HAL open science

Evolution law for anisotropic damage

Jean Lemaitre, Rodrigue Desmorat, Maxime Sauzay

To cite this version:

Jean Lemaitre, Rodrigue Desmorat, Maxime Sauzay. Evolution law for anisotropic damage. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 1999, 327, pp.1231-1236. hal-04545648

HAL Id: hal-04545648

https://hal.science/hal-04545648

Submitted on 14 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série II *b*, p. 1231–1236, 1999
Mécanique des solides et des structures/*Mechanics of solids and structures*

Loi d'évolution de l'endommagement anisotrope

Jean LEMAITRE[a], Rodrigue DESMORAT[a,b], Maxime SAUZAY[a,c]

[a] Laboratoire de mécanique et technologie, 61, avenue du Président-Wilson, 94235 Cachan cedex, France
[b] Laboratoire de modélisation et mécanique des structures, 8, rue du Capitaine-Scott, 75015 Paris, France
[c] Laboratoire d'élaboration et de développement des produits plats, SOLLAC, 17, avenue des Tilleuls, 57190 Florange, France

(Reçu le 27 janvier 1999, accepté après révision le 15 juin 1999)

Résumé. Une formulation de l'endommagement anisotrope est établie dans le cadre du principe d'équivalence en déformation. La variable d'endommagement est toujours liée à la densité surfacique des micro-fissures et micro-cavités et est représentée par un tenseur du second ordre. Le couplage de l'endommagement avec l'élasticité est écrit tensoriellement sur la partie déviatorique et scalairement par sa trace sur la partie hydrostatique. La loi d'évolution est une extension de la loi classique d'endommagement isotrope où, cette fois, le tenseur taux d'endommagement est proportionnel à la valeur absolue du tenseur vitesse de déformation plastique en valeurs principales et fonction non linéaire de la densité d'énergie élastique. Elle n'introduit pas de paramètre matériau supplémentaire. Plusieurs séries d'expériences valident cette théorie. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

endommagement / anisotropie / contrainte effective

Evolution law for anisotropic damage

Abstract. *A formulation for anisotropic damage is established in the framework of the principle of strain equivalence. The damage variable is still related to the surface density of microcracks and microvoids, and, as its evolution is governed by the plastic strain, it is represented by a second-order tensor and is orthotropic. The coupling of damage with elasticity is expressed in tensor form on the deviatoric part of the stress tensor and in scalar form by its trace on the hydrostatic part. The kinetic law of damage evolution is an extension of the isotropic case. Here the principal components of the damage rate tensor are proportional to the absolute value of the principal components of the plastic strain rate tensor. The proposed damage evolution law does not introduce any other material parameter. Several series of experiments give a good validation of this theory. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

damage / anisotropy / effective stress

Abridged English Version

The formulation of anisotropic damage is already a long story with several theories not completely satisfactory. The difficulty is to formulate the coupling between elasticity and damage in the framework of an elastic potential [1]. In case of damage represented by a second-order tensor [2], there is as yet

Note présentée par Georges DUVAUT.

1287-4620/99/032701231 © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.
Tous droits réservés

no direct application of the principle of strain equivalence, as for the isotropic case. Replacing this principle by an energetic equivalence solves the mathematical problem [3–6], but the physical definition of the damage as the surface density of microvoids or microcavities is lost.

This incompatibility between the physics and the thermodynamics does not arise if two damage variables are introduced for two mechanisms, as in composite materials damaged by either delamination and matrix cracking [7]. For monolithic materials we consider only one damage mechanism, but we keep the partition of the Gibbs energy into two parts (equation (2)): the part due to the deviatoric stress is affected by the tensorial damage $\underline{D}$, and the part due to the hydrostatic stress is affected by a function of the damage (equation (1)) taken as the trace of $\underline{D}$ multiplied by a new material dependent coefficient η. The elasticity law is then given by (3) with the definition of the effective stress (3).

As for the isotropic case, evaluation of the damage is possible by means of the measurements of the change in the elasticity modulus [8] and the contraction coefficients defined by $\tilde{E}_1 = \sigma_1 / \epsilon_1^e$, $\tilde{\nu}_{12} = -\epsilon_2^e / \epsilon_1^e$, $\tilde{\nu}_{13} = -\epsilon_3^e / \epsilon_1^e$. The corresponding equations for the case of a plane sheet of material are (5)–(6) and (4) for the coefficient η.

A kinetic law of evolution is proposed as the generalisation of the isotropic law (7) of continuous damage [1]. It is derived from the potential of dissipation (8) and written (9) as a function of the strain energy density release rate $\overline{Y} = \frac{1}{2} E_{ijkl}\, \epsilon_{ij}^e\, \epsilon_{kl}^e$. Its main property is that the principal directions of the damage rate coincide with those of the plastic strain rate observed in experiments. Note that $|\dot{\underline{\epsilon}}^p|$ means the absolute value of the principal values. The damage threshold p_D and the critical value of the damage for a mesocrack initiation are defined in accordance with the principle of strain equivalence as a specific value D_c of the maximum principal value of $\underline{D}$.

Some verifications concern the experiments of references [3, 4, 10], and new experiments in which a ductile damage has been induced in plane tension for which $\epsilon_{22}^p = 0$. The elasticity modulus and the contraction coefficient changes have been measured in the directions 0 and 90 degrees relative to the direction of the tension. *Figure 1* shows an example of results where it is seen that the coefficient of hydrostatic sensiblity to damage η may be considered as a constant ($\eta = 2.6$ for AU4G T4). *Figure 2* shows that for the five sets of experiments, the prediction $D_1 = 2D_2$ from the constitutive law in uniaxial tension, due to $|\epsilon_{11}^p| = 2|\epsilon_{22}^p|$, is well fitted (except for copper!), considering the low accuracy of this kind of experiment. For the case of plane tension, *figure 3* shows the predictions concerning the elasticity modulus and the contraction coefficients by the law (9) identified for the material SOLDUR 355 compared to the experimental results ($p_D = 2.5$ %, $s = 4$, $S = 0.57$ MPa with $E = 230$ GPa, $\nu = 0.3$, $\sigma_u = 474$ MPa, $\eta = 2.8$). Here again, considering the high discrepency of the test results, the agreement is satisfactory.

As the identification of the damage evolution law consists in the determination of the same material parameters S, s, p_D and D_c as for the isotropic case (the anisotropic character being given by the plastic strain rate), the proposed law (9) is considered (at least by the authors!) as a usefull one.

---

1. Introduction

L'extension de la théorie de l'endommagement isotrope à l'anisotropie présente une difficulté dans l'écriture du couplage de l'endommagement avec l'élasticité. Dans le cas d'un endommagement isotrope représenté par la variable scalaire D, la notion de contrainte effective associée au principe d'équivalence en déformation, $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (1 - D) = E_{ijkl}\, \epsilon_{kl}^e$ pour l'élasticité, résout le problème [1].

On considère ici un tenseur du second ordre $\underline{D}$ [2]. Dans ces conditions, la généralisation directe des deux précédentes notions ne conduit pas nécessairement à l'existence d'un potentiel élastique [3].

Remplacer l'équivalence en déformation par une équivalence en énergie élastique [3] est une voie qui a été largement suivie [4–6]. Elle résout le problème du potentiel élastique, mais elle fait perdre la définition physique de l'endommagement.

2. Potentiel élastique

Ce problème d'incompatibilité entre la physique et la thermodynamique ne se pose pas si l'on introduit deux variables d'endommagement correspondant à deux mécanismes physiques [7]. Le potentiel élastique écrit sous la forme de l'énergie de Gibbs est décomposé en sa partie d'origine déviatorique, affectée de la variable tensorielle d'endommagement $\underline{D}$, et sa partie d'origine hydrostatique affectée par une autre variable d'endommagement d_H. Pour les matériaux monolithiques, on ne considère ici qu'un seul mécanisme physique d'endommagement, représenté par la seule variable $\underline{D}$. Le couplage hydrostatique est une fonction linéaire de la trace de $\underline{D}$:

$$d_H = \eta D_H, \qquad D_H = \frac{1}{3} D_{kk} \tag{1}$$

E et ν étant le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau élastique linéaire isotrope, vierge de tout dommage, $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \sigma_H \delta_{ij}$ le déviateur du tenseur des contraintes et $\sigma_H = \sigma_{kk}/3$ la contrainte hydrostatique. L'énergie de Gibbs est écrite sous la forme suivante :

$$\rho\psi^* = \frac{1+\nu}{2E} H_{ij}\, \sigma_{jk}^D H_{kl}\, \sigma_{li}^D + \frac{3(1-2\nu)}{2E} \frac{\sigma_H^2}{1-\eta D_H}, \quad \underline{H} = (1-\underline{D})^{-1/2} \tag{2}$$

où η est un coefficient qu'il est nécessaire d'introduire pour représenter correctement les résultats expérimentaux concernant les variations du coefficient de contraction. Il dépend des matériaux en traduisant leur sensibilité à la contrainte hydrostatique. La loi d'élasticité dérive du potentiel de Gibbs :

$$\epsilon_{ij}^e = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1+\nu}{E}\tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\tilde{\sigma}_{kk}\delta_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = (H_{ik}\, \sigma_{kl}^D H_{lj})^D + \frac{\sigma_H}{1-d_H}\delta_{ij} \tag{3}$$

Elle introduit naturellement la notion de contrainte effective symétrique indépendante des paramètres élastiques qui peut être utilisée pour le couplage avec la plasticité.

3. Mesure de l'endommagement

Comme dans le cas isotrope, il est possible de déterminer les valeurs des composantes de l'endommagement à partir des variations des caractéristiques élastiques [8]. Si une traction simple est appliquée dans la direction 1 d'un volume élémentaire représentatif préalablement endommagé dans le repère d'orthotropie (x_1, x_2, x_3), le module d'élasticité endommagé dans la direction 1 et les coefficients de contraction associés (définis par $\tilde{E}_1 = \sigma_1/\epsilon_1^e$, $\tilde{\nu}_{12} = -\epsilon_2^e/\epsilon_1^e$, $\tilde{\nu}_{13} = -\epsilon_3^e/\epsilon_1^e$) s'expriment en fonction de E, ν, η et D_1, D_2, D_3. En répétant l'opération pour les directions 2 et 3, on obtient neuf équations pour déterminer les trois composantes de l'endommagement D_1, D_2, D_3 et le coefficient η. Dans la pratique, il n'est généralement pas possible de réaliser trois éprouvettes dans trois directions orthogonales, mais on

voit que quatre mesures suffisent si l'on connaît les directions d'orthotropie. Pour le cas d'une tôle plane endommagée où seules les directions 1 et 2 sont accessibles à la traction, on a :

$$d_H = \eta D_H = 1 - \frac{\tilde{E}_1}{E}\frac{1-2\nu}{1-2\tilde{\nu}_{12}} \tag{4}$$

$$D_1 = 1 - \frac{\tilde{E}_1}{E}(1+\nu)\left[2 + \tilde{\nu}_{12} - \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_2}\right]^{-1} \approx 1 - \frac{\tilde{E}_1}{E} \tag{5}$$

$$D_2 = 1 - \frac{\tilde{E}_2}{E}(1+\nu)\left[2 - (1-\tilde{\nu}_{12})\frac{\tilde{E}_2}{\tilde{E}_1}\right]^{-1} \approx 1 - \frac{\tilde{E}_1}{E}\frac{1+\nu}{1+3\tilde{\nu}_{12}-2\nu} \tag{6}$$

Avec l'hypothèse d'un endommagement de traction suivant la direction x_1, D_1 et D_2 sont déterminés par (5)–(6), $D_3 = D_2$ et $D_H = (D_1 + 2D_2)/3$. L'équation (4) permet d'identifier le coefficient η.

4. Loi cinétique d'évolution

Dans le cadre des matériaux standard généralisés, on peut formuler une loi qui généralise la loi d'évolution de l'endommagement isotrope pour lequel $D_{ij} = D\delta_{ij}$, $\eta = 1$:

$$\dot{D} = \left(\frac{\overline{Y}}{S}\right)^s \dot{p} \tag{7}$$

$\overline{Y} = \frac{1}{2} E_{ijkl}\, \epsilon^e_{kl}\, \epsilon^e_{ij}$ est le taux de restitution de densité d'énergie, $\dot{p} = \left(\frac{2}{3}\dot{\epsilon}^p_{ij}\dot{\epsilon}^p_{ij}\right)^{1/2}$ est le taux de déformation plastique cumulée, S et s sont deux paramètres caractéristiques de chaque matériau.

Dans le cas anisotrope, le potentiel de dissipation est choisi de la forme :

$$F = f + \left(\frac{\overline{Y}(\underline{\epsilon}^e)}{S}\right)^s Y_{ij}\left|\frac{\mathrm{d}\underline{\epsilon}^p}{\mathrm{d}r}\right|_{ij} \tag{8}$$

où $f = (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{X})_{eq} - R - \sigma_y$ est la fonction de charge de plasticité de von Mises couplée aux écrouissages cinématique $\underline{X}$ et isotrope R (variables associées $\underline{\alpha}$ et r), dont dérive la loi de plasticité couplée à l'endommagement et le multiplicateur plastique $\dot{\lambda} = \dot{r}$ par la condition de consistance $\dot{f} = 0$. La loi d'évolution de l'endommagement est obtenue en écrivant $\dot{D}_{ij} = \dot{\lambda}\partial F/\partial Y_{ij}$ soit :

$$\dot{D}_{ij} = \left(\frac{\overline{Y}}{S}\right)^s |\dot{\underline{\epsilon}}^p|_{ij} \tag{9}$$

la valeur absolue jouant sur les valeurs principales de $\dot{\underline{\epsilon}}^p$. Les directions principales du taux d'endommagement coïncident avec celles du taux de déformation plastique, ce qui est conforme aux observations expérimentales d'un endommagement gouverné par la plasticité. Il faut ajouter à cette loi un seuil d'endommagement p_D lié à l'énergie stockée [1, 9], l'endommagement critique $D_c = \sup |D_{ij}\, n_j|$ défini, en accord avec le principe d'équivalence en déformation, par la norme du vecteur endommagement $D_{ij}\, n_j$ représentant la densité surfacique de défauts dans le plan de normale $\boldsymbol{n}$.

5. Quelques vérifications

Cinq séries de résultats expérimentaux ont été utilisées pour vérifier que l'endommagement mesuré était conforme à la loi d'évolution proposée et pour montrer que le coefficient d'endommagement hydrostatique η pouvait bien être considéré comme constant.

Il s'agit d'expériences de traction induisant un endommagement ductile au cours desquelles les évolutions du module d'élasticité $\tilde{E}$ et du coefficient de contraction $\tilde{\nu}$ ont été mesurées. Les matériaux concernés sont un alliage léger AU4G T4 [3], un cuivre CUA1 [3], un acier XC 38 [10], un alliage léger 2024 T3 [4], un acier SOLDUR 355. Deux mesures $\tilde{E}_1$ et $\tilde{\nu}_{12}$ ne suffisent évidemment pas pour identifier les composantes principales du tenseur d'endommagement D_1, D_2, D_3 et le coefficient η. Mais on peut profiter de la symétrie de l'essai de traction supposé dans la direction 1 pour écrire $D_3 = D_2$ et utiliser les approximations (5)–(6).

Enfin, η est déterminé par la pente de la meilleure droite lissant les points expérimentaux du graphe d_H fonction de D_H conformément à l'équation (4). À titre d'exemple, la *figure 1* montre l'évolution de D_1 et de D_2 et la valeur de η déterminées d'après les données expérimentales concernant l'AU4G T4.

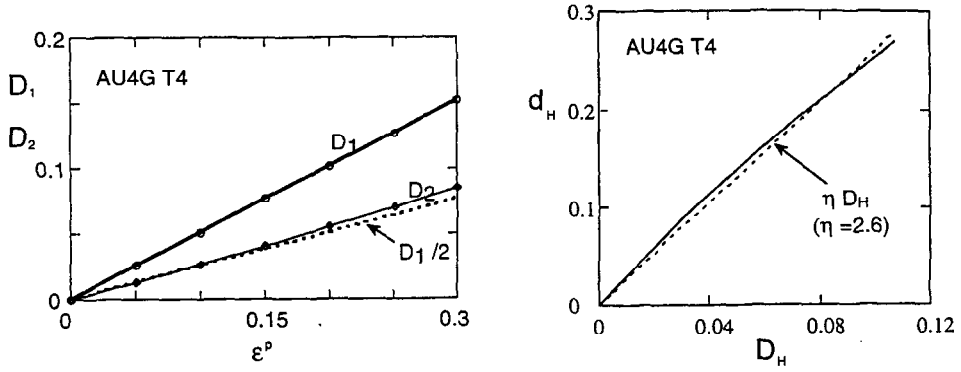

Figure 1. Évolution des endommagements et détermination du coefficient d'endommagement hydrostatique η.

Figure 1. *Evolution of the damages and determination of the hydrostatic damage coefficient* η.

La *figure 2* montre que la plupart des essais (sauf le cuivre !) vérifient $D_1 = 2D_2$ en traction simple, ce qui est précisément le résultat donné par la loi d'évolution de l'endommagement proposée. On peut encore confronter la loi (9) à une autre série d'expériences où, cette fois, le module d'élasticité et le coefficient de contraction d'une éprouvette endommagée en traction plane ont été mesurés dans les directions à 0° et 90° par rapport au repère principal de déformation plastique ou d'endomma-

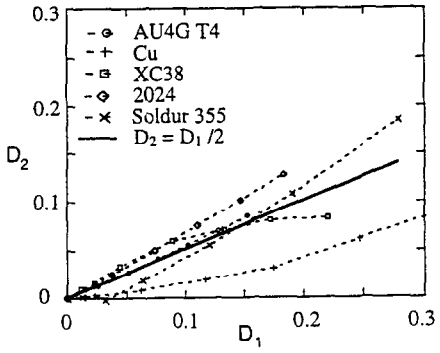

Figure 2. Corrélation entre D_1 et D_2.

Figure 2. *Correlation between* D_1 *and* D_2.

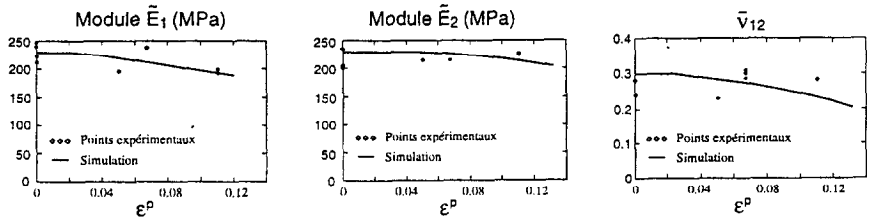

Figure 3. Modules d'élasticité (mesurés et calculés) « endommagés » lors d'une traction plane dans la direction 1 ($\underline{\epsilon}_p = \text{diag}\,[\epsilon_p, 0, -\epsilon_p]$).

Figure 3. *Elasticity modulus (measured and calculated) damaged by a plane tension test.*

gement. La *figure 3* montre un exemple de confrontation entre les modules d'élasticité et coefficients de Poisson mesurés et calculés d'après la loi d'endommagement préalablement identifiée pour l'acier SOLDUR 355 considéré comme parfaitement plastique endommageable pour $p \geq p_D$, soit : $p_D = 2{,}5$ %, $s = 4$, $S = 0{,}57$ MPa avec $E = 230$ GPa, $\nu = 0{,}3$, $\sigma_u = 474$ MPa, $\eta = 2{,}8$. Malgré la dispersion des mesures, on peut considérer que la confrontation est satisfaisante, au moins qualitativement.

6. Conclusion

On dispose donc d'une théorie de l'endommagement anisotrope qui permet l'écriture correcte du couplage avec l'élasticité et la plasticité dans le cadre du principe d'équivalence en déformation. La contrainte effective associée, symétrique, indépendante des paramètres élastiques, dérive naturellement du potentiel thermodynamique.

La loi d'évolution de l'endommagement s'écrit simplement en fonction de la déformation plastique puisque le taux $\underline{\dot{D}}$ est proportionnel à $|\underline{\dot{\epsilon}}^p|$ en valeurs principales au travers de l'énergie élastique, fonction scalaire de la déformation élastique.

De plus, l'identification des paramètres caractéristiques des matériaux se fait par une procédure identique à celle de la loi isotrope.

Références bibliographiques

[1] Lemaitre J., A Course on Damage Mechanics, Springer Verlag, Berlin, 1992.
[2] Murakami S., Ohno N., A constitutive equation of creep damage in polycristalline metals, IUTAM Colloquium Euromech 111, Marienbad, 1978.
[3] Cordebois J.P., Sidoroff F., Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité, J.M.T.A., numéro spécial (1982) 45–60.
[4] Chow C.L., Wang J., An anisotropic theory for continuum damage mechanics, Int. J. Fract. 33 (1987) 3–16.
[5] Murakami S., Mechanical modeling of material damage, J. App. Mech. 55 (1988) 280–286.
[6] Ju J., On energy-based coupled elasto-plastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects, Int. J. Solids Struct. 25(7) (1989) 803–833.
[7] Ladevèze P., On an anisotropic damage theory, in: Boehler J.P. (ed.), Proc. CNRS Int. Coll. 351 Villars-de-Lans, Failure criteria of structured media, 1983, pp. 355–363.
[8] Lemaitre J., Dufailly J., Damage measurements, Eng. Fract. Mech. 28 (5/6) (1987) 643–661.
[9] Sermage J.P., Fatigue multiaxiale à température variable, thèse de doctorat de l'université Paris-6, 1998.
[10] Nouailhas D., Étude expérimentale de l'endommagement de plasticité ductile anisotrope, thèse de doctorat de l'université Paris-6, 1980.