



HAL
open science

Suites diagopentagonales - Partie 2: Le cas général

David Pouvreau, Dominique Tournès

► **To cite this version:**

David Pouvreau, Dominique Tournès. Suites diagopentagonales - Partie 2: Le cas général. *Quadrature*, 2024, *Quadrature*, 2024 (131), pp.25-33. hal-04533693

HAL Id: hal-04533693

<https://hal.science/hal-04533693>

Submitted on 5 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Suites diagopentagonales – Partie 2 : le cas général

Par David Pouvreau¹ et Dominique Tournès²

1. Introduction

Soit \mathbb{P} un plan affine muni d'une structure métrique au moyen d'une distance d arbitraire, par exemple la distance euclidienne usuelle. La notion de convergence utilisée ici le sera soit au sens de la topologie induite par d sur \mathbb{P} (lorsqu'il s'agit de suites de points), soit au sens de la topologie naturellement induite par d sur le produit cartésien \mathbb{P}^5 .

Les cinq diagonales d'un pentagone strictement convexe $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$ de \mathbb{P} se coupent en cinq points intérieurs à \mathcal{P} formant un pentagone strictement convexe \mathfrak{D}_1 de sommets $(D_k^{(1)})_{1 \leq k \leq 5}$ définis par :

$$D_1^{(1)} = (A_2A_4) \cap (A_3A_5), \quad D_2^{(1)} = (A_1A_4) \cap (A_3A_5), \quad D_3^{(1)} = (A_2A_5) \cap (A_1A_4), \\ D_4^{(1)} = (A_2A_5) \cap (A_1A_3), \quad D_5^{(1)} = (A_2A_4) \cap (A_1A_3).$$

On dit que \mathfrak{D}_1 est le diagopentagone de \mathcal{P} et que pour tout $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, $D_k^{(1)}$ est le sommet de \mathfrak{D}_1 correspondant à A_k . La suite diagopentagonale de \mathcal{P} est la suite de pentagones strictement convexes $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par la construction récurrente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_0 = \mathcal{P} \quad (\forall k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket, D_k^{(0)} = A_k) \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathfrak{D}_{n+1} = (D_k^{(n+1)})_{1 \leq k \leq 5} \text{ est le diagopentagone de } \mathfrak{D}_n = (D_k^{(n)})_{1 \leq k \leq 5} \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le pentagone \mathfrak{D}_n est appelé le diagopentagone d'ordre n de \mathcal{P} .

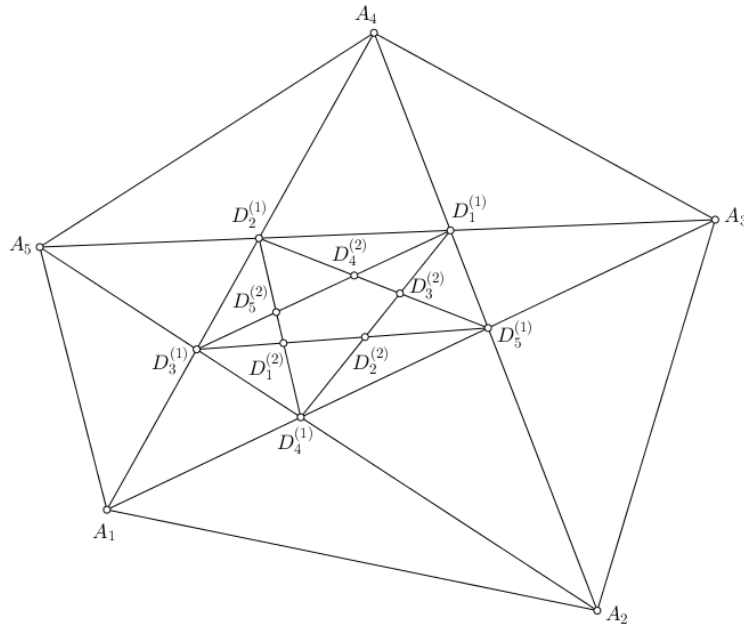


Figure 1 : Trois premiers termes d'une suite diagopentagonale d'un pentagone strictement convexe

La première partie de cet article ([5]) a notamment montré que si \mathcal{P} est « quadrisocèle » en A_1 , c'est-à-dire si $A_2A_3A_4A_5$ est un carré et si $A_1A_2A_5$ est isocèle en A_1 , alors, O désignant

¹ Professeur agrégé de mathématiques en CPGE, Lycée Roland Garros, Le Tampon, La Réunion. Email : pvrdd@gmail.com

² Professeur de mathématiques à l'Université de La Réunion. Email : dominique.tournes@univ-reunion.fr

l'intersection de (A_2A_4) et de (A_3A_5) et x désignant la distance de A_1 à (A_3A_5) (distance alors appelée le paramètre de \mathcal{P}), la suite diagopentagonale de \mathcal{P} converge vers le point $L(x)$ de $[OA_1]$ de distance à O égale à

$$\frac{1}{2} \left(x^2 + 4x + 2 - \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x} \right)$$

Avec ici un abus de langage dont on conviendra dans cette seconde partie encore, qui consiste à entendre la convergence annoncée comme celle de la suite $(D_1^{(n)}; D_2^{(n)}; D_3^{(n)}; D_4^{(n)}; D_5^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ des quintuplets de sommets des termes de la suite diagopentagonale de \mathcal{P} dans l'espace métrique \mathbb{P}^5 . Ce résultat a été obtenu sans utiliser de transformation géométrique, par la résolution d'un système récurrent non linéaire de fractions rationnelles à cinq suites inconnues et la détermination de la limite des cinq suites ainsi impliquées. Cette première partie s'était achevée sur la question de la possibilité d'interpréter ce résultat en termes géométriques et, surtout, de le généraliser à tous les pentagones strictement convexes. Il sera établi ici que la solution dans le cas des pentagones quadrisocèles peut en fait se retrouver par une approche plus systématique et géométrique utilisant le plan projectif. Nous montrerons ensuite que cette approche projective permet de généraliser à tous les pentagones strictement convexes l'étude réalisée et la conclusion obtenue sur cette famille infinie de cas particuliers. Le lecteur trouvera par exemple des détails sur les éléments théoriques sous-jacents à l'étude qui suit dans [7]. Des figures dynamiques sont aussi mises à disposition dans [1] en complément des figures qui suivent.

2. Homographies diagopentagonales

En géométrie affine, la généralisation visée nécessiterait l'utilisation de quatre variables et impliquerait des calculs algébriques fort peu sympathiques. Il s'avère plus efficace de raisonner dans le plan projectif au moyen du concept d'homographie, ce qui, comme le montrent les propositions suivantes, permet de se ramener à un problème à deux variables accessible à une résolution algébrique qui a de surcroît le mérite d'être interprétable géométriquement.

Proposition 1

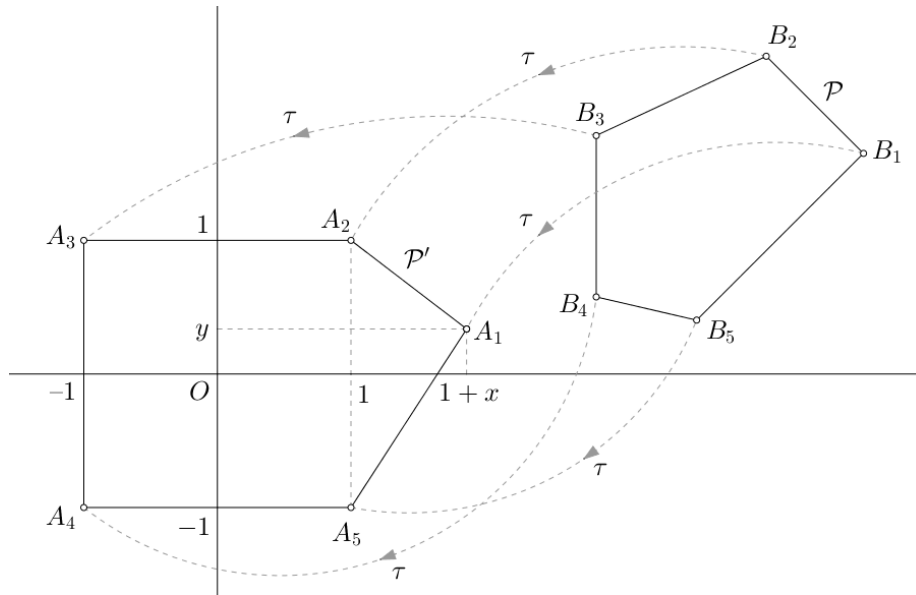
Soit $A_2A_3A_4A_5$ un carré de centre O . On munit le plan projectif du repère \mathcal{R} centré en O et d'axes parallèles à ses côtés, dans lequel $A_2(1; 1)$, $A_3(-1; 1)$, $A_4(-1; -1)$ et $A_5(1; -1)$.

Pour tout pentagone strictement convexe $\mathcal{P} = B_1B_2B_3B_4B_5$, il existe une unique homographie τ qui transforme B_k en A_k pour tout $k \in \llbracket 2; 5 \rrbracket$.

Soient $A_1 = \tau(B_1)$ et \mathcal{P}' le pentagone $A_1A_2A_3A_4A_5$. Alors τ transforme \mathcal{P} en \mathcal{P}' et il existe un unique couple $(x; y) \in]0; +\infty[\times]-1; 1[$ tel que A_1 ait pour coordonnées $(1 + x; y)$ dans le repère \mathcal{R} .

On dit que \mathcal{P}' , muni de \mathcal{R} , est le *pentagone canonique* associé à \mathcal{P} . On appelle $(x; y)$ les *paramètres* de cette représentation et on note $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_{x;y}$.

Démonstration. Les points B_2, B_3, B_4, B_5 étant trois à trois non alignés, c'est un résultat classique ([7], p. 5) qu'il existe une unique homographie τ qui transforme ces quatre sommets de \mathcal{P} en chacun des quatre sommets (trois à trois non alignés) A_2, A_3, A_4 et A_5 respectivement. Cette même homographie transforme alors le cinquième sommet B_1 de \mathcal{P} en un unique point A_1 du plan projectif, donc elle transforme aussi \mathcal{P} en \mathcal{P}' , lequel est lui-même strictement convexe ([3], p. 286). Dans le repère projectif déterminé de manière unique par les coordonnées indiquées des sommets du carré, ce point A_1 a alors, pour d'évidentes raisons de convexité, ses coordonnées qui sont à leur tour déterminées sous la forme $(1 + x; y)$ avec $(x; y) \in]0; +\infty[\times]-1; 1[$.


 Figure 2 : Représentation canonique d'un pentagone strictement convexe \mathcal{P}

Proposition 2 et définition

Il existe pour tout pentagone strictement convexe \mathcal{P} une unique homographie h qui transforme les sommets de \mathcal{P} en les sommets correspondants de son diagopentagone et cette même homographie transforme chaque sommet de tout pentagone \mathcal{D}_n de la suite diagopentagonale de \mathcal{P} en le sommet correspondant du diagopentagone \mathcal{D}_{n+1} de \mathcal{D}_n .

On appellera ici h l'*homographie diagopentagonale* de \mathcal{P} .

Une matrice $H_{x;y}$ de l'homographie diagopentagonale $h_{x;y}$ d'un pentagone canonique de paramètres $(x; y) \in \Delta =]0; +\infty[\times]-1; 1[$ dans le repère projectif associé est :

$$\begin{pmatrix} -(1+x)(1+y)(1-y) & -(2+x)xy & (1+x-y)(1+x+y) \\ -y(1+y)(1-y) & -x(1+x+y^2) & y(1+x-y)(1+x+y) \\ -(1+y)(1-y) & -(2+x)xy & 1+3x+x^2-y^2-xy^2 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer la vérité de la proposition pour un pentagone canonique $A_1A_2A_3A_4A_5$ de paramètres $(x; y)$. Plaçons-nous dans le repère du plan projectif associé, défini dans la proposition 1. On initialise la suite diagopentagonale par :

$$D_1^{(0)} \begin{pmatrix} 1+x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}; D_2^{(0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; D_3^{(0)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; D_4^{(0)} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; D_5^{(0)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple par calcul barycentrique comme dans la partie 1, on obtient ensuite :

$$D_1^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; D_2^{(1)} \begin{pmatrix} \frac{1+x-y}{3+x+y} \\ \frac{1+x-y}{3+x+y} \\ 1 \end{pmatrix}; D_3^{(1)} \begin{pmatrix} \frac{1}{x-2y} \\ -\frac{1}{2+x} \\ 1 \end{pmatrix}; D_4^{(1)} \begin{pmatrix} \frac{1}{x+2y} \\ \frac{1}{2+x} \\ 1 \end{pmatrix}; D_5^{(1)} \begin{pmatrix} \frac{1+x+y}{3+x-y} \\ \frac{1+x+y}{3+x-y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par le même argument que dans la preuve de la proposition 1, il existe une unique homographie $h_{x;y}$ qui, pour chaque $j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, transforme $D_j^{(0)}$ en $D_j^{(1)}$. Dans le repère projectif choisi, une

matrice $H_{x;y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de cette homographie s'obtient en traduisant ces transformations. Il existe $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ (facteurs d'homogénéité) tel que :

$$\begin{aligned}
 H_{x;y} \begin{pmatrix} 1+x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)a_{11} + ya_{12} + a_{13} = 0 \\ (1+x)a_{21} + ya_{22} + a_{23} = 0 \\ (1+x)a_{31} + ya_{32} + a_{33} = \lambda_1 \end{cases} \\
 H_{x;y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{1+x-y}{3+x+y} \\ -\frac{1+x-y}{3+x+y} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = \frac{1+x-y}{3+x+y} \lambda_2 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = -\frac{1+x-y}{3+x+y} \lambda_2 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = \lambda_2 \end{cases} \\
 H_{x;y} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x-2y}{2+x} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{11} + a_{12} + a_{13} = \lambda_3 \\ -a_{21} + a_{22} + a_{23} = -\frac{x-2y}{2+x} \lambda_3 \\ -a_{31} + a_{32} + a_{33} = \lambda_3 \end{cases} \\
 H_{x;y} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x+2y}{2+x} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{11} - a_{12} + a_{13} = \lambda_4 \\ -a_{21} - a_{22} + a_{23} = \frac{x+2y}{2+x} \lambda_4 \\ -a_{31} - a_{32} + a_{33} = \lambda_4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les neuf coefficients a_{ij} de $H_{x;y}$ apparaissent alors comme les solutions du système de Cramer d'inconnues a_{ij} paramétré par λ_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+x)a_{11} + ya_{12} + a_{13} = 0 \\ (1+x)a_{21} + ya_{22} + a_{23} = 0 \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} - \frac{1+x-y}{3+x+y} a_{31} - \frac{1+x-y}{3+x+y} a_{32} - \frac{1+x-y}{3+x+y} a_{33} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + \frac{1+x-y}{3+x+y} a_{31} + \frac{1+x-y}{3+x+y} a_{32} + \frac{1+x-y}{3+x+y} a_{33} = 0 \\ -a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{31} - a_{32} - a_{33} = 0 \\ -a_{21} + a_{22} + a_{23} - \frac{x-2y}{2+x} a_{31} + \frac{x-2y}{2+x} a_{32} + \frac{x-2y}{2+x} a_{33} = 0 \\ -a_{11} - a_{12} + a_{13} + a_{31} + a_{32} - a_{33} = 0 \\ -a_{21} - a_{22} + a_{23} + \frac{x+2y}{2+x} a_{31} + \frac{x+2y}{2+x} a_{32} - \frac{x+2y}{2+x} a_{33} = 0 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = \lambda_2 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système par l'algorithme de Gauss, qui a été ici assistée par le logiciel de calcul formel Mathematica, fournit le résultat annoncé concernant $H_{x;y}$.

On vérifie de plus que $h_{x;y}(D_5^{(0)}) = D_5^{(1)}$ par : $H_{x;y} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+x+y}{3+x-y} \\ \frac{1+x+y}{3+x-y} \\ 1 \end{pmatrix}$ (cette égalité, ainsi que les

suites, doit être comprise en coordonnées homogènes, c'est-à-dire à un facteur multiplicatif près). Ainsi, $h_{x;y}$ transforme les sommets du pentagone canonique $\mathcal{P}_{x;y}$ initial en les sommets correspondants de son diagopentagone. Cherchons les transformés des sommets de ce

diagopentagone par $h_{x;y}$. On a : $H_{x;y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1+x+y)(1+x-y)}{1+3x+x^2-y^2-xy^2} \\ \frac{y(1+x+y)(1+x-y)}{1+3x+x^2-y^2-xy^2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Or, indépendamment de ce calcul,

on trouve que le point $D_1^{(2)}$, intersection de $(D_2^{(1)}D_4^{(1)})$ et $(D_3^{(1)}D_5^{(1)})$, a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \frac{(1+x+y)(1+x-y)}{1+3x+x^2-y^2-xy^2} \\ \frac{y(1+x+y)(1+x-y)}{1+3x+x^2-y^2-xy^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
, ce qui montre que $h_{x;y}$ transforme $D_1^{(1)}$ en $D_1^{(2)}$. On montre de même que

$h_{x;y}(D_j^{(1)}) = D_j^{(2)}$ pour tout $j \in \llbracket 2; 5 \rrbracket$ par :

$$H_{x;y} \begin{pmatrix} \frac{1+x-y}{3+x+y} \\ \frac{1+x-y}{3+x+y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1+x+y)(1+x-y)}{1+4x+x^2-y^2-2xy} \\ \frac{(x+2y)(1+x+y)(1+x-y)}{(2+x)(1+4x+x^2-y^2-2xy)} \\ 1 \end{pmatrix} ; H_{x;y} \begin{pmatrix} \frac{1+x-y}{3+x-3y} \\ -\frac{x-2y}{2+x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+x-y}{3+x-3y} \\ \frac{(x+2y)(1+x-y)}{(2+x)(3+x-3y)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{x;y} \begin{pmatrix} \frac{1}{x+2y} \\ \frac{1}{2+x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+x+y}{3+x+3y} \\ -\frac{(x-2y)(1+x+y)}{(2+x)(3+x+3y)} \\ 1 \end{pmatrix} ; H_{x;y} \begin{pmatrix} \frac{1+x+y}{3+x-y} \\ \frac{1+x+y}{3+x-y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1+x+y)(1+x-y)}{1+4x+x^2-y^2+2xy} \\ -\frac{(x-2y)(1+x+y)(1+x-y)}{(2+x)(1+4x+x^2-y^2+2xy)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout pentagone canonique $\mathcal{P}_{x;y}$, la même homographie $h_{x;y}$ qui transforme $\mathcal{P}_{x;y}$ en son diagopentagone transforme ce dernier en son propre diagopentagone.

Considérons maintenant un pentagone strictement convexe quelconque $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$. Soit τ l'homographie définie dans la proposition 1, qui transforme \mathcal{P} en son pentagone canonique de paramètres $(x; y)$. Comme toute homographie conserve les alignements, $h = \tau^{-1} \circ h_{x;y} \circ \tau$ préserve la propriété de transformation diagopentagonale satisfaite par $h_{x;y}$. En résulte l'hérédité de la proposition « $h^n(A_k) = D_k^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ » pour tout $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$. Puisqu'on a vu que cette proposition est initialisée, on en déduit par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci justifie l'existence et l'unicité de l'homographie diagopentagonale h .

Une preuve purement géométrique de la première partie de la proposition 2 est possible ([3], pp. 209-210). L'avantage de l'approche algébrique entreprise ici est qu'elle fournit un élément crucial pour résoudre le problème avec précision, une matrice de l'homographie. Deux propriétés importantes peuvent toutefois être établies avant d'étudier cette matrice.

Proposition 3

L'homographie diagopentagonale h de tout pentagone strictement convexe \mathcal{P} a au moins un point fixe intérieur à \mathcal{P} .

Démonstration. L'enveloppe convexe des sommets de \mathcal{P} est une partie compacte du plan. La restriction de h à cette partie étant continue, le « théorème du point fixe » de Brouwer s'applique.

Proposition 4

Soit h l'homographie diagopentagonale d'un pentagone $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$ strictement convexe. Si l'une des suites de points $(D_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (h^n(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$ converge, alors sa limite est un point fixe de h .

Démonstration. Si l'une des cinq suites $(h^n(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$, qui est la suite $(D_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'après la proposition 2, est une suite convergeant vers un point L , alors par continuité de h et unicité de la limite : $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(A_k) = h \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} D_k^{(n-1)} \right) = h(L)$.

3. Approche homographique du cas des pentagones quadrisocèles

Avant d'aborder le cas général, il est utile ici de reconsidérer du point de vue homographique la résolution du problème de la convergence diagopentagonale dans le cas des pentagones quadrisocèles. Ceci permettra non seulement de retrouver la solution par cette approche, mais aussi de se familiariser avec le type de calculs nécessaires dans le cas général.

Proposition 5

Soit $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$ un pentagone quadrisocèle en A_1 de paramètre x .

L'homographie diagopentagonale h_x de \mathcal{P} a un unique point fixe intérieur à \mathcal{P} et ce point fixe est la limite $\Omega_1 = L(x)$ de la suite diagopentagonale de \mathcal{P} .

Démonstration. \mathcal{P} est un pentagone canonique de paramètres $(x; 0)$. Une matrice de son homographie diagopentagonale dans le repère projectif associé est, d'après la proposition 2 :

$$H_x = \begin{pmatrix} -(1+x) & 0 & (1+x)^2 \\ 0 & -x(1+x) & 0 \\ -1 & 0 & 1+3x+x^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit ensuite le polynôme caractéristique de cette matrice :

$$\chi_{H_x} : \lambda \mapsto \det(\lambda I_3 - H_x) = \lambda^3 - x\lambda^2 - x(1+x)^2(2+x)\lambda - x^2(1+x)^2(2+x).$$

Rappelons que le discriminant d'un polynôme de degré 3 donné sous la forme générale $aX^3 + bX^2 + cX + d$ est $-27a^3d^2 + 18a^2bcd - 4a^2c^3 - 4ab^3d + ab^2c^2$ ([4], p. 19). Lorsque $a = 1$ et $b = 0$ (cas de l'équation réduite), on retrouve l'expression $-27d^2 - 4c^3$, sans doute plus familière au lecteur. Dans notre cas, après un calcul assisté par Mathematica, on obtient le discriminant du polynôme caractéristique de H_x sous la forme :

$$\delta(x) = 4x^3(1+x)^2(2+x)(4+6x+x^2) \left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2.$$

En résulte clairement : $\forall x > 0, \delta(x) \geq 0$, avec $\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D'où l'existence de trois valeurs propres réelles distinctes lorsque $x \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ce sont les nombres

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{2} \left(2x + x^2 + \sqrt{8x + 16x^2 + 8x^3 + x^4} \right), \quad \lambda_2(x) = \frac{1}{2} \left(2x + x^2 - \sqrt{8x + 16x^2 + 8x^3 + x^4} \right)$$

et $\lambda_3(x) = -x(1+x)$. On trouve alors que les sous-espaces propres (qui sont ici des droites) associés à ces valeurs propres ont pour bases respectives

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(x^2 + 4x + 2 - \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x} \right) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(x^2 + 4x + 2 + \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x} \right) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La première fournit par ses deux premières lignes les coordonnées du point $\Omega_1 = L(x)$, déjà connues avec la partie 1. Tandis que celles des deux autres bases décrivent deux points Ω_2 et Ω_3 du plan projectif qui ne sont pas intérieurs à \mathcal{P} , le troisième étant à l'infini du fait de la nullité de sa troisième coordonnée. Dans le cas singulier où $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, qui est celui canoniquement associé au pentagone régulier, la matrice n'a que deux valeurs propres réelles distinctes, dont l'une est double ; on montre qu'il existe alors une droite de points fixes extérieurs au pentagone initial, celle

formée des points de coordonnées $(2 + \sqrt{5}; \beta)$ où $\beta \in \mathbb{R}$, et un unique point fixe isolé Ω_1 qui est intérieur au pentagone initial, celui de coordonnées $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0)$ qui correspond à la formule générale de $L(x)$ pour $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et au point A_1 de coordonnées $(\varphi; 0)$, où φ est le nombre d'or.

La figure 3 illustre dans le plan projectif le cas commun des pentagones quadrisocèles.

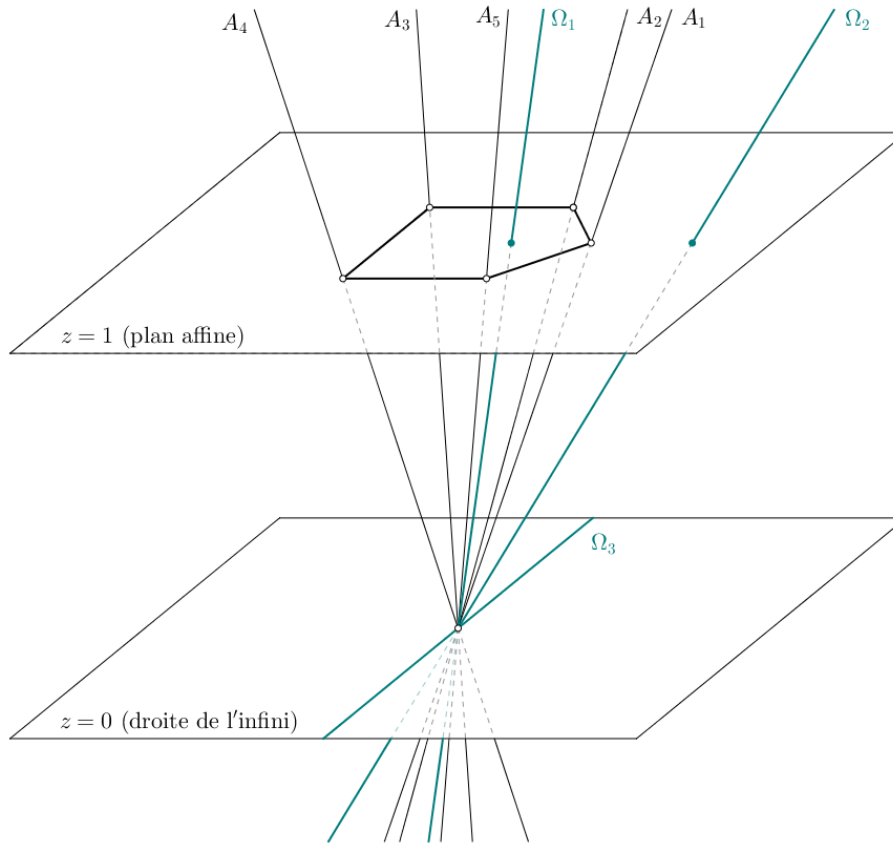


Figure 3 : Pentagone quadrisocèle dans le plan projectif, avec ses points fixes dont l'un à l'infini

La figure 4 illustre dans le plan affine le cas particulier canoniquement associé au pentagone régulier. On y observe au passage que les diagopentagones tendent vers la régularité.

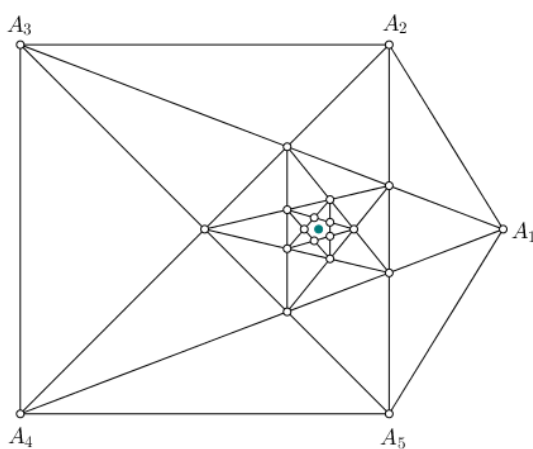


Figure 4 : Cas particulier canoniquement associé au pentagone régulier, avec ses points fixes

4. Approche homographique dans le cas général

Étudions le cas général *via* la forme canonique, en empruntant le même chemin. Cette étude commence par la généralisation de la preuve de la proposition 5 pour obtenir :

Proposition 6

L'homographie diagopentagonale de tout pentagone strictement convexe \mathcal{P} non régulier a exactement trois points fixes.

Plus précisément, soit $H_{x;y}$ une matrice de l'homographie diagopentagonale $h_{x;y}$ du pentagone canonique de \mathcal{P} de paramètres $(x; y) \in \Delta =]0; +\infty[\times]-1; 1[$.

À l'exception du cas $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0\right)$, $H_{x;y}$ a trois valeurs propres réelles distinctes, de sorte que $h_{x;y}$ a trois points fixes distincts, aucun d'entre eux n'étant à l'infini si $y \neq 0$ et un seul d'entre eux étant à l'infini si $y = 0$.

Dans l'unique cas $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0\right)$, qui correspond canoniquement au pentagone régulier (et au cas où le point A_1 a pour coordonnées $(\varphi; 0)$, φ désignant le nombre d'or), il existe une droite de points fixes extérieurs au pentagone initial, celle formée des points de coordonnées $(2 + \sqrt{5}; \beta)$ où $\beta \in \mathbb{R}$, et un unique point fixe isolé qui est intérieur au pentagone initial, celui de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0\right)$.

Démonstration. Nous avons établi l'expression de $H_{x;y}$ avec la proposition 2. On calcule le polynôme caractéristique de cette matrice :

$$\begin{aligned} \chi_{H_{x;y}} : \lambda &\mapsto \det(\lambda I_3 - H_{x;y}) \\ &= \lambda^3 - x(1-y^2)\lambda^2 - x(2+x)(1+2x+x^2-y^2)(1-y^2)\lambda - x^2(2+x)(1+2x+x^2-y^2)(1-y^2)^2. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 3, obtenu par la même méthode que dans le cas particulier $y = 0$ étudié précédemment, s'avère être :

$$\delta(x; y) = \frac{1}{11} x^3 (2+x)(1+x-y)(1+x+y)(1-y^2)^3 R(x; y) S(x; y)$$

$$\text{où } R(x; y) = (9 + 5\sqrt{5})x(x+2)^2 + (18 + 10\sqrt{5} + 22x)(1-y^2)$$

$$\text{et } S(x; y) = (-9 + 5\sqrt{5})x(x+2)^2 + (-18 + 10\sqrt{5} - 22x)(1-y^2).$$

Il est immédiat que $R(x; y) > 0$ pour tout $(x; y) \in \Delta$. Concernant la fonction S , on peut commencer par remarquer que si $-18 + 10\sqrt{5} - 22x = 0$, c'est-à-dire si $x = \frac{-9+5\sqrt{5}}{11}$, alors

$$S(x; y) = S\left(\frac{-9 + 5\sqrt{5}}{11}; y\right) = \frac{16(129 + 20\sqrt{5})}{1331} > 0.$$

Supposons maintenant dans ce qui suit que $x \neq \frac{-9+5\sqrt{5}}{11}$. On peut écrire :

$$S(x; y) = (-18 + 10\sqrt{5} - 22x) \left(\frac{(-1 + \sqrt{5} - 2x)^2 (-2 + 6\sqrt{5} + (-9 + 5\sqrt{5})x)}{4(-18 + 10\sqrt{5} - 22x)} - y^2 \right).$$

Considérons alors la fonction g définie sur $]0; +\infty[\setminus \left\{ \frac{-9+5\sqrt{5}}{11} \right\}$ par :

$$g(x) = \frac{(-1 + \sqrt{5} - 2x)^2(-2 + 6\sqrt{5} + (-9 + 5\sqrt{5})x)}{4(-18 + 10\sqrt{5} - 22x)}.$$

Le calcul puis l'étude du signe de sa dérivée et celle de ses variations montrent que g s'annule en $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, qu'elle est strictement supérieure à 1 sur $]0; \frac{-9+5\sqrt{5}}{11}[$ et qu'elle est strictement inférieure à 0 sur $]\frac{-9+5\sqrt{5}}{11}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}[\cup]\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty[$. Comme $y \in]-1; 1[$, il en résulte que $g(x) - y^2$ est strictement positif sur $]0; \frac{-9+5\sqrt{5}}{11}[$ et strictement négatif sur $]\frac{-9+5\sqrt{5}}{11}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$ aussi bien que sur $]\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty[$. $-18 + 10\sqrt{5} - 22x$ est par ailleurs strictement positif sur $]0; \frac{-9+5\sqrt{5}}{11}[$ et strictement négatif sur $]\frac{-9+5\sqrt{5}}{11}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$ aussi bien que sur $]\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty[$. On en déduit que $S(x; y)$ est strictement positif pour tout $x \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Enfin, pour $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a $S(x; y) = S\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; y\right) = (7 + \sqrt{5})y^2 \geq 0$. Par conséquent : $\forall (x; y) \in \Delta$, $\delta(x; y) \geq 0$, avec $\delta(x; y) = 0 \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0\right)$.

Finalement, on a bien montré ainsi sans chercher à les calculer qu'hormis dans cet unique dernier cas déjà traité dans la preuve de la proposition 5, les trois valeurs propres de $H_{x,y}$ sont des réels distincts. Une démonstration alternative, qui utilise une autre suite de pentagones que la suite diagopentagonale, est possible et fournie dans ([3], pp. 214-217). On peut en fait, et c'est nécessaire pour parvenir précisément au but visé, expliciter les trois valeurs propres comme suit au moyen des formules de Cardan et, là encore, d'un calcul formel assisté par Mathematica.

$$\text{Posons : } a = \frac{1}{3}x(1 - y^2); \quad b = -\frac{1}{9}x(1 - y^2)[(6 + 4x)(1 - y^2) + 12x + 12x^2 + 3x^3];$$

$$c = \frac{1}{27}x^2(1 - y^2)^2[(36 + 19x)(1 - y^2) + 72x + 72x^2 + 18x^3].$$

$$\text{En notant } j = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \text{ on obtient alors les valeurs propres } \lambda_1 = a + \sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}} - \frac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}}};$$

$$\lambda_2 = a + j\sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}} - j^2\frac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}}} \text{ et } \lambda_3 = a + j^2\sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}} - j\frac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}}}.$$

Ces formules laissent entrevoir la grande difficulté de la détermination des vecteurs propres sans recours au calcul formel assisté. Le cas $y = 0$, avec un point fixe à l'infini, a été traité au 3. Supposons $y \neq 0$ et posons $k = x(1 - y^2)$. On vérifie d'abord que

$$(\lambda_1 + k)(\lambda_2 + k)(\lambda_3 + k) = 2x^3(1 - y^2)^3 > 0.$$

Ce qui permet de s'assurer qu'aucun des nombres $\lambda_s + k$ n'est nul. On calcule alors qu'un vecteur directeur de la droite propre associée à λ_s est

$$V_s = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_s - x(1 - y^2)}{\lambda_s + x(1 - y^2)} \\ \frac{-\lambda_s^2 + \lambda_s x(2 + x) + x(2 + x)(1 - y^2)(1 + x - y^2)}{x(2 + x)y(\lambda_s + x(1 - y^2))} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $y \neq 0$, les trois points fixes Ω_s de $h_{x,y}$ ne sont donc pas des points à l'infini et leurs coordonnées dans le repère cartésien classique sont fournies par les deux premières coordonnées de V_s .

Proposition 7

L'homographie diagopentagonale de tout pentagone strictement convexe \mathcal{P} a un unique point fixe Ω intérieur à \mathcal{P} .

Démonstration. Identifions \mathcal{P} à sa représentation canonique $\mathcal{P}_{x;y}$.

Dans le cas particulier de $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0\right)$ canoniquement associé au pentagone régulier, la proposition 6 a déjà établi l'unicité du point fixe Ω à l'intérieur de $\mathcal{P}_{x;y}$. Plus généralement, nous allons montrer que parmi les trois points fixes formulés dans la preuve de la proposition 6, le seul à être intérieur à $\mathcal{P}_{x;y}$ est toujours celui noté Ω_1 .

Commençons par observer que pour tout $(x; y) \in \Delta$, $b < 0$ et $c > 0$. On a vu que si $(x; y) \neq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0\right)$, les trois valeurs propres de la matrice de l'homographie diagopentagonale de $\mathcal{P}_{x;y}$ sont des réels distincts, donc $b^3 + c^2 < 0$. En utilisant la détermination continue de la racine cubique sur le plan complexe privé des réels négatifs, on peut alors écrire :

$$\sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}} = \sqrt[3]{c + i\sqrt{-b^3 - c^2}} = \sqrt{-b} \sqrt[3]{\frac{c}{-b\sqrt{-b}} + i \frac{\sqrt{-b^3 - c^2}}{-b\sqrt{-b}}}.$$

Observons de plus qu'on a :

$$\frac{c}{-b\sqrt{-b}} > 0 ; \frac{\sqrt{-b^3 - c^2}}{-b\sqrt{-b}} > 0 ; \left(\frac{c}{-b\sqrt{-b}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-b^3 - c^2}}{-b\sqrt{-b}}\right)^2 = 1.$$

S'en déduit l'existence d'un unique $\theta \in]0; \pi/2[$ tel que :

$$\frac{c}{-b\sqrt{-b}} = \cos(\theta) ; \frac{\sqrt{-b^3 - c^2}}{-b\sqrt{-b}} = \sin(\theta).$$

En découle ensuite $\sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}} = \sqrt{-b} \sqrt[3]{e^{i\theta}} = \sqrt{-b} e^{i\frac{\theta}{3}}$, puis :

$$\lambda_1 = a + \sqrt{-b} e^{i\frac{\theta}{3}} - \frac{b}{\sqrt{-b} e^{i\frac{\theta}{3}}} = a + \sqrt{-b} \left(e^{i\frac{\theta}{3}} + e^{-i\frac{\theta}{3}} \right) = a + 2\sqrt{-b} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

On montre de même que :

$$\lambda_2 = a + 2\sqrt{-b} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \text{ avec } \frac{\theta + 2\pi}{3} \in \left] \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right[$$

$$\lambda_3 = a + 2\sqrt{-b} \cos\left(\frac{\theta - 2\pi}{3}\right) \text{ avec } \frac{\theta - 2\pi}{3} \in \left] -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2} \right[.$$

Supposons maintenant $y \neq 0$ afin d'exclure tout éventuel point fixe à l'infini, ce qui est sans inconvénient puisque le cas $y = 0$ a déjà été traité. Comme $\theta/3 \in]0; \pi/6[$, on a $\lambda_1 > 0$ puisqu'il est aussi clair que $a > 0$. Il devient alors immédiat que l'abscisse de Ω_1 satisfait :

$$\frac{\lambda_1 - x(1 - y^2)}{\lambda_1 + x(1 - y^2)} < 1.$$

Par ailleurs, nous avons vu dans la preuve de la proposition 6 que $(\lambda_1 + k)(\lambda_2 + k)(\lambda_3 + k) > 0$. Comme on sait déjà que $\lambda_1 + k > 0$, on peut donc affirmer que $\lambda_2 + k$ et $\lambda_3 + k$ sont de même signe. Or, on peut aussi observer que $(\lambda_1 + k)(\lambda_2 + k) + (\lambda_1 + k)(\lambda_3 + k) + (\lambda_2 + k)(\lambda_3 + k)$

$$= -x(1 - y^2)(4x^2 + x^3 + 2(1 - y^2) + 4xy^2) < 0.$$

En résulte l'impossibilité que $\lambda_2 + k$ et $\lambda_3 + k$ soient tous les deux positifs : ces deux nombres sont donc négatifs. On en déduit que pour $s \in \llbracket 2; 3 \rrbracket$, l'abscisse de Ω_s est : $\frac{\lambda_s - x(1 - y^2)}{\lambda_s + x(1 - y^2)} > 1$. Un point fixe intérieur à $\mathcal{P}_{x,y}$ de l'homographie diagopentagonale h a une abscisse inférieure à 1 puisqu'il est à l'intérieur du premier diagopentagone de $\mathcal{P}_{x,y}$, donc Ω_2 et Ω_3 ne sont pas intérieurs à $\mathcal{P}_{x,y}$. Comme on sait d'après la proposition 3 que h a au moins un point fixe intérieur à $\mathcal{P}_{x,y}$, ce point ne peut être que Ω_1 , qui est donc l'unique point fixe de h intérieur à $\mathcal{P}_{x,y}$.

On peut désormais énoncer le théorème de « convergence diagopentagonale » suivant :

Théorème

La suite diagopentagonale de tout pentagone strictement convexe \mathcal{P} converge vers l'unique point fixe Ω de son homographie diagopentagonale qui est intérieur à \mathcal{P} .

On pourra appeler Ω le *centre diagonal* de \mathcal{P} .

$(x; y)$ désignant les paramètres de la représentation canonique de \mathcal{P} par l'homographie τ , on a $\Omega = \tau^{-1}(\Omega_1)$, où le point Ω_1 est déterminé par la proposition 5 si $y = 0$ et, sinon, par :

$$\Omega_1 \left(\frac{\lambda_1 - x(1 - y^2)}{\lambda_1 + x(1 - y^2)}; \frac{-\lambda_1^2 + \lambda_1 x(2 + x) + x(2 + x)(1 - y^2)(1 + x - y^2)}{x(2 + x)y(\lambda_s + x(1 - y^2))} \right)$$

avec

$$\lambda_1 = a + \sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}} - \frac{b}{\sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + c^2}}};$$

$$a = \frac{1}{3}x(1 - y^2) \quad ; \quad b = -\frac{1}{9}x(1 - y^2)[6(1 - y^2) + 4x(1 - y^2) + 12x + 12x^2 + 3x^3];$$

$$c = \frac{1}{27}x^2(1 - y^2)^2[36(1 - y^2) + 19x(1 - y^2) + 72x + 72x^2 + 18x^3].$$

Démonstration. Considérons un pentagone strictement convexe $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$, son homographie diagopentagonale h et l'unique point fixe Ω de h intérieur à \mathcal{P} . La suite $\left((D_1^{(n)}, D_2^{(n)}, D_3^{(n)}, D_4^{(n)}, D_5^{(n)}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'une partie compacte (car fermée et bornée) de \mathbb{P}^5 . On peut donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, en extraire une suite qui converge vers un élément $(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)$ de \mathbb{P}^5 . Notons $\left((D_1^{(\psi(n))}, D_2^{(\psi(n))}, D_3^{(\psi(n))}, D_4^{(\psi(n))}, D_5^{(\psi(n))}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ cette suite extraite, où $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. On obtient de la sorte une suite extraite $(\mathfrak{D}_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite diagopentagonale $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{P} qui converge vers un polygone $\mathcal{Q} = L_1L_2L_3L_4L_5$; lequel est, d'après [5] (théorème 1), la frontière d'une partie convexe et compacte d'aire nulle du plan, donc un segment. De plus, le point Ω étant inclus dans l'enveloppe convexe de tous les diagopentagones, il appartient au segment \mathcal{Q} .

Remarquons alors que $\left((D_1^{(\psi(n)+1)}, D_2^{(\psi(n)+1)}, D_3^{(\psi(n)+1)}, D_4^{(\psi(n)+1)}, D_5^{(\psi(n)+1)}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est aussi la suite $\left((h(D_1^{(\psi(n))}), h(D_2^{(\psi(n))}), h(D_3^{(\psi(n))}), h(D_4^{(\psi(n))}), h(D_5^{(\psi(n))})) \right)_{n \in \mathbb{N}}$, converge en raison de la continuité de h vers l'élément $(h(L_1); h(L_2); h(L_3); h(L_4); h(L_5))$ de \mathbb{P}^5 . La suite $(\mathfrak{D}_{\psi(n)+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge ainsi vers le polygone $h(\mathcal{Q}) = h(L_1)h(L_2)h(L_3)h(L_4)h(L_5)$. L'enveloppe convexe de $\mathfrak{D}_{\psi(n)+1}$ étant (par stricte croissance de ψ) incluse dans celle de $\mathfrak{D}_{\psi(n)}$, qui est elle-même incluse dans celle de $\mathfrak{D}_{\psi(n)+1}$, il en résulte que $h(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.

Supposons désormais que les points L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 ne sont pas confondus. Le segment Q est alors de la forme $[L_j L_k]$ avec $L_j \neq L_k$. L'homographie h transformant une extrémité du segment en une autre, cela laisse deux possibilités : soit $h(L_j) = L_j$ et $h(L_k) = L_k$, soit $h(L_j) = L_k$ et $h(L_k) = L_j$. Le premier cas est exclu : nous avons établi que h a un unique point fixe intérieur à \mathcal{P} . Dans le second cas, on obtient $h^2(L_j) = L_j$ et $h^2(L_k) = L_k$. Mais on a aussi $h^2(\Omega) = \Omega$, puisque $h(\Omega) = \Omega$. Si Ω était distinct de L_j et de L_k , l'homographie h^2 aurait ainsi trois points fixes distincts et alignés. Par conséquent, et ce en vertu d'une propriété classique des homographies ([7], p. 39), la droite $(L_j L_k)$ serait une droite de points fixes de h^2 . Mais alors cette droite couperait \mathcal{P} en deux points fixes de h^2 , ce qui est impossible puisque h^2 transforme \mathcal{P} en son diagopentagone \mathfrak{D}_2 , qui est intérieur à \mathcal{P} . Le point Ω est donc confondu avec l'un des points L_j et L_k , par exemple avec L_j . D'où la contradiction que $L_j = \Omega = h(\Omega) = h(L_j) = L_k \neq L_j$.

Il apparaît ainsi nécessaire que $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = \Omega$.

Et il suffit pour achever la démonstration de considérer la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des diamètres des enveloppes convexes des termes de la suite $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est une suite réelle strictement décroissante et positive, donc convergente. Comme sa suite extraite $(\delta_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après ce qui précède, on en déduit que $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle-même vers 0. On peut alors déduire la conclusion annoncée du théorème dit des « fermés emboîtés », qui s'applique ici à la suite des enveloppes convexes des termes de la suite diagopentagonale.

La dernière partie de l'énoncé, enfin, a déjà été justifiée avec les propositions 6 et 7.

5. Conclusion

Le problème des suites diagopentagonales a reçu ici une réponse générale qui révèle une propriété universelle des pentagones strictement convexes. Cette réponse est de forme géométrique. Remarquons toutefois que la détermination explicite d'une homographie diagopentagonale et de ses points fixes demeure ici purement algébrique. Observons aussi que l'un des objectifs poursuivis au début de cette étude (dans [5]) n'a toujours pas été atteint : nous ne sommes pas en mesure de caractériser le centre diagonal d'un pentagone strictement convexe \mathcal{P} comme barycentre des sommets de \mathcal{P} affectés de coefficients de nature géométrique (aréolaire par exemple). Enfin, tandis qu'en cas de quadrisocélie le centre diagonal est constructible à la règle et au compas, puisque déterminé sur la base de la résolution d'une équation de degré 2 (ce qui résulte de l'existence d'une symétrie dans ces pentagones), le fait que dans le cas général le centre diagonal soit déterminé sur la base de la résolution d'une équation cubique implique que ce point limite est certes alors toujours constructible, mais plus à la règle et au compas : il l'est seulement au moyen de droites et de coniques, avec un procédé qui resterait à expliciter.

La partie 1 s'était, au fond, achevée sur le constat que l'approche purement algébrique du cas général, quoique possible en théorie, se heurterait à une redoutable et probablement irrémédiable complication du point de vue même qu'elle adoptait. Il apparaît ici que cette complication est en fait le prix à payer en considérant le problème dans le seul plan affine. Le présent travail a en effet montré que le considérer dans cette complétion du plan affine qu'est le plan projectif permet d'alléger la difficulté algébrique de la résolution. La force des homographies de ce plan a été de ramener un problème qui s'annonçait initialement à au moins quatre variables à un problème à deux variables. Mais aussi de permettre de substituer à une vision barycentrique de la suite diagopentagonale une vision de sa construction par transformation géométrique, qui a permis de déterminer les candidats possibles à la solution : le calcul algébrique et les raisonnements géométriques et topologiques n'ont plus alors eu qu'à départager ces derniers.

Remarquons enfin qu'il est envisageable de généraliser cette étude à tout n -gone $\mathcal{P} = A_1A_2 \dots A_n$ strictement convexe tel que $n \geq 6$. En effet, la frontière de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points d'intersection intérieurs à \mathcal{P} de ses $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales est un n -gone strictement convexe \mathcal{P}' qu'on peut appeler le « diagopolygone » de \mathcal{P} : ses côtés sont supportés par les n diagonales $[A_rA_{r+2}]$, où $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$ (les sommets étant indexés modulo n). Ceci permet de définir par récurrence la « suite diagopolygonale » de \mathcal{P} . Reste à savoir quel est le comportement asymptotique de cette suite et s'il fait là encore sens, pour tout $n \geq 6$, de définir le « centre diagonal » de \mathcal{P} (en cas de convergence vers un point). Une publication ultérieure des présents auteurs exposera de nombreux résultats, plus riches encore, établis au sujet des hexagones, dont une réponse positive quant à l'existence de ce point ([6]). Qu'en est-il si $n \geq 7$?

Bibliographie

- [1] Busser A., Tournès D., Pouvreau D., « Sur les suites diagopentagonales : résultats théoriques et simulations », <https://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article1174>, 2023.
- [2] Marchaud A., « Un théorème sur les corps convexes », *Annales scientifiques de l'ENS*, 3^e série, tome 76, n°4, 1959, pp. 283-304.
- [3] Pamfilos P., « On the diagonal and inscribed pentagons of a pentagon », *Forum Geometricorum*, Vol. 16, 2016, pp. 207-225.
- [4] Perrin D., « Résultant et discriminant », <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Sevres/resultant.pdf>.
- [5] Pouvreau D., « Suites diagopentagonales – Partie 1 : généralités et cas des pentagones quadrisocèles », *Quadrature*, n°130, 2023, pp. 28-38.
- [6] Pouvreau D., Tournès D., « Diagohexagones et suites diagohexagonales », *Quadrature*, n° 133, 2024 (à paraître).
- [7] Sidler J.-C., *Géométrie projective*, 2^e édition, Paris : Dunod, 2000.