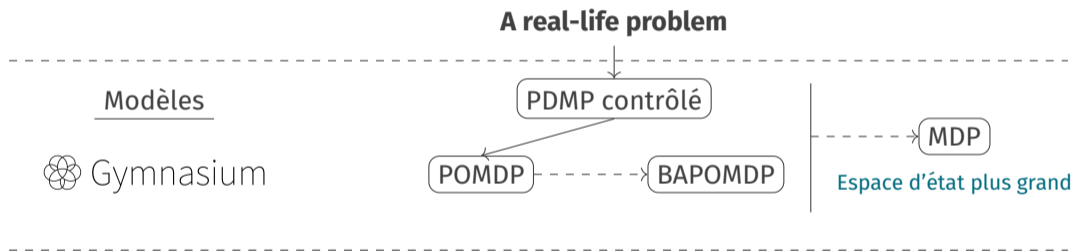
# Sommaire

- ▶ Modélisation de la Trajectoire d'un Patient
- ▶ Problème Partiellement Observé et Modèle Inconnu
- ▶ Apprentissage par Renforcement
- ▶ **Conclusion et Perspectives**

# Conclusion et perspectives

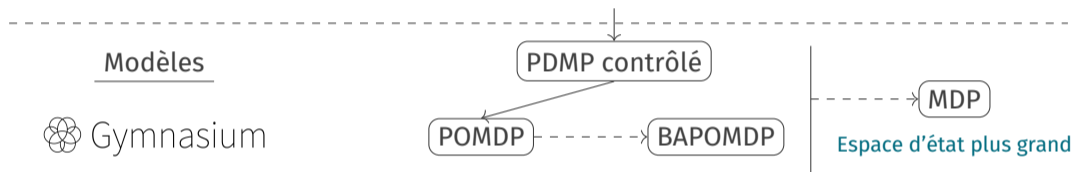


# Conclusion et perspectives



# Conclusion et perspectives

## A real-life problem



## Résolution

La résolution exacte n'est pas applicable.  
Les méthodes par **simulations** doivent être étudiés.

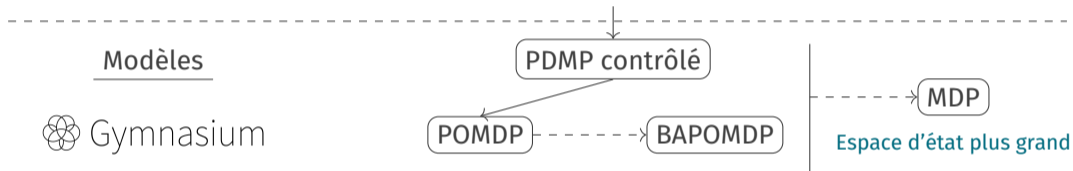


Meritxell Vinyals



# Conclusion et perspectives

A real-life problem



Résolution

La résolution exacte n'est pas applicable.  
Les méthodes par **simulations** doivent être étudiés.



Meritxell Vinyals

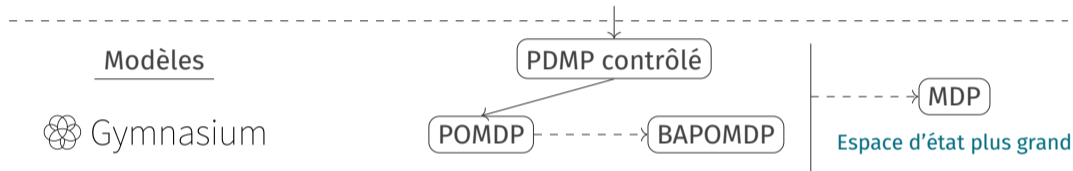
POMCP

BAPOMCP

Deep RL

# Conclusion et perspectives

## A real-life problem



## Résolution

La résolution exacte n'est pas applicable.  
Les méthodes par **simulations** doivent être étudiées.



Meritxell Vinyals

POMCP

BAPOMCP

Deep RL

Merci pour votre attention !