



**HAL**  
open science

# Thermodynamics modelling of internal friction and hysteresis of elastomers

Sabine Cantournet, Rodrigue Desmorat

► **To cite this version:**

Sabine Cantournet, Rodrigue Desmorat. Thermodynamics modelling of internal friction and hysteresis of elastomers. *Comptes Rendus. Mécanique*, 2003, 331 (4), pp.265-270. 10.1016/S1631-0721(03)00038-X . hal-04545656

**HAL Id: hal-04545656**

**<https://hal.science/hal-04545656>**

Submitted on 14 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 265–270



# Modélisation thermodynamique du frottement interne et de l'hystérésis d'un élastomère

Sabine Cantournet, Rodrigue Desmorat

*Laboratoire de modélisation et mécanique des structures, UPMC, FRE 2505 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie,  
8, rue du Capitaine-Scott, 75015 Paris, France*

Reçu le 10 octobre 2002 ; accepté après révision le 21 janvier 2003

Présenté par Georges Duvaut

---

## Résumé

L'étude de la structure physique des élastomères chargés nous permet d'identifier les variables d'état nécessaires à la modélisation thermodynamique des élastomères. Nous construisons alors un potentiel thermodynamique (écrit en grandes déformations et en 3D) qui rend compte de la non linéarité du comportement, de l'hystérésis indépendant du temps et de la vitesse de chargement, de l'effet Mullins, ce sans introduire de l'endommagement. Le modèle peut être couplé à l'endommagement pour le calcul des conditions de ruines sous chargement monotone ou de fatigue. *Pour citer cet article : S. Cantournet, R. Desmorat, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Thermodynamics modelling of internal friction and hysteresis of elastomers.** The study of the physical structure of filled elastomers makes us able to identify the state variables needed to model the behavior of elastomeric materials. We build a thermodynamics potential (written for finite strains and in 3D) which accounts for the nonlinearity of the behavior, for a hysteresis independent of the time and of the loading rate and for Mullins effect, this without introducing damage. The model can be coupled with damage to predict the crack initiation conditions under monotonic and/or cyclic loading. *To cite this article: S. Cantournet, R. Desmorat, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

*Mots-clés :* Mécanique des solides numérique ; Élastomères ; Hystérésis ; Frottement interne ; Grandes déformations

*Keywords:* Computational solid mechanics; Elastomer; Hysteresis; Internal slipage; Finite strains

---

## Abridged English version

Several studies propose to model hysteresis of elastomeric materials by introducing viscosity [1] or damage [2] or both of them. However, the study of the micro-structure of elastomeric materials [3–5] allows one to highlight

---

Adresses e-mail : [cantour@ccr.jussieu.fr](mailto:cantour@ccr.jussieu.fr) (S. Cantournet), [desmorat@ccr.jussieu.fr](mailto:desmorat@ccr.jussieu.fr) (R. Desmorat).

1631-0721/03/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/S1631-0721(03)00038-X

the existence of a time independent hysteresis and then of a nonviscous internal friction. Several models for the representation of hysteresis loops have been proposed in small deformations [6–8], and their common expression for the thermodynamics potentiel has the general form (1) function of states variables  $\alpha$  and  $\beta$  which represent respectively the internal sliding and the inelastic deformation of the material due to friction.

To model the hysteresis and the non viscous internal friction in the framework of large deformations, the idea is to split the free energy into three terms: an energy  $W_1$  of a hyperelastic type, function of transformation gradient  $\underline{F}$ , an energy  $W_2$  of a hyperelastic type with inelastic deformation  $\underline{\beta}$  and an energy stored into the material  $w_s$ , due to friction and function of the internal slip  $\underline{\alpha}$ . The variable  $\underline{\alpha}$ , represents both the solid friction between the long macromolecular chains and the friction between the macromolecular chains and the filler reinforcing particules leading to Mullins effect [9]. The proposed thermodynamics potential  $\rho_0\psi$  is written in its Lagrange form (2) as a function of the Green–Lagrange strain tensor  $\underline{E}$  (associated variable with the second Piola–Kirchhoff stress tensor  $\underline{S}$ ). The state variables are the following couples:  $(\underline{S}, \underline{E})$ ,  $(-\underline{S}_2, \underline{\beta})$  and  $(\underline{X}, \underline{\alpha})$ . The states laws (3)–(5) classically derive from the thermodynamics potential; they define the variable associated with  $\underline{\alpha}$  as the residual micro-stress due to friction  $\underline{X}$ . The expressions for the potentials  $W_1$  and  $W_2$  are chosen according to the existing models such as Mooney’s [10], Hart–Smith’s [11] (or others). For simplicity the energy density  $W_2$  is expressed as a function of  $I_1$  and of the trace of  $\underline{\beta}$  (6), the dependency of  $I_2$ -terms being taken into account within  $W_1$ .

The evolution laws (8), written thanks to the concept of standard generalized materials [12], are derived from a sliding criterion function  $f$  written in terms of the stress  $\underline{S}_2$  and of the residual micro-stress  $\underline{X}$ . The model is non associated when a non vanishing  $\gamma$  material parameters accounting for nonlinear sliding is considered. The final evolution laws (9) for  $\underline{X}$  is similar to Armonstrong–Frederick law for the back stress in standard plasticity. The multiplier of friction  $\dot{\mu}$  is calculated by means of the consistency condition  $f = 0$  and  $\dot{f} = 0$  (Eq. (10)). Finally it can be checked that the intrinsic dissipation  $\mathcal{D} = \underline{S} : \dot{\underline{E}} - \rho_0 \dot{\psi}$  remains always positive.

Fig. 1 represents the response of the model to cyclic uniaxial loading with vanishing minimum applied displacement. The model response with a Harth–Smith density  $W_1$  (12) compares well with the experimental results. The identification of the material parameters is made on case (a) of a cyclic loading with maximum applied elongation  $\lambda = 4$ :  $h_1 = 0.71$  MPa,  $h_2 = 0.0$  MPa,  $h_3 = 500$ ,  $C_{20} = 0.14$  MPa,  $C_x = 0.93$  MPa,  $\sigma_s = 1.16$  MPa and  $\gamma = 0.57$ . As for nonlinear kinematic hardening in plasticity, the nonlinear evolution law (9) with  $\gamma \neq 0$  models the stress softening up to cycle stabilization. To consider the linear evolution law ( $\gamma = 0$ ) leads to a stabilization at the first cycle and to no stress softening.

To conclude, the introduction of viscosity or damage is not necessary to model hysteresis and stress softening (Mullins effect) of elastomeric materials. The proposed formulation is 3D and allows for FE computations of structures under complex loading. An adequate way to derive crack initiation conditions under monotonic and/or cyclic loading will be to use Continuum Damage Mechanics [14] and to model both monotonic and fatigue damage by the introduction of a multiplicative factor  $1 - D$  within the expressions of  $W_1$  and  $W_2$  ( $D$  is the damage variable), by the consideration of the damage evolution law (13), (14) with  $A$  and  $a$  two material parameters.

## 1. Introduction

Le comportement cyclique des élastomères exhibe des boucles d’hystérésis accentuées par l’adjonction de charges renforçantes. D’un point de vue phénoménologique, le comportement de ces matériaux est modélisé soit par un comportement viscoélastique [1] soit à l’aide d’une variable d’endommagement [2] soit par le couplage des deux approches. Cependant, l’étude de la structure physique des élastomères [3–5] permet de mettre en évidence l’existence d’un hystérésis et d’un frottement interne non visqueux important. Nous proposons ici un modèle original (qui pourra être couplé à la viscoélasticité) décrivant le frottement interne et les boucles d’hystérésis en grandes déformations et ce dans un cadre thermodynamique tridimensionnel.

## 2. Potentiel thermodynamique et lois d'états

Différents modèles ont été proposés pour rendre compte des boucles d'hystérésis dues au frottement interne dans les matériaux composites [6] ou dans le béton [7] et [8]. L'expression de leur énergie libre peut se mettre sous la forme générale suivante (écrite ici en unidimensionnel,  $\rho\psi$  est l'énergie libre de Helmholtz et  $\varepsilon$  la déformation) :

$$\rho\psi = A_1\varepsilon^2 + A_2(\varepsilon - \beta)^2 + A_3\alpha^2 \quad (1)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des variables internes représentant respectivement le glissement interne dû à la présence de microfissures et la déformation inélastique du matériau. Pour ces modèles, les coefficients  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  sont fonctions d'une variable d'endommagement et le terme  $A_3\alpha^2$  représente l'énergie stockée au sein de l'élément de volume par micro-glissements multiples le long des lèvres des microfissures. Ces glissements sont rendus permanents par l'existence d'un domaine d'adhérence par frottement et par l'existence d'un champ auto-équilibré de micro-contraintes résiduelles.

Pour les élastomères, le formalisme en grandes déformations doit être utilisé. De manière similaire à (1), l'idée est de décomposer le potentiel thermodynamique, écrit sous sa forme Lagrangienne  $\rho_0\psi$ , en trois termes :

- une énergie de type hyperélastique  $W_1$ ,
- une énergie de type hyperélastique  $W_2$  avec déformation inélastique notée  $\underline{\underline{\beta}}$ ,
- l'énergie stockée par glissement  $w_s$  écrite sous forme quadratique, définissant ainsi la variable « glissement interne »  $\underline{\underline{\alpha}}$ . Cette variable représente le glissement avec frottement entre les longues chaînes macromoléculaires, le glissement des chaînes liées sur les particules de charges renforçantes et le glissement entre les particules de charges [9]. Soit donc :

$$\rho_0\psi = W_1(\underline{\underline{E}}) + W_2(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\beta}}) + \frac{1}{2}C_x \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}} \quad (2)$$

Les variables d'état sont les couples  $(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{E}})$ , second tenseur de Piola–Kirchhoff associé à la déformation de Green Lagrange,  $(-\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{\beta}})$  et  $(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{\alpha}})$ .  $C_x$  est un paramètre « matériau ». Les lois d'état dérivent classiquement du potentiel thermodynamique,

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\partial W_1}{\partial \underline{\underline{E}}} + \frac{\partial W_2}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad (3)$$

$$\underline{\underline{S}}_2 = -\frac{\partial W_2}{\partial \underline{\underline{\beta}}} = \frac{\partial W_2}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad (4)$$

$$\underline{\underline{X}} = C_x \underline{\underline{\alpha}} \quad (5)$$

Elles définissent la contrainte  $\underline{\underline{S}}_2$  et la contrainte résiduelle  $\underline{\underline{X}}$ . Le tenseur des contraintes est en fait la somme  $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_1 + \underline{\underline{S}}_2$  où  $\underline{\underline{S}}_1$  représente la contrainte moyenne des chaînes subissant peu de frottement (comportement hyperélastique) et  $\underline{\underline{S}}_2$  la contrainte moyenne des chaînes subissant du frottement (existence d'une partie inélastique). L'expression de la densité d'énergie  $W_1$  sera déterminée à partir des modèles existants (Mooney [10], Hart–Smith [11] ou autres), fonction pour les matériaux isotropes des invariants principaux  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  du tenseurs de dilatations  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}\underline{\underline{F}}^T$ . Pour la densité d'énergie  $W_2$ , l'idée est d'obtenir qu'à  $\underline{\underline{\beta}}$  donné  $W_2$  demeure une fonction des invariants de  $\underline{\underline{C}}$ . Le choix introduisant le minimum de paramètres « matériau » est alors une densité d'énergie quadratique, fonction du premier invariant  $I_1$  seulement, qui correspond au second terme du développement de Mooney–Rivlin :

$$W_2 = 4C_{20}(\text{tr}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\beta}}))^2 = C_{20}(I_1 - 2\text{tr}\underline{\underline{\beta}} - 3)^2 \quad (6)$$

La dépendance en  $I_2$  est supposée être décrite par un choix approprié de  $W_1$  et  $C_{20}$  (paramètre « matériau »).

### 3. Lois d'évolution pour le frottement interne

Les lois d'évolution des variables internes  $V = \{\underline{\beta}, \underline{\alpha}\}$  sont écrites dans le cadre des matériaux standards généralisés [12]. On définit un seuil de frottement  $\sigma_s$  homogène à une contrainte et une fonction critère  $f = \|\underline{S}_2 - \underline{X}\| - \sigma_s$  avec  $\|\underline{S}_2 - \underline{X}\| = \sqrt{(\underline{S}_2 - \underline{X}) : (\underline{S}_2 - \underline{X})}$  de sorte que :

- lorsque  $f < 0$  il n'y a pas de frottement interne (pas d'irréversibilité); le comportement est purement hyper-élastique,
- le frottement interne est gouverné par la condition de consistance  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ .

Afin de modéliser l'adoucissement cyclique des boucles d'hystérésis, un paramètre supplémentaire noté  $\gamma$  est introduit. Les lois de normalité sont alors écrites non pas sur la fonction seuil  $f$ , mais sur le potentiel  $F$  défini par :

$$F = f + \frac{\gamma}{2C_x} \underline{X} : \underline{X} \quad (7)$$

Le modèle proposé est alors non associé. Un multiplicateur de frottement  $\dot{\mu}$  est introduit et les lois d'évolution s'écrivent :  $\dot{V}_k = -\dot{\mu} \partial F / \partial A_k$ , soit ici avec  $V = \{\underline{\beta}, \underline{\alpha}\}$  et  $A = \{-\underline{S}_2, \underline{X}\}$  :

$$\dot{\underline{\beta}} = \dot{\mu} \frac{\underline{S}_2 - \underline{X}}{\|\underline{S}_2 - \underline{X}\|}, \quad \dot{\underline{\alpha}} = \dot{\underline{\beta}} - \frac{\gamma}{C_x} \underline{X} \dot{\mu} \quad (8)$$

De la première relation, on déduit que  $\int \dot{\mu} dt = \int \|\dot{\underline{\beta}}\| dt$  est une mesure du glissement cumulé. Couplée à la loi d'état (5), la seconde relation définit une évolution des micro-contraintes  $\underline{X}$  gouvernée par la déformation inélastique  $\underline{\beta}$

$$\dot{\underline{X}} = C_x \dot{\underline{\beta}} - \gamma \underline{X} \|\dot{\underline{\beta}}\| \quad (9)$$

avec terme de rappel  $\gamma \underline{X} \|\dot{\underline{\beta}}\|$ . Cette forme s'apparente à la loi d'Armstrong-Frederick pour les métaux.

Le multiplicateur de frottement se calcule par la condition de consistance  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$  soit :

$$\dot{\mu} = \frac{\underline{n} : \dot{\underline{S}}_2}{C_x - \gamma \underline{n} : \underline{X}} \quad \text{avec } \underline{n} = \frac{\underline{S}_2 - \underline{X}}{\|\underline{S}_2 - \underline{X}\|} \quad (10)$$

Le modèle est non associé lorsque le paramètre  $\gamma$  est non nul, anticipant l'exemple du Paragraphe 4, notons dès à présent que :

- le modèle associé  $\gamma = 0$  suffit pour reproduire les boucles d'hystérésis observées en traction cyclique. Dans ce cas les variables  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$  sont égales et traduisent toutes les deux le glissement interne,
- considérer  $\gamma \neq 0$  permet de rendre compte de l'adoucissement cyclique du matériau (effet Mullins). Dans ce cas les variables  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$  ont des valeurs différentes,  $\underline{\alpha}$  étant alors une mesure « statique » du glissement interne définie via  $w_s = \frac{1}{2} C_x \underline{\alpha} : \underline{\alpha}$ , et  $\underline{\beta}$  étant la mesure « d'évolution » de ce même glissement via  $\dot{\underline{\beta}} = \dot{\underline{\alpha}} + \gamma \underline{\alpha} \dot{\mu}$  (Éq. (8)).

Finalement il est aisé de vérifier la positivité de la dissipation intrinsèque  $\mathcal{D} = \underline{S} : \dot{\underline{E}} - \rho_0 \dot{\psi}$  à partir de la considération des lois d'état (3)–(5) et d'évolution (8) :

$$\mathcal{D} = \|\dot{\underline{\beta}}\| \left( \sigma_s + \frac{\gamma}{C_x} \underline{X} : \underline{X} \right) \geq 0 \quad (11)$$

et de conclure que la dissipation est positive pour tous chargements, y compris les chargements cycliques et/ou non proportionnels.

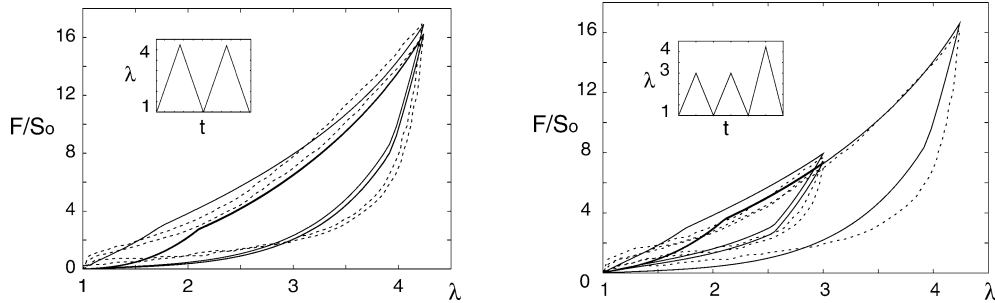


Fig. 1. Traction uniaxiale (SBR renforcé à la silice [13]).

Fig. 1. Uniaxial extension (SBR silica filled rubber).

#### 4. Représentations des boucles d'hystérésis

Sur la Fig. 1 sont tracés les cycles en traction cyclique uniaxiale à déplacements imposés (déplacements minimum nuls). La réponse du modèle avec une densité  $W_1$  de type Harth–Smith

$$W_1 = h_1 \int \exp(h_3(I_1 - 3)^2) dI_1 - 3h_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (12)$$

est comparée aux résultats expérimentaux obtenus pour un SBR chargé. L'identification des paramètres caractéristiques du matériau utilisés est effectuée sur le cas (a) de cycles jusqu'à l'élongation  $\lambda = 4$  :  $h_1 = 1,6$  MPa,  $h_2 = 0,28$  MPa,  $h_3 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $C_{20} = 0,14$  MPa,  $C_x = 0,93$  MPa,  $\sigma_s = 1,16$  MPa et  $\gamma = 0,57$ . Le cas de chargement (b) est ensuite calculé et les résultats comparés avec succès aux résultats expérimentaux, les petits cycles étant correctement reproduits.

Comme pour l'écroutissage cinématique des métaux, considérer la loi d'évolution non linéaire (9) avec  $\gamma \neq 0$  permet de rendre compte de l'adoucissement cyclique observé jusqu'à stabilisation des cycles. Considérer une loi linéaire ( $\gamma = 0$ ) conduit à une stabilisation dès le premier cycle et à aucun adoucissement cyclique.

#### 5. Conclusion

La formulation proposée permet de modéliser les boucles d'hystérésis des élastomères dans un cadre thermodynamique 3D. La présente étude permet de conclure que, contrairement aux idées reçues il n'est pas nécessaire d'introduire une viscosité ou un endommagement pour modéliser ces boucles ainsi que leur adoucissement cyclique (effet Mullins). Le modèle permet le calcul de la réponse d'un matériau ou d'une structure à tout type de chargement. Une application industrielle est le calcul de l'amortissement de structures composites acier-élastomère.

Enfin, le modèle peut facilement être couplé à l'endommagement pour le calcul des conditions de ruines pour une structure soumise à un chargement quelconque :

- en introduisant un terme multiplicatif  $1 - D$  dans les expressions de  $W_1$  et  $W_2$  de sorte que

$$-Y = \frac{\partial W_1 + W_2}{\partial D} \quad (13)$$

soit la variable associée à l'endommagement  $D$ ,

- en considérant la loi d'évolution de l'endommagement

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{A}\right)^a \|\underline{\dot{\beta}}\| \quad (14)$$

qui est une extension de la loi de Lemaitre [14] avec  $A$  et  $a$  deux paramètres « matériau ».

## Références

- [1] R.W. Ogden, D.G. Roxburgh, A pseudo-elastic model for mullins effect in filled rubber, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 455 (1999) 2861–2877.
- [2] C. Miehe, Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic material, *Eur. J. Mech. A Solids* 14 (1995) 697–720.
- [3] L. Mullins, N.R. Tobin, Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers, in: *Proc. 3rd Rubber Technol. Conf.*, Heffer and Sons, London, 1954, pp. 397–412.
- [4] A. Vidal, J.B. Donnet, Carbon black: surface properties and interactions with elastomers, *Adv. Polymer Sci.* 76 (1996) 104–106.
- [5] S. Cantournet, Endommagements et fatigue des élastomères, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, 2002.
- [6] A. Burr, et al., Continuum description of damage in ceramic-matrix composites, *Eur. J. Mech. A Solids* 16 (1) (1997) 53–78.
- [7] D. Halm, A. Dragon, An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials, *Eur. J. Mech. A Solids* 17 (3) (1998) 439–460.
- [8] F. Ragueneau, Fonctionnement dynamique des structures en béton-influence des comportements hystérétiques locaux, Thèse de l'École Normale Supérieure de Cachan, 1999.
- [9] E.M. Dannenberg, The effect of surface chemical interactions on the properties of filler reinforced rubbers, *Rubber Chemistry and Technology* 44 (1975) 440–478.
- [10] M. Mooney, A theory of large elastic deformation, *J. Appl. Phys.* 11 (1940) 582–592.
- [11] L.J. Hart-smith, Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials, *J. Appl. Phys.* 17 (1966) 608–625.
- [12] B. Halphen, N.Q. Son, Sur les matériaux standards généralisés, *J. Méc.* 14 (1975) 39–63.
- [13] P. Heuillet, L. Dugautier, Modélisation du comportement hyperélastique des élastomères compactes, in: *Génie mécanique des caoutchoucs et des élastomères thermoplastiques*, Apollor Impl LRCCP Firtech, 1997, pp. 67–104.
- [14] J.P. Sermage, et al., A multiaxial creep-fatigue under anisothermal conditions, *Fatigue Engrg. Mater. Struct.* 23 (1999) 241–252.