



HAL
open science

Quasi-unilateral conditions in anisotropic elasticity

Rodrigue Desmorat

► **To cite this version:**

Rodrigue Desmorat. Quasi-unilateral conditions in anisotropic elasticity. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 2000, 328, pp.445-450. hal-04545654

HAL Id: hal-04545654

<https://hal.science/hal-04545654>

Submitted on 14 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement

Rodrigue DESMORAT

Laboratoire de modélisation et mécanique des structures, UPMC/ENSAM/ENS-Cachan, UPRESA 8007 du CNRS, 8, rue du Capitaine-Scott, 75015 Paris, France
Courriel : desmorat@ccr.jussieu.fr

(Reçu le 10 décembre 1999, accepté après révision le 5 avril 2000)

Résumé. Un comportement élastique anisotrope différent en traction et en compression est modélisé dans un cadre thermodynamique. La décomposition de Kelvin du tenseur souplesse élastique est utilisée et permet de traiter tout cas de chargement 3D. Le couplage avec l'endommagement est écrit pour des variables d'endommagement tensorielles d'ordre 4 ou d'ordre 2. La formulation proposée assure naturellement la continuité du tenseur des contraintes et du taux de restitution d'énergie. Le cas particulier d'une élasticité isotrope initiale est traité. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

élasticité / endommagement / anisotropie / effet unilatéral

Quasi-unilateral conditions in anisotropic elasticity

Abstract. *A thermodynamic framework is proposed to model anisotropic elasticity different in tension and in compression. Based on Kelvin decomposition of the compliance tensor, it applies to any 3D loading. Coupling with damage is made considering fourth- and second-order damage tensors. The proposed formulation automatically satisfies the continuity of the stress tensor and of the energy release rate tensor. The particular case of initially isotropic materials is exposed. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

elasticity / damage / anisotropy / unilateral effect

Abridged English version

Different behavior in tension and in compression is now a classical feature of damage models. For 3D loadings this is referred to as the quasi-unilateral conditions. See, for instance, [1–3] for initially isotropic materials and [4,5] for composite materials. The elastic anisotropy is usually restricted to orthotropy and the knowledge of the principal directions of the damage is most of the time a necessary preliminary to the definition of the energy release rate (thermodynamic variable associated with the damage variable). In the present note, we expose a general framework which avoids consideration of such restrictions.

A simple way to deal properly with the quasi-unilateral conditions is to expose a Gibbs potential $\rho\psi^*$ which should be continuously differentiated [1]. The elasticity law is then derived as $\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \rho \partial\psi^* / \partial \underline{\underline{\sigma}}$, where $\underline{\underline{\sigma}}$ is the stress tensor and $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ the elastic part of the strain tensor.

Considering anisotropic elasticity, the Kelvin decomposition of the compliance tensor $\underline{\underline{S}}$ defines the 4th-order tensor $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^{1/2}$ (equation (3)). Two compliances $\underline{\underline{S}}^+$ and $\underline{\underline{S}}^-$ (defining $\underline{\underline{A}}^+$ and $\underline{\underline{A}}^-$) are introduced

Note présentée par Georges DUVAUT.

into Gibbs potential (4). Anisotropic elasticity form (6) models properly the quasi-unilateral conditions. If damage induces a loss of stiffness, the dissipation due to damage is given by *equation* (7). It naturally takes into account the possible rotations of the damage principal directions.

If damage is represented by the fourth-order tensor \underline{D} , we propose a coupling with tensor \underline{A} which defines the damaged elasticity by means of tensor $\underline{\tilde{A}} = \underline{H} : \underline{A}$, with $\underline{H} = (\underline{1} - \underline{D})^{-1/2}$ (instead of the classical elasticity/damage coupling $\underline{D} = \underline{1} - \underline{S} : \underline{\tilde{S}}^{-1}$). The proposed solution only needs the Kelvin decomposition for the virgin undamaged material. If the effect of damage is negligible in compression, the elasticity law is given by *equation* (6) in which $\underline{A}^+ = \underline{\tilde{A}}$, $\underline{A}^- = \underline{A}$. The dissipation due to damage is $\mathcal{D} = \underline{Z} : \underline{\dot{H}}$. The thermodynamic variable \underline{Z} associated with tensor \underline{H} is continuous (*equation* (8)).

A more practical case is to consider damage represented by a second order tensor \underline{D} (or in an equivalent manner by $\underline{H} = (\underline{1} - \underline{D})^{-1/2}$). For initially anisotropic elasticity, quasi-unilateral conditions are given by Gibbs potential (11) with the particular definition (12) of the ‘positive part’ \underline{X}_+ . The dissipation due to damage is $\mathcal{D} = \text{Tr}(\underline{Z} \dot{\underline{H}})$ with \underline{Z} (associated variable with \underline{H}) continuous (*equation* (14)). For initially isotropic materials with induced orthotropic damage [8], Gibbs free enthalpy is (15) and $\mathcal{D} = \text{Tr}(\underline{Z} \dot{\underline{H}}) + Y_H \dot{d}_H$, where \underline{Z} and Y_H are given by *equation* (16) and are continuous.

The thermodynamic framework is well adapted to take into account the quasi-unilateral conditions with a proper definition of Gibbs potential. The expressions proposed in the present note for anisotropic/isotropic elasticity coupled or not with anisotropic/orthotropic damage automatically lead to a potential which can be continuously differentiated. The stress tensor thus derived is therefore continuous. If damage is considered, this also means that the possible rotations of the damage principal directions are naturally taken into account in the definition of the energy release rate tensor.

1. Introduction

La notion de comportement différent entre la traction et la compression est classique en mécanique de l’endommagement, pour les matériaux initialement isotropes [1–3] ou pour les matériaux composites [4,5]. Elle traduit l’effet de la refermeture partielle des micro-fissures au sein de l’élément de volume sur la rigidité élastique, effet encore appelé « conditions quasi-unilatérales ». Lorsque le matériau est initialement anisotrope et l’endommagement représenté par une variable tensorielle, les modèles proposés sont complexes [5], la difficulté première étant de vérifier la continuité de la relation contraintes–déformations.

Nous présentons une méthodologie pour modéliser dans un cadre thermodynamique la différence de comportement en traction et en compression et son extension à des chargements 3D. La clef du problème consiste à faire apparaître des termes quadratiques dans l’expression du potentiel thermodynamique $\rho\psi^*$ afin que celui-ci soit différentiable (potentiel dont dérive la loi d’élasticité $\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \rho \partial\psi^* / \partial\underline{\underline{\sigma}}$, où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ la partie élastique des déformations).

Par rapport aux études antérieures, deux nouveautés sont introduites : la première est que l’on traite le cas de l’anisotropie la plus générale, du point de vue de l’élasticité comme du point de vue de l’endommagement ; la seconde est que, lorsque l’endommagement est considéré, ses directions principales ne sont pas postulées a priori. La modélisation proposée permet d’assurer la continuité de la variable tensorielle taux de restitution d’énergie (en plus de celle du tenseur des contraintes).

2. Élasticité anisotrope

L’élasticité macroscopique peut être le cadre de comportements différents en traction et en compression (par exemple dus à une dégradation du matériau ou encore au micro-flambage des fibres longues au sein d’un matériau composite en compression). Afin de les modéliser, l’idée est de faire apparaître des termes

quadratiques dans le potentiel de Gibbs, ce qui consiste à réécrire ce dernier sous la forme :

$$\rho\psi^* = \frac{1}{2}\underline{\sigma} : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{A}} : \underline{\sigma}) : (\underline{\underline{A}} : \underline{\sigma}) \quad (1)$$

Cette réécriture est rendue possible par l'utilisation de la décomposition de Kelvin du tenseur de souplesse $\underline{\underline{S}}$ qui introduit les 6 valeurs propres ou modules de Kelvin $s^I > 0$ et les tenseurs propres associés $\underline{\underline{S}}^I$ (d'ordre 2, de norme unité) :

$$\underline{\underline{S}} = \sum_{I=1}^6 s^I \underline{\underline{S}}^I \otimes \underline{\underline{S}}^I, \quad \underline{\underline{S}}^I : \underline{\underline{S}}^J = \delta_{IJ} \quad (2)$$

Le tenseur $\underline{\underline{A}}$ est défini par :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^{1/2} = \sum_{I=1}^6 \sqrt{s^I} \underline{\underline{S}}^I \otimes \underline{\underline{S}}^I \quad (3)$$

et c'est grâce aux symétries de $\underline{\underline{S}}$ (donc de $\underline{\underline{A}}$) que l'on a la propriété remarquable (1). On trouvera dans [6] les expressions des modules et des modes de Kelvin pour les principales symétries élastiques.

On introduit ensuite deux tenseurs d'élasticité $\underline{\underline{S}}^+$ et $\underline{\underline{S}}^-$. Les tenseurs $\underline{\underline{A}}^+$ et $\underline{\underline{A}}^-$ correspondants sont obtenus par la décomposition de Kelvin (3). Une écriture générale modélisant un comportement différent en traction et en compression (et son extension au 3D) est alors :

$$\rho\psi^* = \frac{1}{2}\langle \underline{\underline{A}}^+ : \underline{\sigma} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{A}}^+ : \underline{\sigma} \rangle_+ + \frac{1}{2}\langle \underline{\underline{A}}^- : \underline{\sigma} \rangle_- : \langle \underline{\underline{A}}^- : \underline{\sigma} \rangle_- \quad (4)$$

dont la différentielle existe et est continue :

$$\rho d\psi^* = \langle \underline{\underline{A}}^+ : \underline{\sigma} \rangle_+ : (\underline{\underline{A}}^+ : d\underline{\sigma} + d\underline{\underline{A}}^+ : \underline{\sigma}) + \langle \underline{\underline{A}}^- : \underline{\sigma} \rangle_- : (\underline{\underline{A}}^- : d\underline{\sigma} + d\underline{\underline{A}}^- : \underline{\sigma}) \quad (5)$$

où $\langle \cdot \rangle_+$ désigne la partie positive au sens des valeurs principales, $\langle \cdot \rangle_-$ la partie négative. L'équation précédente conduit à la loi d'élasticité

$$\underline{\underline{\epsilon}}^e = \underline{\underline{A}}^+ : \langle \underline{\underline{A}}^+ : \underline{\sigma} \rangle_+ + \underline{\underline{A}}^- : \langle \underline{\underline{A}}^- : \underline{\sigma} \rangle_- \quad (6)$$

On a conservé dans l'équation (5) les termes en $d\underline{\underline{A}}$ qui traduisent une altération des caractéristiques élastiques, altération due par exemple à l'endommagement du matériau. Dans ce cas, le terme

$$\mathcal{D} = \langle \underline{\underline{A}}^+ : \underline{\sigma} \rangle_+ : \dot{\underline{\underline{A}}}^+ : \underline{\sigma} + \langle \underline{\underline{A}}^- : \underline{\sigma} \rangle_- : \dot{\underline{\underline{A}}}^- : \underline{\sigma} \quad (7)$$

est la dissipation due à l'endommagement. Les rotations possibles des directions principales d'endommagement sont naturellement prises en compte.

3. Endommagement représenté par un tenseur d'ordre 4

Nous nous intéressons à la modélisation de l'influence d'un endommagement sur le comportement élastique, endommagement préexistant ou induit, qui a priori altère les caractéristiques élastiques du matériau en traction comme en compression. L'effet est moindre dans le dernier cas à cause de la refermeture partielle des micro-fissures. Pour simplifier l'écriture, on fait l'hypothèse d'unilatéralité qui entraîne que les tenseurs $\underline{\underline{S}}^-$ et $\underline{\underline{A}}^-$ ne sont pas affectés par l'endommagement : $\underline{\underline{S}}^- = \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{A}}^- = \underline{\underline{A}}$. L'aspect cinétique de la loi d'évolution n'est pas abordé.

En ce qui concerne l'introduction de l'endommagement sous la forme d'un tenseur d'ordre 4, plusieurs choix sont alors possibles : (a) faire porter l'endommagement $\underline{\underline{D}}$ sur le tenseur souplesse du matériau en posant par exemple $\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}})^{-1} : \underline{\underline{S}}$ soit $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}^{-1}$; on obtient alors $\underline{\underline{A}}$ par la décomposition de Kelvin de $\underline{\underline{S}}$, décomposition qui doit être effectuée à chaque incrément de chargement (et d'endommagement), travail laborieux et coûteux ; (b) faire porter l'endommagement directement sur le tenseur $\underline{\underline{A}}$ et poser $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{H}} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}})^{-1/2}$; la décomposition de Kelvin est effectuée une fois pour toute (solution préférée) ; (c) se donner directement la forme du tenseur souplesse endommagé $\underline{\underline{S}}$ comme une fonction de variables (scalaires) d'endommagement ; on ne peut plus vraiment parler d'endommagement tensoriel. Cette dernière solution est très utilisée pour les matériaux composites, elle est justifiée par le fait que les directions principales d'endommagement sont connues a priori.

La loi d'élasticité avec prise en compte des conditions quasi-unilatérales est donnée par l'équation (6) où l'on a posé : $\underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{A}}^- = \underline{\underline{A}}$. Pour le choix (b), si la variable représentant l'endommagement est $\underline{\underline{H}}$, la variable thermodynamique associée $\underline{\underline{Z}}$, la dissipation due à l'endommagement (7) s'écrit $\mathcal{D} = \underline{\underline{Z}} : \underline{\underline{H}}$, avec :

$$\underline{\underline{Z}} = \frac{\partial \rho \psi^*}{\partial \underline{\underline{H}}} = (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}}) : \langle \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ \quad (8)$$

variable dont la continuité est naturellement assurée.

4. Endommagement représenté par un tenseur d'ordre 2

Bien que la représentation de l'endommagement par un tenseur du quatrième ordre constitue le cas le plus général, les mécanismes physiques et l'étude quantitative de l'énergie de déformation [7] montrent qu'un tenseur du second ordre $\underline{\underline{D}}$, représenté dans ce travail sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{H}} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}})^{-1/2} \quad (9)$$

suffit dans la plupart des cas.

Avec la modélisation de l'endommagement par l'équation (9), nous écrivons les conditions quasi-unilatérales dans les deux cas suivants : couplage avec une élasticité anisotrope initiale ; couplage avec une élasticité isotrope initiale (modèle d'endommagement [8]).

4.1. Couplage avec une élasticité anisotrope initiale

On souhaite faire apparaître des termes quadratiques dans l'expression $(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}}) : (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}})$ de l'équation (1), de sorte que :

$$(\underline{\underline{H}} : \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{H}} : \underline{\underline{X}}) = (\underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}}) = \text{Tr}(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}}), \quad \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (10)$$

Le choix d'un endommagement $\underline{\underline{H}}$ de la forme : $\underline{\underline{H}} = \sum h_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ (en base propre) avec la condition $h_{ij}^2 = h_{ii} h_{jj}$ permet de réaliser la condition (10) si l'on pose $\underline{\underline{H}} = \sum h_{ii} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i$, ce qui définit un endommagement orthotrope du second ordre par ses trois valeurs principales.

Une possibilité pour assurer la continuité de la différentielle du potentiel thermodynamique (avec prise en compte des conditions quasi-unilatérales) est d'étendre la procédure [1] à l'orthotropie et de poser :

$$\rho \psi^* = \frac{1}{2} \text{Tr}(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}}_+ \underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}}_+ + \underline{\underline{X}}_- \underline{\underline{X}}_-), \quad \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (11)$$

où la « partie positive » $\underline{\underline{X}}_+$ (différente en général de la partie positive au sens des valeurs propres $\langle \underline{\underline{X}} \rangle_+$) est construite à partir des valeurs propres λ_i et des vecteurs propres \mathbf{T}_i du tenseur du second ordre $(\underline{\underline{H}}(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}}))$.

La différentielle de $\text{Tr}(\underline{H} \underline{X}_+ \underline{H} \underline{X}_+)$ est continue [1] et $d\text{Tr}(\underline{H} \underline{X}_+ \underline{H} \underline{X}_+) = 2\text{Tr}(\underline{H} \underline{X}_+ \underline{H} d\underline{X}_+) + 2\text{Tr}(\underline{X}_+ \underline{H} \underline{X}_+ d\underline{H})$. Les vecteurs propres sont normalisés en posant $\mathbf{T}_i^* \underline{H}^{-1} \mathbf{T}_j = \delta_{ij}$ et :

$$\underline{X}_+ = (\underline{A} : \underline{\sigma})_+ = \sum_{i=1}^3 [\underline{H}^{-1} \mathbf{T}_i] [\underline{H}^{-1} \mathbf{T}_i]^* \langle \lambda_i \rangle_+ \quad (12)$$

En ce qui concerne \underline{X}_- , le même travail est effectué à partir des valeurs propres négatives et des vecteurs propres associés de $(\underline{A} : \underline{\sigma})_-$.

La loi d'élasticité avec prise en compte d'un comportement différent en traction et en compression est finalement :

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{H} (\underline{A} : \underline{\sigma})_+ \underline{H} + (\underline{A} : \underline{\sigma})_- \quad (13)$$

Si \underline{H} représente l'endommagement, la variable thermodynamique associée, notée \underline{Z} , est continue,

$$\underline{Z} = \frac{\partial \rho \psi^*}{\partial \underline{H}} = (\underline{A} : \underline{\sigma})_+ \underline{H} (\underline{A} : \underline{\sigma})_+ \quad (14)$$

La dissipation due à l'endommagement (7) s'écrit alors $\mathcal{D} = \text{Tr}(\underline{Z} \dot{\underline{H}})$.

4.2. Couplage avec une élasticité isotrope initiale

Nous considérons ici le modèle d'endommagement orthotrope induit pour matériaux initialement isotropes (module d'Young E , coefficient de Poisson ν) proposé lors d'une précédente note [8]. Nous en donnons une formulation avec prise en compte des conditions quasi-unilatérales.

L'endommagement est représenté par le tenseur du second ordre \underline{D} (ou \underline{H}) et un endommagement scalaire « hydrostatique » d_H . Le potentiel thermodynamique (différentiable) avec prise en compte d'un comportement différent en traction et en compression est écrit :

$$\rho \psi^* = \frac{1 + \nu}{2E} \text{Tr}(\underline{H} \underline{\sigma}_+^D \underline{H} \underline{\sigma}_+^D + \underline{\sigma}_-^D \underline{\sigma}_-^D) + \frac{(1 - 2\nu)}{6E} \left(\frac{\langle \text{Tr} \underline{\sigma} \rangle_+^2}{1 - d_H} + \langle \text{Tr} \underline{\sigma} \rangle_-^2 \right) \quad (15)$$

où la « partie positive » $\underline{\sigma}_+^D$ est construite à partir des valeurs propres positives et des vecteurs propres de $(\underline{H} \underline{\sigma}^D)$ comme au paragraphe précédent (équation (12)) et $\underline{\sigma}_-^D$ à partir des valeurs propres négatives et des vecteurs propres du déviateur des contraintes $\underline{\sigma}^D$.

Les variables thermodynamiques associées à \underline{H} et à d_H sont notées \underline{Z} et Y_H . Elles sont continues et la dissipation due à l'endommagement s'écrit :

$$\mathcal{D} = \text{Tr}(\underline{Z} \dot{\underline{H}}) + Y_H \dot{d}_H, \quad \underline{Z} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\sigma}_+^D \underline{H} \underline{\sigma}_+^D, \quad Y_H = \frac{(1 - 2\nu)}{6E} \frac{\langle \text{Tr} \underline{\sigma} \rangle_+^2}{(1 - d_H)^2} \quad (16)$$

5. Conclusion

Un formalisme thermodynamique est proposé pour décrire un comportement différent en traction et en compression, dans le cas général de chargements tridimensionnels. Basée sur la décomposition de Kelvin, la formulation s'applique à l'élasticité anisotrope couplée ou non à l'endommagement. Les potentiels thermodynamiques proposés étant différentiables, l'écriture de la dissipation due à l'endommagement est aisée.

La méthodologie s'applique également à une formulation en déformations.

Références bibliographiques

- [1] Ladevèze P., On an anisotropic damage theory, in: J.P. Boehler (Ed.), Proc. CNRS Int. Coll. 351, Failure Criteria of Structured Media, Villars-de-Lans, 1983, pp. 355–363.
- [2] Ladevèze P., Lemaitre J., Damage effective stress in quasi unilateral conditions, in: 16th Internat. Congr. Theor. Appl. Mech., Lyngby, Denmark, 1984.
- [3] Dragon A., Halm D., Modélisation de l'endommagement par mésolfissuration: comportement unilatéral et anisotropie induite, C. R. Acad. Sci. Sér. Iib 322 (1996) 275–282.
- [4] Ladevèze P., Modeling and simulation of the mechanical behavior of CMCs, in: A.G. Evans, R. Naslain (Eds.), High Temperature Ceramic-Matrix Composite, Ceramic Transaction, Vol. 57, 1995, pp. 53–64.
- [5] Chaboche J.L., Lesné O., Pottier T., Continuum damage mechanics of composites: toward a unified approach, in: Ju Voyiadjis, Chaboche (Eds.), Damage Mechanics in Engineering Materials, Elsevier, 1998, pp. 3–26.
- [6] Mehrabadi M.M., Cowin S.C., Eigentensors of linear anisotropic elastic materials, Quart. J. Mech. Appl. Mech. 43 (1990) 15–41.
- [7] Kachanov M., Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts, Appl. Mech. Rev. 45 (1992) 304.
- [8] Lemaitre J., Desmorat R., Sauzay M., Loi d'endommagement anisotrope, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib (1999) 1231–1236.