



HAL
open science

Tracé du cercle et circulation des discours (1ère partie)

Caroline Bulf, Valentina Celi, Karine Millon-Fauré, Céline Beaugrand,
Catherine Mendonça Dias

► **To cite this version:**

Caroline Bulf, Valentina Celi, Karine Millon-Fauré, Céline Beaugrand, Catherine Mendonça Dias.
Tracé du cercle et circulation des discours (1ère partie). *Petit x*, 2021, 114, pp.3-37. hal-04524116

HAL Id: hal-04524116

<https://hal.science/hal-04524116v1>

Submitted on 27 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TRACÉ DU CERCLE ET CIRCULATION DES DISCOURS (PREMIÈRE PARTIE) APPROCHE DIDACTIQUE DES (INTER)ACTIONS LANGAGIÈRES ET MATÉRIELLES

Caroline BULF¹

Université de Bordeaux, Lab-E3D EA 7441, INSPÉ de l'Académie de Bordeaux

Valentina CELI²

Université de Bordeaux, Lab-E3D EA 7441, INSPÉ de l'Académie de Bordeaux

Karine MILLON-FAURÉ³

Aix-Marseille Université, UR 4671 ADEF, INSPÉ de l'Académie d'Aix-Marseille

Céline BEAUGRAND⁴

Université de Lille, UMR8163 STL

Catherine MENDONÇA DIAS⁵

Université Sorbonne Nouvelle, EA2288, DILTEC

Résumé. En nous appuyant sur trois corpus, récoltés lors d'observations de classe dans trois contextes scolaires différents, nous nous intéressons ici à la manière dont se construit l'articulation entre les diverses conceptions du cercle, et à la façon dont l'enseignant l'accompagne. Une étude des productions langagières des élèves et des enseignants nous a permis de mieux cerner leurs modes d'agir-parler-penser ainsi que les indices d'évolution au cours de chacune de ces séances. Les points communs, mais également des spécificités repérées lors de la comparaison de ces trois mises en œuvre, nous ont conduites à mieux percevoir les difficultés que les élèves pouvaient rencontrer dans l'appréhension des différentes conceptions de cette figure, pourtant usuelle, qu'est le cercle.

Mots-clés. Cercle, compas, interactions langagières, agir-parler-penser.

Abstract. Based on three corpus, collected during class observations in three different school contexts, we are interested here in how the articulation between the various conceptions of the circle is constructed and how the teacher accompanies it. A study of the language productions of pupils and teachers allowed us to better identify their modes of act-speak-thinking and the indexes of evolution during each of these sessions. The common points, but also the specificities identified when comparing these three implementations, led us to better perceive the difficulties that students might encounter in understanding the different conceptions of the circle, which is a common figure.

Keywords. Circle, compass, language interactions, act-talk-think.

¹ caroline.bulf@u-bordeaux.fr

² valentina.celi@u-bordeaux.fr

³ karine.millon-faure@univ-amu.fr

⁴ celine.beaugrand@univ-lille.fr

⁵ catherine.mendonca-dias@sorbonne-nouvelle.fr

Introduction

En France, la notion de cercle est travaillée à tous les niveaux de la scolarité : depuis l'école maternelle, où il est attendu des élèves de savoir reconnaître et nommer la forme correspondante, jusqu'au lycée avec l'introduction du cercle trigonométrique et la détermination de l'équation d'un cercle, dans le cadre de la géométrie repérée. Toutefois, si cette figure géométrique peut paraître usuelle, elle n'en est pas simple pour autant : la résolution de problèmes géométriques la concernant nécessite l'appréhension de diverses conceptions, que l'élève va devoir tour à tour mobiliser en fonction du problème proposé.

Nous nous intéressons, dans cet article, à la manière dont se construit cette articulation entre ces diverses conceptions et à la façon dont l'enseignant l'accompagne. Pour cela, nous évoquons, dans un premier temps, différentes définitions qui peuvent être associées au terme « cercle » et, parmi elles, celles qui sont explicitement mentionnées par les programmes comme devant être rencontrées par les élèves. Nous nous focalisons ensuite sur un moment précis du curriculum — le début de la classe de 6^e — et nous comparons des séances mises en place par trois enseignants pour débiter leur séquence sur le cercle. À travers l'analyse des diverses conceptions de cette figure mobilisées à la fois par les élèves et par l'enseignant, et de leurs éventuelles évolutions au cours de la séance, nous cherchons à apporter des éléments de réponse à la question suivante : comment la notion de cercle se construit-elle à partir des interactions langagières, mobilisant des concepts et lexique afférents au champ du cercle, qui font sens, se nuancent et/ou brouillent l'appropriation notionnelle et linguistique par les élèves ? Précisons d'ores et déjà qu'il s'agit ici de s'intéresser à une étape d'un processus qui s'étale sur plusieurs séances.

Cet article s'appuie sur la distinction élémentaire entre *langue* et *langage* qui consiste à voir la langue comme un réservoir de signes régis par des règles et le langage comme une activité humaine dialogique, située, mettant en jeu la langue, et considérée comme lieu de construction, de négociation et de transformation de signification (Bernié, 2002 ; Jaubert & Rebière, 2012). Un second article — Beaugrand *et al.* (2021), publié dans ce même numéro — complète ce travail et a pour objectif une analyse linguistique nettement plus approfondie de ces mêmes séances de classe, permettant d'enrichir ce premier volet par des analyses langagières et didactiques dont la méthodologie principale s'appuie sur une description des objets de discours⁶ et leur évolution au cours des interactions langagières, en termes de modes d'agir-parler-penser du cercle.

1. Cadrage théorique

1.1. Définitions mathématiques

Définitions théoriques

Dans le travail précurseur de Artigue et Robinet (1982) sur les diverses conceptions du cercle mises en œuvre par des élèves de l'école élémentaire, les auteures listent plusieurs définitions, statiques ou dynamiques, de cette figure géométrique et y associent plusieurs conceptions, globales ou ponctuelles. Logiquement équivalentes et correspondant à des façons différentes de percevoir le cercle et d'utiliser ses propriétés, suivant la tâche proposée, « *elles mettent l'accent*

⁶ « *L'objet de discours est la raison et la conséquence des interactions verbales. Il est à distinguer de l'objet empirique, du référent, qui appartient au monde « objectif ». L'objet de discours est construit dans et par le langage, au fil du discours, au moyen d'incessantes négociations. Il est toujours ancré dans un contexte et sa signification est instable* » (Jaubert, 2007, p. 295). Nous développons plus loin ces considérations théoriques.

sur des éléments géométriques, des relations entre ces éléments, différents » (Artigue & Robinet, 1982, p. 17).

La définition (définition 1) de cercle comme lieu géométrique de points du plan situés à une distance r (le rayon) d'un point donné O (le centre), privilégiée dans l'enseignement primaire et secondaire depuis la réforme dite des mathématiques modernes (*ibid.*, p. 17), est associée à une conception ponctuelle où le centre est un élément essentiel et le rayon est présent en tant que longueur, en liaison avec la notion de distance.

Le cercle peut aussi être défini comme étant une courbe plane : une courbe plane est un cercle si et seulement s'il existe un point O du plan et un réel positif d tels que la courbe détermine sur toute droite passant par O un segment de longueur d ayant O comme milieu (définition 2). Dans ce cas, la conception associée est globale, les diamètres sont des éléments essentiels, introduits comme faisceau de cordes de même longueur et passant par un même point, le centre ; ce dernier y figure en tant que milieu de ces cordes et exclut que toute figure inopportune puisse être appelée « cercle ». Selon les résultats des expérimentations menées par Artigue et Robinet (1982), cette définition « *correspond à une conception du cercle qui apparaît très tôt chez les enfants dans les conduites de vérification et de preuve et semble très résistante* » (*ibid.*, p. 11).

Quatre autres définitions du cercle sont associées à des conceptions globales : courbe à courbure constante (définition 3) ; invariante par glissement circulaire sur elle-même (définition 4) ; invariante par rotation autour de son centre (définition 5) ; ayant une infinité d'axes de symétrie (définition 6). Dans les définitions 3 et 4, aucun de ses éléments caractéristiques n'y intervient alors que, dans les définitions 5 et 6, y figurent respectivement le centre en tant que centre de rotation et les diamètres en tant qu'axes de symétrie. Les définitions 3 à 6 renvoient facilement à cet objet matériel qui est le gabarit de disque. Par sa manipulation possible, ce gabarit génère des conceptions dynamiques de cette figure géométrique permettant de favoriser le passage du disque (surface) vers le cercle (ligne), si l'on touche ou si l'on trace son contour, ce qui conduit alors à une définition du cercle comme contour d'un disque.

Ces différentes définitions (1 à 6), associées à diverses conceptions du cercle, font écho à la nécessité du changement de regard sur les figures géométriques (Duval, 2005 ; Duval & Godin, 2005 ; Mathé *et al.*, 2020) pour penser leur enseignement et donner du sens aux apprentissages géométriques⁷. Dans la transition d'une géométrie physique vers une géométrie théorique (Perrin-Glorian & Godin, 2018 ; Mathé *et al.*, 2020), on conduit l'apprenant à dépasser une vision première d'une figure en termes de surface (2D) pour y percevoir les différentes unités figurales de dimensions inférieures (lignes : 1D et points : 0D), qui la construisent à travers leurs mises en relation (Duval, 2005).

Il est aussi important de prendre en compte les liens entre les manières de voir les objets géométriques et d'agir sur ceux-ci : autrement dit, les diverses visions des figures géométriques et les relations entre les unités figurales, qui apparaissent au fur et à mesure, dépendent des instruments mis à disposition et réciproquement. Les différentes visions du cercle peuvent alors se forger aussi selon les instruments que l'on met dans les mains de l'élève : gabarit ; pochoir ; ficelle, punaise et crayon ; compas.

Par exemple, pour tracer un cercle, le recours à un gabarit de disque (ou au pochoir correspondant) mobilise une vision en termes de contour de surface ou encore de courbe de

⁷ La réflexion sur les figures vise avant tout à proposer une organisation cohérente (du point de vue des objets qui sont construits) et consistante (un enseignement problématisé), notamment dans la perspective de la transition vers la géométrie théorique.

courbure constante (définition 3), pour lesquelles le centre et le rayon sont absents tandis que le compas peut mobiliser plutôt une vision dynamique d'une ligne invariante par rotation autour d'un point fixe ou à égale distance de ce point (définition 7). En attachant un crayon au bout d'une ficelle dont l'autre extrémité est fixée sur la feuille à l'aide d'une punaise, on appréhende le cercle comme « ligne à égale distance d'un point donné ».

Approches institutionnelles des définitions du cercle

Avant d'entrer dans le cœur du sujet, nous proposons un aperçu rapide du point de vue institutionnel en pointant des éléments importants dans les textes officiels et les ouvrages scolaires.

Avant 2002, les **textes officiels des programmes scolaires de l'école primaire** sont laconiques sur les figures géométriques et n'évoquent aucune définition du cercle. À partir de 2002, trois étapes d'apprentissage apparaissent explicitement :

- un premier où l'élève est amené à manipuler une forme, le « rond », en utilisant notamment des gabarits qui permettent de réaliser des disques et leurs bords⁸ (cycle 1) ;
- un deuxième où l'élève est amené à apprendre à se servir du compas comme outil pour tracer des cercles, sans contraintes (cycle 2) ;
- et un troisième où les éléments caractéristiques du cercle (centre, rayon, diamètre) sont introduits et mis en jeu dans la construction de cercles avec contraintes (fin cycle 2), où le cercle est défini comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné (définition 1) et où le compas devient aussi un instrument pour comparer et reporter des longueurs (surtout en cycle 3).

Dans les ressources liées aux programmes actuellement en vigueur, une attention particulière est donnée au langage autour du cercle, notamment au cycle 3 où l'on précise :

[...] pour mener des travaux sur la polysémie, le mot rayon est particulièrement riche, il a non seulement de nombreux sens dans la langue française, mais même en mathématiques il a deux sens différents, il peut à la fois désigner un segment (segment d'extrémités un point du cercle et le centre du cercle) et une longueur (distance entre un point du cercle et le centre du cercle), le mot centre est également polysémique ; pour mener des travaux sur les déterminants, on dit « le centre du cercle » et non pas « un centre du cercle », on dit « un rayon du cercle » pour désigner un segment d'extrémités un point du cercle et le centre du cercle, et « le rayon du cercle » désigne la longueur de ce segment, mais « le rayon [OA] » désigne un segment particulier [...] (MEN, 2016, p. 10).

Avant 2004, dans les **textes officiels des programmes de collège**, le cercle est évoqué parmi les figures géométriques à étudier sans en dire davantage. En 2004, dans les textes officiels des programmes de la classe de sixième (MEN, 2004, p. 10), on ne fournit pas explicitement de définition de cercle mais l'on précise qu'il faut caractériser les points du cercle par les deux propriétés suivantes :

- propriété P1 : tous les points qui appartiennent au cercle sont à la même distance du centre ;
- propriété P2 : tout point situé à cette distance du centre appartient au cercle.

Ces propriétés, l'une réciproque de l'autre, figurent donc dans la continuité de ce qui est prévu pour l'école élémentaire, la définition implicitement retenue est celle associée à une conception ponctuelle du cercle (définition 1) où le rayon, lié à ses points, est une longueur.

⁸ Dans les programmes actuellement en vigueur en cycle 1, la distinction faite entre disque et cercle va dans ce sens.

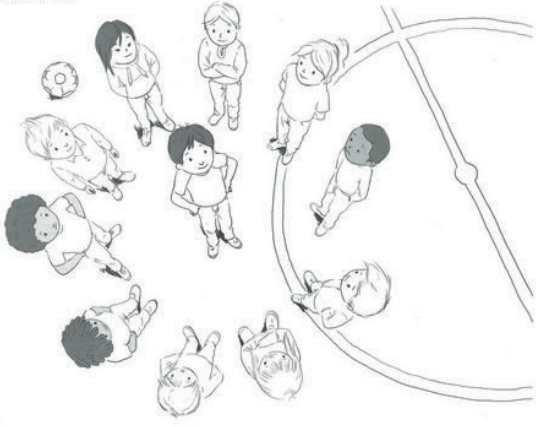
Les programmes actuellement en vigueur au collège (cycle 4) redeviennent laconiques et peu prescriptifs, le cercle n'est pas particulièrement évoqué.

On peut à présent se demander comment les instructions officielles sont reprises par les auteurs de manuels scolaires. Dans les **ouvrages pédagogiques** proposant des problèmes en maternelle et en cours préparatoire, le disque fait partie des figures que l'enfant doit apprendre à reconnaître et dont il se sert pour produire et décrire des figures complexes ; on propose ensuite de réaliser des assemblages de figures à l'aide de gabarits dans le but d'opérer le passage de l'objet physique à l'objet géométrique à travers le tracé de son contour : le cercle apparaît alors implicitement comme une courbe fermée, de courbure constante (définition 3).

À la lecture d'ouvrages pédagogiques actuels de cycle 3, nous avons essentiellement identifié une approche où le cercle et le compas sont introduits simultanément : le cercle est présenté comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné (définition 1), le compas est alors utilisé d'abord comme instrument pour comparer et reporter des longueurs puis comme traceur de cercles. Parfois, le compas est d'abord introduit comme instrument pour tracer des cercles, puis le cercle comme lieu géométrique (définition 1). Dans les deux cas, les éléments caractéristiques du cercle, notamment le centre et le rayon, sont présentés non pas en relation avec le cercle mais plutôt de manière ostensive, en relation avec le compas : le rayon représente à la fois le segment correspondant à l'écartement du compas et sa longueur ; le centre marque l'endroit où l'on plante la pointe sèche de l'instrument.

Dans le but d'introduire cette vision ponctuelle du cercle, classiques sont alors les problèmes de lieux géométriques où, un point étant placé, on demande à l'élève d'en tracer d'autres qui soient tous à la même distance (souvent donnée en *cm*) du point placé⁹ ; ou encore, dans un nuage de points déjà placés, on en fixe un et on demande à l'élève de déterminer ceux qui sont à une même distance donnée de ce point.

Léo est en CE2. Il joue dans la cour de son école avec ses dix camarades de classe qui veulent faire une ronde autour de lui. Ils se placent donc tous autour de lui, chacun à une distance de cinq pas de Léo.

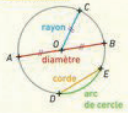


1. En considérant qu'un pas est égal à 1 m, faire un schéma de la situation. 1 cm représentera 1 m sur le schéma.
2. Que constatez-vous ?

J'apprends

Définition
Un cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r du point O .

Vocabulaire



Les points A, B, C, D et E appartiennent au cercle de centre O .
Le segment $[OC]$ est un **rayon** du cercle.
Le segment $[AB]$ est un **diamètre** du cercle.
Le segment $[DE]$ est une **corde** du cercle.
La portion \widehat{DE} est appelée **arc de cercle**.

Propriétés

- Tous les points qui appartiennent à un même cercle sont situés à la même distance de son centre.
- Tous les points situés à la même distance d'un point O appartiennent au même cercle de centre O .

Exemple
Dans l'exemple précédent, les points A, B, C et D sont sur le cercle, donc $OA = OB = OC = 1,3$ cm. Le point E est tel que $OE = 1,3$ cm, donc E appartient au cercle.

Figure 1 : D'après KWYK MATHS 6^e (Hachette, 2016, pp. 210-211).

Ces problèmes sont souvent repris dans les manuels de la classe de sixième, en tant qu'activités préparatoires en début de chapitre sur le cercle : par exemple, dans l'extrait en figure 1, après

⁹ Nous y revenons plus loin, dans les paragraphes 1.3. et 2.1.1.

avoir proposé un problème de lieu géométrique (ensemble de points à une distance fixée d'un point donné), on fournit la définition ponctuelle de cercle (définition 1) et on introduit les propriétés P1 et P2 caractérisant les points d'un cercle. Nous constatons alors que le lien entre ce type de problèmes et les propriétés P1 et P2 demeure à la charge de l'enseignant, voire de l'élève ; éventuellement, seule la propriété P2 est travaillée alors que les deux propriétés sont ensuite institutionnalisées. Un jeu d'articulation entre le compas et la règle graduée (ou une bandelette en papier de longueur fixée) serait néanmoins possible pour expliciter ce lien.

Le traitement de ce type de problèmes demeure délicat pour des élèves de cet âge à cause du passage de l'aspect discret (un ensemble de points) à l'aspect continu (à savoir une courbe) : en effet, s'ils connaissent bien le cercle en tant que ligne (1D), ils ne l'ont pas encore appréhendé comme ensemble de points (0D). Ils peuvent donc éprouver quelques difficultés à comprendre l'équivalence de ces deux types d'objets.

Le passage d'une définition à l'autre et les éventuelles dialectiques qui existent entre les diverses conceptions du cercle et les actions matérielles sur celui-ci semblent passées sous silence, comme si ce passage allait de soi. Soulignons que, dans leur travail, Artigue et Robinet (*ibid.*) alertaient déjà sur les difficultés des enseignants à repérer les différentes conceptions des élèves. D'après leurs premières observations de classes, elles avaient constaté que « *les conceptions mises en jeu par les enfants, à propos du cercle, étaient suffisamment riches et variées* » (*ibid.*, p. 8) et la recherche menée par la suite a montré que, « *confrontés à des situations adéquates, les enfants de cet âge¹⁰ étaient capables de mettre en œuvre de façon opératoire diverses conceptions du cercle* » (*ibid.*, p. 58), conceptions qui n'étaient pas toujours reconnues en tant que telles par les enseignants alors qu'elles sont pertinentes dans les situations proposées. Les auteures indiquaient d'ailleurs que, d'après leurs échanges avec divers enseignants de l'école élémentaire, ces derniers considéraient « *le cercle comme une figure pour laquelle l'illusion de transparence de l'objet était des plus fortes* » (*ibid.*, p. 8).

1.2. Agir-parler-penser du cercle

Au début de l'apprentissage, quelles que soient les disciplines, les élèves mobilisent des pratiques, des discours, des points de vue divergents et hétérogènes qui signalent des interprétations différentes de la situation qui leur est proposée et leur inscription dans des contextes différents.

Chaque discipline propose un cadre, un contrat de communication, des valeurs, des outils, des techniques, des savoirs. [...] L'élève est ainsi confronté à la nécessité de s'inscrire dans de nouveaux contextes, ceux des savoirs scolaires, ce qui suppose qu'il réorganise son activité et ses modes d'agir-parler-penser usuels, pour s'appropriier les techniques sociales, les pratiques discursives qui donnent leur substance à ces savoirs. [...] (Jaubert & Rebière, 2012, p. 5).

En référence à Bakhtine/Volochinov¹¹ et Vygotski, Jaubert et Rebière (*ibid.*) parlent d'hétéroglossie ou de polyphonie pour évoquer et décrire les différents points de vue des élèves qui jaillissent dans les discours produits en classe, conduisant à une confrontation des pratiques langagières usuelles à celles disciplinaires que l'on vise. En outre, au sein d'une même discipline, ici la géométrie, coexistent également diverses conceptions possibles d'un même concept, notamment dues aux savoirs antérieurs des élèves, comme nous venons de le décrire

¹⁰ Enfants de 7 à 10 ans.

¹¹ Voir Jaubert & Rebière (2019, p. 157) pour justifier l'usage du double nom Bakhtine/Volochinov.

pour le cercle, enrichissant ainsi le *fond aperceptif*¹² de la classe.

À l'aide de différentes conceptions du cercle et des relations logiques (Barrier *et al.*, 2019) entre les unités figurales (Duval, 2005), on peut mener une analyse *a priori* de différents modes d'agir-parler-penser¹³ du cercle et de ses éléments caractéristiques. L'enjeu de cette méthodologie d'analyse, initialement éprouvée par Bulf *et al.* (2014) et développée dans Bulf et Celi (2020a), est de repérer *a priori* des indices dans les façons de parler et d'agir des élèves et de l'enseignant dans la co-construction de la notion de cercle et incidemment révéler peut-être leur façon de penser cette figure géométrique.

Il faut interpréter ces indices comme un ensemble de significations possibles assignées à certaines façons de voir, d'agir ou de parler du cercle, en essayant de ne pas sur-interpréter l'une ou l'autre de ces dimensions, sachant que nous n'avons accès qu'à des fragments de ces différents modes d'agir-parler-penser, vus comme un tout indissociable théoriquement. Par exemple, un élève qui mobilise un compas pour tracer le cercle et utilise les termes de cercle et rayon peut avoir une vision du cercle comme étant une ligne, résultat graphique d'un mouvement dynamique d'un objet qui tourne mais pourrait aussi très bien y voir une « ligne à égale distance d'un point donné », ces deux façons de penser ne s'excluant pas l'une l'autre.

Dans le tableau 1, nous présentons quelques modes d'agir-parler-penser *a priori* du cercle dans une situation de reproduction d'un cercle. Nous y revenons ci-après, dans l'analyse d'un problème classique sur le cercle et puis d'un problème original tiré de Bulf et Celi (2016).

À partir des observables liés à ce que disent et font l'enseignant et les élèves, cette méthodologie d'analyse permet de repérer *a posteriori* des traces de déplacements, transformations ou négociations des différents modes d'agir-parler-penser du cercle et de ses éléments, à l'œuvre dans les discours qui se produisent dans la classe, entre élèves ou entre élèves et enseignant. Ces différents déplacements et transformations sont donc potentiellement pour nous le témoin d'une évolution des façons de penser le cercle. Sur le plan des savoirs, le langage est un outil de transformation des premières connaissances. Il permet de construire les désignations conscientes propres aux disciplines ainsi que les concepts visés par l'école via un certain degré de mise à distance de l'action, de généralisation, de mise en réseau. Les multiples reformulations, qui se succèdent, accompagnent alors le processus de secondarisation qui n'est pas sans lien avec le processus d'institutionnalisation.

La secondarisation du langage, la transformation des modes de parler est indissociable de la transformation des modes d'agir et de penser. De ce fait elle signale la mise en œuvre de nouveaux cadres interprétatifs, la réinterprétation de l'activité sociale dans laquelle le sujet est engagé et du sens qu'il donne à son action individuelle (Jaubert, 2007, p. 296).

Ces signes de transformation et d'évolution des manières d'agir-parler-penser peuvent être potentiellement des traces du processus de secondarisation, vue comme une fenêtre du processus de conceptualisation. Néanmoins, il ne s'agit pas de sur-interpréter l'apparition de ces traces : si le processus de secondarisation implique des évolutions et transformations des manières d'agir-parler-penser, leurs traces ne suffisent pas pour reconnaître que ce dernier est en train d'opérer.

¹² « *Le fond aperceptif désigne l'ensemble des éléments culturels dont dispose un individu dans une activité donnée : éléments qu'il fait siens ou au contraire qu'il conteste, mais à partir desquels s'organise sa compréhension du monde* » (Jaubert, 2007, p. 294).

¹³ Au sens de Bernié (2002) et Jaubert & Rebière (2012).

Manières d'agir Usage des instruments	Manières de parler	Manières de penser (voir) Dimensions et relations des différentes unités figurales
Reconnaissance d'une allure générale Main levée (papier crayon)	Rond, cercle	Vision iconique (2D, 1D)
Gabarit de disque Deux moitiés de gabarit de demi-disque juxtaposées	Rond, cercle, disque, moitié de disque, cercle Demi-disque Demi-cercle	Vision surface (2D)
Pliage, superposition		Figure ayant un ou des (une infinité) axes de symétrie Vision surface ou contour de surface ou ligne 2D ou 1D/2D ou 1D
Contour d'un gabarit de disque		Vision contour de 1D/2D
Superposition et/ou rotation du bord d'un gabarit avec la ligne du cercle tracé	Pareil partout	Vision ligne de courbure constante 1D
Tracé graphique du <i>mouvement</i> du compas ou de la ficelle qui tourne	Cercle, rond Compas ou ficelle qui tourne autour d'un point fixe	Ligne, courbe fermée 1D Vision dynamique : mouvement d'une ligne ou d'un point autour d'un point
Tracé graphique du compas Écartement du compas ou longueur de la ficelle comme mémoire d'une distance n	Un cercle de centre X et de rayon n	Ligne 1D à égal distance d'un point 0D (relation binaire entre objets 0D et 1D)
Tracé graphique du compas Règle graduée ou bandelette en papier (longueur n fixée)		Ensemble de points à une même distance d'un point donné (relation binaire entre objets 0D)

Tableau 1 : Exemple de l'agir-parler-penser du cercle et demi-cercle.

1.3. Une tâche classique sur le cercle comme lieu géométrique

Comme déjà indiqué plus haut, pour introduire le cercle dès le cycle 3, une tâche classique consiste à tracer des points qui soient tous à la même distance d d'un point X donné. Il est alors demandé aux élèves de préciser où vont se trouver l'ensemble des points vérifiant cette propriété. On introduit ainsi un cercle de centre X et de rayon d , ce dernier pouvant être défini d'abord par une longueur et puis par un segment (1D) dont les extrémités sont respectivement le centre (0D) et un point du cercle (0D).

Si, pour résoudre cette tâche, on dispose d'une règle graduée, d'une bandelette en papier ou d'une ficelle de longueur fixée, on placera des points à une même distance. Seule l'introduction du compas, en tant qu'instrument pour tracer des cercles, permettrait alors de lier explicitement ce problème au cercle et de vérifier que ces points sont tous sur le même cercle, cet ensemble de points (0D) étant en relation binaire avec le centre (0D) du cercle. Dans ce cas, on parvient à la propriété P2 : tous les points situés à une même distance d d'un point donné X appartiennent au cercle de centre X et de rayon d .

À l'aide d'un compas, on peut traiter cette tâche autrement en traçant le cercle de centre X et de rayon d et en plaçant ensuite des points sur ce cercle : ces points sont alors à égale distance de X , l'écartement du compas fonctionne comme mémoire d'une distance d fixée. On opère ici selon une vision dynamique du cercle comme ligne courbe fermée (1D) ou bien comme ligne (1D) à égale distance d'un point (0D) donné qui sont en relation binaire. On parvient alors à la propriété P1, réciproque de la précédente : tous les points qui sont sur un même cercle, de centre X et de rayon d , sont à une même distance d de son centre X .

Cette deuxième procédure est aussi possible à l'aide d'une ficelle, une punaise et un crayon, une différence demeure toutefois importante, à savoir qu'ici le rayon est matérialisé, de façon visible, par la ficelle, contrairement au compas où l'écartement est vide.

Dans tous les cas, le compas devient alors cet instrument utile pour reporter et comparer des longueurs, l'écartement des branches demeurant fixe.

1.4. La mise en œuvre d'un problème original sur le cercle

L'état des lieux sur les approches institutionnelles à propos du cercle et de ses propriétés a conduit Bulf et Celi (2016) à concevoir, au sein d'une progression entièrement repensée pour l'école primaire, un problème de reproduction permettant de créer les conditions qui favoriseraient explicitement le passage du disque au cercle ainsi que du gabarit de disque au compas, en articulant ses divers usages et en visant la matérialisation du diamètre, du rayon et du centre d'un cercle. De telle manière, il est possible de prendre explicitement en compte tous ces éléments qui semblent passés sous silence dans la manière classique de traiter le cercle, notamment la dialectique entre ses diverses conceptions (et définitions), évoquées précédemment. En effet, en le traitant comme une figure ayant une courbure constante (définition 3) ou comme étant invariante par glissement circulaire sur elle-même (définition 4) ou encore comme ayant une infinité d'axes de symétrie (définition 6), on ouvre la voie vers la définition du cercle comme une ligne invariante par rotation autour d'un point fixé (définition 5) ou à égale distance de ce point (définition 7). Nous allons même jusqu'à envisager que notre approche pourrait potentiellement tendre vers la définition du cercle en tant que courbe plane déterminée par les extrémités de segments de longueur fixée ayant tous un même milieu (définition 2). La conception ponctuelle classique (définition 1) arrivera dans un second temps.

Dans sa version originale, le problème consiste à trouver un moyen de reproduire un cercle donné (la figure-modèle, par la suite) en se servant uniquement du compas pour le tracer : ce cercle est suffisamment grand pour que les reproductions à l'œil ne soient pas validées. Un gabarit de demi-disque de même rayon est fourni et ne doit servir, lors de l'analyse de la figure, que pour prendre ou ajouter des informations sur la figure-modèle ; il pourra également servir à valider la production finale. La nature du gabarit est évoquée dans la consigne où l'on précise aussi que la feuille et le gabarit fournis ne peuvent être ni pliés, ni coupés (figure 2).

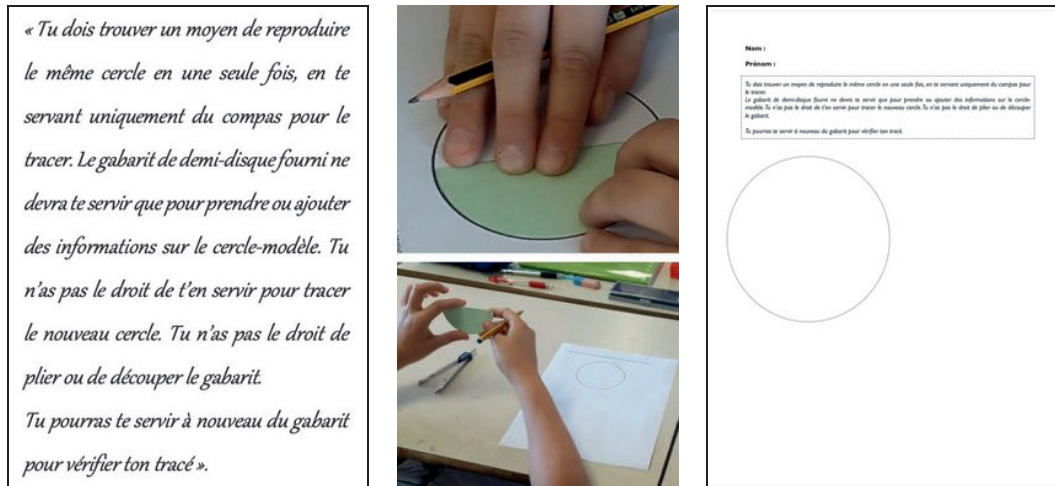


Figure 2 : La consigne, un exemple de matériel mis à disposition et la feuille distribuée aux élèves sur laquelle figure la même consigne.

Pour résoudre ce problème, on peut alors tracer sur la figure-modèle un diamètre avec le gabarit de demi-disque, puis, en le tournant suivant la trajectoire du bord courbe, on peut en tracer un second qui permettra ainsi de mettre en évidence :

- le centre d'un cercle comme intersection de deux diamètres ;
- un rayon comme segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points ;
- un diamètre comme segment joignant deux points du cercle et passant par son centre ;
- deux points comme intersections d'un diamètre avec le cercle (figure 3).

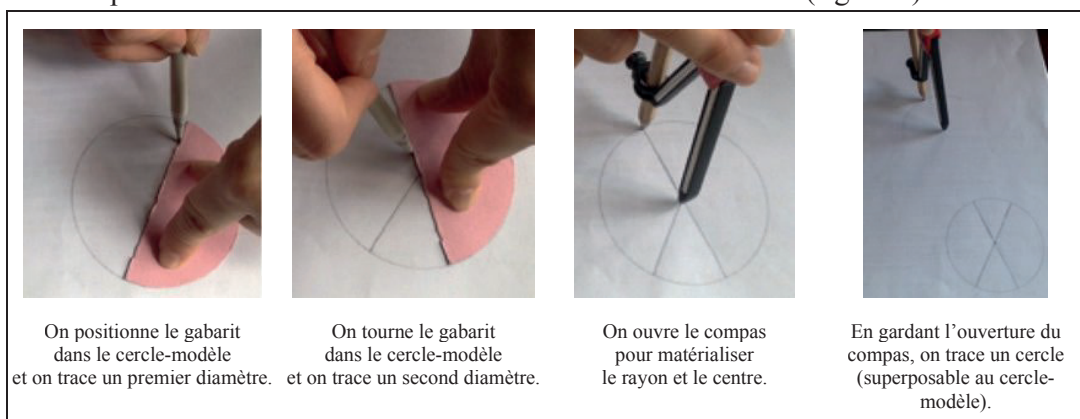


Figure 3 : Description étape par étape de la résolution du problème.

Le recours à un demi-disque opaque et rigide permet de chercher à mobiliser des modes d'agir-parler-penser de cette figure en termes de surface (2D), contour de surface (1D), courbure constante (1D), en lien avec des modes d'agir-parler-penser du diamètre en termes de bord droit (1D), d'axe de symétrie (1D). L'utilisation du gabarit pour prendre des informations sur la figure-modèle et non pour la reproduction sont des contraintes qui orientent vers l'usage du compas, ce dernier étant porteur de différents modes d'agir-parler-penser du cercle, du diamètre et du centre : ligne courbe fermée (1D), vision dynamique en rotation (1D), ligne (1D) et, à terme, ensemble de points à égale distance du centre (0D) ; le rayon est matérialisé à la fois par l'écartement du compas (mais l'espace est vide) et l'intersection des lignes obtenues par les tracés du contour droit du gabarit de demi-disque.

2. Présentation des situations d'enseignement et d'apprentissage et éléments d'analyse de leur mise en œuvre, dans trois contextes différents

Nous avons réalisé des captations audio et/ou vidéo dans trois classes de sixième relevant de différents collèges et dans lesquelles les professeurs ont mené une situation pour réactiver la notion de cercle et ses éléments caractéristiques. Notre étude se base sur l'analyse des verbatims, à travers ces trois corpus, récoltés dans des études dissociées¹⁴ :

- (1) le corpus de la classe de Rémi avec une situation dite ordinaire de problèmes de lieux géométriques (voir partie 1.3.) ; la séance a eu lieu en novembre 2017 ;
- (2) le corpus de la classe de Stella avec la situation dite non ordinaire de reproduction de cercle (voir partie 1.4.) ; la séance a eu lieu en novembre 2016 ;
- (3) le corpus de la classe de Jules, avec une variante de la même situation que celle de Stella ; la séance a eu lieu en décembre 2019.

Lors de la séance chez Stella et Jules, une observatrice circule dans la salle, elle filme des élèves en activité et échange avec eux, ce qui n'est pas le cas chez Rémi.

Nous avons fait le choix de comparer l'analyse du déroulement d'une séance dite ordinaire, comme dans la classe de Rémi, avec celui d'une situation moins ordinaire de reproduction de cercle (dont nous détaillerons plus loin les adaptations singulières dans la classe de Stella puis dans la classe de Jules) afin de mettre en évidence les obstacles communs (quelles que soient les classes) mais aussi les divergences du point de vue de la circulation des objets de discours y compris dans des classes qui s'appuient pourtant sur une même ressource (comme dans le cas de Stella et Jules). Une part de l'origine des variations entre les trois séances peut s'expliquer par le choix des situations (et donc des obstacles potentiels) qu'une analyse *a priori* permet de décrire. L'enjeu de cet article est d'analyser les autres différences mises en évidence entre ces séances.

2.1. Dans la classe de Rémi

2.1.1. Présentation de la situation ordinaire de lieux géométriques

La séance décrite ici s'est déroulée en novembre 2017, dans une classe de sixième d'un collège ordinaire. Il s'agit d'amener les élèves à appréhender le cercle comme lieu géométrique de points (0D) vérifiant une condition particulière.

L'enseignant a décidé de mettre en œuvre la situation classique, décrite et analysée en 1.3. : il s'agit de demander aux élèves de trouver le maximum de points placés à une distance fixée d'un point donné, afin qu'ils réalisent, en acte, que ces points sont situés sur un cercle. La consigne de l'exercice est donnée à l'oral¹⁵ par Rémi :

Rémi : *je vais commencer le travail / et je vais vous demander d'intervenir euh à tour de rôle / pour venir me compléter la figure // d'accord ? // je place un point O et ça y est j'ai fini mon travail // maintenant c'est à vous // qui est-ce qui vient ? vas-y Clara // tu vas me placer un point A // tout ce que je te demande de faire c'est de placer un point A mais euh à quarante centimètres*

¹⁴ (1) Ce corpus a été récolté par Beaugrand (2019) ;

(2) Ce corpus a été constitué par C. Bulf et V. Celi et déjà exploité dans Bulf et Celi (2020a) ;

(3) Ce corpus a été constitué par C. Bulf dans le cadre d'une recherche-action INSPE-CARDIE et a été exploité dans Bulf et Celi (2020b).

¹⁵ voir les conventions de transcription des dialogues en fin d'article (p. 33).

du point O

Nous reconnaissons ici, par ce choix de situation, ce qui semble être la mise en évidence de la propriété (P2) qui repose donc sur l'observation, procédé assez naturel pour ce niveau de classe où l'appréhension de la géométrie est encore essentiellement perceptive.

Nous remarquons que l'enseignant accorde implicitement des statuts différents aux deux points : le point A peut être considéré comme étant *variable* (au sens mobile) car plusieurs points caractérisés par les mêmes propriétés que lui vont être placés, tandis que le point O est, lui, fixé. La relation implicitement convoquée par Rémi est celle d'une relation binaire entre deux points (la distance) alors que pour l'élève, ce caractère variable du point A peut l'amener à mobiliser une vision dynamique du cercle (voir partie 1.1.). En effet, l'enseignant demande par la suite de réitérer cette tâche (placer un point B à 40 cm, puis placer un point C à 40 cm, etc.), certains élèves parleront spontanément du « compas pour relier les points », qui peut être considéré comme une façon de parler évoquant une conception dynamique du cercle (la ligne est alors perçue comme le résultat du tracé du mouvement du compas, le point O étant le repère où placer la pointe sèche) ; celle-ci ne sera pas reprise par l'enseignant qui préférera les orienter sur une vision du cercle comme un ensemble infini de points (voir *infra* : partie 2.1.2.).

Dans la séance observée, l'enseignant choisit d'organiser cette situation sous forme de cours dialogué : après avoir placé un point O au tableau, il demande à plusieurs élèves de venir placer chacun un point à 40 cm de O , à l'aide d'une règle graduée. Une fois la propriété énoncée, l'enseignant présentera, après avoir effacé le tableau, une animation *GeoGebra* permettant de placer un grand nombre de points à une distance fixée d'un point donné (voir figures 4).

Le reste de la séance est consacré à l'élaboration d'une carte mentale (annexes, 1.) concernant le cercle et le disque où la définition du cercle en tant qu'ensemble de points (définition 1) est indiquée. Cette étape est également l'occasion de travailler, selon les attentes institutionnelles, sur le lexique propre à la notion de cercle, dont le disque (MEN, 2016, p. 10). En effet, après avoir travaillé sur le cercle, l'enseignant prévoit de s'intéresser au disque procédant ainsi à une reconstruction dimensionnelle depuis le point (0D), jusqu'au disque (2D) en passant par le cercle (1D).

2.1.2 Éléments d'analyse de la mise en œuvre

La phase de recherche

L'intégralité de la séance se déroule sous la forme d'échanges au cours desquels l'enseignant oriente régulièrement les raisonnements des élèves grâce à un questionnement guidé.

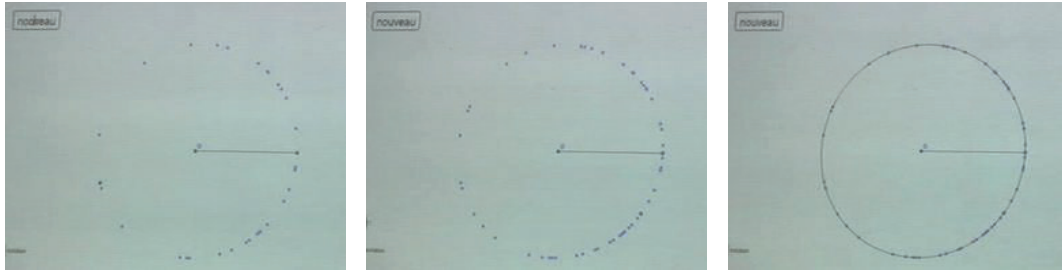
En début d'heure, l'enseignant demande aux élèves de venir, l'un après l'autre, placer un point à 40 cm d'un point O déjà placé au tableau. Dès le troisième point, une élève s'exclame :

E : *ben si on place euh le compas sur euh le point O et qu'on trace un cercle / ça va tous les relier / ça va relier tous les points*

La rapidité de cette réflexion surprend l'enseignant qui pensait que cette prise de conscience nécessiterait le tracé de davantage de points. Il valide la proposition de l'élève en soulignant l'inclusion de l'ensemble de points recherchés dans le cercle :

Rémi : *on pourrait continuer très longtemps / à tracer tous des points qui sont [...] à quarante centimètres du point O / et on s(e) rendrait compte que tous ces points / ils sont situés TOUS sur la MÊME figure /*

Pour insister sur cette propriété (P2), l'enseignant utilise une animation *GeoGebra* (figures 4) qui permet de placer rapidement un grand nombre de points à une distance fixée d'un point donné.



Figures 4 : Dans la classe de Rémi, captures d'écran successives de l'animation GeoGebra au TBI.

La quantité de points placés et la précision des constructions (difficilement accessibles sur des figures réalisées à la main) font davantage apparaître que les points se trouvent sur un cercle (P2). Toutefois, les points sur l'écran restent isolés, même sans effectuer d'agrandissement de l'image, et cette figure n'aide donc pas les élèves à réaliser qu'un ensemble de points peut constituer une courbe (sans avoir à les relier). L'enseignant demande alors au logiciel de tracer un cercle de centre O : il montre ainsi de nouveau que les points recherchés paraissent situés sur ce cercle (propriété P2), mais cette manipulation ne semble apporter aucune aide concernant la difficulté précédemment signalée : si la propriété P2 est utilisée en acte, la propriété P1, qui pourrait pourtant être mise en évidence par le problème proposé, ne semble pas entrer directement dans le projet d'enseignement de Rémi.

Un obstacle didactique : le passage de la dimension 0 à la dimension 1

Même après cette illustration avec le logiciel de géométrie dynamique, lorsque l'enseignant demande la définition d'un cercle, nous constatons, dans le discours des élèves, quelques difficultés pour appréhender une courbe comme un ensemble de points :

E : *euh un cercle / est constitué de points [...] qu'on relie*

D'autres élèves ont également du mal à se convaincre que l'ensemble des points à une distance donnée du centre constitue bien le cercle dans son intégralité. Pour eux, il faut *relier* ces points pour obtenir cette figure, ce que nous pouvons associer à une vision dynamique du cercle (voir 1.1.), et donc recourir à la ligne qui est bien de dimension 1, comme le cercle. Comme nous l'avions pressenti, le passage de la dimension 0 à la dimension 1 constitue bien un obstacle épistémologique.

L'enseignant cherche à clarifier le propos de l'élève, dans un long échange qui l'éloigne quelque peu de la problématique initiale :

Rémi : *dans votre définition / et c'est normal hein / vous me dites c'est des points qu'on a reliés // en fait on va même pas dire ça / parce qu'on n'aura pas besoin de les relier. Si je dis c'est l'ensemble DES points qui sont situés à la même distance à la même distance d'un centre / ça veut dire qu'il y en a combien des points ? / que je peux en mettre combien ? / l'ensemble DES points // je peux en mettre*

E : *à l'infini*

Cet échange se poursuit et l'enseignant tente d'amener les élèves à appréhender le passage du discret au continu :

Rémi : *à partir du moment où je peux les mettre / l'ensemble des points c'est vraiment TOUS LES POINTS / qui sont exactement à cette distance-là // si je les trace tous ces points / bien sûr qu'entre ces deux points-là il y a de la marge // même s'il y a pas grand chose hein // mais est-ce que je peux mettre encore des points là entre deux ?*

E : *ben oui*

Rémi : *bien sûr que je peux encore en mettre // et entre celui-là et celui-là ? / est-ce que je peux encore en mettre ?*

E : *ben oui*

Rémi : *bien sûr / et à chaque fois / même ceux-ci qu'on a l'impression de voir collés // est-ce que en fait j'ai encore de la place entre deux ?*

E : *oui [...]*

Rémi : *à force de placer des points on voit apparaître un cercle*

Malgré les efforts de l'enseignant, nous sentons, dans certaines remarques d'élèves, toute la complexité que ce saut conceptuel représente, puisqu'il est par définition impossible de produire une infinité de traces :

Rémi : *une infinité / et si j(e) les trace TOUS // tous / l'infinité des points / et bien*

E : *on peut pas / c'est l'infini on peut pas les tracer*

Ici réapparaît un obstacle bien difficile à surmonter pour les élèves : la représentation graphique des objets mathématiques constitués d'une infinité de points. Certains, comme le cercle ou le segment qui sont des objets bornés, sont tout à fait représentables sur une feuille de papier mais pour d'autres cette représentation s'avère plus délicate, notamment en ce qui concerne la droite ou la demi-droite. Dans ce cas, leur trace graphique qui est nécessairement finie, incluse dans la feuille de papier ou le tableau, ne peut contenir l'ensemble des points de l'objet mathématique représenté et l'élève doit donc imaginer le prolongement ininterrompu du trait observé pour avoir une appréhension correcte de la notion ciblée. C'est cette subtilité-là que l'enseignant va alors essayer d'expliquer à ses élèves :

Rémi : *c'est vrai que on n'a pas arrêté de dire quand on a parlé de la droite quand on a parlé du segment quand on a parlé de la demi-droite que / il y a une infinité de points dedans // et on avait dit effectivement on ne peut pas tous les tracer les points d'une droite ou tous les points d'une demi-droite / parce que ça s'en va vers l'infini // mais par contre dans un segment ↑ / il y en a combien des points ?*

E : *une infinité [...]*

Rémi : *donc on dit souvent que l'infini est inaccessible / ben quand on trace un segment ou quand on trace un cercle / ben j'ai réussi à tracer une infinité de points*

Cette notion d'infini continue toutefois de perturber les élèves et l'un d'entre eux, ne parvenant visiblement pas à concevoir qu'une infinité de points puissent être contenus dans une courbe fermée et bornée, s' imagine que, pour avoir une infinité de points, il faut alors passer une infinité de fois sur le même cercle (en tant que ligne) :

E : *du coup ça s'arrête jamais de tracer [...]*

Rémi : *ben / si tu fais point par point tu auras jamais fini // mais si tu prends le compas et que tu traces // tu les auras tous faits / et tu vas pas tourner pendant cent-cinquante ans // d'accord / une fois que tu as fait / un: tour / tu as terminé / ça marche ?*

E : *mais oui mais le segment euh le cercle il s'arrêtera jamais si on met [...]*

Rémi : *ça ça n'a pas de rapport avec le fait qu'il y a une infinité de points dans le cercle aussi / c'est parce que tu continues à tourner c'est tout //*

E : *du coup ça s'arrête jamais de tracer*

Ces échanges entre l'enseignant et les élèves illustrent toute la difficulté que peuvent représenter pour les élèves ces allers-retours entre la dimension 0 et la dimension 1, étape pourtant indispensable pour appréhender le cercle comme un ensemble de points. D'autres chercheurs

avant nous ont pu souligner cet obstacle :

Percevoir la ligne comme ensemble de points nécessite de concevoir cet ensemble comme dense et continu, ce qui dépasse largement le cadre de la géométrie physique (et même celui de la géométrie théorique euclidienne) (Mathé et al., 2020, p. 122).

Duval (2005) parle d'ailleurs de hiatus dimensionnel pour qualifier le processus de déconstruction dimensionnelle car ce dernier entre en contradiction avec le processus naturel de vision qui fait d'abord valoir une vision 2D, voire 1D mais en aucun cas 0D : le cercle est *a priori* perçu comme une ligne et non comme un ensemble de points. Notons que cet obstacle relève également de la dialectique entre *objet géométrique* et *objet graphique*, au sens de Petitfour (2017a ; 2017b) : élèves et enseignants cherchent ici à appréhender certains objets géométriques (notamment le cercle), c'est-à-dire des concepts abstraits qui échappent à nos perceptions et que l'on peut seulement imaginer. Pour cela, ils s'appuient sur des objets graphiques qui sont des représentations matérielles de ces objets (la trace laissée par le compas ou par le logiciel *GeoGebra*) et qui illustrent parfois imparfaitement les propriétés évoquées : le trait continu qui représente le cercle sur la feuille n'est pas en lui-même constitué de points. Il est alors difficile d'accepter que le cercle, en tant qu'objet géométrique, lui, le soit.

Des difficultés au niveau des formulations : définition du cercle et lexique afférent

Lorsqu'à la suite de la phase de recherche, l'enseignant demandera aux élèves de donner une définition du cercle, ces derniers ne penseront pas spontanément à la caractérisation attendue (en tant qu'ensemble de points) et l'enseignant fera appel au contrat didactique (un cours se construit à partir de l'activité de recherche qui le précède) pour orienter les réponses :

E : un cercle c'est une forme géométrique

Rémi : oui / alors attends / je vais repréciser ma question // je veux qu'on définisse le cercle / mais en pensant à l'activité qu'on a faite ensemble //

L'enseignant demande alors aux élèves de donner la définition d'un cercle de centre O et de rayon r mais les élèves s'appuient pour cela sur les données de l'énoncé de départ (les points sont à quarante centimètres de O), montrant ainsi que la phase de décontextualisation nécessaire à l'institutionnalisation n'a pas encore eu lieu. Précisons qu'ici, la formulation attendue est d'autant plus délicate qu'en cycle 3, les élèves ne sont pas habitués à manipuler des lettres dans leurs définitions :

Rémi : *je veux le cercle de centre O et de rayon r [...]*

E : *les points sont toujours euh à la même distance du centre*

Rémi : *oui / alors quelle est cette distance ?*

E : *quarante*

Rémi : *hum / moi j'ai pas dit quarante ici / j'ai dit combien dans / j'ai pas donné un nombre / j'ai mis quoi ? / le rayon c'est quoi ?*

E : r .

Rémi : *c'est r // alors c'est un peu bizarre hein de dire r comme rayon / en fait r c'est une lettre / qui permettra de remplacer de euh d'être remplacée par n'importe quel nombre / à la place de r je peux mettre quarante / je peux mettre soixante / je peux mettre trois virgule sept*

Cette précision permet enfin à la classe de formuler la définition attendue pour un cercle de rayon r (définition 1). Par ailleurs, nous pouvons noter l'attention que l'enseignant porte tout au long de la séance à la réactivation de certains termes du lexique de géométrie liés au cercle. Dès le début de la séance, il insiste sur cet objectif lorsqu'il demande aux élèves de caractériser le

cercle tracé au tableau :

Rémi : *un cercle // pas n'importe quel cercle / lequel ? on lève le doigt on essaye de donner les caractéristiques de ce cercle // pas n'importe quel cercle il y en a UN bien précis ici / lequel ? / je vais entendre du vocabulaire sur le cercle là*

Par la suite, il surjoue l'indignation lorsque l'élève utilisera un terme du langage usuel — rond — à la place du terme du lexique mathématique adéquat — cercle. En dépit de cela, nous trouvons encore plusieurs occurrences du mot « rond » dans le discours des élèves que ce soit dans cette séance ou dans les suivantes.

E : *un rond*

Rémi : *UN QUOI*

E' : *un cercle !*

Rémi : *un quoi / j'ai entendu quoi / qui est-ce qui m'a dit ce mot horrible là ? // QUELLE HORREUR ! // quelle horreur ! // un rond ça n'a aucun sens*

Si, dans ce cas, l'usage du langage usuel est proscrit, l'enseignant y aura par contre recours lorsqu'il voudra établir des analogies destinées à faciliter la mémorisation de certains termes :

Rémi : *pourquoi un ARC de cercle parce qu'effectivement ça ressemble*

E : *à un arc*

Rémi : *à un arc / et un arc quand il est tendu il est tendu par quoi ?*

E : *une corde*

E' : *une ficelle*

Rémi : *par une ficelle on peut dire aussi par une corde / c'est pour ça que ça s'appelle comme ça*

Toutefois, si dans le langage courant, les termes « corde » et « ficelle » peuvent apparaître comme des quasi-synonymes, tout au moins lorsque l'on parle d'un arc, en mathématiques, seul le mot « corde » est accepté, comme le rappelle un peu plus tard l'enseignant pour reprendre l'erreur d'un élève :

Rémi : *non pas une ficelle / une corde // ouais il faudra pas tout mélanger quand même hein / ne m(e) dites pas qu'il y a des ficelles dans un cercle*

D'autres notions, liées au cercle, sont également abordées. Pour ce qui est du diamètre, voici comment un premier élève le définit : « *pour avoir un diamètre, tu dois prolonger le rayon pour qu'il aille de l'autre côté du cercle* ». Nous pourrions presque voir dans cette tentative de définition, un recours en acte à la symétrie centrale (le diamètre est constitué d'un rayon et de son image par la symétrie ayant pour centre le centre du cercle) mais, en début de sixième, cette transformation n'a pas encore été rencontrée. L'enseignant amène la classe à reprendre cette première formulation et institutionnaliser finalement :

Rémi : *un diamètre c'est bien : un segment // qui relie deux points du cercle en passant par le centre du cercle*

Notons, à ce propos, que les termes « diamètre » et « rayon » seront dans cette séance, appréhendés tantôt en tant que segments, tantôt en tant que longueurs de ces segments, comme l'illustre la première définition proposée pour la notion de rayon :

Rémi : *c'est quoi le rayon ?*

E : *c'est la distance entre le centre du cercle et puis / euh / les points*

La classe reviendra à plusieurs reprises au cours de cette séance sur les définitions associées à ces différents concepts. Pourtant, à la fin de la séance, on peut raisonnablement faire l'hypothèse

que persistent des malentendus sur les dénominations des objets géométriques manipulés, comme nous pouvons le voir dans ce dernier échange qui se situe complètement à la fin du cours :

Rémi : *la seule différence avec la corde c'est que le diamètre lui [...] il passe par le*

E : *centre*

E' : *milieu*

Rémi : *il passe par le centre / mais c'est quand non : pas le milieu / mais c'est quand même un segment qui relie deux points d'un cercle / donc en tant que segment qui relie deux points d'un cercle / le diamètre c'est un cas particulier des*

E'' : *rayons*

Rémi : *mais non !*

Pour terminer avec cette analyse des formulations, nous pouvons observer durant cette séance la volonté de Rémi de marquer une distinction entre les objets dits matériels, comme par exemple les instruments de géométrie et les objets dits géométriques. Ainsi, lorsqu'il demande à la classe « *d'autres notions de vocabulaire qui vont apparaître [lors de l'étude du cercle]* », il refuse la réponse d'un élève qui propose le terme « *compas* » :

Rémi : *non, compas, c'est un outil, c'est pas un objet géométrique*

Une relation dialectique avec le compas

Durant cette séance, le recours au compas en tant qu'instrument pour tracer des cercles (et donc directement en lien avec l'agir sur le cercle) est controversé. Comme déjà indiqué ci-dessus, lorsqu'une élève affirme en début de séance que, en plaçant le compas sur le point *O*, on trace un cercle qui relie tous les points, Rémi accepte cette remarque mettant en jeu l'instrument. Mais, plus tard, lorsqu'il demande comment on pourrait définir un cercle, à la réponse d'un autre élève qui propose que « *un cercle se trace avec le compas* », Rémi réagit de toute autre manière :

Rémi : *je vous ai demandé de prendre un compas ? [...] le cercle vous me l'avez / vous me l'avez déjà découvert à partir du moment où il y avait plusieurs points [...] j'ai pas eu besoin de compas pour que vous compreniez qu'il s'agit d'un cercle // d'accord / vous l'avez déjà dans votre tête le cercle / alors j'ai pas eu besoin de compas pour ça*

Ainsi, Rémi refuse toute référence aux instruments de géométrie dans la définition du cercle car les techniques de représentation des objets géométriques n'ont pas leur place dans ce type d'énoncé. Pour autant, les élèves maintiennent leur façon de désigner le cercle comme une ligne dynamique obtenue en reliant des points :

Rémi : *un cercle est constitué de points / oui*

E : *qu'on relie.*

Les échanges qui suivent sont particulièrement intéressants car ils témoignent de l'effort de mise en mots pour décrire le concept de distance par rapport au centre qui est matérialisée par le rayon : une branche du compas est fixée sur le point *O* et l'autre bouge afin de relier les points.

E : *ben qu'on relie à partir du point euh : du centre*

Rémi : *qu'on relie à partir du centre ? // quand on relie on passe par le centre ?*

E : *non mais il y a un rayon*

Rémi : *alors ? essayez de me préciser quels sont ces points // Clara elle me dit un cercle c'est un ensemble de points [...] à force de placer des points on voit apparaître un cercle [...]*

Rémi oriente encore une fois les échanges sur le concept de cercle comme une ligne constituée d'un ensemble infini de points. Pourtant, quelques minutes plus tard, c'est l'enseignant lui-même

qui remettra en jeu le compas comme l'instrument permettant « *de tracer l'infinité de points qui appartiennent au cercle* ». Enfin, au cours de la préparation de la carte mentale, il se retrouve aussi à discuter avec les élèves autour des compétences manipulatoires (Petitfour, 2017b) liées au compas :

Rémi : *placer le point O / donc interdit d'utiliser le compas tant qu'on n'a pas placé le point O // [Rémi prend un feutre] On peut le préparer / mais on l'utilise pas // donc je place un point O : ici normalement / et puis avec le compas je pointe // sur le point O / et je fais attention / un compas ça ne se tient pas comme ça*

E : *non ça s(e) tient par le bout*

Rémi : *voilà : / éventuellement on peut laisser // une main au niveau de la pointe // mais pour faire tourner le compas on le prend*

E : *par en haut*

2.2. Dans la classe de Stella

2.2.1. Présentation de la situation non ordinaire

De même ici, la séance inaugure une courte séquence sur le cercle ; elle s'est déroulée en novembre 2016, dans une classe de sixième d'un collège ordinaire.

L'enseignante, Stella, met en œuvre la situation décrite dans la partie 1.4. mais, afin de pouvoir introduire la définition de « corde » d'un cercle, elle fait le choix d'ajouter deux autres gabarits : deux segments de disque¹⁶, l'un contenant le centre du cercle, l'autre ne contenant pas le centre, ces deux nouveaux gabarits ayant donc toujours un bord droit et un rayon égal à celui de la figure-modèle (figure 5).

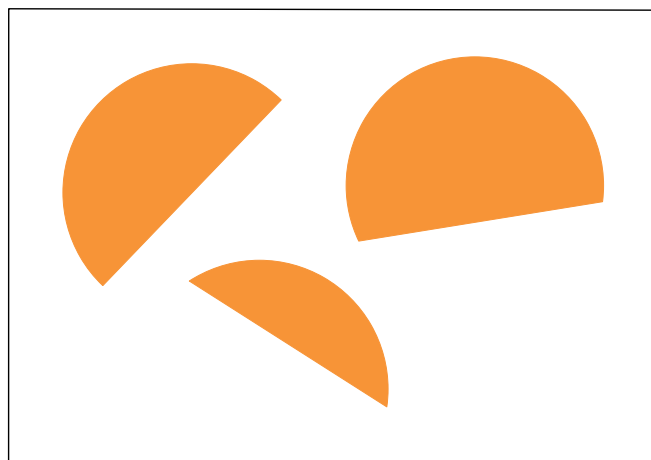


Figure 5 : Dans la classe de Stella, les trois gabarits mis à disposition des élèves dans une enveloppe.

Ce choix permet d'ailleurs de définir un diamètre comme étant une corde particulière (car passant par le centre du cercle). Précisons que les objectifs initiaux tels que décrits dans la partie 1.4. ne sont pas *a priori* modifiés par ce changement de milieu matériel¹⁷. Néanmoins, il reste à

¹⁶ Le « segment de disque » d'extrémités A et B contenant le point M (A , B et M étant trois points distincts du cercle) est la surface comprise entre l'arc \widehat{AB} contenant M et la corde $[AB]$. Malgré une désignation évoquant usuellement un objet 1D, ce terme indique un objet 2D (cf. figure 5).

¹⁷ Milieu matériel au sens de Brousseau (1998) et Margolinas (2004).

la charge de l'élève de reconnaître de façon perceptive le gabarit le plus pertinent pour la résolution du problème, à savoir, celui qui correspond à une moitié de disque.

Au début de la séance, Stella n'intervient quasiment pas : elle affiche la consigne au tableau interactif et fournit les gabarits dans une enveloppe.

Trouver la procédure utilisant exclusivement le compas pour reproduire le même cercle que celui déjà tracé qui sert de modèle. Les gabarits fournis servent seulement à prendre ou à ajouter des informations sur le modèle. Les gabarits fournis ne doivent être ni coupés ni pliés.

Avant la séance, Stella a déjà préparé un document contenant la trace écrite finale qu'elle compte distribuer à ses élèves à l'issue de la séance (annexe, 2.).

2.2.2. Éléments d'analyse de la mise en œuvre

Le concept de cercle est évoqué dès le début de la séance : le terme est utilisé dans la consigne (« *Trouver une procédure utilisant exclusivement le compas pour reproduire le même cercle que celui déjà tracé qui sert de modèle* ») et une représentation de la figure est également sur la fiche élève. Le cercle est ici vu essentiellement comme une ligne fermée (donc en dimension 1). Nous pouvons noter que d'une part le compas est également mentionné dans l'énoncé ce qui peut orienter vers une vision dynamique du cercle et que, d'autre part, les élèves disposent de gabarit de demi-disques, ce qui amène à appréhender le cercle comme contour d'une surface 2D. Nous ne trouvons par contre aucune référence à la dimension 0 : ni en ce qui concerne les points du cercle, ni pour ce qui est de son centre.

Lors de la phase de recherche en binômes, plusieurs conceptions concernant le cercle, le diamètre ou le centre se dégagent chez les élèves. Les deux binômes observés tracent à l'aide du gabarit deux diamètres en position prototypique (position horizontale et verticale) : pour cela, ils placent le bord arrondi de l'un des gabarits de manière à ce qu'il coïncide avec une portion du cercle, puis ils tracent le segment correspondant au bord droit du demi-disque. Ils paraissent en fait chercher des axes de symétrie du cercle ou plus exactement du disque qu'il borde. En effet, lorsque l'observatrice leur demande de justifier le choix du gabarit, un des élèves explique :

E : / *bah en fait ça [il indique le modèle] ça ressemble plutôt à la moitié que les autres [il fait allusion aux deux autres gabarits]*

Ils choisissent donc le gabarit qui semble correspondre à la moitié du disque, son bord droit représentant alors un axe de symétrie. Nous pouvons noter que les élèves se contentent de leurs perceptions et ne vérifient pas que le gabarit proposé correspond bien à la moitié du disque en faisant pivoter le gabarit le long de cet axe de symétrie. En outre, le positionnement horizontal et vertical des deux axes choisis paraît important pour eux : un des élèves fait remarquer que l'un des segments est « *un peu penché* », ce qui laisse entendre que cela risque de perturber leur construction. Cette préoccupation quant à l'orientation des diamètres peut provenir du fait que les axes de symétrie des figures étudiées en cycle 3 sont généralement horizontaux ou verticaux. Ces élèves n'ont certainement pas encore assimilé l'idée que dans le cas du cercle (ou du disque), il existe une infinité d'axes de symétrie. Cette prégnance des diamètres horizontal et vertical par rapport aux autres diamètres du cercle avait déjà été relevée par Artigue et Robinet (1982) :

Le cercle y apparaît comme une figure géométrique ayant même dimension dans deux directions privilégiées : l'horizontale et la verticale. Il a une longueur et une largeur, voire une largeur et une hauteur et elles ont même mesure. Pour tracer cette longueur et cette largeur, l'enfant ne cherche pas, semble-t-il, à réaliser un maximum de longueur de cordes horizontales ou verticales, mais plutôt à partager le cercle en deux parties égales. Le milieu du cercle est justement le point de

croisement de la longueur et de la largeur. De ce fait, longueur et largeur semblent être considérées comme des axes de symétrie plutôt que comme des diamètres ensemblistes (Artigue & Robinet, 1982, p. 19).

Par ailleurs, lorsque l'observatrice demande le nom du point d'intersection des deux axes tracés, un élève répond : « *le milieu* ». Cette réponse, correcte par rapport aux diamètres, révèle la prégnance de cette idée de moitié et de symétrie. Après avoir repéré le point d'intersection de ces deux diamètres, il ne leur reste plus qu'à positionner la pointe sèche du compas sur le centre, à choisir un écartement égal au rayon du premier cercle et à tracer la figure attendue.

Dans une production d'élèves : une adjonction de tangentes

Un autre binôme adopte une stratégie légèrement différente : après avoir tracé deux diamètres perpendiculaires, il prolonge le segment vertical, puis trace *à l'œil* deux tangentes au cercle et parallèles à cette demi-droite ; il trace ensuite, au-dessous du modèle, un cercle qui possède les deux mêmes tangentes que le premier (figure 6). Même si l'on peut observer qu'ils n'ont pas véritablement utilisé ces tangentes lors de leur construction puisque la technique utilisée est identique à celle de leurs camarades, peut-être cette bande sert-elle comme vérification, pour s'assurer que le cercle obtenu est bien de la même taille que la figure-modèle.

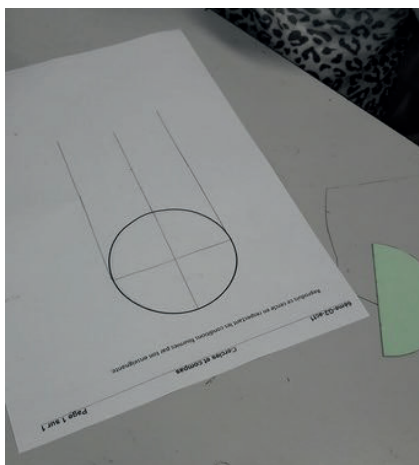


Figure 6 : *Une adjonction de tangentes pour le tracé du cercle.*

La manière de référer au gabarit du demi-disque, par Stella et ses élèves

Dès le début de la mise en commun, Stella amène les élèves à utiliser un lexique mathématique.

E : *en fait ce gabarit vous prenez votre feuille [il prend la feuille de travail] vous voyez que c'est une demi-partie du cercle que vous voulez faire [il parle et, en montrant aux autres élèves, pose le gabarit sur la feuille de travail de façon que son bord courbe coïncide avec une partie du cercle]*

Stella : *d'accord il y a l'un des trois gabarits qui est un*

E' : *un demi*

Stella : *un demi-cercle*

Ici, l'élève E assimile le gabarit (un demi-disque) à une « demi-partie du cercle ». Il est donc probable qu'il se représente le cercle comme une surface. L'enseignante conforte cette assimilation puisqu'elle reprend l'expression de « *demi-cercle* ». Elle oscille ensuite entre cette dénomination et une expression mathématiquement plus rigoureuse (« *demi-disque* ») pour

désigner le gabarit : se situe-t-elle plutôt du côté de l'objet théorique et non matériel ? Ou bien se place-t-elle par moments du côté des élèves, en reprenant leurs propres expressions ?

Stella continue à encourager les élèves à utiliser le lexique de géométrie :

E : *on a fait ça ici* [son camarade tient le gabarit sur le modèle et E trace un segment suivant le bord droit du gabarit]

Stella : *très bien on enlève / qu'est-ce qu'on trace en faisant ça grâce au demi-disque*

E' : *un segment*

Stella : *oui on trace un segment qui a un nom*

E'' : *un demi-cercle un rayon*

Stella : *un rayon ?*

E''' : *un diamètre*

Par l'agir de ces élèves, le bord droit du gabarit (jamais évoqué en ces termes) est vite étiqueté, sans aucune explication (de la part des élèves ou de l'enseignante), comme étant un diamètre. Cet épisode aurait pu être une occasion pour caractériser ce dernier en tant qu'axe de symétrie du cercle, d'autant plus qu'ici les élèves ont dû choisir le bon gabarit (le demi-disque), parmi les trois proposés. Ce n'est que plus tard, encore en s'appuyant sur l'agir des élèves, que Stella parle du diamètre comme segment passant par le centre du cercle, définition d'ailleurs présente dans la trace écrite qu'elle distribue à la fin de la séance (annexe, 2.) :

Stella : *[...] tous les diamètres se croisent en un point qui s'appelle...*

E : *intersection*

Stella : *intersection mais pour le cercle ?*

E' : *centre*

Stella : *le centre quel que soit le diamètre que vous avez tracé vous devez pouvoir trouver le centre*

Là encore, nous pouvons remarquer différentes conceptions associées au terme « centre ». Pour l'élève interrogé, il est avant tout un point d'intersection puisqu'il a été obtenu au croisement de deux diamètres. Précédemment, un autre élève associait ce point au concept de « moitié » puisqu'il avait été obtenu comme milieu d'un diamètre :

E : *on sait maintenant que on peut couper en deux* [avec un crayon, il marque le milieu du diamètre tracé avant] *ça ça va être le centre et là on trouve deux rayons*

Dans cette classe, la manière de parler du cercle convoque rapidement le vocabulaire expert attaché à cette figure géométrique. Après avoir choisi le bon gabarit, Stella n'évoque plus son aspect matériel (bord droit ou moitié de disque) alors que, lors de cette phase de mise en commun, les élèves continuent de le manipuler pour expliciter leur procédure.

La trace écrite de Stella : paradoxe cognitif entre la situation et l'institutionnalisation du savoir

Dans la trace écrite, préparée en amont de la séance, bien que la situation mise en œuvre ne cherche pas à favoriser la définition du cercle en termes de lieu géométrique (définition 1), Stella inclut la définition suivante :

On considère un point O déjà placé. Un cercle de centre O est l'ensemble de tous les points situés à une même distance du point O .

Ainsi, alors que les élèves ont appréhendé le cercle comme le bord d'une surface (le gabarit) ou comme une ligne, il sera défini lors de l'institutionnalisation à partir d'éléments de dimension 0. Pour Stella, la situation semble être accessoire : la trace écrite qu'elle distribue aux élèves renvoie à une définition exclusivement en termes de lieu géométrique (définition 1), ignorant les

modes d'agir-parler-penser du cercle que la situation elle-même peut convoquer et que les élèves pourraient amener au cours des échanges oraux pour décrire leurs actions.

Remarquons enfin que, au cours de cette séance, le compas sert aussi bien pour tracer le cercle que pour comparer ou reporter des longueurs, notamment lors de la mise en évidence de la relation qui existe entre diamètre et rayon :

Stella : *alors reprends-le ton rayon là où il a été trouvé au départ avec le compas*

[L'élève écarte le compas sur le modèle en posant la pointe sèche sur le centre et l'autre sur le point d'intersection du cercle avec un diamètre tracé avant]

Stella : *et le double ça veut dire que / on doit le reporter / deux*

E : *deux fois*

Stella : *deux fois / N'utilise pas le gabarit essaie de le reporter deux fois [sous-entendu, avec le compas] le rayon sur le cercle*

[L'élève reporte deux fois l'écartement du compas sur un diamètre du cercle tracé]

Stella : *une fois et puis / deux fois est-ce que ça marche à peu près ? d'accord*

Les divers usages du compas ne sont pourtant pas explicités lors des échanges mais seulement dans la trace écrite préparée pour les élèves. Dans cette trace écrite, seule l'utilisation du compas pour comparer ou reporter des longueurs est mentionnée, alors que, durant la séance, les élèves l'ont essentiellement utilisé pour tracer des cercles, en connaissant le centre et le rayon.

2.3. Dans la classe de Jules

2.3.1. Présentation d'une variante de la situation non ordinaire

Le problème de reproduction du cercle, tel que décrit dans la partie 1.4., a été adapté puis intégré dans une progression pensée et produite en collaboration par le groupe IREM *Didactique - Cycle 3* de Bordeaux (auquel Jules et deux auteures de cet article appartiennent), en appui sur les travaux du *groupe de Lille*¹⁸. L'approche privilégiée est donc une approche des concepts géométriques à partir de situations de restauration dont les variables didactiques sont clairement identifiées, telles que la complexité de la figure-modèle, la présence d'une amorce, le choix des instruments mis à disposition, le système de coût sur les instruments utilisés pour reproduire le modèle, le changement d'échelle entre la figure-modèle et l'amorce, la position des figures, etc. (Mathé *et al.*, 2020).

La séance a été filmée en décembre 2019, la classe de sixième impliquée se situe dans un collège ordinaire. Comme pour la séance décrite précédemment, une observatrice circule dans la salle, filme des élèves en activité et échange avec eux.

L'objectif d'une situation de restauration est la reproduction de la figure-modèle, comme le mentionne la consigne écrite, affichée au TBI : « *modèle à reproduire exactement* », en respectant ici un système de coût sur l'usage des instruments pendant le tracé (affiché au TBI et écrit sur la feuille de travail des élèves, figure 7). Ce type de situation est pratiqué par les élèves depuis le début de l'année : « *encore une restauration de figure* », constate Jules, qui substitue à la fin de sa prise de parole le verbe « reconstruire » (davantage usité) à « restaurer » (verbe plus

¹⁸ En référence à leur appartenance institutionnelle, nous désignons par *groupe de Lille* un groupe de recherche qui a fonctionné à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais dans les années 2000 dont les principaux membres ont été, pour une période plus ou moins longue Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Joël Jore, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante-Orsola, Anne-Cécile Mathé, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Odile Verbaere. Dès lors de nombreux travaux ont été publiés par les différents membres de ce groupe ; nous invitons le lecteur à consulter par exemple Perrin-Glorian & Godin (2018) ou Mathé *et al.* (2020).

spécialisé) : « vous avez la place ici, pour reconstruire / exactement le même cercle ».

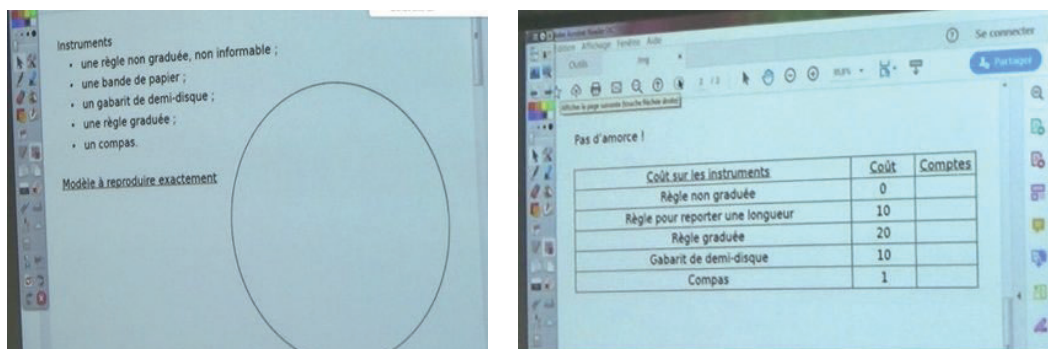


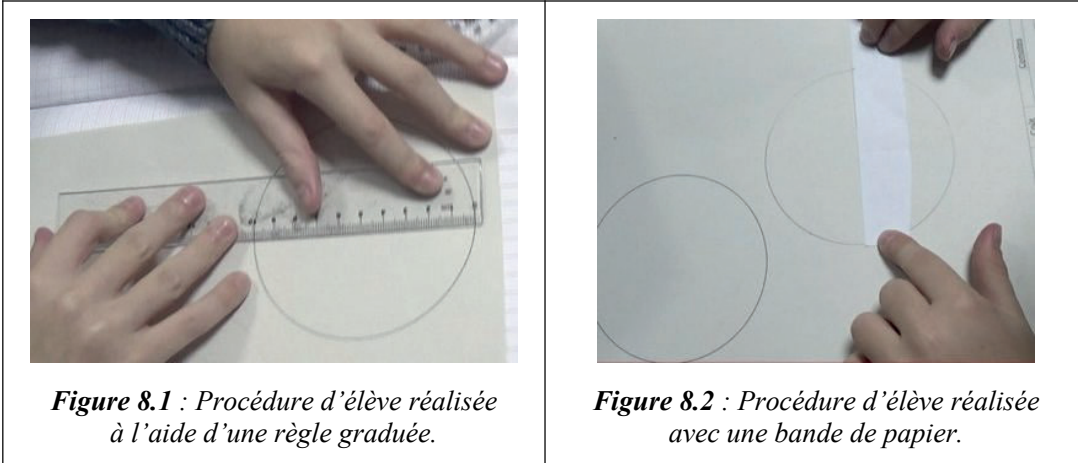
Figure 7 : Photos du TBI lors de la passation de consigne dans la classe de Jules.

En vis-à-vis est tracé un cercle et au-dessous de la feuille de travail, figure la liste des instruments utilisables avec leur *coût*, contrainte déjà instituée par Jules comme il le leur rappelle : « vous avez l'habitude » ; les élèves savent aussi que la figure-modèle est utile pour prendre des informations et que les tracés sur celle-ci n'ont pas de coût. Jules a adapté la situation d'origine et a ajouté trois instruments : une règle *informable* (il s'agit d'une bande de papier blanche non graduée que l'on peut *informer* pour faire un report de longueur par exemple), une règle non informable (qui peut être utilisée uniquement pour tracer des traits) et une règle graduée, avec le système de coûts suivant (figure 7, à droite) :

- règle non graduée : 0 point ;
- règle pour reporter une longueur : 10 points ;
- règle graduée : 20 points ;
- gabarit de demi-disque : 10 points ;
- compas : 1 point.

Contrairement à ce que nous avons avancé pour Stella, la modification du milieu matériel ici change *a priori* les connaissances d'action susceptibles d'apparaître chez les élèves pour résoudre le problème. En effet, cette situation de restauration donne la possibilité aux élèves de recourir à des stratégies mobilisant la recherche d'un diamètre, sur la figure-modèle, en traçant un segment de longueur la plus grande possible (puisque les élèves disposent de règles informables ou graduées), ce qui n'était pas du tout une stratégie envisagée dans la situation originale (voir partie 1.4.), d'autant que le diamètre de la figure-modèle est 10 cm, un relevé « rond » pouvant influencer les élèves sur la « validité » de leur procédure. En outre, le système de coût sur les instruments peut donner l'illusion aux élèves qu'une stratégie mobilisant la bande de papier (la règle informable) ou même la règle graduée ne serait pas plus coûteuse que celle mobilisant uniquement le gabarit de demi-disque sur la figure-modèle et le compas (qui est la stratégie experte attendue, voir figure 3) car la prise d'informations et les tracés sur la figure-modèle sont gratuits. Néanmoins, quand bien même leurs usages sont gratuits sur la figure-modèle, tracer un diamètre à l'aide uniquement de la règle informable, non informable ou graduée n'est pas valide car le(s) tracé(s) se ferai(en)t soit à l'œil (verticalement ou horizontalement pour un meilleur contrôle visuel) soit par ajustement de la mesure de segments tracés successivement en cherchant le plus grand possible (par exemple on peut tracer un segment, puis le mesurer et tracer un autre segment dont on compare la mesure au précédent ; on ajuste éventuellement le tracé suivant). Si l'élève trace deux diamètres de cette façon-là (c'est-à-dire avec une règle, informable ou non), il obtient le centre comme point d'intersection des deux

diamètres tracés ; si l'élève trace seulement un diamètre, il peut ensuite mobiliser soit la bande de papier (qu'il pliera en deux), soit la mesure avec la règle graduée (mesure qu'il divisera par 2), afin d'obtenir la longueur (et/ou la mesure) du rayon et ainsi le centre. Toutes ces actions peuvent se dérouler uniquement sur la figure-modèle puis, une fois sur l'amorce, l'élève ne comptabilise qu'un point, étant donné qu'il utilise seulement le compas pour tracer le nouveau cercle. De nombreux élèves ont effectivement convoqué ce type de procédures (figures 8.1 et 8.2), qui seront à l'origine des interventions collectives de Jules (voir partie 2.3.2.).



Un autre type de procédure possible, cette fois correcte mais ne correspondant pas à celle attendue, consiste à tracer un diamètre à l'aide du gabarit de demi-disque sur la figure-modèle puis à mesurer ce segment avec la règle graduée (ou à l'aide de la bande de papier) pour obtenir la longueur (et/ou la mesure) d'un rayon et trouver ainsi le centre du cercle sur la figure-modèle (selon les mêmes modalités décrites dans le paragraphe précédent). À nouveau, l'élève comptabilisera alors seulement 1 point car toutes ses actions peuvent se réaliser sur la figure-modèle et il n'utilisera le compas que pour tracer le nouveau cercle à partir de l'amorce. Cette procédure peut en revanche être plus difficile à écarter car elle n'est pas plus onéreuse et l'usage des instruments est correct, étant donné que le diamètre est tracé à l'aide du gabarit de demi-disque.

Il existe d'autres procédures possibles, mais qui impliqueront un usage des instruments en dehors de la figure-modèle ; ces procédures pourront être remises en question compte tenu de leur coût important : on peut, par exemple, tracer le nouveau cercle à l'aide du gabarit de demi-disque mais celui-ci coûte 10 points, ou bien tracer un segment (rayon) à l'aide de la règle graduée, mais là encore le coût est élevé car cela vaut 20 points.

Selon les différents types de procédures que nous venons de décrire, le centre peut n'être dès lors plus envisagé comme l'intersection de lignes (comme initialement prévu en traçant deux contours du bord droit du gabarit de demi-disque, voir partie 1.4. et figure 3) mais comme le milieu du segment tracé sur la figure-modèle (soit comme la plus grande corde, soit à partir d'un seul tracé du bord droit du gabarit de demi-disque). La relation mathématique n'est plus la même : de la relation binaire entre deux objets de dimension 1D (intersection de deux lignes), on passe à une relation ternaire entre objet de dimension 0D (entre trois points : le milieu et les extrémités du segment) ou à une relation binaire entre un objet de dimension 1D et un de dimension 0D (entre un segment et un point qui lui appartient).

2.3.2. *Éléments d'analyse de la mise en œuvre*

La passation de consigne de restauration du cercle

Après que les élèves ont pris connaissance de la fiche (voir partie 2.3.1., figure 7, à gauche), Jules s'assure qu'ils comprennent quelle est la figure à reproduire. En effet, au cours des séances précédentes portant sur des problèmes de restauration, Jules faisait d'abord parler les élèves à propos de ce qu'ils voyaient pour ensuite les faire travailler sur l'analyse des figures-modèles en termes de propriétés avant de s'engager sur la reproduction instrumentée. Il demande ainsi : « *qu'est-ce que c'est que vous voyez ?* ». Les élèves répondent collectivement : « *cercle* ». Cette terminologie, appropriée, traduit une perception 1D des élèves (personne n'évoque la 2D avec le signifiant « *disque* »), de la figure appréhendée à travers ses caractéristiques géométriques (personne ne dira une ligne fermée, ni un « *rond* », par exemple).

Puis le coût sur les cinq instruments est affiché (voir partie 2.3.1., figure 7, à droite). Jules lit la liste en expliquant l'expression « *non informable* » et élude toute autre explication par « *vous avez l'habitude* ». À la fin de l'explicitation de la consigne par Jules, une élève intervient pour faire remarquer qu'on ne peut pas résoudre le problème avec 0 point. Jules reste évasif : « *on en discutera après... mais effectivement* ».

La consigne comporte des implicites portés essentiellement par la mémoire de la classe, au sens de Brousseau et Centeno (1991), qui sont élucidés soit à la demande d'un élève (deux cas observés), soit à l'initiative de l'enseignant qui identifie des difficultés (plusieurs interventions de Jules ont cette visée). Dans les premières minutes de l'activité, Jules complète, à haute voix, l'explicitation de la tâche, ce qui fait de la consigne tacitement facile et partagée, un ensemble de règles non triviales. Voici trois compléments formulés dans les premières minutes de la séance :

- *on n'écrit pas [sur le gabarit de demi-disque] (0'51", îlot 1) ;*
- *on peut réaliser des tracés sur le modèle*
(à la question « *est-ce qu'on a le droit [...] de dessiner sur le modèle ?* », le professeur retourne une question « *qu'est-ce qu'on a fait sur les modèles jusqu'à présent ?* », qui vaut réponse) ;
- *y a pas de coût sur les instruments quand vous les utilisez sur le modèle /// on ne compte les coûts que pour la construction (1'24, îlot 2).*

Les procédures de construction des élèves à la recherche d'un diamètre

Répartis en îlots de quatre ou cinq, les élèves se lancent dans la phase de recherche avec chacun une feuille de travail et les instruments nécessaires ; ils peuvent collaborer avec leurs camarades de l'îlot. Nous avons observé six îlots (dont un regroupant trois élèves en difficulté, inscrits en ULIS¹⁹) : dans plusieurs îlots, les procédures d'élèves consistent à tracer *à l'œil* un diamètre (horizontal ou vertical, voir partie 2.3.1. et figures 8) sur la figure-modèle. Ils cherchent à trouver la longueur du diamètre, puis du rayon pour le tracé du cercle. Pour ce faire, ils utilisent la règle graduée pour mesurer la longueur du diamètre (et la diviser par deux pour obtenir le rayon) ou ils utilisent la bande de papier pour reporter la longueur (et la plier ensuite équitablement en deux).

Jules intervient collectivement pour rappeler les règles d'usage de la bande de papier et de la règle. Il cherche à attirer l'attention des élèves sur le fait qu'on ne peut pas tracer un segment aléatoirement, qu'il est nécessaire de s'appuyer sur des propriétés ; autrement dit, ici, il est nécessaire d'avoir préalablement soit deux points (non aléatoires) qui définissent ses extrémités,

¹⁹ Unité localisée pour l'inclusion scolaire. Il s'agit d'un dispositif pour la scolarisation des élèves en situation de handicap.

soit une amorce du segment qu'on prolongerait²⁰; ces usages avaient déjà été explicités dans les séances précédentes et figurent sur leur *fiche-outils* élaborée au fil des activités de géométrie (voir annexe, 4.). Apparaît donc ici un premier obstacle pour les élèves, qui va persister tout au long de la séance : les élèves tracent un trait (pour le diamètre) sur la figure-modèle avec un usage qu'ils pensent techniquement correct de ces instruments (bande de papier ; règle) mais sans avoir auparavant repéré les points du cercle qui constituent les extrémités du segment. Malgré l'étayage de Jules que nous allons décrire dans la partie suivante, cet obstacle va persister.

La verbalisation de la définition du diamètre pour en accompagner son tracé

Les élèves se situent au niveau manipulatoire pour tracer le diamètre, ils savent pour la plupart utiliser une règle, d'un point de vue technique, mais ils ne mobilisent qu'une partie de la définition attendue (le diamètre est un segment qui passe par le centre du cercle et qui a pour extrémités deux points du cercle) pour positionner correctement le diamètre sur la figure-modèle (voir partie 2.3.1.). Ils tracent donc des cordes. Des échanges avec l'observatrice témoignent que les élèves ne sont pas sur le même registre que l'enseignant et l'observatrice ; ces derniers attendent des explications théoriques définitives tandis que les élèves apportent des réponses matérielles liées à la manipulation des outils :

Observatrice : *comment t'as su comment il fallait placer la bande de papier*

E : *je l'avais déjà utilisée auparavant [...]*

Observatrice : *qu'est-ce que t'as mesuré ?*

E (ou E') : *ben de zéro ça va jusqu'à dix*

Comme déjà décrit précédemment dans la classe de Rémi, cette ambiguïté entre objet graphique et objet théorique est source de malentendu, voire d'obstacle parfois difficile à dépasser pour les élèves. Le sens assigné aux objets dont on parle n'est pas toujours explicite dans les échanges langagiers entre l'enseignant et les élèves. En particulier, l'existence graphique du tracé du cercle (objet graphique) fait obstacle à la nécessité de reconnaître l'existence théorique de deux points (objets géométriques) pour autoriser le tracé d'un diamètre (objet graphique ET géométrique). L'extrait suivant en témoigne :

Jules : *Si je dois faire un report de longueur c'est à partir de quoi que je fais un report de longueur ?*

E : *d'un point*

E : *d'un trait*

Jules : *d'un trait / d'un trait qui comme objet géométrique représentera quel objet géométrique*

E : *un segment*

Jules : *un segment // oui // Qu'est-ce qui définit un segment ///*

E : *deux points*

Jules : *deux points // donc quand vous posez votre bande de papier sur votre figure est-ce qu'a priori vous avez des points*

C'est par le langage que Jules, en questionnant sur les modes d'agir (« *je la pose n'importe*

²⁰ Nous pourrions soulever ici un point problématique, inhérent à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie euclidienne, qui consiste à valider ou non certaines informations attachées à la figure de façon perceptive. Autrement dit ici ne sont pas validés les tracés de diamètre à la règle sur la figure-modèle mais sont acceptés les tracés de diamètre à l'aide du gabarit de demi-disque... Pourtant, dans un cas comme dans l'autre, ne sont pas vérifiées les conditions d'existence des deux points préalablement déterminés théoriquement. Ici, on suppose implicitement que les extrémités « matérielles » du gabarit de demi-disque vérifient ces conditions et correspondent à ces deux points nécessaires pour autoriser le tracé du diamètre.

comment ? »), essaie de ramener les élèves sur les conditions d'existence des objets théoriques. Dans cet extrait, Jules parle d'« *objet géométrique* » (au sens *droite, segment, point*), comme souvent dans ces séances de géométrie (ce qui ne veut pas forcément dire que les élèves comprennent qu'il s'agit d'un concept théorique dont la trace graphique n'est qu'une représentation imparfaite ; le mot même « objet » peut renvoyer aussi à quelque chose de tangible pour les élèves). Il s'agit là d'un langage d'expert dont on peut penser qu'il n'est pas toujours explicite pour les élèves. Ce faisant, Jules convoque l'opposition entre objet géométrique et objet graphique lié à l'usage des instruments de tracé. L'élève répond ici « *segment* », Jules reprend et suscite une déconstruction dimensionnelle de l'objet théorique considéré afin d'amener l'élève vers une vision ponctuelle. L'élève évoque alors l'existence de « *deux points* ». Subsiste alors un implicite fort derrière le seul mot « point », qui peut tantôt renvoyer à l'objet graphique tantôt à l'objet géométrique. On peut faire l'hypothèse que, pour certains élèves, ces négociations de sens permettront d'invalidier leur mode d'agir initial (autrement dit, on ne trace pas aléatoirement un trait sur la figure-modèle avec une règle) tandis que pour d'autres, les différents sens négociés resteront opaques. Les réponses des élèves entendues lors de cette séance ne permettent pas toujours de déterminer si le sens qu'ils donnent aux mots « points » et « traits » renvoie à l'objet graphique ou l'objet géométrique (comme attendu par l'enseignant).

Nous formulons ainsi l'hypothèse que si les élèves tracent un segment dont les extrémités appartiennent au cercle, c'est aussi parce que ce cercle est déjà tracé (objet graphique). Cet obstacle fait écho à celui déjà évoqué dans la partie consacrée à la classe de Rémi décrivant la difficulté à comprendre qu'une ligne est constituée d'une infinité de points et réciproquement qu'une infinité de points peut constituer une ligne.

Dans la suite de l'échange vont se jouer des enjeux similaires sur l'usage du compas : Jules va questionner les modes d'agir (« *Sur quoi elle doit se poser la pointe du compas* ») et les élèves répondent « *centre* », mais ce seul mot ne permet pas de dire le sens que les élèves lui assignent. Ce terme peut possiblement être ici attaché à l'idée de repérage, de zone approximative, que les élèves désignent de façon synonymique avec le terme de « milieu ». Jules, de la même façon que précédemment, questionne « *sur le // centre du cercle qui est quoi comme objet géométrique* », et là aussi les élèves répondent « *un point* ». Ce seul terme ne permet pas non plus de déterminer si les élèves parlent de l'objet théorique et/ou graphique.

Ajoutons que, dans la phase de recherche, les élèves mobilisent essentiellement un langage spontané d'action (lors des questions de l'observatrice ou lors des interventions individuelles avec Jules) qui peut se heurter au formalisme et à la mise à distance nécessaire dans la dernière partie du cours : de nombreux termes sont polysémiques ou porteurs d'ambiguïtés compte tenu de leur acception commune (comme par exemple *centre, milieu, côté, bord, ...*) ; les déictiques (*ça là, je fais ceci, je fais comme ça, ...*) peuvent faire illusion sur le fait que les significations des objets dont on parle (et leurs mises en relation) sont partagées.

Dans la suite des échanges, ces malentendus ou obstacles persistent, comme l'illustre, cet extrait entre Jules et un élève, Jean :

Jean : *j'essaye de faire un rayon*

Jules : *tu essayes de faire un rayon mais pour faire un rayon tu as besoin de quoi*

Jean : *du compas*

Jules : *je parle pas d'instruments je parle encore une fois d'objet géométrique // qu'est-ce que c'est qu'un rayon*

Jean : *c'est à la moitié*

Jules : *c'est la moitié de quoi*

Jean : *la moitié du cercle*

Jules : *quelqu'un aurait le bon mot à mettre là-dessus ?*

E : *la moitié du diamètre*

Jules : *c'est la moitié du diamètre donc là on parle de longueur qu'est-ce que c'est que le diamètre*

E : *un segment*

On note de nombreuses reprises-reformulations ou reprises-questionnements avec parfois des fermetures claires pour marquer une rupture paradigmatique. Jules explicite oralement quand on parle des grandeurs (« longueur ») ou de l'objet géométrique (« segment ») car un même mot, comme « diamètre », peut recouvrir les deux sens. Dans ces échanges oraux, on relève une dénivellation des objets géométriques convoqués (on parle de « figure » 2D, puis de « rayon » 1D, de « segment » 1D, jusqu'aux « points » 0D) participant ainsi des transformations des façons de penser les éléments caractéristiques du cercle (« côté de la figure », « moitié de la figure », « longueur du cercle », « côté arrondi », ...).

Les échanges des élèves témoignent, jusqu'au bout de la séance, du rapport dominant du support matériel ; l'enseignant essaie néanmoins, dans cette dernière phase, de les amener vers une désignation formelle « mathématique ».

E : *et ben y en a sur les côtés des bords // enfin sur les bords /// chai pas comment expliquer*

Jules : *comment ça s'appelle ce que vous appelez le bord ?* [il désigne le cercle en faisant le tour]

Au fur et à mesure des instructions formulées par une élève, Jules exécute les actions instrumentées à l'aide du TBI ; la procédure consiste à utiliser également le gabarit de demi-disque lors du tracé du cercle au lieu de l'utiliser uniquement sur la figure-modèle. Jules questionne les intentions de l'élève à partir des contraintes posées initialement, mais l'élève en reste à un discours de l'action ; Jules commente alors et cherche à dépasser les évidences perceptives ou matérielles :

Jules : *effectivement c'est un gabarit de demi-disque on voit que ça correspond bien au modèle // alors est-ce que ça a une importance qu'on le pose dans un sens ou dans un autre*

Jules : *qu'est-ce qu'on peut dire pour le gabarit // on peut appeler ça le bord droit /// et maintenant si on essaie de mettre du vocabulaire géométrique /// qu'est-ce que*

Ces changements de registre (graphique/langagier) sont savamment orchestrés par l'enseignant afin d'arriver à une formulation experte de la procédure attendue (voir bilan écrit de la séance, annexe, 3.). Pour autant, rien ne garantit, à ce stade et à partir de cette transcription, que les élèves peuvent suivre cette circulation et transformation des objets de discours.

Jules : *le centre du cercle /// puisqu'on a deux diamètres, on a dit que ces deux diamètres étaient deux segments qui joignaient des points qui étaient sur le cercle et qui passent par le centre du cercle donc ils se coupent forcément au centre du cercle /// deuxième partie // qu'est-ce que tu fais de ça pour ta construction*

Ces analyses tendent à montrer que peut persister une tension entre objet graphique et objet géométrique qui peut faire obstacle à la négociation de formes partagées des caractéristiques du cercle (diamètre, rayon, centre), alors que les situations de restauration de figures planes sont pensées *a priori* pour faire vivre ce que Perrin-Glorian *et al.* (2018) ainsi que Mathé *et al.* (2020) appellent une *géométrie des tracés* (une géométrie qui se caractérise par l'usage géométrique des instruments — hormis les instruments de mesure — pour tracer des figures) afin de faire le lien entre une *géométrie physique* (propre aux premiers enseignements de la géométrie à l'école

primaire portant sur des objets matériels ou graphiques contrôlés par la perception et des instruments matériels) et une *géométrie théorique* (qui est une géométrie basée sur un raisonnement hypothético-déductif, visée au cycle 4).

3. Éléments de discussion, conclusion

Dans cet article, nous cherchions à étudier, à partir de l'analyse des interactions langagières, comment des élèves de sixième parviennent à articuler et mobiliser différentes conceptions du cercle. Pour cela, nous avons considéré trois séances introduisant la séquence sur cette figure géométrique, mises en œuvre dans des classes distinctes et avec des enseignants différents. En outre, les problèmes proposés aux élèves différaient également : Rémi, suivant en cela un déroulement relativement classique, a tout d'abord considéré des objets 0D (les points du cercle) pour construire ensuite un objet 1D (le cercle lui-même), remettant le travail sur le disque (objet 2D) à une séance ultérieure ; Stella et Jules ont tous deux opté pour un problème plus original, consistant à travailler directement sur le cercle défini comme un objet 1D, en s'appuyant sur un gabarit de demi-disque (objet de 2D) : certains objets 0D (notamment, le centre ou des points du cercle) ont alors pu apparaître au cours de la mise en commun. Les choix de ces deux enseignants, quant aux variables didactiques, entraînent toutefois des modifications importantes du milieu matériel et donc des variations dans les connaissances d'action mobilisées par les élèves pour résoudre le problème. Stella propose non pas un mais trois gabarits de segments d'un même disque : cette décision peut amener les élèves à réfléchir au choix du gabarit à utiliser et à justifier ce dernier en se référant à des notions de moitié (de cercle ou de disque) ou éventuellement de symétrie axiale. Jules, quant à lui, introduit dans le milieu de nouveaux instruments (et notamment la règle informable et la règle graduée), ce qui peut orienter les élèves vers des procédures mettant en jeu des longueurs ou des comparaisons de longueur. En dépit des différences entre ces trois contextes de travail sur la notion de cercle, nous avons cependant pu mettre en évidence, à travers l'étude des productions langagières, plusieurs points communs.

Nous avons tout d'abord pu constater, dans ces séances, la mobilisation de conceptions différentes du cercle. Dans la classe de Rémi, les élèves ont été amenés à rencontrer la définition de cette figure comme un ensemble de points à égale distance d'un point donné (définition 1) et ont dû la confronter avec celle, plus connue (au moins en acte), d'une courbe de courbure constante (définition 3) ou (pour une vision plus dynamique) comme résultat d'une manipulation appropriée du compas. Les classes de Stella et de Jules ont, pour leur part, tout d'abord mobilisé leur conception du cercle comme bord d'un disque. Toutefois, comme le gabarit utilisé peut être modélisé par un demi-disque (et non un disque), ils peuvent réaliser que cette figure possède une infinité d'axes de symétrie (représenté par le bord droit du gabarit que l'on peut faire tourner le long de la ligne courbe du cercle). Par ailleurs, la plupart des élèves se sont appuyés sur une vision dynamique du cercle puisqu'ils ont dû le tracer avec un compas. Nous avons pu constater que dans chacune de ces mises en œuvre, l'articulation de ces diverses conceptions soulevait quelques difficultés : dans la classe de Rémi, les élèves ont notamment eu du mal à concevoir, d'une part, qu'une infinité de points puissent être contenus dans une courbe fermée et bornée et, d'autre part, qu'un ensemble de points puissent constituer une courbe, et ce en dépit des divers étayages mobilisés par l'enseignant (utilisation de *GeoGebra*). Jules, quant à lui, a décidé de partir de la conception du cercle en tant que courbe, mais il a ensuite été amené à considérer certains points de cette courbe (comme extrémités du diamètre), passage qui n'est pas sans difficultés pour les élèves. Enfin, lors de l'institutionnalisation, Stella a défini le cercle comme un ensemble de points, ce qui ne correspond pas aux conceptions mobilisées par ses élèves lors de l'activité de recherche. Ce hiatus entre l'institutionnalisation et les notions réellement

travaillées au cours de la séance constitue un phénomène déjà observé dans d'autres séances de mathématiques (Bulf & Celi, 2020a). Notons que, quelle que soit la manière de réactiver les connaissances des élèves sur le cercle, les professeurs observés ne font jamais référence explicitement aux propriétés P1 et P2. Cela conforte notre idée de la non pertinence de se focaliser sur la définition ponctuelle du cercle (définition 1), comme c'est souvent suggéré dans les manuels dès le cycle 3 et les textes officiels alors que les propriétés P1 et P2 semblent avoir une *raison d'être* (Chevallard, 1998) bien précise, en relation avec la justification des constructions géométriques à la règle et au compas (par exemple lors de la construction d'un triangle à partir de la donnée des longueurs de ses côtés).

Durant les séances analysées, les élèves ont également rencontré diverses conceptions mathématiques des notions de « diamètre » et de « centre ». Ainsi, dans la classe de Stella, la plupart des élèves ont tracé les diamètres de leur cercle en position prototypique (horizontaux et verticaux) certainement parce qu'ils considèrent en acte (consciemment ou inconsciemment) ces derniers comme des axes de symétrie de leur figure (nous avons vu que cette approche était portée par la situation choisie dans cette classe) et ils les placent alors de la même manière que les axes de symétrie qu'ils ont l'habitude de rencontrer : ils n'ont donc pas encore éprouvé la définition du cercle comme figure possédant une infinité d'axes de symétrie (définition 6). Chez Rémi, la définition de diamètre proposée par un des élèves semble s'appuyer sur l'image mentale de la symétrie centrale d'un rayon et la classe institutionnalise finalement le diamètre comme segment reliant deux points du cercle et passant par son centre. Dans la classe de Jules, enfin, plusieurs élèves utilisent une règle (informable ou non) pour trouver un diamètre du cercle, ce qui semble reposer sur la conception du diamètre comme une corde de longueur maximale. Notons par ailleurs que, durant ces séances, les diamètres et les rayons sont appréhendés par l'enseignant et les élèves soit en tant que segment, soit en tant que longueur de ces segments. Des phénomènes de polysémie sont aussi observés concernant la notion de « centre » : dans la classe de Stella, ce concept est tantôt appréhendé en tant que milieu d'un diamètre (là encore il s'agit d'une conception favorisée par le choix du problème, mais susceptible de renforcer la confusion habituelle chez les élèves entre « centre » et « milieu »), tantôt comme point d'intersection de deux segments. Ce tour d'horizon des diverses conceptions, mobilisées lors de trois séances de classes, concernant des notions aussi usuelles que « cercle », « diamètre » ou « centre », nous permet de prendre conscience des difficultés auxquelles les élèves peuvent être confrontés pour réellement appréhender ces notions et être en mesure de réaliser les tâches mathématiques qui leur sont proposées.

Par ailleurs, dans la mesure où expression et conception s'avèrent inextricablement liées, comme deux des facettes indissociables du triplet agir-parler-penser, il nous paraît essentiel d'observer les dénominations utilisées dans la classe pour désigner les différentes notions mathématiques travaillées. Nous constatons ainsi que les élèves de la classe de Jules demeurent dans un registre langagier en lien avec l'action et les objets matériels, quand l'enseignant et l'observatrice attendent des explications plus abstraites sur les propriétés sous-jacentes : le processus de secondarisation des discours, indispensable à l'assimilation des concepts, s'avère difficile à mettre en place. De même, les élèves paraissent parfois utiliser certains termes issus du lexique mathématique dans leur acception usuelle : ainsi, pour eux, le mot « centre » peut désigner une zone approximativement équidistante des points de la courbe (tout comme, dans une conversation courante, l'on pourrait parler du centre de la table). En outre, malgré les rappels à l'ordre des enseignants, plusieurs élèves utilisent également le terme « rond » pour désigner un cercle. Nous pouvons voir dans ces exemples une difficulté pour ces élèves à dissocier l'univers matériel, dans lequel s'effectuent les manipulations et dans lequel apparaissent les objets

graphiques, de l'univers abstrait dans lequel vivent les *objets géométriques* : la trace laissée par le compas sur la feuille n'est pas un cercle mais la représentation d'un cercle et il est donc légitime d'employer, pour désigner les objets mathématiques, un lexique spécifique, différent de celui utilisé pour parler des tracés effectués sur la feuille. Certains enseignants tentent d'établir cette distinction entre objets matériels et objets mathématiques : Jules catégorise les « points », « segments »... parmi les objets géométriques (par opposition aux instruments ou objets matériels tels que les gabarits) et, pareillement, Rémi distingue les instruments de géométrie des objets géométriques. Les enseignants se montrent également vigilants quant aux formulations proposées. Chacun veille à introduire au cours de la séance, les divers termes liés à la notion de cercle et contrôle l'usage que les élèves en font. Pourtant, diverses formulations au cours de ces séances nous montrent que cette rigueur n'est pas simple à respecter pour les élèves. Notons à ce sujet qu'il arrive également aux enseignants de s'appuyer sur des analogies avec la langue usuelle ou d'utiliser des expressions imprécises ou erronées dans leur discours. Ainsi, Stella reprend une expression maladroite d'un élève et Rémi s'appuie sur une comparaison entre un objet usuel (un arc de chasse) et un objet géométrique (un arc de cercle) pour faciliter la mémorisation des dénominations mathématiques. L'étude de tels phénomènes (Hache *et al.*, 2020) a permis de déterminer certaines de leurs motivations (faciliter la communication avec les élèves, les impliquer, etc.). Nous pouvons toutefois nous demander si les élèves parviennent à comprendre quand il est toléré de s'appuyer sur des expressions de la langue usuelle et quand il est exigé de recourir à un lexique mathématique.

L'analyse des productions langagières échangées dans la classe nous a ainsi permis de mieux comprendre les diverses conceptions des objets géométriques qui se trouvent mobilisées dans ces séances. Elle nous a également amenées à mieux cerner la nature des difficultés rencontrées par les élèves. Nous souhaiterions à présent creuser cette analyse sur le plan linguistique afin d'aller plus loin dans notre compréhension des phénomènes didactiques qui se sont joués. Nous voudrions notamment approfondir l'étude des usages différenciés et potentiellement différenciateurs de termes élémentaires comme « cercle », « point » ou « diamètre » : enseignant et élèves les utilisent-ils de la même façon ? Leur accordent-ils le même sens ? Existe-t-il des variations d'une classe à l'autre ? Tel sera l'objet de la deuxième partie de cet article.

Conventions de transcription des dialogues

MAJUSCULES	accentuation et emphase intonative
XXX	inaudible
<u>mots soulignés</u>	chevauchement
/ // ///	pause de 1 seconde ou moins, de 2 à 3 secondes ou de plus de 3 secondes
: ::	allongement vocalique ou consonantique
↑ ↓	intonation montante et descendante
*	geste de l'enseignant et pointage d'un élément

Références bibliographiques

Artigue, M. & Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherche en didactique des mathématiques*, 3(1), 5-64.
<https://revue-rdm.com/1982/conceptions-du-cercle-chez-les/>

- Barrier, T., Durand-Guerrier, V. & Mesnil, Z. (2019). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématique, *Éducation et Didactique*, 13(1), 61-81.
<https://www.cairn.info/revue-education-et-didactique-2019-1-page-61.htm>
- Beaugrand, C. (2019). Transposition des démarches du français sur objectifs spécifiques en contexte scolaire. *Élaboration en français langue de scolarisation dans trois disciplines du collège*. Thèse en didactique des langues, Université Paris 3.
- Beaugrand, C., Mendonça, Dias C., Bulf, C., Celi, V. & Millon-Fauré, K. (2021). Tracé du cercle et circulation des discours (seconde partie). Approche linguistique des interactions verbales. *Petit x*, 114, 39-67.
- Bernié, J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de pédagogie*, 141, 77-88.
http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/revue-francaise-de-pedagogie/INRP_RF141_8.pdf
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : la Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. & Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), 167-210. Grenoble : la Pensée Sauvage.
- Bulf, C. & Celi, V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : du gabarit au compas. *Grand N*, 97, 21-58.
- Bulf, C. & Celi, V. (2020a). Reproduire un cercle et en parler en classe de mathématique est-ce si simple ? Quelques éléments d'analyse d'une étude didactique comparant trois mises en œuvre d'une même situation. *Recherche en Éducation*, 40, 125-147.
<https://journals.openedition.org/ree/468>
- Bulf, C. & Celi, V. (2020b). Quels gestes professionnels didactiques pour dépasser les obstacles inhérents à l'enseignement de la géométrie au début du secondaire ? *Identifier, modéliser et surmonter les obstacles liés à l'apprentissage*. Actes du colloque Didactif. Liège, juillet 2020.
- Bulf, C., Mathé, A.-C. & Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique., *Spirale - Revue de Recherches en Éducation*, 54, 151-174.
http://www.persee.fr/issue/spira_0994-3722_2014_num_54_1
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'été*. La Rochelle, Charente-Maritime, pp. 91-118.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
<http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST05010/IST05010.pdf>
- Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures, *Grand N*,

76, 7-27.

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-76-grand-n/>

Hache, C., Mendonça-Dias, C., Millon-Fauré, K. & Azaoui, B. (2020). Everyday terms in mathematical classroom interactions: case study with multilingual immigrant learners. *Poster pour le Colloque ERME : "Language In The Mathematics Classroom"*.

Jaubert, M. (2007). *Langage et construction de connaissances à l'école : un exemple en sciences*. Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux.

Jaubert, M. & Rebière, M. (2012). *Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative*.
http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

Jaubert, M. & Rebière, M. (2019) Le scénario langagier didactique, un outil dans le processus de construction des savoirs ? Un exemple : l'enseignement et l'apprentissage de la lecture. *Raisons éducatives*, 23, 153-176.
<https://www.cairn.info/revue-raisons-educatives-2019-1-page-153.htm>

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Habilitation à Diriger des Recherches. Université de Provence - Aix-Marseille I.

Mathé, A.-C., Barrier, T. & Perrin-Glorian, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire - Enjeux, ruptures et continuités*. Louvain La Neuve : Academia L'Harmattan, Les sciences de l'éducation aujourd'hui.

Perrin-Glorian, M.-J. & Godin, M. (2018). *Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège*.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document>.

Petitfour, É. (2017a). Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques : étude des conditions favorables à des apprentissages. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 78, 47-66. Éditions de l'INSHEA.

Petitfour, É. (2017b). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition pour un dispositif de travail en dyade. *Petit x*, 103, 5-31.

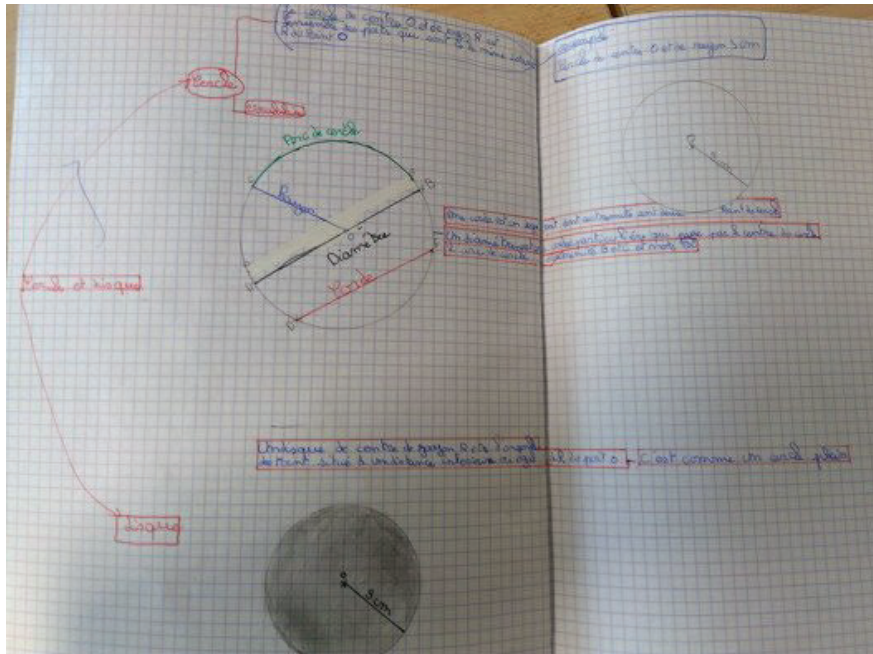
MEN (2004). *Programmes des collèges - Mathématiques, BO HS n° 5*, 9 septembre 2004.
https://www.education.gouv.fr/bo/BoAnnexes/2004/hs4/maths_sixieme.pdf

MEN (2016). *Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (Cycle 3), Espaces et géométrie au cycle 3*.
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Geometrie/38/5/RA16_C3_MATH_Espace-geometrie_897385.pdf

Annexes

Traces écrites dans les trois classes

1. Dans la classe de Rémi : la carte mentale



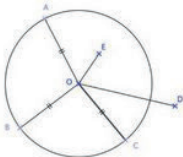
2. Dans la classe de Stella

G2 Cercle et compas

I. Le cercle

Définition :
On considère un point O déjà placé.
Un cercle de centre O est l'ensemble de tous les points situés à une même distance du point O.
Cette distance est appelée le rayon.

Attention :
- le centre n'est pas un point du cercle.
- un cercle est défini par son centre et son rayon.



Soit (C) le cercle de centre O.

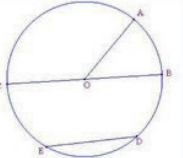
Compléter les pointillés par : ∈ ou ∉.

A (C) B (C) C (C)

D (C) E (C) O (C)

Ecrire trois longueurs égales :

..... = =



[OA], [OB], [OC], [OD] et [OE] sont des

On appelle aussi les longueurs de ces segments c'est-à-dire OA, OB, OC, OD et OE.

[BC] est un

O est le de [BC].

Quelle égalité peut-on écrire entre rayon et diamètre ?
..... et

[ED] s'appelle une

D'autres :

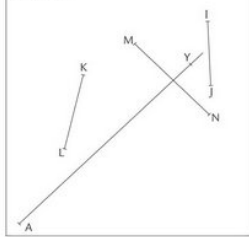
On appelle arc de cercle la partie de cercle situé entre deux points.

Repasser en bleu l'arc de cercle d'extrémités E et D, on le note :

II. Le compas

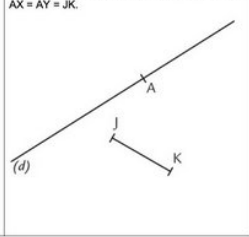
Le compas permet de comparer des longueurs sans les mesurer :

Sans utiliser de règle graduée, compare AY avec KL + MN + IJ.



Le compas permet de reporter des longueurs :

Trace deux points X et Y sur la droite (d) vérifiant AX = AY = JK.



Application : construction d'un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés.

Construire un triangle IJK tel que IJ = 6,5 cm, JK = 3,2 cm et KI = 4,4 cm.

3. Dans la classe de Jules (extrait d'un cahier d'élève)

Résumé

1) Pour le gabarit, sur le modèle :

- on a tracé deux diamètres du cercle :
- diamètre : un segment qui rejoint deux points du cercle et qui passe par son centre.
- Le centre est le milieu de chaque diamètre. Et l'intersection des deux diamètres, c'est le centre du cercle.

2) On a tracé un diamètre du cercle.

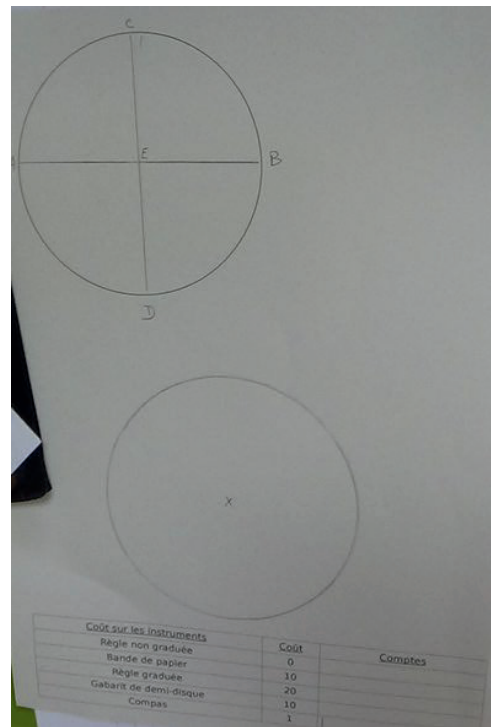
On place le milieu de ce diamètre, c'est le centre du cercle.

Construction

Avec le compas, on prend l'écartement d'un rayon.

rayon : longueur d'un segment qui a comme extrémités un point du cercle et son centre. Il correspond à une longueur et un segment.

On place le centre et on trace le cercle avec le rayon choisi.



4. La fiche-outils (classe de Jules, extrait d'un cahier d'élève)

Usage géométrique des instruments

Usage de la règle non graduée

Pour poser sa règle, il faut deux points déjà placés ou un trait droit, représentant un segment ou une droite, déjà tracé (que l'on prolonge).

Pour tracer une droite, on doit avoir un segment (que l'on prolonge) ou deux points.

Lors d'une reconstruction de figure :

- sur le modèle, la règle permet de vérifier des alignements ;
- sur la figure à réaliser, elle permet de tracer des traits qui représentent des segments, des droites.

Usage de la règle inflexible ou de la bande de papier pour un report de longueur

Pour reporter une longueur, il faut :

- un support droit, c'est-à-dire une droite ou un segment (que l'on peut prolonger si besoin) déjà représenté.
- un point de départ.

Usage d'une bande de papier pour placer le milieu d'un segment.

Le milieu d'un segment est aligné avec les extrémités et il se trouve à la même distance des deux extrémités.

- on reporte la longueur du segment du bord droit de la bande.
- on la plic en faisant coïncider les deux bords, marqués on obtient une longueur moitié.
- on reporte cette longueur moitié à partir d'une des extrémités et on a le milieu.

Usage géométrique des instruments

Usage du compas

* Pour reporter une longueur

L'écartement du compas est pris entre deux points déjà placés ou avec un segment déjà tracé.

On reporte à partir d'un point existant sur un support déjà représenté (segment, droite, demi-droite) en faisant une marque.

* Pour tracer un cercle, un arc de cercle

Il faut un point (le centre) pour poser la pointe.

Il faut un autre point pour placer le mors ou une longueur qui donne l'écartement pour avoir le rayon.