



HAL
open science

Singular fields for a bi-material in anisotropic plane elasticity

Rodrigue Desmorat

► **To cite this version:**

Rodrigue Desmorat. Singular fields for a bi-material in anisotropic plane elasticity. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1996, 322, pp.355-361. hal-04545639

HAL Id: hal-04545639

<https://hal.science/hal-04545639>

Submitted on 15 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Champs singuliers dans un bi-matériau en élasticité plane anisotrope

Rodrigue DESMORAT

Laboratoire de Mécanique de Technologie, ENS de Cachan/CNRS/Université Paris-VI,
61, avenue du Président-Wilson, 94235 Cachan Cedex, France ;
FRAMASOFT+CSI, Tour FRAMATOME, place de la Coupole,
92084 Paris La Défense Cedex, France.

Résumé. On considère un bi-matériau aux constituants élastiques anisotropes. L'expression analytique du champ singulier des contraintes à l'extrémité de leur interface commune est obtenue par utilisation de la méthode des potentiels complexes anisotropes dans le cas de l'anisotropie la plus générale. L'exposant de la singularité est alors la racine du déterminant d'une matrice 2×2 dont on dérive la forme explicite. L'étude d'un assemblage particulier introduit les paramètres de Dundurs. Le problème d'une fissure entre deux matériaux différents est résolu comme un cas particulier de la présente analyse.

Singular fields for a bi-material in anisotropic plane elasticity

Abstract. *Using the anisotropic complex potential method, the singular stress field at a corner of a bi-material is derived in the case of complete anisotropy. The singularity exponent is shown to be a root of a 2×2 matrix determinant. The closed-form solution of the displacement and stress fields is derived. The study of a particular joint uses the Dundurs parameters. The problem of a crack between two dissimilar materials is found as a limiting case of the present analysis.*

Abridged English Version

The power type stress singularities [equation (1)] are studied under the plane anisotropic elasticity assumption for the corner problem of figure 1, where δ is the singularity exponent and h the intensity factor. The strain energy remains finite, therefore $0 < \text{Re}(\delta) < 1$. A numerical method leading to the determination of the singular stress field around the corner has been developed by Leguillon and Sanchez-Palencia (1987).

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

In order to keep the parametric study simple, we use here the anisotropic complex potentials method (Eshelby, 1953; Lekhnitskii, 1963; Stroh, 1958) to look for the closed-form expression of δ and \underline{F} . Stresses $\underline{\sigma}$, displacements \underline{u} and resultant forces on an arc \mathbf{T} in each layer are represented by two complex potentials f_1, f_2 [equations (3)-(4) and (8)-(9)] which depend on the complex coordinates $z_k = x + \mu_k y = r(\cos \theta + \mu_k \sin \theta)$, $k = 1, 2$. The non-conjugated roots of a fourth order polynomial equation μ_k and the matrices \underline{A} and \underline{L} depend only on the coefficients of the Hooke tensor. The equilibrium and compatibility equations and the elasticity law are automatically satisfied. The form of f_k is chosen to be [equations (5)-(7)] and the full determination of the potentials in each layer is obtained by writing the local boundary conditions [equation (10)] of free edges (for $\theta = a$, $\theta = b$) and of perfect bonding at the interface ($\theta = 0$). Stroh (1958) introduced the connection between the anisotropic representation and the isotropic Muskhelishvili's potentials (1963) by means of the positive hermitian matrix $\underline{B} = i \underline{A} \underline{L}^{-1}$. The anisotropic formulation (3-4) is no longer valid for an isotropic material but the use of the \underline{B} -matrices will lead to an expression for δ valid for anisotropy and for isotropy.

\underline{K} is a 8×8 matrix and the vector $\mathbf{V} = [\phi_1^A, \bar{\phi}_1^A, \phi_2^A, \bar{\phi}_2^A, \phi_1^B, \bar{\phi}_1^B, \phi_2^B, \bar{\phi}_2^B]^T$ depend on 8 real constants to be determined by solving an eigenvalue problem: the singularity exponent is the smallest positive root of the nonlinear equation (11), where \underline{A} and $\underline{Y} = \underline{L} \underline{Z}^{-\delta} \underline{L}^{-1} \underline{L} \underline{Z}^{\delta} \underline{L}^{-1}$ are 2×2 matrices. Equation (11) generalizes the isotropic results of Williams (1952) and Bogy (1968). The stresses and displacements are finally derived in equations (3)-(4) and (12) from the eigenmode $\mathbf{v} = (\underline{L} \Phi)_A / h$, so that with equation (2), $\|\text{Re}(\mathbf{v})\| = 1/2 \delta$. For the general corner problem, the modes 1 and 2 classically defined by equation (2) are coupled and the mixity angle $\psi = \tan^{-1} [h_2/h_1] = \tan^{-1} [\text{Re}\{v_1\}/\text{Re}\{v_2\}]$.

The global boundary conditions are taken into account through the intensity factor. The computation of h can be made by using a path-independent integral and comparing the present singular solution to a reference solution (e.g. coming from a FE computation) and using the singular solution of exponent $-\delta$ as an extraction function (Stern, 1976; Babuska, 1984; Leguillon, 1987).

The study of the particular joint represented in figure 2 where A is now isotropic, B orthotropic of direction \mathbf{e}_1 and where $b = -\pi$ allows us to introduce the bi-material hermitian matrices $\underline{H} = \underline{B}_A + \underline{B}_B$ and $\underline{G} = \underline{B}_B - \underline{B}_A$. These hypotheses simplify the expression of \underline{A} (eqs. 13-14). The singularity exponent is a function of the angle a and of only three material parameters reducing to the two mismatch parameters α and β (Dundurs, 1969) if B is isotropic as well. Figure 3 represents the evolution of the exponent δ versus the angle a for $\alpha = -0.4$, $\beta = -0.1$. For angles greater than 160° the singularity exponent has a small imaginary part leading to stress oscillations in a very confined zone (Rice, 1988). Figure 3 shows the contours of constant δ in the Dundurs plane for $a = \pi/2$.

The singularity exponent for a crack between two dissimilar anisotropic elastic materials is the solution of equation (11) with $a = -b = \pi$. The matrix \underline{A} the reduces to the term $\underline{H} + e^{2i\delta\pi} \underline{H}$ and leads to $\delta = 0.5 + i\varepsilon$. The oscillatory index ε [equation (5)] is only a function of the isotropic or anisotropic Dundurs parameter β (Suo, 1990).

1. Introduction

Nous nous intéressons ici à des singularités en contraintes de type puissance dans le cas du problème plan du coin représenté figure 1. Une méthode numérique générale pour obtenir les champs singuliers en élasticité plane ou non a été développée par Leguillon et Sanchez-Palencia (1987). Dans cette Note, nous proposons une solution analytique au problème du coin pour l'anisotropie la plus

générale. Une telle solution facilite l'étude paramétrique d'un assemblage. Elle permet de définir les groupements de coefficients matériels influents pour le calcul de l'exposant de la singularité : pour deux constituants isotropes, cet exposant ne dépend des caractéristiques élastiques que par l'intermédiaires des paramètres de Dundurs (1969). De façon générale, elle simplifie l'analyse de sensibilité de l'exposant ou du mode associé aux divers caractéristiques élastiques ou géométriques.

Un bi-matériau, aux constituants *A* et *B* anisotropes parfaitement assemblés le long d'une interface *I*, a deux bords libres paramétrés par les angles $\theta = a$ et $\theta = b$ (r, θ : coordonnées polaires). Les champs des déplacements et des contraintes au voisinages de $r = 0$ sont recherchés sous la forme :

$$(1) \quad \mathbf{u} = h r^\delta g(\theta), \quad \underline{\sigma} = h r^{\delta-1} \underline{F}(\theta)$$

La partie réelle de l'exposant de la singularité δ est comprise entre 0 et 1 pour que localement l'énergie reste finie et que les contraintes soient singulières. h est le facteur d'intensité combinant les effets des modes de sollicitation 1 et 2 : $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, avec les facteurs h_1 et h_2 définis classiquement par

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\delta} \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=0} = h_1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\delta} \sigma_{r\theta}|_{\theta=0} = h_2$$

Pour des angles a et b quelconques les modes ne peuvent être découplés (h_1 et h_2 sont liés). On introduit le paramètre de mixité $\psi = \arctan(h_2/h_1)$. Dans le cas limite d'une fissure interfaciale, h_1 et h_2 s'identifient aux facteurs d'intensité des contraintes K_1, K_2 (Rice, 1988).

2. Méthode des potentiels complexes anisotropes

Il s'agit dans le cas de l'élasticité plane anisotrope de représenter les contraintes et déplacements par deux potentiels complexes f_1, f_2 fonctions des coordonnées complexes $z_k = x + \mu_k y = r(\cos \theta + \mu_k \sin \theta)$, $k = 1, 2$ (Eshelby, 1953; Lekhnitskii, 1963; Stroh, 1958). Les coefficients

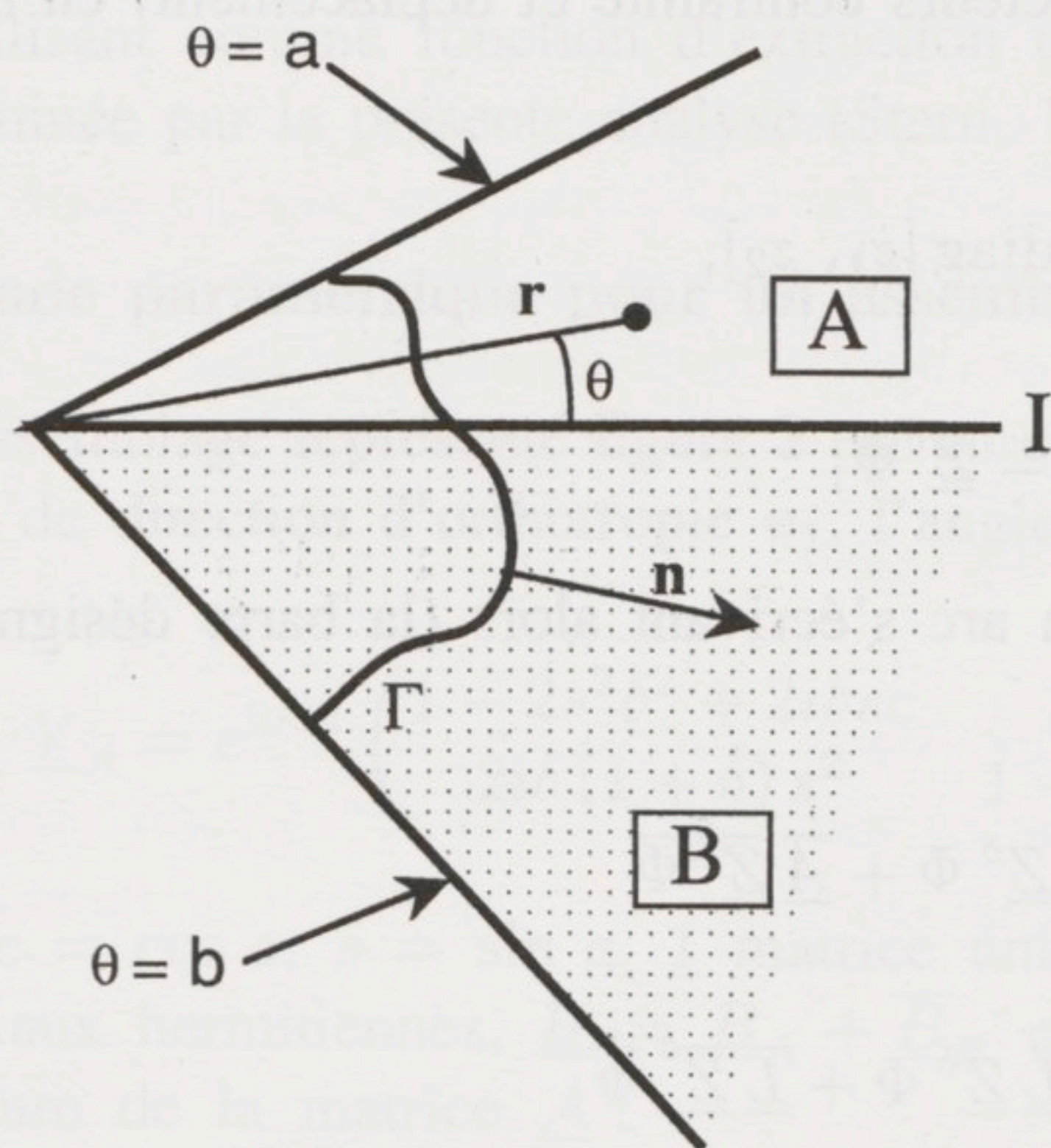


Fig. 1

Fig. 1. - Coin constitué de deux matériaux différents.

Fig. 1. - Corner constituted of two dissimilar layers.

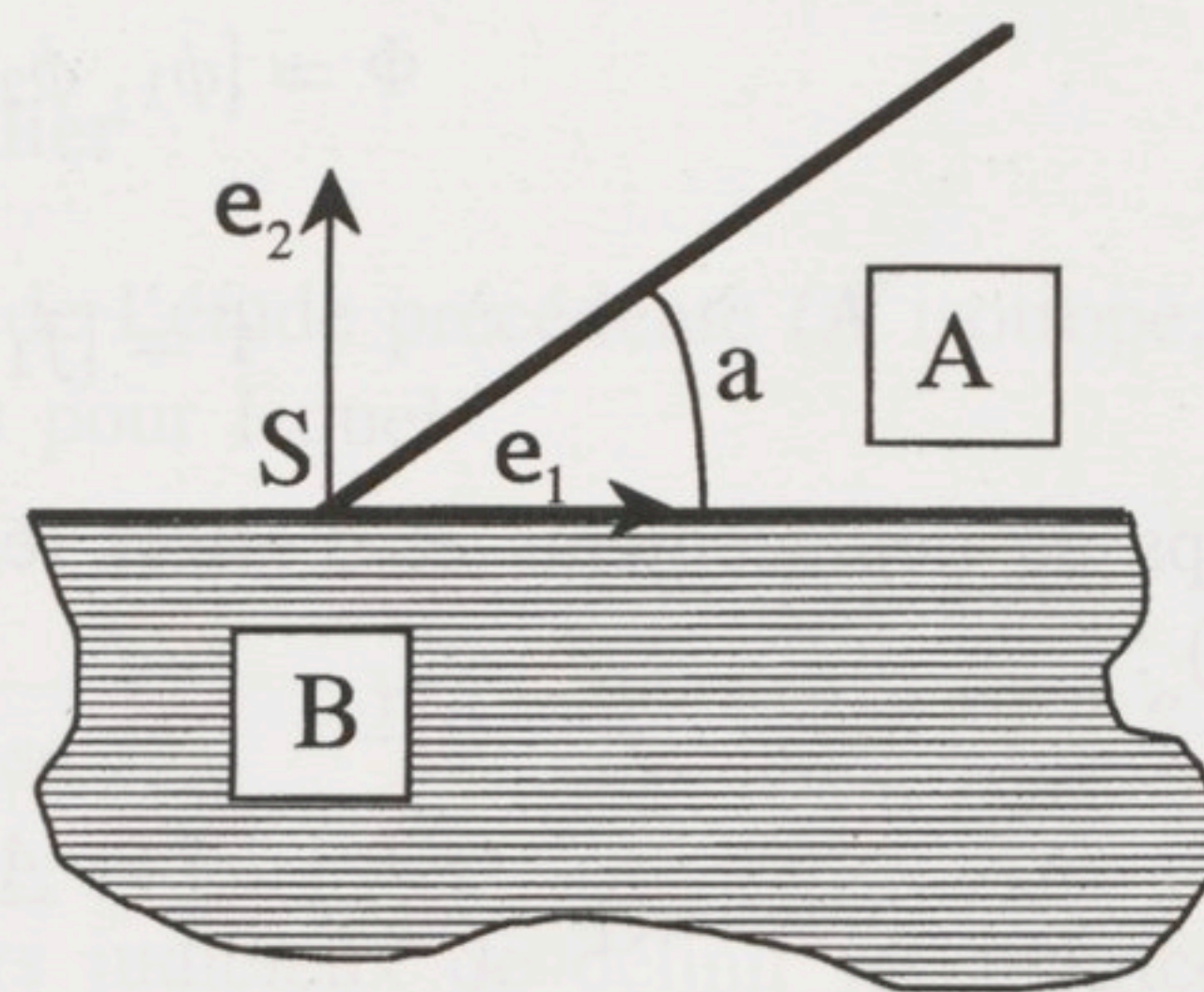


Fig. 2

Fig. 2. - Assemblage particulier.

Fig. 2. - Particular joint.

matériels μ_k sont les racines complexes non conjuguées d'un polynôme du quatrième degré. Les déplacements \mathbf{u} , les forces résultantes \mathbf{T} le long d'un arc, et les contraintes $\underline{\sigma}$ sont :

$$(3) \quad u_i = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 A_{ij} f_j(z_j) \right\}, \quad T_i = -2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} f_j(z_j) \right\}$$

$$(4) \quad \sigma_{2i} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} f'_j(z_j) \right\}, \quad \sigma_{1i} = -2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 L_{ij} \mu_j f'_j(z_j) \right\}$$

où les coefficients μ_k ainsi que les matrices \underline{A} et \underline{L} dépendent uniquement des coefficients du tenseur de Hooke (Lekhnitskii, 1963; Suo, 1990). Ces matrices ne sont plus inversibles dans le cas isotrope pour lequel il faut alors considérer les potentiels de Muskhelishvili (1963). Les champs (3)-(4) vérifient automatiquement les équations d'équilibre, de compatibilité et la loi d'élasticité. Le problème d'élasticité est résolu en satisfaisant les conditions aux limites. Pour faire un lien entre les méthodes anisotrope et isotrope, Stroh (1958) introduit la matrice hermitienne définie positive $\underline{B} = i \underline{A} \underline{L}^{-1}$ établie pour la formulation anisotrope mais qui reste définie pour l'isotropie.

3. Solutions singulières

On se donne la forme des potentiels complexes afin d'obtenir par (3)-(4) les champs r^δ et $r^{\delta-1}$ de (1). Pour le cas d'un bi-matériau soumis à des déformations ou à des contraintes planes, on introduit 2 potentiels par constituant, de la forme (A et B réfèrent au constituant correspondant) :

$$(5) \quad f_k^A(z_k^A) = \phi_k^A \cdot (z_k^A)^\delta, \quad f_k^B(z_k^B) = \phi_k^B \cdot (z_k^B)^\delta$$

où les 4 coefficients complexes ϕ_k^A, ϕ_k^B sont obtenus en écrivant les conditions de bords libres en $\theta = a$ et $\theta = b$ et d'interface parfaite (continuité des vecteurs contrainte et déplacement) en $\theta = 0$. Il est commode d'utiliser la notation matricielle,

$$(6) \quad \underline{\Phi} = [\phi_1, \phi_2]^T, \quad \underline{Z} = \operatorname{diag}[z_1, z_2],$$

$$(7) \quad \underline{\mathbf{f}} = [f_1, f_2]^T, \quad \underline{\mathbf{f}} = \underline{Z}^\delta \underline{\Phi},$$

les champs de déplacements et d'effort résultant sur un arc s'écrivant alors (la barre désignant le conjugué) :

$$(8) \quad \mathbf{u} = \{u_i\} = \underline{A} \underline{\mathbf{f}} + \overline{\underline{A}} \overline{\underline{\mathbf{f}}} = \underline{A} \underline{Z}^\delta \underline{\Phi} + \overline{\underline{A}} \overline{\underline{Z}}^\delta \overline{\underline{\Phi}}$$

$$(9) \quad -\mathbf{T} = \{-T_i\} = \underline{L} \underline{\mathbf{f}} + \overline{\underline{L}} \overline{\underline{\mathbf{f}}} = \underline{L} \underline{Z}^\delta \underline{\Phi} + \overline{\underline{L}} \overline{\underline{Z}}^\delta \overline{\underline{\Phi}}$$

3.1. Exposant de la singularité

L'écriture des conditions aux limites $\mathbf{T}_A(\theta = a) = 0, \mathbf{T}_B(\theta = b) = 0, \mathbf{T}_A(\theta = 0) = \mathbf{T}_B(\theta = 0), \mathbf{u}_A(\theta = 0) = \mathbf{u}_B(\theta = 0)$ conduit au problème de valeur propre

$$(10) \quad \underline{K}(\delta, a, b, \text{param. élast.}) \mathbf{V} = 0$$

\underline{K} est une matrice 8×8 fonction des paramètres d'élasticité et de la géométrie locale par l'intermédiaire des angles a et b . \mathbf{V} est le vecteur des coefficients ϕ_k . L'exposant de la singularité est obtenu comme étant la plus petite racine positive de l'équation non linéaire $\det(\underline{K}(\delta)) = 0$. Si cette équation admet une racine double, en plus de la solution en r^δ , un terme en $r^\delta \log r$ peut apparaître. Il est possible de réduire par substitution la taille du problème aux valeurs propres (10). Finalement, on aboutit à $\underline{A}\mathbf{v} = \underline{0}$, $\underline{Y}_A \mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}} = \underline{0}$, avec $\mathbf{v} = (\underline{L}\Phi)_A/h$, et δ est solution de

$$(11) \quad \det \underline{A}(\delta) = 0, \quad \underline{A} = \underline{B}_A + \bar{\underline{B}}_A \underline{Y}_A - [\underline{B}_B + \bar{\underline{B}}_B \underline{Y}_B] \cdot (\underline{1} - \underline{Y}_B)^{-1} \cdot (\underline{1} - \underline{Y}_A)$$

où \underline{A} et $\underline{Y} = \bar{\underline{L}} \bar{\underline{Z}}^{-\delta} \bar{\underline{L}}^{-1} \underline{L} \underline{Z}^\delta \underline{L}^{-1}$ sont des matrices d'ordre 2. Il est à noter que (11) redonne les résultats isotropes de Williams (1952) et Bogy (1968).

3.2. Champs des contraintes et des déplacements

La détermination des modes du problème aux valeurs propres (10) ou de sa version simplifiée conduit à l'expression du vecteur \mathbf{v} , tel que, utilisant (2), la norme de sa partie réelle soit égale à $1/2\delta$. Pour le problème du coin considéré, il n'y a en général pas découplage des modes et $\psi = \arctan [\operatorname{Re}\{v_1\}/\operatorname{Re}\{v_2\}]$. Les vecteurs potentiels complexes sont finalement

$$(12) \quad \mathbf{f}_A = h \underline{Z}_A^\delta \underline{L}_A^{-1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{f}_B = h \underline{Z}_B^\delta \underline{L}_B^{-1} (\underline{1} - \underline{Y}_B)^{-1} \cdot (\underline{1} - \underline{Y}_A) \mathbf{v}$$

et la solution générale analytique du problème du coin est obtenue par (3) pour les déplacements et par (4) pour les contraintes. Pour une structure ayant un ou plusieurs points singuliers, la solution proposée s'applique localement. Le facteur d'intensité traduit la prise en compte des conditions aux limites appliquées à la structure globale. Le calcul de h pourra être effectué en utilisant une intégrale de contour par comparaison avec une solution de référence (par exemple un calcul éléments finis) en utilisant comme fonction d'extraction une solution singulière d'exposant $-\delta$, d'énergie infinie, déterminée par la présente analyse (Stern, 1976; Babuska, 1984; Leguillon, 1987).

4. Étude paramétrique pour un assemblage particulier

L'assemblage représenté figure 2 est un cas particulier de l'étude précédente (A isotrope, B orthotrope, de direction d'orthotropie \mathbf{e}_1 , l'angle b valant $-\pi$) pour lequel

$$(13) \quad \underline{Y}_A = e^{2i\delta a} \begin{pmatrix} 1 - 2s^2\delta^2 + 2i\delta sc & 2i\delta(1-\delta)s^2 \\ 2i\delta(1+\delta)s^2 & 1 - 2s^2\delta^2 - 2i\delta sc \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_B = \underline{Y}(\theta = -\pi) = e^{-2i\delta\pi} \underline{1}$$

avec $c = \cos a$, $s = \sin a$, $\underline{1}$ matrice unité. Il est alors judicieux de définir les matrices du bi-matériaux hermitiennes, $\underline{H} = \underline{B}_A + \bar{\underline{B}}_B$ et $\underline{G} = \underline{B}_B - \underline{B}_A$, ce qui simplifie dans le cas présent l'écriture de la matrice \underline{A} :

$$(14) \quad \underline{A} = \underline{H} + e^{2i\delta\pi} \bar{\underline{H}} - [e^{2i\delta\pi} \bar{\underline{H}} + \underline{G}] \frac{\underline{Y}_A - e^{2i\delta\pi} \underline{1}}{1 - e^{2i\delta\pi}}$$

L'exposant de la singularité obtenu par $\det \underline{A} = 0$ est fonction de l'angle a et de 3 paramètres matériels pour B orthotrope, qui se réduisent aux 2 paramètres de Dundurs α et β pour B isotrope. La

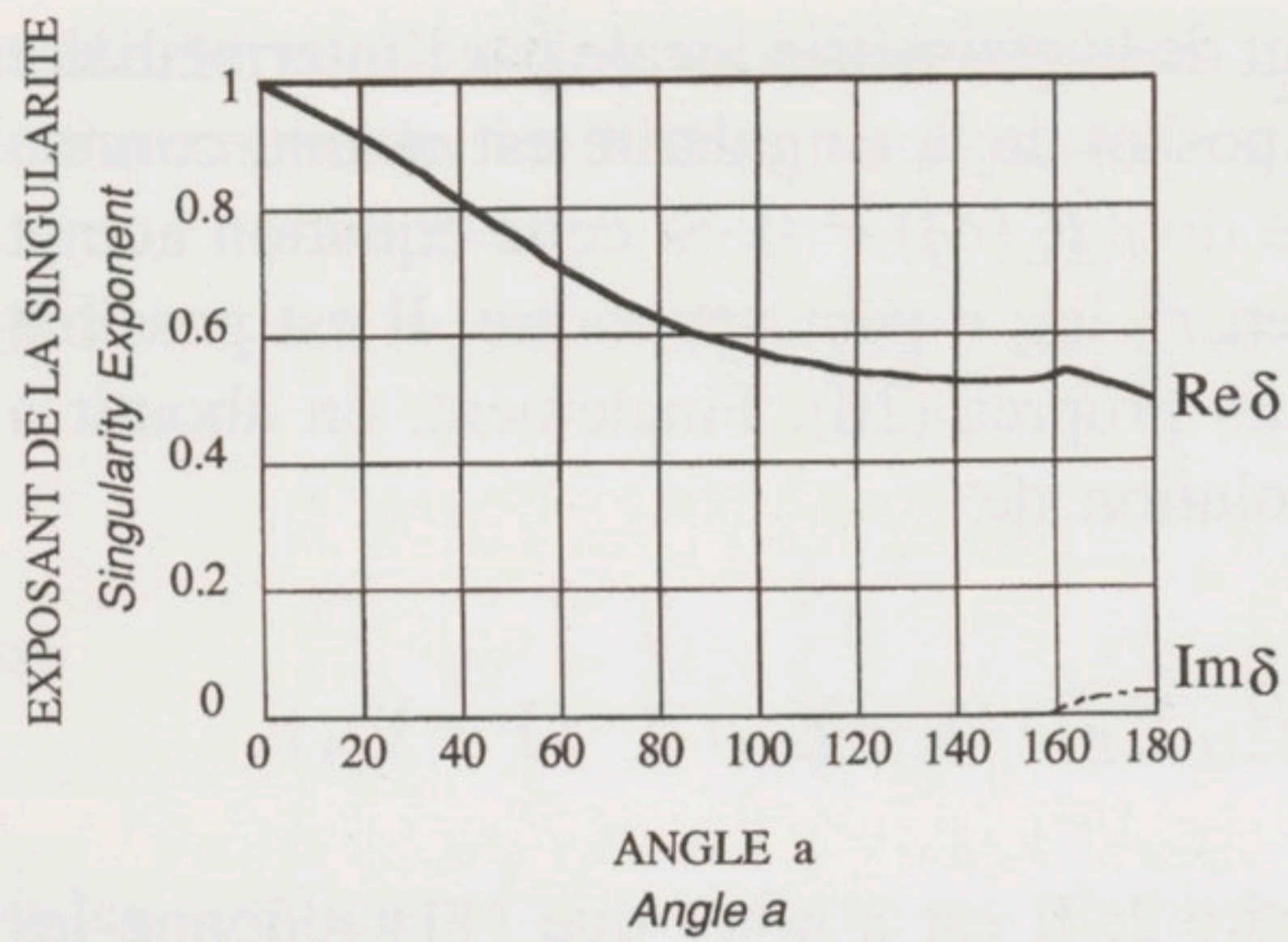


Fig. 3. – Exposant de la singularité fonction de l'angle a .

Fig. 3. – Singularity exponent as a function of the angle a .

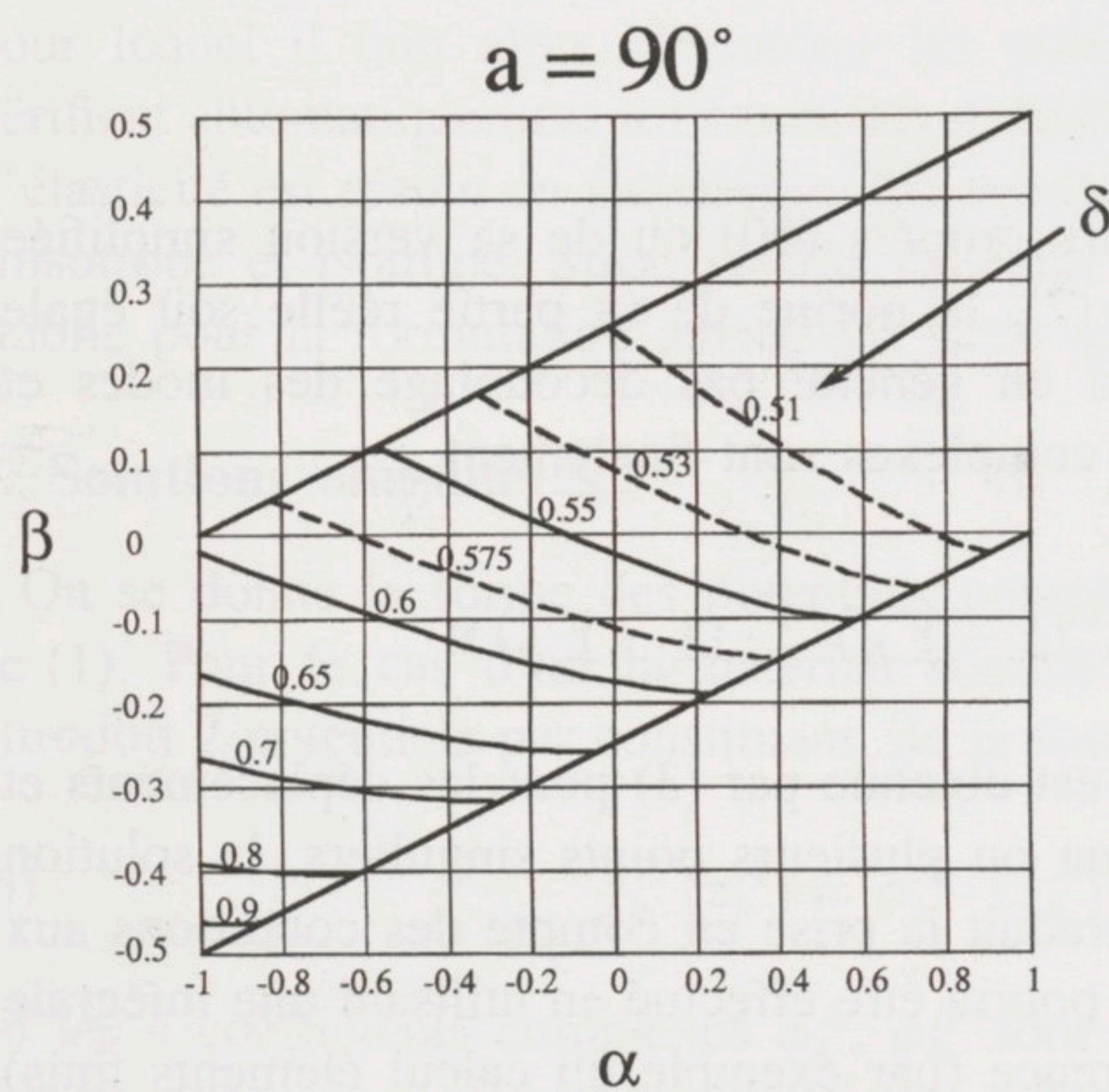


Fig. 4. – Isovaleurs de δ dans le plan des paramètres de Dundurs.

Fig. 4. – Contour of constant δ in the Dundurs plane.

figure 3 représente l'évolution de δ en fonction de l'angle d'inclinaison a pour $\alpha = -0,4$, $\beta = -0,1$. Pour des angles supérieurs à 160° l'exposant de la singularité devient complexe comme pour le cas des fissures interfaciales. Ceci induit un terme d'oscillations en contrainte très localisées autour du coin, à une échelle inférieure à celle de l'élément de volume représentatif de la mécanique des milieux continus (Rice, 1988). Sur la figure 4 sont tracées les isovaleurs de δ dans le plan (α, β) pour $a = \pi/2$.

5. Fissures interfaciales

L'exposant de la singularité d'une fissure entre deux matériaux anisotropes différents est solution de (11) avec $a = -b = \pi$. La matrice \underline{A} est alors réduite au terme $\underline{H} + e^{2i\delta\pi} \overline{\underline{H}}$ qui conduit à $\delta = 0.5 + i\varepsilon$. Le terme d'oscillation ε n'est fonction que du paramètre de Dundurs isotrope ou anisotrope β (Suo, 1990) :

$$(15) \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)$$

et les déplacements et les contraintes sont toujours donnés par (3) et (4).

Note remise et acceptée le 8 janvier 1996.

Références bibliographiques

Babuska I. et Miller A., 1984. The post-processing approach in the finite element method – Part 2: the calculation of stress intensity factors, *Int. J. Num. Meth. Engng*, 20, p. 1111-1129.

Bogy D. B., 1968. Edge bonded dissimilar orthogonal wedges under normal and shear loading, *J. Appl. Mech.*, 35, p. 460-466.

Dundurs J., 1969. Discussion, *J. Appl. Mech.*, 36, p. 650-652.

Eshelby J. D., Read W. T. et Shockley W., 1953. Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory, *Acta Metall.*, 1, p. 251-259.

Leguillon D. et Sanchez-Palencia E., 1987. *Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity*, Masson, Paris.

Lekhnitskii S. G., 1963. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holden-Day, San Francisco.

Muskhelishvili N. I., 1963. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhof, Groningen.

Rice J. R., 1988. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, *J. Appl. Mech.*, 55, p. 98-103.

Stern M. et Soni L., 1976. On the computation of stress intensities at fixed-free corners, *Int. J. Solids Structures*, p. 331-337.

Stroh A. N., 1958. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Phil. Mag.*, 7, p. 625-646.

Suo Z., 1990. Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media, *Proc. R. Soc. London, A* 427, p. 331-358.

Williams M. L., 1952. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions, *J. Appl. Mech.*, 19, p. 526-528.

Resumé. Lors de la fabrication de films plastiques par soufflage, le point de rupture dans certaines conditions des instabilités conduisant à une production défective. L'analyse de la solution asymptotique (Asymptotic Analysis) est effectuée pour déterminer la stabilité. Nous montrons que les instabilités conduisant à un processus de rupture sont dues à la présence de singularités dans les solutions asymptotiques. L'usage d'un film plus épais permet de contrôler le processus de rupture. Les résultats sont comparés avec les résultats obtenus par la méthode de la solution asymptotique. Les résultats sont comparés avec les résultats obtenus par la méthode de la solution asymptotique. Les résultats sont comparés avec les résultats obtenus par la méthode de la solution asymptotique.

Instability phenomena in film blowing process:
a linear stability analysis

Abstract. Instability phenomena leading to unacceptable production rates in the film blowing process. After having studied the steady state solution (Asymptotic Analysis) and methods, 1984, we now turn to the crucial stability aspect. We perform a linear stability analysis leading to an eigenvalue problem. By means of asymptotic methods, the singularities leading to instability are identified. The use of a thicker film allows controlling the process. The results are compared with the results obtained by the asymptotic method. The results are compared with the results obtained by the asymptotic method. The results are compared with the results obtained by the asymptotic method.

Abridged English Version

It is now well established that the stretching of a liquid or a solid is a source of instability. Thus, in the industrial stretching of a filament, periodic disturbances occur at high drawdown ratios. This phenomenon, commonly referred to as draw resonance, has been intensively studied (Chang

Note présentée par André Zarka.