



**HAL**  
open science

## Propagation de fissure en thermo-élasticité dynamique

Huy Duong Bui, Alain Ehrlacher, Quoc Son Nguyen

► **To cite this version:**

Huy Duong Bui, Alain Ehrlacher, Quoc Son Nguyen. Propagation de fissure en thermo-élasticité dynamique. *Journal de Mécanique*, 1980, 19 (4), pp.697-723. hal-04537620

**HAL Id: hal-04537620**

**<https://hal.science/hal-04537620v1>**

Submitted on 8 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Propagation de fissure en thermoélasticité dynamique

H. D. BUI\*, A. EHRLACHER\*\* et Q. S. NGUYEN\*\*

RÉSUMÉ. — On étudie les singularités en fond de fissure de la réponse thermoélastique d'un solide en petite transformation dynamique. L'évolution thermomécanique est régie par des équations couplées et non linéaires. On donne les deux premiers termes du développement asymptotique de la solution en déplacement et en température. On établit que la répartition de la température est singulière lorsque la fissure se propage. Cependant, cette répartition ne change pas la singularité dominante des champs mécaniques qui sont ceux de l'élasticité isotherme.

ABSTRACT. — We study the singular thermoelastic fields near the crack tip, in the linear strain assumption. The equations are coupled and non linear. The asymptotic expansions of the displacement and the temperature are given for the first and the second order. It is shown that the temperature is singular when the crack propagates. However, this field does not change the dominant singularity of the mechanical field which is the same as that obtained in the theory of isothermal elasticity.

## I. Introduction

Les problèmes de rupture sont étudiés jusqu'à maintenant dans le cadre des théories classiques où il n'y a pas de couplage entre les champs mécaniques et thermiques : transformation isotherme en quasi statique ou dynamique, thermoélasticité linéaire classique avec le champ de température considéré comme une donnée (chargement thermique) au même titre que le chargement mécanique [4].

---

\* Électricité de France et École Polytechnique.

\*\* École Polytechnique, Laboratoire de Mécanique des Solides, 91128 Palaiseau, France.

Dans ce cadre restreint, on a étendu récemment la théorie des intégrales invariante à la thermoélasticité ([4], [5]).

Ces formulations classiques voient leurs applications limitées à des problèmes où l'équilibre de la température, ou son évolution, en régime transitoire n'est pas influencée par la fissure.

Cependant, lorsqu'une structure possède des fissures en propagation, il y a une double interaction entre les effets thermiques et mécaniques : d'une part le couplage thermoélastique classique en chaque point de la structure, d'autre part un nouveau couplage thermomécanique provenant de la création de sources thermiques par dissipation d'énergie mécanique aux extrémités des fissures qui se propagent.

Des expériences récentes réalisées par Weichert et Schönert ([21], [22]) ont mis en évidence des échanges thermiques importants et des températures pouvant atteindre localement des chiffres assez élevés. Bouc et coll. [3] ont étudié la répartition des sources dues aux déformations plastiques pour une fissure de fatigue par les techniques de radiométrie infrarouge.

Dans cette étude, nous faisons l'analyse théorique des sources créées par la propagation d'une fissure en milieu quelconque, puis en milieu élastique. Nous établissons les équations générales de l'évolution thermomécanique d'un solide ayant une fissure en propagation.

Nous ferons ensuite une étude asymptotique de ces équations en élasticité. Il apparaîtra pour les différents ordres du développement asymptotique ( $r \rightarrow 0$ ), des équations successivement découplées dont nous donnerons les solutions jusqu'à l'ordre 2.

Plusieurs résultats seront donnés. Pour le premier ordre, nous montrerons que le champ de température est singulier en  $\text{Log } r$  et que le champ mécanique a le même développement que celui donné par la théorie isotherme classique. Pour le second ordre, les champs mécaniques sont plus singuliers que ceux de la théorie isotherme, le champ de température présente des distorsions selon le mode de rupture. L'étude des isothermes donne la possibilité de connaître expérimentalement la nature des conditions aux limites thermiques et de découpler les modes de rupture.

## **2. Évolution thermomécanique d'un solide fissuré**

Nous rappelons dans le premier temps les équations donnant l'évolution d'un solide fissuré en transformation dynamique linéaire. En d'autres termes,

nous adoptons l'hypothèse simplificatrice de la linéarité entre la déformation et le gradient de la transformation et nous négligeons les changements de géométrie. Par contre, nous ne ferons pas la linéarisation de l'équation thermique, comme c'est habituel en thermoélasticité classique.

Les notations simplifiées sont utilisées pour désigner les grandeurs usuelles en mécanique : déplacement  $\mathbf{u}$ , vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$ , déformation  $\boldsymbol{\varepsilon} = (1/2) (\nabla \mathbf{u} + \tilde{\nabla} \mathbf{u})$ , contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , produit contracté  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ , etc.

## 2. 1. ANALYSE DE DISSIPATION

Considérons un matériau quelconque défini par la donnée de son énergie libre volumique  $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, T)$  fonction des variables d'état  $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  paramètres internes  $\omega_i$  et température  $T$ . L'entropie volumique est par définition :

$$(1) \quad S = - \frac{\partial W}{\partial T}.$$

Les variables conjuguées de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  s'appellent respectivement « contrainte réversible »  $\boldsymbol{\sigma}_R$  et « force généralisée »  $A_i$  ([12], [14]) :

$$(2) \quad \boldsymbol{\sigma}_R = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad A = - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\omega}}.$$

La « puissance réversible » reçue est par définition la quantité  $(\partial W / \partial \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\partial W / \partial \boldsymbol{\omega}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}$ . La puissance intrinsèque dissipée volumique, positive, est égale à la différence entre la puissance des efforts intérieurs  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et la puissance réversible :

$$(3) \quad D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + A \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} \geq 0.$$

Par exemple, en plasticité classique, en prenant comme paramètre interne la déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et l'énergie libre  $W(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p, T)$  on a  $D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ . En viscoélasticité, pour le modèle de Kelvin, on a  $W = W(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{IR} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_R$  est la contrainte irréversible et la puissance intrinsèque dissipée  $D$  s'écrit :

$$D = \boldsymbol{\sigma}_{IR} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Considérons maintenant un problème bidimensionnel de solide fissuré. La fissure est supposée rectiligne, de longueur  $l(t)$ , se propageant dans sa propre direction à la vitesse  $\dot{l} > 0$  (fig. 1) :

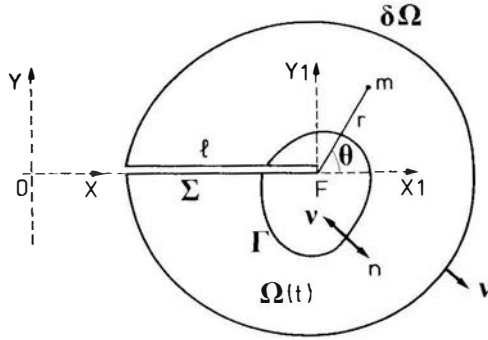


Fig. 1

La dissipation globale  $D$  comprend deux termes : l'un résultant de la dissipation intrinsèque locale  $D$  et l'autre venant de la rupture. Ce dernier terme apparaît dans l'écriture du bilan global de l'énergie.

Les deux principes de la thermodynamique conduisent à écrire les équations et inégalités classiques :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{U} + \dot{C} = P_e + P_{cal}, \\ P_{cal} = \int_{\Omega} T \dot{S} d\Omega - D, \quad D \geq 0, \end{array} \right.$$

dans lesquelles  $U$  désigne l'énergie interne du système,  $C$  son énergie cinétique,  $P_e$  la puissance des efforts extérieurs,  $P_{cal}$  la puissance calorifique reçue. L'énergie interne comprend une partie de densité volumique  $W + TS$  et éventuellement une partie de densité surfacique  $2\gamma_0 l$  (par unité d'épaisseur de la structure). L'énergie spécifique réversible  $\gamma_0$  joue un rôle essentiel en mécanique des surfaces, dans les problèmes d'adhésion ou de pelage [14], un rôle peut-être moindre dans les problèmes de rupture. Nous considérons ici cette énergie pour écrire l'expression la plus générale de  $U$  :

$$(5) \quad U = \int_{\Omega} (W + TS) dV + 2\gamma_0 l.$$

Quant à la puissance globale dissipée  $D$ , on montre [16] qu'elle comprend les deux termes suivants :

$$(6) \quad D = \int_{\Omega} D dV + (G - 2\gamma_0) \dot{l},$$

où  $G$  désigne le taux de restitution d'énergie défini plus loin. La relation (6) a été démontrée dans [16] moyennant certaine hypothèse de transport de singularité qui sera évoquée dans la suite.

L'interprétation du terme  $(G - 2\gamma_0)\dot{l}$  comme la puissance dissipée en rupture est bien connue, cf. ([13], [18], [8]). En milieu élastique, Rice [18] a considéré le terme  $\Lambda = (G - 2\gamma_0)\dot{l}/T$  comme une production d'entropie positive, mais son interprétation n'est valable que si la température  $T$  reste finie en fond de fissure. Comme  $(G - 2\gamma_0)\dot{l}$  représente la dissipation à la pointe de la fissure, nous pouvons introduire la mesure de Dirac en  $F$  pour écrire (6) sous la forme justifiée plus loin :

$$(7) \quad D = \int_{\Omega} \{ D + (G - 2\gamma_0)\dot{l}\delta(F) \} dV.$$

Rappelons que le taux de restitution d'énergie  $G$  est donné par l'expression :

$$(8) \quad G = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[ \left( W + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 \right) \mathbf{n}_1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{,1} \right] ds,$$

dans laquelle  $\Gamma$  est un contour fermé quelconque enveloppant la pointe de la fissure (*fig. 1*). La relation (8) est bien connue en élasticité quasi statique Eshelby [9], Rice [19]. En élastodynamique isotherme, Freund [10] a montré que  $G\dot{l}$  est le flux d'énergie de rupture et Bui [4] a étudié les intégrales de contour se rattachant à  $G$ . La validité de (8) dans le cas général d'un matériau à paramètres internes est démontrée par Nguyen [16].

## 2.2. SOURCE DE CHALEUR

Nous donnons ici une interprétation nouvelle de (7) qui permettra de justifier cette écriture d'une part et d'autre part d'écrire l'équation thermique. Désignons par  $\mathbf{q}$  le flux de chaleur dans le milieu considéré, supposé conducteur. La puissance calorifique reçue par conduction est :

$$(9) \quad P_{\text{cal}} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} ds - \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} ds.$$

Le deuxième terme de (9), qui correspond à la surface fissurée  $\Sigma$  n'est pas nul dans certains problèmes géothermiques. On envoie par exemple un fluide en circulation dans les fissures, destiné à extraire des calories. En l'absence d'un tel processus, ce terme ne peut être que globalement nul. Désignons par

$\Omega_\Gamma$  et  $\Sigma_\Gamma$  les parties du volume  $\Omega$  et de la surface  $\Sigma$  qui sont extérieures au contour  $\Gamma$ .

Pour établir la relation (6), on a fait dans [16] l'hypothèse que les fonctions  $T\dot{S}$  et  $D$  sont, pour des raisons physiques, intégrables au sens de Lebesgue dans  $\Omega$ , soit :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Lim}_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Omega_\Gamma} T\dot{S} dV = \int_{\Omega} T\dot{S} dV, \\ \text{Lim}_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Omega_\Gamma} D dV = \int_{\Omega} D dV. \end{array} \right.$$

De même, nous admettons que :

$$(11) \quad \text{Lim}_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} ds = \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} ds.$$

Appliquons le second principe aux particules occupant à l'instant  $t$  le volume  $\Omega_\Gamma$  de normale  $\mathbf{v}$  et posons  $\mathbf{n} = -\mathbf{v}$  sur  $\Gamma$  :

$$-\int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} ds - \int_{\Sigma_\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega_\Gamma} T\dot{S} dV - \int_{\Omega_\Gamma} D dV,$$

et faisons tendre  $\Gamma \rightarrow 0$  :

$$(12) \quad P_{\text{cal}} + \text{Lim}_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} T\dot{S} dV - \int_{\Omega} D dV.$$

En rapprochant (4), (6) et (12), on voit que :

$$(13) \quad (G - 2\gamma_0)\dot{I} = \text{Lim}_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Ainsi, lorsque l'échange de chaleur se fait par conduction toute la puissance  $(G - 2\gamma_0)\dot{I}$ , se trouve dissipée en chaleur vers le milieu continu. La pointe de la fissure  $F$  se comporte comme une *source de chaleur ponctuelle, mobile*.

D'autres processus de dissipation peuvent être envisagés concurremment à la conduction. Ce sont des rayonnements soit concentrés en  $F$ , probablement à cause des températures élevées atteintes, soit répartis dans le voisinage de la fissure. Un rayonnement concentré au taux  $p'$  limitera la source de chaleur à  $(G - 2\gamma_0)\dot{I} - p'$ . Un rayonnement réparti de taux  $p$  est indispensable à introduire dans le cas d'une plaque mince dont les deux faces latérales sont en contact direct avec l'air. Dans le cas de déformation plane, il serait raisonnable de considérer que  $p = p' = 0$ .

Plaçons-nous dans le cas le plus général et introduisons la source ponctuelle pour écrire l'équation thermique au sens des distributions :

$$(14) \quad \operatorname{div} \mathbf{q} + T\dot{S} + p + p' \delta(F) = D + (G - 2\gamma_0) \dot{l} \delta(F).$$

Avec la loi de conduction de Fourier  $\mathbf{q} = -k \cdot \nabla T$ , à coefficient de conduction  $k$  constant non nul, l'équation (14) devient :

$$(15) \quad -k \Delta T + T\dot{S} + p + p' \delta(F) = D + (G - 2\gamma_0) \dot{l} \delta(F).$$

Ainsi, la puissance dissipée volumique et la puissance dissipée concentrée en fond de fissure, qui sont deux sources de nature différente, se retrouvent au premier membre sous forme de perte par conduction, par rayonnement et sous forme de changement de l'état interne du matériau (terme  $T\dot{S}$ ).

En résumé, l'évolution thermomécanique d'un milieu conducteur est régie par les équations :

- *dynamique*  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} = 0$ ;
- *thermique* (15),

auxquelles s'ajoutent les lois complémentaires (lois de propagation de fissure, lois d'évolution de paramètres internes, etc.), les conditions aux limites mécaniques et thermiques, ainsi que les conditions initiales. Il faut également préciser les pertes par rayonnement  $p$  et  $p'$ ,

Dans la suite, nous négligerons  $p$ ,  $p'$  ainsi que  $\gamma_0$ .

### 3. Thermoélasticité

Pour les matériaux élastiques, l'énergie libre est  $W = W(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ , et la contrainte réversible est la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_R = \boldsymbol{\sigma} = \partial W / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ . La dissipation volumique est nulle  $D = 0$ . L'équation thermique (15) s'écrit encore :

$$(16) \quad k \Delta T - c \dot{T} + T l_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + G \dot{l} \delta(F) = 0,$$

où  $c = -T (\partial^2 W / \partial T^2)$  est la chaleur volumique à déformation constante et  $l_{ij} = \partial^2 W / \partial T \partial \varepsilon_{ij}$  désignent les coefficients thermoélastiques.

Cette équation diffère de l'équation thermique habituelle pour un milieu thermoélastique linéaire par le quatrième terme, une source pour l'instant inconnue, et par le troisième terme non linéaire. Nous n'avons pas linéarisé complètement l'équation thermique, car les variations de température peuvent être importantes en fond de fissure. On voit ainsi le couplage thermomécanique à plusieurs niveaux, entre les champs de température et de



déformation d'une part, entre les champs thermomécaniques et la grandeur  $G$  d'autre part. Le taux de restitution de l'énergie  $G$  est une grandeur globale déterminée par (8) une fois le problème d'évolution résolu.

Nous nous limitons aux cas des matériaux isotropes, linéairement élastiques à coefficients calorifique  $c$  et thermoélastique  $l_{ij}$  constants. Dans ce cas, soient  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé,  $3K = 3\lambda + 2\mu$  le module de compression,  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique linéique, nous aurons les coefficients  $l_{ij} = -3K\alpha\delta_{ij}$  et les relations :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = -\frac{c}{T}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} = -3K\alpha\delta_{ij}.$$

En intégrant, nous pouvons écrire :

$$(17) \quad W(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2}(\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) - 3K\alpha(T - T_0)\varepsilon_{kk} - cT \text{Log}(T/T_0) - (S_0 - c)T + W_0.$$

Remarquons qu'en thermoélasticité classique, en linéarisant (17) au voisinage de  $T = T_0$  ( $\theta = T - T_0$ ) et en prenant  $S_0 = 0$ ,  $W_0 = -cT_0$ , nous retrouvons l'expression quadratique habituelle :

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = \frac{1}{2}(\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) - 3K\alpha\theta\varepsilon_{kk} - \frac{c}{2T_0}\theta^2.$$

Dans cette étude, nous ne ferons pas cette linéarisation, car nous avons la possibilité d'avoir des températures très élevées.

Les relations de comportement sont :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = 3K\alpha\varepsilon_{kk} + c \text{Log}(T/T_0) + S_0, \\ \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 3K\alpha(T - T_0)\delta_{ij}. \end{array} \right.$$

Dans la suite, nous nous limitons à la déformation plane  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ . Les équations thermomécaniques s'écrivent alors :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} k\Delta T - c\dot{T} - 3K\alpha T(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) + G\dot{l}\delta(F) = 0, \\ (\lambda + \mu)\nabla(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \mu\Delta\mathbf{u} - 3K\alpha\nabla T - \rho\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} = 0. \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites mécaniques sur la fissure correspondent à un contact unilatéral sans frottement :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} [u_2] = u_2(x, 0^+, t) - u_2(x, 0^-, t) \geq 0, \quad x < l(t), \\ \sigma_{22}(x, 0^\pm, t) \leq 0, \\ \sigma_{12}(x, 0^\pm, t) = 0, \\ \sigma_{22} = 0, \quad \text{si } [u_2] > 0. \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites thermiques dépendent des problèmes étudiés, échange avec un fluide circulant dans la fissure ou non. Elles sont difficiles à formuler de façon certaine à cause du manque d'expériences précises sur le rôle de la surface de fissure dans la diffusion de la chaleur.

Dans cette étude, nous supposons que la conduction thermique vérifie sur la surface fissurée  $\Sigma$  la condition :

$$(21) \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0^+, t) - \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0^-, t) = 0,$$

qui exprime que l'échange de chaleur ne peut se faire qu'entre les deux faces.

Un contact parfait au point de vue thermique donne alors une condition supplémentaire :

$$(22) \quad T(x, 0^+, t) = T(x, 0^-, t).$$

Mais, on peut aussi penser que l'échange de chaleur obéit à la loi de Newton à coefficient constant  $e$  :

$$(23) \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0^+, t) = e[T(x, 0^+, t) - T(x, 0^-, t)],$$

en particulier si  $e = 0$ , on obtient le cas des parois isolantes :

$$(24) \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0^+, t) = 0.$$

#### 4. Équations asymptotiques

Posons  $x - l(t) + iy = re^{i\theta}$ . Nous nous intéressons au développement asymptotique des champs  $\mathbf{u}$  et  $T$  par rapport à l'échelle de comparaison  $E_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  formée des fonctions  $r^\beta (\text{Log } r)^{\beta_1} \dots (\text{Log}_m r)^{\beta_m} f(\theta, t)$ ,  $\beta, \beta_1, \dots, \beta_m$

sont des nombres réels et  $\text{Log}_m r = \text{Log}(\text{Log}_{m-1} r)$ ,  $f(\theta, t)$  est une fonction angulaire deux fois dérivable sur  $]-\pi, \pi[$  :

$$(25) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{T}^{(2)} + \dots \end{cases}$$

Ces différents termes sont rangés par ordre de singularité spatiale décroissante.

L'hypothèse de « transport de singularité » évoquée plus haut consiste à admettre que pour toute grandeur  $g(x, y, t)$  la dérivée  $\dot{g}$  est :

$$(26) \quad \dot{g} = -\dot{l}g_{,x} + \text{terme plus régulier},$$

c'est-à-dire que  $\dot{g}$  et  $-\dot{l}g_{,x}$  ont la même singularité spatiale,  $l(t)$  étant une fonction régulière de  $t$ . De même  $\ddot{g}$  et  $\dot{l}^2 g_{,xx}$  ont la même singularité spatiale.

#### 4.1. SINGULARITÉ DU CHAMP $\mathbf{T}^{(1)}$

Pour que  $\mathbf{W}$  soit intégrable, il est nécessaire que la déformation  $\varepsilon$  ait un exposant  $\beta > -1$ . Ceci implique que  $\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}$  a un terme principal  $\beta > -2$  donc :

$$3K \alpha \mathbf{T}^{(1)} (\dot{\varepsilon}_{11}^{(1)} + \dot{\varepsilon}_{22}^{(1)}) = o(\Delta \mathbf{T}^{(1)}).$$

De même :

$$\dot{\mathbf{T}}^{(1)} = -\dot{l} \mathbf{T}_{,x}^{(1)} = o(\Delta \mathbf{T}^{(1)}).$$

Donc, pour trouver le terme principal  $\mathbf{T}^{(1)}$  de la température, nous devons résoudre l'équation :

$$(27) \quad k \Delta \mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{G} \dot{l} \delta(\mathbf{F}) = 0.$$

Les conditions aux limites à considérer sont (21), (22) ou (21), (24); la condition (23) se ramène à (24) étant donné l'ordre différent des deux termes.

Si nous cherchons  $\mathbf{T}^{(1)}$  avec  $\beta < 0$  les conditions aux limites imposent  $\beta = n/2$ ,  $n$  entier. D'après (19),  $\varepsilon$  doit être plus singulier que  $\mathbf{T}$ . L'hypothèse (10) de l'intégrabilité de  $\mathbf{T}\dot{\mathbf{S}}$  impose alors  $n > -1$ . Nous ne pouvons donc avoir pour  $\mathbf{T}^{(1)}$  un exposant  $\beta < 0$ .

En cherchant  $\mathbf{T}^{(1)}$  avec un exposant  $\beta = 0$ , nous trouvons que la seule solution est :

$$(28) \quad \mathbf{T}^{(1)} = -\frac{\mathbf{G} \dot{l}}{2K\pi} \text{Log } r.$$

Il est utile de rappeler à ce niveau la solution du problème de diffusion de chaleur dans un plan infini par une source ponctuelle  $G \dot{l}$  mobile à la vitesse  $\dot{l}$ , la température étant imposée nulle à l'infini. Cette solution est [7] :

$$T(x, y, t) = \frac{G \dot{l}}{2k\pi} \exp[c\dot{l}(x-l(t))/2k] K_0\left(\frac{c\dot{l}r}{2k}\right),$$

où  $K_0$  est la fonction modifiée de Bessel de deuxième espèce d'ordre 0. Pour  $r \rightarrow 0$ , on retrouve le champ asymptotique (28).

Nous remarquons que la chaleur volumique  $c$  n'intervient pas dans l'expression du champ asymptotique  $T^{(1)}$ .

#### 4.2. SINGULARITÉ DU CHAMP $\mathbf{u}^{(1)}$

Si on suppose  $G \neq 0$ , cela implique que la singularité de  $\varepsilon^{(1)}$  est strictement plus forte que celle de  $T^{(1)} \sim \text{Log } r$  d'après l'expression de l'énergie libre (17) et de  $G$  (8).

L'hypothèse de transport des singularités ( $\ddot{\mathbf{u}} = \dot{l}^2 \mathbf{u}_{,xx}$ ), nous conduit à l'équation :

$$(29) \quad (\lambda + \mu) \mathbf{V}(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)}) + \mu \Delta \mathbf{u}^{(1)} - \rho \dot{l}^2 \mathbf{u}_{,xx}^{(1)} = 0.$$

C'est exactement la même équation qu'en élastodynamique isotherme étudiée par Yoffé [23], Achenbach et Bazant [1].

Posons :

$$\begin{aligned} x_1 &= x - l(t), & y_1 &= y, & z &= x_1 + iy_1 = r e^{i\theta}, \\ z_1 &= x_1 + i\beta_1 y_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, & z_2 &= x_1 + i\beta_2 y_1 = r_2 e^{i\varphi_2}, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (1 - \dot{l}^2/c_1^2)^{1/2}, & \beta_2 &= (1 - \dot{l}^2/c_2^2)^{1/2}, \\ c_1 &= \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}, & c_2 &= \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$c_1$  et  $c_2$  sont respectivement les célérités des ondes longitudinales et transversales.

La solution des équations (29) avec les conditions aux limites de la fissure ouverte est bien connue. Il est utile de le rappeler ici :

$$(30) \quad \begin{cases} u_1^{(1)} = -\frac{1}{\mu} \Re e \left( \Phi_1(z_1) + \frac{1 + \beta_2^2}{2} \Phi_2(z_2) \right), \\ u_2^{(1)} = \frac{1}{\mu} \Im m \left( \beta_1 \Phi_1(z_1) + \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_2} \Phi_2(z_2) \right), \end{cases}$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{(1)} = -\Re e[(2\beta_1^2 - \beta_2^2 + 1)\Phi_1'(z_1) + (1 + \beta_2^2)\Phi_2'(z_2)], \\ \sigma_{22}^{(1)} = (1 + \beta_2^2)\Re e[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)], \\ \sigma_{12}^{(1)} = 2\operatorname{Im}\left[\beta_1\Phi_1'(z_1) + \frac{1}{4\beta_2}(1 + \beta_2^2)^2\Phi_2'(z_2)\right]. \end{array} \right.$$

Les fonctions  $\Phi_1(z_1)$  et  $\Phi_2(z_2)$  sont analytiques par rapport à leur variable respective dans les plans complexes coupés suivant la fissure,  $\arg(z_i) \in ]-\pi, \pi[$  :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(z_1) = \frac{2\sqrt{z_1}}{[4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)]\sqrt{2\pi}} [-K_I(1 + \beta_2^2) + 2iK_{II}\beta_2], \\ \Phi_2(z_2) = \frac{2\sqrt{z_2}}{[4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)]\sqrt{2\pi}} \left[ K_I \frac{4\beta_1\beta_2}{1 + \beta_2^2} - 2iK_{II}\beta_2 \right]. \end{array} \right.$$

Les champs dépendent de deux paramètres  $K_I(t)$ ,  $K_{II}(t)$  qui sont des facteurs d'intensité des contraintes, déterminés seulement par la solution du problème global.

La solution (30), (31) n'est valable que si  $4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2 \neq 0$ . Cette condition définit une vitesse limite non nulle qui n'est autre que la célérité de l'onde de Rayleigh  $c_R$ .

La relation (8) donne alors, comme en dynamique isotherme :

$$(33) \quad G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 f_I(\dot{l}) + K_{II}^2 f_{II}(\dot{l})),$$

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_I = \frac{\beta_1(1 - \beta_2^2)}{(1 - \nu)[4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2]}, \\ f_{II} = \frac{\beta_2(1 - \beta_2^2)}{(1 - \nu)[4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2]}, \end{array} \right.$$

si  $\dot{l} \rightarrow 0$ ,  $f_I$  et  $f_{II} \rightarrow 1$ . Si  $\dot{l} \rightarrow c_R$ ,  $f_I$  et  $f_{II} \rightarrow \infty$ .

Les coefficients  $f_I$  et  $f_{II}$  sont interprétés classiquement comme des facteurs correctifs dynamiques de la formule d'Irwin. Si l'on introduit les facteurs d'intensité cinématiques [4] qui mesurent l'intensité des discontinuités du déplacement : ouverture  $K_I^u$ , glissement  $K_{II}^u$ ,  $G$  peut s'écrire sous une forme symétrique :

$$(35) \quad G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I K_I^u + K_{II} K_{II}^u),$$

qui généralise en thermoélasticité dynamique la relation d'Irwin.

La solution  $u_i^{(1)}$  apparaît comme une combinaison linéaire de termes de la forme  $K_i(t) g_j(\dot{l}) \hat{u}_{ij}(x-l(t), y, \dot{l})$  avec  $\hat{u}_{ij}=r^{1/2} h_{ij}(\theta, \dot{l})$ . Par dérivation par rapport au temps, le champ de vitesse  $\tilde{\mathbf{u}}$  obtenu est singulier comme  $-\dot{l}u_i^{(1)}$ . La solution proposée est donc compatible avec l'hypothèse de transport des singularités dès que  $K(t), \dot{l}(t)$  sont dérivables.

#### 4. 3. SINGULARITÉ DU CHAMP $T^{(2)}$

La partie principale de la température  $T^{(1)}$  est un champ de révolution déterminé par le taux  $G$ . Réciproquement, la connaissance du champ de température permet de connaître  $G$ , mais ne permet pas de découpler les modes I et II. Nous cherchons à développer plus loin le champ asymptotique en espérant que le terme  $T^{(2)}$  présente des distorsions en mode mixte.

Pour obtenir l'équation asymptotique du second ordre, nous éliminons le terme  $c \dot{T}^{(1)}$  moins singulier que  $T^{(1)} \dot{\varepsilon}_{kk}^{(1)}$ .  $T^{(2)}$  vérifie donc :

$$(36) \quad k \Delta T^{(2)} + 3 K \alpha T^{(1)} \dot{l} (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)})_{,1} = 0,$$

le terme  $3 k \alpha T^{(1)} (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)})_{,1}$  est connu, il est en  $O(r^{-3/2} \text{Log } r)$ . Nous cherchons  $T^{(2)}$  en  $O(r^\beta \text{Log}^\beta r \dots \text{Log}_m^\beta r)$  avec  $\beta \geq 0$ . Les conditions aux limites applicables à  $T^{(2)}$  sont une fois encore (21), (22) ou (21), (24). Ces conditions aux limites imposent  $\beta = n/2$ ,  $n$  entier. Si l'on pose  $n=0$  cela implique  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ , donc  $T^{(2)}$  est défini à une constante  $\bar{T}(t)$  près. Si l'on prend  $n=1$ ,  $T^{(2)} = \bar{T}(t) + r^{1/2} g(r) \cdot f(\theta, \dot{l})$  où  $g(r) = o(r^\beta)$  pour tous  $\beta < 0$ . Pour déterminer  $g(r)$ , il faut écrire les conditions aux limites pour les termes  $r^{1/2} g(r)$  et  $r^{3/2} g'(r)$ . On obtient  $g(r) = \text{Log } r$ , ce qui permet de chercher finalement  $T^{(2)}$  sous la forme :

$$(37) \quad T^{(2)} = \bar{T}(t) + r^{1/2} \text{Log } r f(\theta, \dot{l}).$$

La solution  $u^{(1)}$  permet d'expliciter le terme  $\varepsilon_{kk,1}^{(1)}$  :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{kk,1}^{(1)} = C_I(\dot{l}) K_I \Re e(z_1^{-3/2}) + C_{II}(\dot{l}) K_{II} \Re e(iz_1^{-3/2}), \\ C_I = - \frac{(1 + \beta_2^2) (\beta_1^2 - \beta_2^2)}{2(\lambda + \mu) \sqrt{2\pi} (4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2)}, \\ C_{II} = \frac{-2\beta_2}{1 + \beta_2^2} C_I. \end{array} \right.$$

Introduisons les notations :

$$(39) \quad \begin{cases} C_s = -\frac{3 \dot{l}^2 K \alpha G}{2 \pi k^2} C_1(\dot{l}) K_1, \\ C_\lambda = \frac{3 \dot{l}^2 K \alpha G}{2 \pi k^2} C_{11}(\dot{l}) K_{11}. \end{cases}$$

L'équation (36) se ramène à :

$$f'' + \frac{1}{4} f = C_s \left( \frac{r_1}{r} \right)^{-3/2} \cos\left( \frac{3\varphi_1}{2} \right) + C_\lambda \left( \frac{r_1}{r} \right)^{-3/2} \sin\left( \frac{3\varphi_1}{2} \right),$$

qui donne, compte tenu des conditions aux limites (21) :

$$(40) \quad f(\theta, \dot{l}) = A \sin\left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{4 C_s}{1 - \beta_1^2} \left[ \left( \frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \cos\left( \frac{\varphi_1}{2} \right) - \beta_1 \cos\left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ + \frac{4 C_\lambda}{1 - \beta_1^2} \left[ \left( \frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \sin\left( \frac{\varphi_1}{2} \right) - \sin\left( \frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Le cas du contact thermique parfait (22) correspond à  $A=0$ . Pour déterminer  $A$  dans le cas où l'échange s'effectue suivant la loi de Newton (23), nous devons considérer le terme suivant du développement de la température. Nous écrivons donc  $T$  sous la forme :

$$T = -\left( \frac{G \dot{l}}{2 k \pi} \right) \text{Log } r + \bar{T}(t) + r^{1/2} \text{Log } r f(\theta, \dot{l}) + r^{1/2} g(\theta, \dot{l}) + o(r^{1/2}).$$

L'équation (19) conduit alors à :

$$f(\theta) + \frac{1}{4} g(\theta) + g''(\theta) \\ = -\left( \frac{\bar{T}}{G \dot{l}} \right) 2 k \pi \left( \frac{r_1}{r} \right)^{-3/2} \left[ C_s \cos\left( \frac{3\varphi_1}{2} \right) + C_\lambda \sin\left( \frac{3\varphi_1}{2} \right) \right],$$

soit :

$$g(\theta) = -\left( \frac{\bar{T}}{G \dot{l}} \right) 2 k \pi f(\theta) - 2 \int_{-\pi}^{\theta} f(u) \sin \frac{(\theta-u)}{2} du \\ + \alpha_1 \cos\left( \frac{\theta}{2} \right) + \alpha_2 \sin\left( \frac{\theta}{2} \right).$$

Les conditions aux limites (24) impliquent  $g'(\pi) = g'(-\pi) = 0$  soit  $\alpha_1 = 0$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(u/2) du = 0$ . Cette dernière égalité permet de déterminer la constante A :

$$A = \frac{4 C_A}{1 - \beta_1^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{1 + \beta_1}{2}} \right).$$

En résumé, la température  $T^{(2)}$  s'écrit sous la forme :

$$(41) \quad T^{(2)} = \bar{T}(t) + r^{1/2} \text{Log } r [C_S R_S(\theta, \dot{l}) + C_A R_A(\theta, \dot{l})],$$

avec :

– si le contact thermique est parfait :

$$R_S = \frac{4}{1 - \beta_1^2} \left[ \left( \frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \beta_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right],$$

$$R_A = \frac{4}{1 - \beta_1^2} \left[ \left( \frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right];$$

– si la loi de Newton est vérifiée :

$$R_S = \frac{4}{1 - \beta_1^2} \left[ \left( \frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \beta_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right],$$

$$R_A = \frac{4}{1 - \beta_1^2} \left[ \left( \frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \sqrt{\frac{1 + \beta_1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

Les figures 2 et 3 montrent que ces fonctions  $R_S$ ,  $R_A$  dépendent faiblement de la vitesse  $\dot{l}$  dans l'intervalle  $]0, C_R[$ .

Le champ  $T^{(2)}$  est continu en mode I, et discontinu chaque fois que le mode II est présent.

#### 4.4. ÉTUDE DES ISOTHERMES ET CONFRONTATION AVEC LES EXPÉRIENCES

Les distorsions du champ de température peuvent être mises en évidence par le tracé des isothermes  $T^{(1)} + T^{(2)} = \text{Cte}$ . Nous utilisons les caractéristiques physiques d'un acier :

$$\lambda = \mu = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \quad k = 42 \text{ J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5}, \quad K_{\text{Id}} = 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{3/2}.$$



Ces chiffres définissent une longueur caractéristique de l'ordre de  $d$  :

$$d = \left( \frac{k(\lambda + \mu)}{3K \alpha K_{1d} c_2} \right)^2,$$

soit 12 Å. Cette valeur correspond à plusieurs distances interatomiques et, de ce fait, il faut se placer à des distances bien plus grandes devant  $d$  pour assurer la validité des équations de la thermodynamique des milieux continus. D'autre part, il ne faut pas que  $r/d$  soit trop grand pour que nos développements asymptotiques aient un sens. Nous fixons  $r/d \simeq 100$  à 1000.

FONCTIONS  $R_S$  et  $R_A$   
Contact parfait

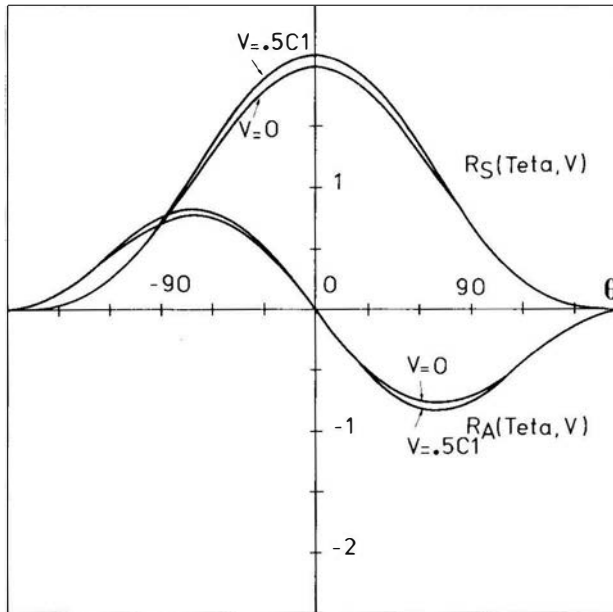


Fig. 2

Pour tracer les isothermes, nous avons fixé  $G = (1 - v^2) K_{1d}^2 / E$ , ce qui correspond à un critère énergétique de propagation. Les facteurs adimensionnels sont utilisés  $k_i = K_i \sqrt{f_i} / K_{1d}$  ( $i = I, II$ ). En mode I ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$ ), les isothermes sont les mêmes pour les différentes conditions aux limites thermiques (22), (23), (24). La figure 4 montre que pour une faible vitesse de propagation (1 m/s) les isothermes sont des quasi-cercles non-concentriques. Les températures indiquées sont plutôt des écarts de température par rapport à la constante  $\bar{T}(t)$ .

FONCTIONS  $R_S$  et  $R_A$   
 Paroi isolante , Loi de Newton

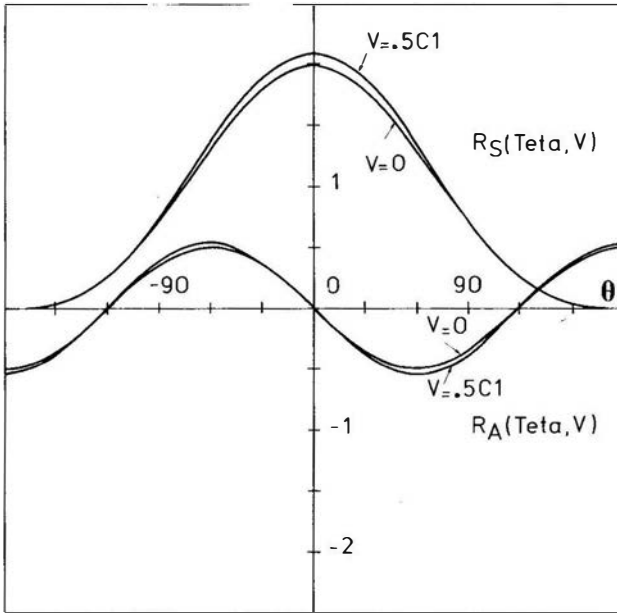


Fig. 3

ISOTHERMES : Paroi isolante, contact parfait  
 et loi de Newton

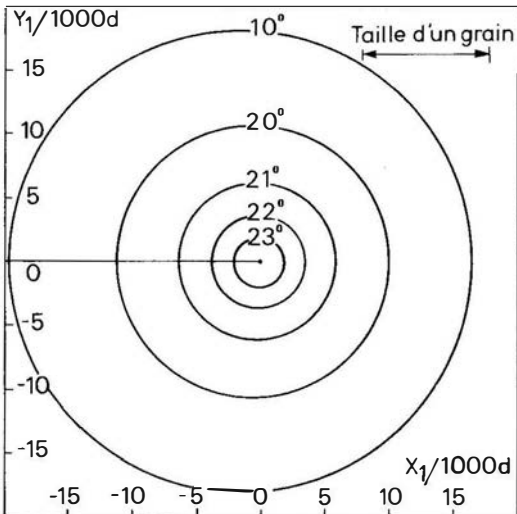


Fig. 4

Vitesses = 1m/s ;  $d = 12 \text{ \AA}$  ; mode I

Pour une vitesse plus élevée, 100 m/s, la source de chaleur est plus importante et les courbes isothermes ( *fig. 5* ) sont nettement différentes des cercles que donnerait le développement asymptotique restreint au premier ordre. Les températures sont plus élevées.

ISOTHERMES : Paroi isolante, contact parfait  
et loi de Newton

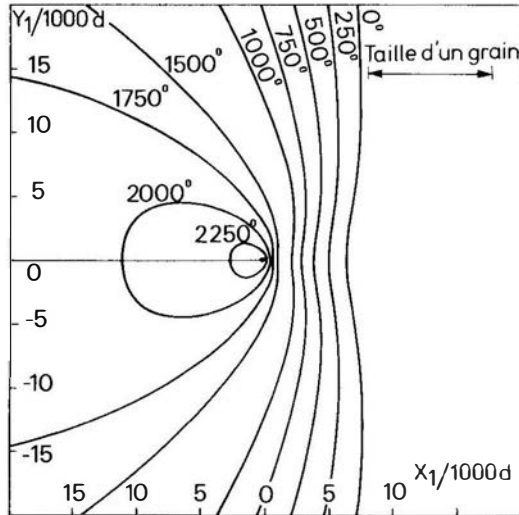


Fig. 5

Vitesse = 100 m/s ;  $d = 12 \text{ \AA}$  ; mode I

Au mode II,  $k_2 = 1$ ,  $k_1 = 0$ , nous pouvons faire les mêmes remarques, mais, de plus, il faut constater que lorsque l'on adopte une condition aux limites de type loi de Newton, ou paroi isolante sur les lèvres de la fissure, nous avons une discontinuité de température ( *fig. 6 et 7* ) qui vient du fait qu'on n'a pas la conduction parfaite entre les deux lèvres de la matière. Dans le cas du contact parfait, en mode II, la température est continue ( *fig. 8* ).

Nous constatons sur les figures 5, 7 et 8 des écarts de température par rapport à  $\bar{T}(t)$  très élevées, des milliers de degrés, lorsque la vitesse de propagation est importante.

Comparons les prévisions de notre modèle à quelques résultats expérimentaux connus dans la littérature.

Des mesures expérimentales de température et de production de chaleur à l'extrémité d'une fissure progressant rapidement ont été faites par différents auteurs, sur des matériaux variés. Les expérimentateurs ont constaté d'une

ISOTHERMES: Paroi isolante et loi de Newton

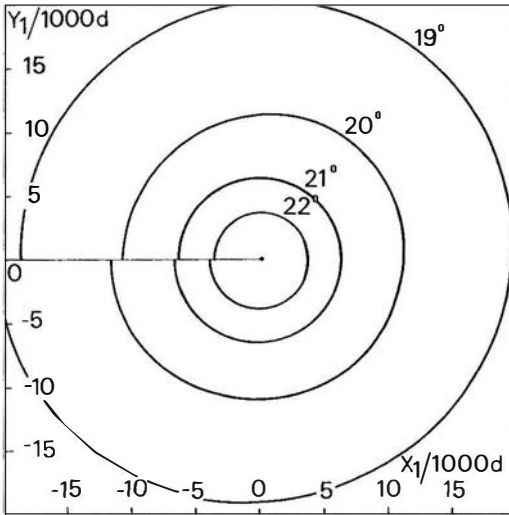


Fig. 6

Vitesse = 1m/s ;  $d = 12\text{Å}$  ; mode II

ISOTHERME: Paroi isolante et loi de Newton.

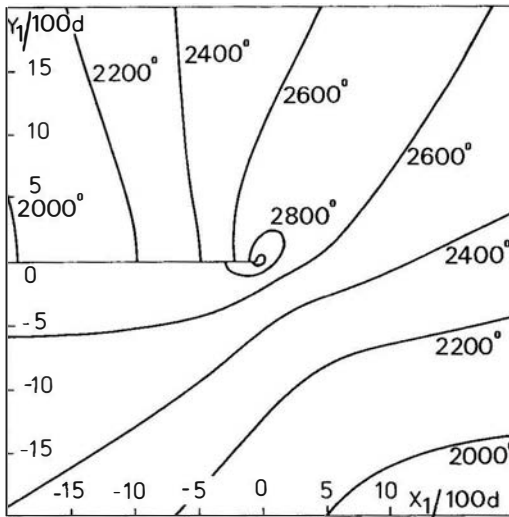


Fig. 7

Vitesse = 100m/s ;  $d = 12\text{Å}$  ; mode II

part une production de chaleur de l'ordre de grandeur de la puissance dissipée  $G \dot{l}$ , avec un facteur multiplicatif variant entre 0,6 à 0,9, Weichert et Schönert [21], d'autre part ils ont mesuré des températures importantes dans divers matériaux au voisinage de la pointe de la fissure, ces températures variant avec la vitesse de propagation. Dans l'acier à une distance de  $30 \mu\text{m}$  de l'extrémité de la fissure, Weichert et Schönert mesurent une température de  $130^\circ\text{C}$  à l'aide de thermocouple, pour la vitesse de  $10 \text{ m/s}$ . Ces auteurs pensent que les températures sont beaucoup plus élevées dans une zone plus proche encore de l'extrémité de la fissure, inaccessible au thermocouple. Dans le verre, ces auteurs constatent une émission de lumière à l'extrémité des fissures vers  $1000 \text{ m/s}$ , ce qui suppose une température supérieure à  $1000 \text{ K}$ . En filtrant la lumière émise sur quatre longueurs d'onde, ils mesurent une température moyenne de  $3200 \text{ K}$ , sur une distance de  $20 \text{ \AA}$ . La même expérience sur le quartz fournit une température de l'ordre de  $4700 \text{ K}$ . (Weichert et Schönert [22]).

ISOTHERMES : Contact parfait.

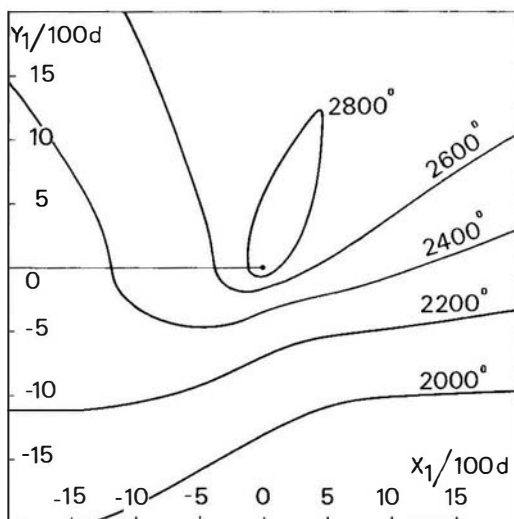


Fig. 8

Vitesse =  $100 \text{ m/s}$  ;  $d = 12 \text{ \AA}$  ; mode II

D'autres auteurs ont fait des expériences sur des polymères en enregistrant les radiations infrarouges :

- sur le polyméthylméthacrylate (PMMA) et le polystyrène, Fuller et coll. [11] mesurent des températures de  $500 \text{ K}$  ;
- sur la nitrocellulose, avec des vitesses voisines de la vitesse du son,

Tomashevskii et coll. [20] ont mesuré une température moyenne de 160°C dans un disque de 20  $\mu\text{m}$  et 70°C dans un disque de 100  $\mu\text{m}$ ;

– sur le polyéthylène, les auteurs ont mesuré une température moyenne de 110°C dans un disque de 80  $\mu$  de diamètre, quelques millisecondes après le passage de l'extrémité de la fissure.

Pour interpréter ces résultats, différents modèles ont été proposés. Weichert et Schönert ont supposé que la production de chaleur est due à la déformation plastique, de taux égal à  $G \dot{l}$ , uniformément répartie dans un disque de très faible rayon, ou encore dans un petit rectangle de même dimension. Leur analyse conduit évidemment à une température finie, mais très élevée, plusieurs milliers de degrés kelvin.

Tomashevskii et coll. proposent un modèle basé sur l'énergie de rupture de liaisons des macromolécules, et constatent que l'énergie relâchée intervient pour une part importante dans l'échauffement du matériau.

Dans notre étude, nous avons adopté l'hypothèse de la rupture quasi fragile, où tout le phénomène de rupture est concentré à un point singulier mathématique, évitant dans le calcul toute référence à la plasticité, et permettant de faire très simplement l'analyse thermique du phénomène. Notre « singularité » thermique doit être considérée comme une singularité mathématique, exactement comme on interprète la « singularité » des champs mécaniques. Il est clair que physiquement, aucun matériau ne supporterait une contrainte ou déformation infinie, et *a fortiori* une température infinie. Les prévisions de notre modèle, comme en mécanique de la rupture classique, semblent pouvoir s'accorder assez bien aux résultats expérimentaux, en dehors de certain rayon  $r/d$ .

#### 4.5. SINGULARITÉ DU CHAMP $\mathbf{u}^{(2)}$

Nous étudions ce champ pour voir comment le couplage thermomécanique modifie le développement asymptotique classique. Le champ  $\mathbf{u}^{(2)}$  vérifie l'équation :

$$(42) \quad (\lambda + \mu) \nabla (\varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{22}^{(2)}) + \mu \Delta \mathbf{u}^{(2)} - \rho \dot{l}^2 \mathbf{u}_{,11}^{(2)} = 3 K \alpha \nabla T^{(1)}.$$

Introduisons les potentiels  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$(43) \quad \mathbf{u}^{(2)} = \nabla \varphi + \mathbf{Rot}(\psi \mathbf{e}_3),$$

qui vérifient alors les équations :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi - \frac{\dot{l}^2}{c_1^2} \varphi_{,11} = - \frac{3 K \alpha}{\lambda + 2 \mu} \frac{G \dot{l}}{2 k \pi} \text{Log } r, \\ \Delta\psi - \frac{\dot{l}^2}{c_2^2} \psi_{,11} = 0. \end{array} \right.$$

Nous pouvons chercher les développements de  $\varphi$  et  $\psi$  dans l'échelle de comparaison  $E_m$  :  $\varphi$  et  $\psi = 0$  ( $r^\beta \text{Log}^{\beta_1} r \dots \text{Log}^{\beta_n} r$ ). Les conditions aux limites (20) donnent pour une fissure ouverte :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \mu \varepsilon_{12}^{(2)} = 0 \quad (\theta = \pm \pi), \\ \lambda \text{tr } \varepsilon^{(2)} + 2 \mu \varepsilon_{22}^{(2)} + 3 K \alpha \left( \frac{G \dot{l}}{2 k \pi} \right) \text{Log } r = 0 \quad (\theta = \pm \pi). \end{array} \right.$$

Ces conditions imposent  $\beta = n/2$ ,  $n > 3$  car  $\beta > 3/2$ . Cherchons pour  $n = 4$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \varphi &= r^2 f(r) g(\theta, \dot{l}), \\ \psi &= r^2 f(r) h(\theta, \dot{l}). \end{aligned}$$

Un raisonnement identique à celui fait pour la température donne  $f(r) = \text{Log } r$ . Les fonctions  $g$  et  $h$  vérifient alors le système :

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\cos^2 \theta + \beta_1^2 \sin^2 \theta) g'' + (1 - \beta_1^2) \sin^2 \theta g' + 2(1 + \beta_1^2) g = - \frac{3 K \alpha G \dot{l}}{(\lambda + 2 \mu) 2 k \pi}, \\ (\cos^2 \theta + \beta_1^2 \sin^2 \theta) h'' + (1 - \beta_1^2) \sin^2 \theta h' + 2(1 + \beta_1^2) h = 0. \end{array} \right.$$

Le couple :

$$g(\theta, \dot{l}) = - \frac{3 K \alpha G \dot{l}}{(\lambda + 2 \mu) 4 k \pi} \sin^2 \theta, \quad h(\theta, \dot{l}) = 0,$$

est une solution particulière du système vérifiant les conditions aux limites à l'ordre  $\text{Log } r$ . Mais, pour satisfaire rigoureusement aux conditions aux limites à l'ordre supérieur, il faut considérer la solution générale de (46) sous la forme :

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(\theta, \dot{l}) = - \frac{3 K \alpha G \dot{l}}{4 k \pi (\lambda + 2 \mu)} \sin^2 \theta + A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \beta_1^2 \sin^2 \theta), \\ h(\theta, \dot{l}) = C \sin \theta \cos \theta + D(\cos^2 \theta - \beta_2^2 \sin^2 \theta). \end{array} \right.$$

Les coefficients A, B, C, D sont déterminés par les conditions aux limites (45) et comme dans le cas de la température  $T^{(2)}$  par les conditions que doivent vérifier les développements d'ordre supérieur. Nous trouvons alors  $A = D = 0$  et  $C = -(1 + \beta_2^2) B$ , la constante B étant donnée par une équation linéaire comme pour le champ thermique  $T^{(2)}$ .

Au champ  $\mathbf{u}^{(2)}$  calculé à partir de (47) correspond un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  singulière comme  $\bullet(\text{Log } r)$ . Or, on sait que dans la théorie isotherme le champ  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  est régulier. Le couplage thermomécanique modifie donc le développement asymptotique au second ordre..

## 5. Remarques

Les résultats précédents sont évidemment encore valables lorsque la fissure est fixe ( $\dot{l} = 0$ ). On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{K}_J(t) r^{1/2} \mathbf{u}^J(\theta) + \dots, \\ T &= \bar{T}(t) + r^{1/2} g(\theta, t) + \dots\end{aligned}$$

On peut se demander si la singularité de la température  $T^{(1)}$  dépend de l'expression de l'énergie libre  $W(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ . Si la loi de Fourier est admise, la réponse est claire à partir de l'équation thermique (15) que nous écrivons sous la forme simplifiée :

$$(48) \quad -k \Delta T + T\dot{S} = G \dot{l} \delta(F).$$

En effet, dans la description adoptée  $T\dot{S}$  doit être intégrable [16] et s'écrit donc au voisinage du fond de fissure sous la forme  $r^p (\text{Log } r)^q f(\theta, t)$  avec  $p > -2$ . Si nous développons T sous la forme  $T = r^m (\text{Log } r)^n \hat{T}(\theta, t)$ , l'équation (48) implique pour le terme du premier ordre  $m = 0, n = 1$  :

$$\hat{T}(\theta, t) = -\frac{G \dot{l}}{2k\pi}, \quad \text{soit} \quad T^{(1)} = -\left(\frac{G \dot{l}}{2k\pi}\right) \text{Log } r,$$

quelle que soit l'expression de l'énergie libre  $W(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ .

En particulier, un développement au second ordre de l'énergie sous la forme habituelle :

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, T - T_\bullet) = \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}) - 3K\alpha(T - T_0) \varepsilon_{kk} - \left(\frac{c}{2T_0}\right) (T - T_0)^2,$$

donne la même singularité en  $T^{(1)}$ .



Examinons enfin les cas particuliers des transformations isotherme et adiabatique. L'équation thermique (15) doit être alors supprimée.

Si la transformation est isotherme  $T=T_0$  en tout point du solide, la résolution du problème mécanique permet de calculer la répartition de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , d'où la répartition de l'énergie  $W$  et de l'entropie  $S$ . Dans le cas général la fonction  $W(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$  dépend de  $T$  d'une manière quelconque, les seules restrictions correspondent à l'intégrabilité de l'entropie  $S = -(\partial W / \partial T)(\boldsymbol{\varepsilon}, T_0) \geq 0$ . Pour certains choix de  $W(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ , la fonction  $T\dot{S}$  n'est pas intégrable et l'énoncé du second principe doit être donné en terme de production d'entropie (Rice [17], Gurtin [12]). L'analyse mécanique nous donne,  $\gamma_0$  étant négligé :

$$(49) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}, T_0) d\Omega + G \dot{l} + \dot{C} = P_e,$$

où  $G$  est calculé selon (8).

Comme :

$$U = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}, T_0) d\Omega + \int_{\Omega} T_0 S d\Omega,$$

le premier principe et la relation (49) conduisent à :

$$(50) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} S d\Omega - \frac{P_{\text{cél}}}{T_0} = \frac{G \dot{l}}{T_0},$$

$G \dot{l}$  est alors la dissipation totale du système d'après l'énoncé général du second principe.

Si la transformation est adiabatique  $S=S_0$  en tout point du solide, la relation  $\boldsymbol{\sigma} = \partial e / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $e(\boldsymbol{\varepsilon}, S)$  désigne l'énergie interne, permet de calculer la répartition de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , d'où la répartition de l'énergie  $e$  et de la température  $T$ . Dans le cas général, la fonction  $e(\boldsymbol{\varepsilon}, S)$  dépend de  $S$  d'une manière quelconque, la seule restriction correspond à la positivité de la température  $T = \partial e / \partial S \geq 0$ .

L'analyse mécanique nous donne :

$$(51) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} e(\boldsymbol{\varepsilon}, S_0) d\Omega + G \dot{l} + \dot{e} = P_e,$$

où  $G$  est calculé par une relation analogue à (8) dans laquelle on doit remplacer  $W(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$  par  $e(\boldsymbol{\varepsilon}, S_0)$ .

Les relations (4) donnent dans ce cas  $D = G \dot{l}$ .

Souvent la condition  $T \geq 0$  n'est pas respectée. Par exemple un développement au second ordre de l'énergie donne :

$$S_0 = 3 K \alpha \varepsilon_{kk} + \left( \frac{c}{T_0} \right) (T - T_0),$$

de sorte que  $T$  a la singularité en  $r^{-1/2}$  et négatif (!). L'hypothèse d'adiabaticité n'est pas alors envisageable.

## 6. Conclusion

Nous avons montré que la propagation de fissure est accompagnée de production de chaleur à la pointe de la fissure. Le taux d'énergie dissipée en rupture, déduite éventuellement des pertes par rayonnement ponctuel, est dissipé en chaleur par conduction.

Cette nouvelle interprétation du taux  $(G - 2\gamma_0)\dot{l}$  nous a permis d'écrire les équations thermomécaniques du problème de l'évolution d'un solide ayant une fissure en propagation. Ce sont des équations non linéaires et couplées à deux niveaux. D'une part, les champs mécaniques et thermiques sont couplés en chaque point de la structure par la présence des coefficients thermoélastiques et de la puissance dissipée. D'autre part, il y a couplage entre ces champs au niveau de la fissure par la puissance dissipée  $(G - 2\gamma_0)\dot{l}$  définie en fonction des valeurs asymptotiques des champs mécaniques. La quantité globale  $G$  est une inconnue du problème d'évolution.

Dans le cas d'un solide élastique, le développement asymptotique de la solution thermomécanique est donné jusqu'à l'ordre 2. Nous trouvons que le champ  $T^{(1)}$  est singulier, le champ  $\mathbf{u}^{(1)}$  a la même singularité que celle obtenue en dynamique isotherme. Par contre, le champ  $\mathbf{u}^{(2)}$  est modifié par rapport à la solution isotherme, le champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  correspondant est singulier, tandis qu'il est régulier dans le cas isotherme. Le champ  $T^{(2)}$  présente des distorsions en mode mixte et des discontinuités dans certains cas. L'étude asymptotique du champ de température donne la possibilité d'accéder aux facteurs d'intensité des contraintes. Il est possible de découpler les deux modes I et II par l'étude des isothermes. Des progrès récents dans les

techniques de mesure par thermographie infrarouge ([2], [3]) offrent une voie nouvelle pour l'étude expérimentale de la rupture. Notre étude montre que cette voie est prometteuse.

## REFERENCES

- [1] ACHENBACH J. D. et BAZANT Z. P. — *Elastodynamic Near Tip Stress and Displacements Fields for Rapidly Propagating Cracks in orthotropic Materials* (*J. Appl. Mech.*, vol. 97, 1975, p. 183-189).
- [2] BLANC R. H. et GIACOMETTI E., *Infrared Stroboscopy. A Method for the Study of Thermomechanical Behaviour of Materials and Structures at High Rates of Strain.* (*Int. J. Solids and Struct.* (à paraître)).
- [3] BOUC R., CHEZEAX J. C., GIACOMETTI E. et NAYROLLES B., *Repérage et estimation des sources de chaleur par thermovision* (à paraître).
- [4] BUI H. D., *Mécanique de la Rupture Fragile*, Masson, Paris, 1978.
- [5] BUI H. D., JARIC J. et RADENKOVIC D., *Loi de conservation en thermoélasticité linéaire*, Rapport interne n° 3, Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole polytechnique, 1977.
- [6] BUI H. D., EHRLACHER A. et NGUYEN Q. S., *Propagation des fissures en thermoélasticité dynamique* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 289, série B, 1979, p. 211-214).
- [7] CARSLAW H. S. et JAEGER J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 1959.
- [8] ERDOGAN F., *Crack Propagation Theory* (*Fracture*, vol. 2, LIEBOWITZ H., éd., Acad. Press, 1968, p. 498-592).
- [9] ESHELBY J. D., *The Continuum Theory of Lattice Defects* (*Solid State Phys.*, vol. 3, 1956, p. 79-144).
- [10] FREUND L. B., *Energy Flux Into the Tip of an Extending Crack in an Elastic Solid* (*J. Elasticity*, vol. 2, 1972, p. 341-350).
- [11] FULLER K. N. G., FOX P. G. et FIELD J. E., *The Temperature Rise at the Tip of Fast Moving Cracks in Glassy Polymers* (*Proc. R. Soc.*, A 341, 1975, p. 537-551).
- [12] GERMAIN P., *Cours de mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1973.
- [13] GURTIN M. E., *Thermodynamics and the Griffith Criterion for Brittle Fracture* (*Int. J. Solids and Struct.*, vol. 15, 1979, p. 553-560).
- [14] HALPHEN B. et NGUYEN Q. S., *Sur les matériaux standards généralisés* (*J. Mécan.*, vol. 14, 1975, p. 39-63).
- [15] JOHNSON K. L., KENDALL K. et ROBERTS A. D., *Surface Energy and the Contact of Elastic Solids* (*Proc. R. Soc. London*, A 324, 1971, p. 301-313).
- [16] NGUYEN Q. S., *Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture* (*J. Mécan.*, vol. 19, n° 2, 1980, p. 363-386).
- [17] NGUYEN Q. S., *Une description thermodynamique du problème de fissure mobile* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 288, série B, p. 201-204).
- [18] RICE J. R., *Thermodynamic of the Quasi-Static Growth of Griffith Cracks* (*J. Mec. Phys. Solids*, vol. 26, 1978, p. 61-78).
- [19] RICE J. R., *Mathematical Analysis of the Mechanics of Fracture* (*Fracture*, vol. 2, LIEBOWITZ, H., éd., 1968, p. 191-308).

- [20] TOMASHEVSKII E. D., EGOROV E. A. et SAVOSTIN A. Y., *Thermal Effects During Fracture in Polymers (Int. J. Fracture*, vol. 11, n° 5, 1975, p. 817-827).
- [21] WEICHERT R. et SCHÖNERT K., *On the Temperature Rise at the Tip of a Fast Running Crack (J. Mech. Phys. Solids*, vol. 22, 1974, p. 127-133).
- [22] WEICHERT R. et SCHÖNERT K., *Heat Generation at the Tip of a Moving Crack (J. Mech. Phys. Solids*, vol. 26, 1978, p. 151-162).
- [23] YOFFE E. H., *The Moving Griffith Crack (Phil. Mag.*, vol. 42, 1951, p. 739-750).