



HAL
open science

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE SITUAZIONI

Annie Bessot

► **To cite this version:**

Annie Bessot. INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE SITUAZIONI: Concetti fondamentali di didattica della matematica. 2024. hal-04523563

HAL Id: hal-04523563

<https://hal.science/hal-04523563>

Submitted on 27 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INTRODUZIONE
ALLA TEORIA DELLE
SITUAZIONI**

*Concetti fondamentali
di didattica della matematica*

Annie Bessot
Université Grenoble-Alpes

Traduzione italiana a cura di Valentina Celi e Marina De Simone

SOMMARIO

SOMMARIO	ii
PREFAZIONE	iii
1. Ma cos'è l'apprendimento in una situazione didattica?	2
2. Contratto didattico	3
2.1. Il contratto didattico rappresenta i diritti e i doveri impliciti di alunni e insegnanti in relazione ai contenuti del sapere matematico che vengono insegnati	3
2.2. Contratto didattico e negoziazioni del sapere tra studenti e insegnanti	5
2.3. Insegnamento e rottura del contratto	7
3. Situazione adidattica	7
3.1. Quali sono le condizioni perché una situazione sia vissuta come adidattica?	8
3.2. Quali elementi della situazione si modellizzano nel <i>milieu</i> ?	9
3.3. Esempio. Analisi <i>a priori</i> di una situazione didattica «Ingrandimento di un puzzle» (G. et N. Brousseau, 1987)	10
4. Variabili didattiche: definizioni ed esempi	13
5. Analisi dell'apprendimento in una situazione d'insegnamento «ordinaria»	14
6. Diversi statuti del sapere, diversi tipi di situazioni adidattiche	15
7. Situazione fondamentale	15
7.1. Introduzione	15
7.2. Esempio - Analisi <i>a priori</i> d'una situazione fondamentale: «Il gioco della corsa a <i>n</i> » (Brousseau, 1978)	17
8. Complementi: concezioni, ostacoli	19
9. Complementi: Devoluzione/istituzionalizzazione (sapere/conoscenza)	21
9.1. Devoluzione	21
9.2. Istituzionalizzazione	21
BIBLIOGRAFIA	22
ALLEGATO I <i>Costruzione matematica versus costruzione pratica</i>	25
ALLEGATO II <i>Attività di costruzione di assi di simmetria (Grenier, 1984)</i>	27
ALLEGATO III <i>Trascrizione de «bilancio sull'attività di costruzione con strumenti, à proposito del trapezio» (Grenier, 1989)</i>	28

PREFAZIONE

Il *Diplôme d'Études Approfondies* (DEA) in didattica delle discipline scientifiche è stato creato nel 1994 presso l'*Université Joseph Fourier* di Grenoble. A questo è seguita la creazione di un Master di secondo anno presso la stessa università, *EIAH¹ et didactique*, in seguito all'introduzione della riforma LMD².

Il documento che segue è una dispensa di un corso che ho tenuto nel *Master 2 EIAH-Didactique* dal 2003 al 2007 come parte dell'unità didattica (UE1: *Concepts fondamentaux de la didactique*) di cui ero responsabile.

In questo corso ho presentato il quadro teorico sviluppato da Guy Brousseau.

Inizialmente avevo intitolato il corso "Introduzione alla teoria delle situazioni didattiche". Ho eliminato l'aggettivo "didattico" dal titolo.

Recentemente, in realtà, Brousseau (1997) ha stabilito una distinzione all'interno della teoria delle situazioni tra la teoria delle situazioni matematiche per uso didattico (TSM o teoria delle situazioni matematiche) e la teoria delle situazioni didattiche propriamente dette (TSD).

Questa distinzione, molto illuminante dal mio punto di vista, è passata relativamente inosservata: me ne sono accorta solo durante la preparazione del mio corso alla 15^a *école d'été en didactique des mathématiques* (Clermont-Ferrand, 2009). Ne ho tenuto conto quando ho scritto il corso per questa *école d'été*. (Bessot, 2011).

Il presente testo è quindi una revisione del corso del 2003. Questa revisione è stata in gran parte motivata dal desiderio di tradurlo in inglese ed eventualmente in altre lingue. In effetti, nel nostro lavoro con Claire Margolinas per il progetto ICMI AMOR³, avevamo bisogno di un riferimento in inglese che fornisse un primo approccio al lavoro di Guy Brousseau. Questo corso sembra soddisfare le nostre aspettative.

Spero che questo lavoro e le sue varie traduzioni contribuiscano a far conoscere la teoria delle situazioni, uno dei fondamenti essenziali della didattica della matematica francese, ripresa in altre didattiche e più ampiamente nelle scienze dell'educazione e, per di più, al di fuori del contesto particolare della Francia. Ironia della sorte, mentre sto ultimando questa prefazione, ricevo la triste notizia della scomparsa di Guy Brousseau. Ciò mi rattrista enormemente, ma conferisce a questo impegno un'importanza ancora maggiore.

A questo punto, ringrazio Jean-Luc Dorier, che ha avviato AMOR, ha riletto attentamente questo corso in francese, aiutandomi a tradurlo in inglese e motivandomi a farlo tradurre in altre lingue.

Infine, ringrazio di cuore Valentina Celi e Marina De Simone per aver accettato di tradurre in italiano questa versione del mio corso.

Annie Bessot

Grenoble, febbraio 2024

annie.bessot@gmail.com

Non esitate a contattarmi, se avete domande sul contenuto di questo corso. Grazie!

¹ Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain

² La riforma "licence-master-doctorat", o riforma LMD, è un insieme di misure che modificano il sistema di istruzione superiore francese per adattarlo agli standard europei della riforma BMD. I testi costitutivi di questa riforma sono stati pubblicati nel 2002, ma la loro attuazione ha richiesto diversi anni.

³ Voir <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>

All'origine del movimento teorico denominato «didattica della matematica»⁴, in Francia, c'è l'idea che sia possibile descrivere e spiegare in modo razionale i fenomeni didattici, fenomeni che in genere suscitano più l'empirismo o l'opinione che il discorso ragionato.

Una delle preoccupazioni ampiamente condivise all'interno della comunità francese di didattica della matematica è quella di stabilire un quadro teorico originale che sviluppi i propri concetti... C'è anche un ampio consenso sulla necessità metodologica di ricorrere alla sperimentazione in interazione con la teoria... (Laborde 1989, p. 47).

Questo quadro teorico era inizialmente quello della teoria delle situazioni di cui Guy Brousseau fu il fondatore e quello dei campi concettuali di Gérard Vergnaud.

In un primo tempo, la didattica delle discipline scientifiche potrebbe essere definita, nell'ambito delle scienze cognitive, come la scienza delle condizioni specifiche per la diffusione delle conoscenze scientifiche utili al funzionamento delle istituzioni umane.

Il sistema minimo di studio è il sistema didattico *stricto sensu*, Insegnante, Allievo, Sapere: cioè le interazioni tra insegnante e studenti relative al sapere, in una situazione con finalità didattiche.

I ricercatori in didattica della matematica affermano la specificità della loro disciplina rispetto ad altri campi strettamente correlati:

Per produrre, migliorare, riprodurre, descrivere e comprendere le situazioni di insegnamento della matematica, è diventato necessario - e possibile - teorizzare questa attività d'insegnamento come un oggetto di studio originale e non come una semplice combinazione di fatti che possono essere teorizzati solo in campi autonomi come la pedagogia, la sociologia, la psicologia, la matematica, la linguistica o l'epistemologia. (Brousseau 1986, riassunto)

La metafora del labirinto può permettere di comprendere meglio ciò che differenzia la problematica dello specialista in didattica dallo psicologo:

Lo psicologo [...] studia il comportamento del topo nel labirinto, ma conosce la struttura del labirinto, che lui stesso ha progettato. Lo specialista in didattica, invece, non conosce la struttura del labirinto in cui viene gettato l'allievo. Quindi, logicamente, deve prima cercare di esplorarlo. Per farlo, può anche osservare il comportamento del "topo" (l'allievo!) all'interno del labirinto, in modo da dedurre la struttura... (Chevallard 1989, p. 36)

I concetti teorici della didattica della matematica sono specifici alla matematica? In Francia, i ricercatori in didattica di altre discipline (come l'educazione fisica o la fisica) stanno attualmente utilizzando alcuni di questi concetti. La mia ipotesi è che alcuni concetti teorici derivati dalla didattica della matematica siano di natura generale: in situazioni particolari, possono essere utilizzati per generare domande e risultati che sono specifici di una particolare area di conoscenza.

Ciò che definisce le posizioni di "insegnante" e "allievo" è il progetto del sistema didattico, che è quello di passare da uno stato iniziale a uno stato finale rispetto alla conoscenza, come questione dell'apprendimento.

⁴ "Un simposio riunito a Bordeaux nel 1975 i ricercatori interessati a trattare questo campo come un ambito scientifico che suggerirono di chiamare 'epistemologia sperimentale'. Su mio suggerimento, abbiamo preferito adottare l'etichetta un po' disprezzata di 'didattica' per mostrare il nostro desiderio di migliorare l'insegnamento **attraverso ciò che potevamo capire**". (Brousseau 1986a, p. 28) (sono io che sottolineo in grassetto)

Dal punto di vista del rapporto con il sapere, c'è un'asimmetria, che è costitutiva del sistema didattico. Non stiamo dicendo che lo studente non ha un rapporto con il sapere prima dell'insegnamento, ma semplicemente che allo stato iniziale questo rapporto è inadeguato, se non addirittura inesistente. Senza l'ipotesi di questa asimmetria, il sistema didattico non ha ragion d'essere. (Margolinas 1993)

L'insegnante si differenzia dall'allievo in quanto "si suppone che sappia" ma anche in quanto "si suppone che sia in grado" d'anticipare ciò che l'allievo dovrà imparare.

Inoltre, il sistema didattico ha una caratteristica particolare, che è quella di scomparire: se l'insegnante riesce nella sua missione, deve potersi ritirare e l'allievo deve poter mantenere il suo rapporto con il sapere, al di fuori della presenza dell'insegnante.

1. Ma cos'è l'apprendimento in una situazione didattica?

Il progetto dell'allievo consiste nell'imparare.

Un'ideologia molto diffusa presuppone un semplice trasferimento dall'insegnamento all'apprendimento: l'alunno registra ciò che viene comunicato dall'insegnante, probabilmente con una certa perdita di informazioni. (Laborde, 1989, p. 47)

Numerosi studi hanno dimostrato che questo punto di vista non è corretto: l'apprendimento non è un semplice processo di trasferimento, né un processo lineare e continuo.

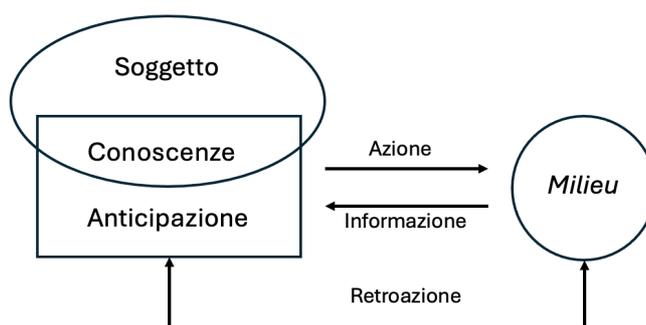
Per comprendere l'apprendimento degli allievi è necessario chiarire il punto di vista adottato sull'apprendimento.

Ipotesi psicologica (apprendimento per adattamento):

Il soggetto apprende adattandosi (assimilazione e accomodamento) a un ambiente che produce contraddizioni, difficoltà e squilibri.

Questa ipotesi si rifà alla teoria psicogenetica piagetiana.

Figure 1. Situazione di apprendimento non didattica



Esempio. Situazione non didattica d'apprendimento: la bicicletta (Brousseau, 1988b)

Situazione 1: bicicletta a 4 ruote, una anteriore e tre ruote posteriori

Con le piccole ruote, il bambino impara a pedalare e a girare il manubrio secondo il seguente modello implicito:

- se voglio andare a destra, giro il manubrio a destra;

- se voglio andare a sinistra, giro il manubrio a sinistra.

D → D

G → G

Situazione 2: bicicletta a due ruote (vengono rimosse le due piccole ruote posteriori).

[...] il bambino vuole andare dritto, ma la bicicletta si inclina a destra e si dirige a destra, quindi il bambino vuole tornare a sinistra e gira il manubrio a sinistra seguendo il modello implicito acquisito. Gira il manubrio verso sinistra e ... cade!

Per mantenere l'equilibrio [...] deve prima girare il manubrio dal lato in cui pende per ottenere una spinta che lo raddrizzi, seguendo così uno schema inverso (momentaneo) ma essenziale.

G → D

D → G

Il cambiamento dello schema è caratteristico dell'apprendimento.

(Brousseau 1988b, p.62)

Ipotesi didattica

Un *milieu* senza intenzioni didattiche (cioè non organizzato intenzionalmente per insegnare un sapere) è insufficiente per indurre in un soggetto tutte le conoscenze che la società desidera che acquisisca.

L'insegnante deve quindi provocare negli alunni gli adattamenti desiderati, attraverso una scelta oculata delle situazioni che propone.

Il compito dell'insegnante non è far sì che gli alunni imparino, ma far sì che *possano imparare*. Il suo compito non è quello di farsi carico dell'apprendimento - cosa che rimane al di là del suo potere - ma di creare *le condizioni che rendono possibile l'apprendimento*. (Chevallard 1986, p.39)

Le conseguenze di queste ipotesi ci portano a introdurre un modello della situazione didattica: *situazione adidattica / contratto didattico*.

2. Contratto didattico

2.1. Il contratto didattico rappresenta⁵ i diritti e i doveri impliciti di alunni e insegnanti in relazione ai contenuti del sapere matematico che vengono insegnati

Ciò che ciascuno ha il diritto di fare o non fare in relazione a un sapere si basa su un insieme di regole esplicite ma soprattutto implicite. Brousseau ha definito il contratto didattico come l'insieme delle regole che condividono e limitano le responsabilità di ciascuna parte, studenti e insegnante, in relazione al sapere matematico insegnato.

Aveva proposto questo concetto nel 1978 e di nuovo nel 1980 per spiegare l'insuccesso di alunni della scuola elementare *che ottenevano buoni risultati in tutte le materie tranne che in matematica (insuccesso elettivo in matematica)*: gli insuccessi elettivi non derivano dall'incapacità degli alunni di apprendere, ma da contratti didattici specifici a determinati contenuti del sapere matematico che impediscono ad alcuni alunni di entrare in un processo di apprendimento di tali contenuti.

⁵ In altre parole, un modello costruito dal ricercatore.

Nel corso di una lezione finalizzata all'insegnamento di una determinata conoscenza (*situazione didattica*), l'allievo interpreta la situazione che gli viene presentata, le domande poste, le informazioni fornite e le condizioni imposte, in base a ciò che l'insegnante riproduce, consciamente o inconsciamente, in *maniera ripetitiva*⁶ nella sua pratica di insegnamento. Noi ci interessiamo in particolare a ciò che, in queste abitudini, è specifico delle conoscenze insegnate. (Brousseau 1980, p.127)

Esempio 1. Relazioni insiemistiche all'inizio della scuola secondaria

Intorno agli anni '70 in Francia, a livello della *sixième* (allievi di 11-12 anni), venivano impartite lezioni sui concetti di appartenenza e inclusione⁷. Un tipico esercizio su questi concetti era il seguente:

Tra i simboli seguenti $\in, \notin, \subset, \not\subset$, qual è quello giusto?

$$\{a\} \dots \{a, b, c\}$$

$$b \dots \{a, b, c\}$$

Uno studio su un questionario di questo tipo (Duval e Pluvinage (1977), citati da Tonnelle, 1979) mostra che il comportamento di risposta degli allievi era regolato da un albero di scelta che consentiva loro di prendere delle decisioni:

- se ci sono parentesi graffe «su entrambi i lati», si tratta di inclusione
- se ci sono parentesi graffe solo «a destra», si tratta di appartenenza ecc.

Gli allievi potevano quindi rispondere correttamente alla maggior parte degli esercizi su questo argomento in *sixième*, senza che il *significato matematico* delle relazioni insiemistiche giocasse un ruolo importante.

Di fronte a una serie di problemi ricorrenti, gli alunni sono incoraggiati ad apprendere regole implicite (come la presenza o l'assenza di parentesi in questo caso) che permettono loro di rispondere in modo economico al problema posto.

Esempio 2. La fattorizzazione nella scuola secondaria⁸

L'insegnante si aspetta che, alla domanda «Fattorizza $16x^2 - 4$ », un allievo riconosca che questa è un'opportunità per applicare la regola di fattorizzazione $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ e risponda $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$; e che, alla domanda «Fattorizza $4x^2 - 36$ », l'allievo riconosca una semplice fattorizzazione.

Le risposte corrette $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$ o $16x^2 - 4 = 3(16/3x^2 - 4/3)$ o $16x^2 - 4 = 16x^2(1 - 1/4x^2)$ con $x \neq 0$ ⁹ saranno eliminate o non avranno l'opportunità di apparire, *non perché non soddisfino a una condizione matematica precedentemente formulata*¹⁰, *ma come un atto che si discosta da un codice di condotta.*

Il potere dell'insegnante in classe non è quello di *vietare* (più precisamente: vietare in maniera *diretta*) la risposta $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$, ma piuttosto di produrre la risposta $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$. Il suo potere non risiede tanto nell'evidenziare le "risposte

⁶ Sottolineatura aggiunta dall'autrice.

⁷ Questo tipo di esercizio è scomparso dall'insegnamento attuale in Francia.

⁸ Tonnelle J. (1979) e Chevallard (1985).

⁹ Che sarà una risposta appropriata in *seconde* (allievi di 15-16 anni), quando si apprenderanno i limiti delle funzioni polinomiali.

¹⁰ Come fattorizzare in $Z[X]$ (insieme di polinomi a coefficienti interi).

sbagliate" quanto nel suscitare la risposta giusta, che implicitamente indica le altre risposte come sbagliate. (Chevallard, 1985, p.74)

L'esistenza di regole implicite che strutturano fortemente il comportamento di alunni e insegnanti altera lo statuto degli errori: un errore sarà una risposta accettabile ma falsa. Gli errori vengono quindi commessi sullo sfondo di un modello che rispetta il codice di condotta: la risposta $16x^2 - 4 = 16x^2 (1 - 1/4x^2)$ è vera ma non è accettabile, la risposta $16x^2 - 3 = (4x - 3)(4x + 1)$ è errata, cioè accettabile ma falsa.

Quello che abbiamo mostrato in relazione alla fattorizzazione non è un caso patologico in relazione all'insegnamento del sapere; lo abbiamo utilizzato per sottolineare un meccanismo generale che interviene nella comunicazione didattica del sapere. Lo studio del contratto didattico relativo a un sapere permette di tracciare i limiti del significato del sapere insegnato per l'allievo.

2.2. Contratto didattico e negoziazioni del sapere tra studenti e insegnanti

Durante l'insegnamento di un contenuto del sapere, le regole di comunicazione tra allievi e insegnante si stabiliscono, si modificano, si rompono e si ristabiliscono con le acquisizioni, con l'evoluzione e con lo svolgersi della storia. Queste regole non assumono una forma unica e fissa nel tempo, ma sono il risultato di una continua negoziazione.

Da un lato, le interazioni tra l'insegnante e allievo obbediscono a regole localmente stabili, dall'altro, queste regole non sono immutabili.

Questa negoziazione produce una sorta di gioco le cui regole, provvisoriamente stabili, permettono ai protagonisti, e in particolare all'allievo, di prendere decisioni con un certo grado di sicurezza, necessario per garantire l'indipendenza caratteristica dell'appropriazione (Brousseau, 1986b, p. 55).

Il contratto è specifico alle conoscenze in gioco e quindi necessariamente deperibile: le conoscenze e persino il sapere evolvono e si trasformano, mentre il contratto pedagogico tende a essere stabile. I momenti di rottura permettono di dimostrare sperimentalmente il contratto didattico (Brousseau 1988a, p. 322).

Questo processo di negoziazione è soggetto a una serie di paradossi. In questa sede ne esamineremo solo uno: l'insegnante non ha il diritto di dire all'allievo cosa vuole che faccia (altrimenti non sta svolgendo il suo ruolo di insegnante) e tuttavia deve assicurarsi che l'allievo produca la risposta attesa (altrimenti non è riuscito a insegnare).

Allo stesso modo, se l'allievo accetta che l'insegnante gli insegni i risultati, non li stabilisce lui stesso e quindi non li apprende. Se invece rifiuta qualsiasi informazione da parte dell'insegnante, allora interrompe la relazione didattica.

Brousseau ha caratterizzato diverse procedure di negoziazione per ottenere dagli allievi la risposta attesa (che lui conosce e che l'allievo non conosce). L'effetto *Topaze*¹¹ è una di queste forme: l'insegnante cerca di fare in modo che il significato della risposta sia il più ricco possibile. Se questo non riesce, aggiunge informazioni che riducono il significato, arrivando ad accettare condizioni che provocano la risposta dell'allievo senza che quest'ultimo sia riuscito ad esprimere alcun senso.

Esempio 3. *Costruire l'asse di simmetria utilizzando una riga non graduata e una squadra.*

¹¹ In riferimento all'opera teatrale "*Topaze*", dello scrittore Marcel Pagnol, in cui l'insegnante aggiunge sempre più informazioni per evitare che l'alunno commetta errori di ortografia fino a sfociare nella caricatura: «des moutonsses étai-hunt réunisse...».

(Vedere gli allegati II et III)

Il progetto dell'insegnante prevede che gli alunni utilizzino le seguenti proprietà geometriche per giustificare la costruzione dell'asse di simmetria:

P₂ (proprietà di perpendicolarità): l'asse di simmetria di una figura è perpendicolare al segmento che unisce due punti di simmetria.

P₃ (proprietà d'incidenza): siano (A, A') et (B, B') due coppie di punti simmetrici: il punto di intersezione delle rette (A, B) et (A', B'), se esiste, è sull'asse di simmetria.

La scelta degli strumenti (riga non graduata e squadra) deve evitare l'uso di:

P₁ (proprietà del punto medio): l'asse di simmetria di una figura passa per il punto medio di tutti i segmenti che uniscono una qualsiasi coppia di punti simmetrici.

L'insegnante vuole un procedimento di costruzione geometrica (che non è una costruzione matematica nel senso di Félix Klein, 1846¹²), In altre parole, l'insegnante non lavora sull'oggetto materiale, ma sull'oggetto geometrico, che chiamiamo figura. Per lui si tratta di un problema teorico, il controllo della costruzione avviene in riferimento alle proprietà geometriche P₂ et P₃ della figura geometrica.

Nel caso del primo gruppo di figure (allegato II), i problemi sono stati risolti utilizzando la proprietà P₁. L'applicazione di questa proprietà ha funzionato. Per gli studenti (almeno nel gruppo 3), questo è un problema pratico e materiale: trovare i punti medi di due segmenti paralleli. L'obiettivo è quindi quello di produrre una traccia materiale dell'asse di simmetria utilizzando la misura e la verifica può essere fatta facendo riferimento alla piegatura, come ha suggerito un alunno o controllando la precisione delle misure.

Il discorso su un disegno è sempre ambiguo: può concentrarsi sulla figura geometrica (che il disegno rappresenta) o sul disegno stesso. Il discorso dell'insegnante e degli alunni non fa eccezione a questa ambiguità.

L'insegnante cerca di far produrre agli allievi una risposta che corrisponda al ricorso alle proprietà P₂ e P₃: deve escludere le risposte basate sulla proprietà P₁. Per farlo, in diverse occasioni (9, 13, 17, 19, 36, 37, 41, 44, 46, 48 e 77), fa riferimento alla precisione per mettere in dubbio le risposte basate sulla proprietà P₁ e poi (77) per concludere!

Qui c'è un paradosso: l'insegnante vorrebbe che la precisione fosse geometrica e non può dare la soluzione. Per escludere le soluzioni proposte dal gruppo 3, utilizza un argomento di precisione, che rafforza la visione problematica della misura da parte degli allievi: per loro, una migliore precisione richiede una maggiore cura nell'operazione materiale di misura (cfr. gruppo 3 e François). Questo argomento diventa un argomento di autorità.

Cercando di far produrre agli alunni la risposta che desidera, l'insegnante trasforma la situazione. L'ultimo allievo non sa necessariamente di aver prodotto una risposta e perché l'ha fatto: risponde secondo le aspettative dell'insegnante. Non c'è alcuna spiegazione del perché sia giusto o sbagliato.

In questo caso possiamo fare riferimento all'effetto *Topaze*: la risposta attesa non poteva essere prodotta come soluzione al problema iniziale sotto la responsabilità degli allievi; l'insegnante è stato costretto a restringere le condizioni di produzione della risposta (riducendo l'incertezza dell'allievo) fino a ottenere la risposta attesa. Il significato di questa risposta imposta diventa per gli allievi molto limitato.

Le condizioni poste dal ricercatore (scelta degli strumenti a disposizione) non sono state sufficienti per far sì che gli alunni cambiassero la loro procedura di base, che consisteva nel trovare il punto

¹² Cfr. Allegato I.

medio dei segmenti tramite la misura: la procedura di base poteva essere utilizzata a minor costo, adattando gli strumenti.

2.3. Insegnamento e rottura del contratto

L'insegnamento di un nuovo oggetto del sapere porta a rotture del contratto rispetto ai precedenti oggetti del sapere e alla rinegoziazione di nuovi contratti: l'apprendimento dell'allievo avviene a costo di queste rotture, che l'insegnante deve negoziare.

Esempio 4. Lo statuto dei disegni nell'insegnamento della geometria

Alla scuola elementare gli alunni imparano a usare gli strumenti da disegno per sviluppare le loro capacità grafiche. I disegni geometrici (chiamati triangoli, rettangoli, ecc.) sono quindi dei tracciati materiali su cui si opera e di cui si controllano le misure: sono gli oggetti di studio.

Nella scuola secondaria, e più in particolare a partire dalla *quatrième* (alunni di 13-14 anni), questo contratto iniziale dovrà essere rotto: l'alunno dovrà stabilire delle prove non del disegno in sé ma degli oggetti astratti e ideali (chiamati anche triangoli, rettangoli, ecc.) rappresentati dal disegno materiale (nuovo contratto didattico sui disegni). L'esempio 3 è un esempio della (difficile) negoziazione di questo nuovo contratto.

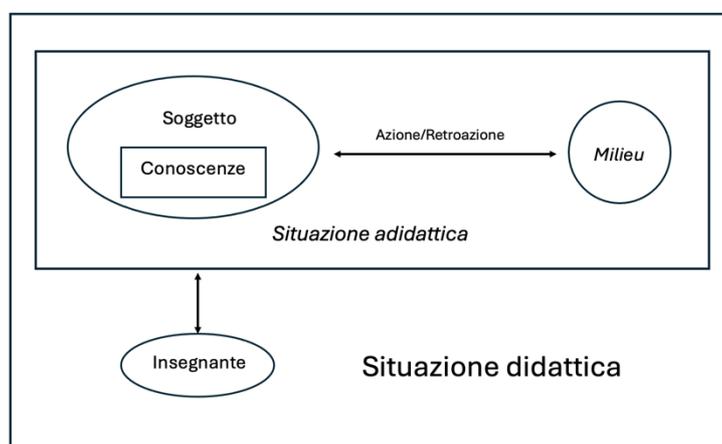
Consideriamo la seguente domanda: "Verificare che le lunghezze dei segmenti AB e CD sono uguali". Nel primo caso, l'allievo dovrà fare un disegno accurato e, usando un compasso o una riga graduata, dovrà verificare le lunghezze dei segmenti disegnati. Nel secondo, dovrà cercare le proprietà geometriche della «figura» (rappresentata dal disegno) per stabilire la prova di uguaglianza.

Questo cambiamento di contratto didattico, che è fonte di difficoltà e persino di insuccesso per molti alunni, è *necessario per l'apprendimento della prova in geometria*. Si può caratterizzare come segue: dall'efficienza richiesta all'allievo-praticante (la geometria come luogo di costruzione precisa di disegni), si passa al rigore dell'allievo-teorico (la geometria come luogo di studio razionale delle figure).

3. Situazione adidattica

In riferimento al punto di vista adottato sull'apprendimento, l'apprendimento dell'allievo è modellato da una situazione adidattica nella situazione didattica, gestita dall'insegnante (Figura 2).

Figura 2. Situazione didattica e situazione adidattica



Milieu (Brousseau, 1988a): sistema antagonista (dell'allievo) nella situazione didattica, che

modifica gli stati di conoscenza in modo non controllato dall'allievo. Il *milieu* si comporta come un sistema non finalizzato. È di natura relativa.

Ha un ruolo centrale nell'apprendimento, come causa di adattamenti e nell'insegnamento come oggetto di riferimento ed epistemologico. (Brousseau 1988a, p. 321).

Milieu (Chevallard, 1992): gli elementi che compongono il *milieu* sono quelli che soggettivamente, cioè per i soggetti dell'istituzione, appaiono evidenti, trasparenti e non problematici.

L'insegnante cercherà di proporre una situazione in cui gli alunni costruiscono il loro rapporto con l'oggetto della conoscenza o modificano questo rapporto in risposta alle richieste del *milieu* e non al desiderio dell'insegnante. Si tratta di *una situazione in cui ciò che viene fatto è una necessità in termini di obblighi che non sono né arbitrari né didattici, ma dell'ordine del sapere*. L'insegnante deve fare in modo che l'allievo elimini i presupposti didattici dalla situazione, in modo che la soluzione del problema diventi indipendente dal desiderio dell'insegnante: la *devoluzione* che l'insegnante cerca di ottenere affinché l'allievo impari è quindi quella di una *situazione non didattica* (sul modello della situazione della bicicletta).

C'è uno spostamento della responsabilità del sapere dall'insegnante all'allievo: in una situazione adidattica, l'allievo diventa responsabile del suo rapporto con il sapere.

Nella teoria delle situazioni didattiche di Brousseau, è importante capire le distinzioni tra *situazioni didattiche, adidattiche e non didattiche*: una situazione non didattica specifica di un sapere è una situazione *priva di finalità didattiche* (ufficiali), in cui il rapporto con il sapere si sviluppa come mezzo economico di azione (cfr. l'esempio della bicicletta); una situazione adidattica è una situazione con uno scopo didattico (cioè organizzata dall'insegnante) in cui il soggetto risponde *come se* la situazione fosse non didattica (cioè il soggetto risponde indipendentemente dalle aspettative dell'insegnante): *ci sono quindi elementi nella situazione didattica che formano un milieu adidattico antagonista dell'allievo*.

L'apprendimento è un *cambiamento* nel rapporto con la conoscenza prodotta dall'allievo stesso, che l'insegnante può provocare solo facendo scelte (volontarie o involontarie) sui valori delle *variabili* della situazione adidattica: le *variabili didattiche*.

La modellizzazione in termini di situazione adidattica permette di progettare un'ingegneria didattica in cui sono state "calcolate" le condizioni per provocare (nella migliore delle ipotesi) l'apprendimento dell'allievo (si veda la situazione "Ingrandimento del puzzle").

3.1. Quali sono le condizioni perché una situazione sia vissuta come adidattica?

Devono essere soddisfatte almeno le seguenti condizioni:

- l'allievo può prevedere una risposta, ma questa risposta iniziale (*procedura di base relativa alle conoscenze precedenti*) non è quella che si vuole insegnare: se la risposta fosse già nota, non sarebbe una situazione di apprendimento;

Senza una strategia di base, l'allievo non comprende il gioco, anche se le istruzioni sono chiare. (Brousseau, 1988b, p.61)

- questa procedura di base deve rivelarsi molto presto insufficiente o inefficace, così che l'allievo sia costretto a fare degli accomodamenti, delle modifiche al suo sistema di conoscenze. L'allievo è incerto sulle decisioni da prendere;

- la conoscenza mirata è *a priori* richiesta per passare dalla strategia di base alla strategia ottimale;

- esiste un *milieu* per la validazione: il *milieu* consente di ricevere una retroazione;
- l'allievo può ricominciare.

L'apprendimento comporta un cambiamento delle strategie e delle conoscenze ad esse associate. (Brousseau, 1988b, p.61)

3.2. Quali elementi della situazione si modellizzano nel *milieu*?

Nella situazione didattica, il *milieu* si riferisce al sistema antagonista all'allievo, ossia ciò che modifica gli stati delle conoscenze in modo non controllato dall'allievo: l'ambiente si comporta come un sistema non finalizzato. È di natura relativa (Brousseau, 1998).

Lo schema generale delle interazioni tra lo studente e il *milieu* in una situazione didattica è quello dato per una situazione non didattica d'apprendimento (cfr. Figura 1).

Le interazioni sono indicative della capacità del sistema (soggetto \Leftrightarrow *milieu*) di ritrovare l'equilibrio in seguito a perturbazioni o addirittura di evolversi se queste perturbazioni sono tali da renderlo necessario.

Per problema intendiamo il risultato di una perturbazione nell'equilibrio della relazione soggetto/*milieu* (...) ma questo ha senso solo se la perturbazione può essere attestata dal soggetto e dal *milieu*. Una perturbazione che il soggetto non percepisce o di cui il *milieu* non può rendere conto in alcun modo percepibile, non può essere fonte di problemi. (Balacheff 1995, p. 226)

La *retroazione* è un'informazione specifica fornita dal *milieu*: in altre parole, un'informazione che viene ricevuta dall'allievo come sanzione, positiva o negativa, relativa alla sua azione e che gli permette di aggiustare questa azione, di accettare o rifiutare un'ipotesi, di scegliere tra diverse soluzioni.

Così come gli elementi modellizzati nel *milieu* non sono necessariamente materiali (possono essere conoscenze anteriori del soggetto, stabilizzate e evidenti), le azioni del soggetto possono essere azioni «mentali», non visibili.

L'evoluzione della situazione didattica in cui si trova un allievo può essere letta come una successione di stati tra quelli consentiti o possibili. Nella situazione didattica, il *milieu* modella ciò che l'alunno *non controlla*, ma che modifica le sue conoscenze. Le procedure degli allievi sono ciò che si *può osservare* nell'evoluzione delle loro conoscenze.

In una situazione didattica, c'è necessariamente incertezza.

Se non c'è più incertezza (nel senso di scelte possibili pertinenti) sugli stati finali della situazione, significa che il soggetto conosce la risposta, *che sa*: si può dire che la situazione è allora controllata dall'allievo (e che non c'è più alcuna via di mezzo in relazione a questa situazione didattica).

La conoscenza *riduce* l'incertezza del soggetto eliminando le possibilità di scelta.

Le questioni sollevate dal sistema soggetto/*milieu* (*inseparabile dalla nozione di situazione didattica*) sono quindi le seguenti:

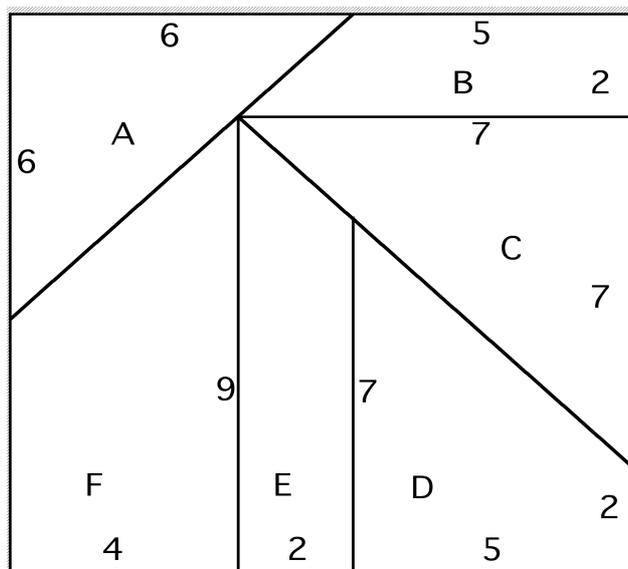
Che cosa, in una situazione di didattica, può causare (*a priori*) un cambiamento nello stato di conoscenza dell'allievo? O spiegarle (*a posteriori*)?

3.3. Esempio. Analisi *a priori* di una situazione didattica «Ingrandimento di un puzzle» (G. et N. Brousseau, 1987)

Materiale

- 6-8 cartoncini rettangolari 20 cm × 15 cm con lo stesso puzzle disegnato (cfr. Figura 3).

Figura 3. Rappresentazione del puzzle



Legenda: i numeri in questo disegno indicano le misure in cm di alcuni lati dei pezzi del puzzle.

- fogli di carta millimetrata
- una riga graduata per alunno.

Istruzioni

«Ecco dei puzzle. Dovrete fare dei puzzle simili, più grandi dei modelli, seguendo questa regola: il segmento di 4 cm sul modello deve essere di 7 cm sulla vostra riproduzione.

Darò a ogni gruppo un puzzle. Ogni allievo deve realizzare uno o due pezzi del puzzle. Quando avrete finito, dovrete essere in grado di ricostruire le stesse forme del modello».

Svolgimento

Gli allievi vengono divisi in gruppi di 4 o 5. Dopo una breve discussione collettiva, gli allievi si separano per completare ciascuno il loro pezzo o i loro pezzi.

L'insegnante appende alla lavagna una rappresentazione ingrandita del puzzle completo.

Analisi *a priori*

Due strategie che non sono strategie che funzionano

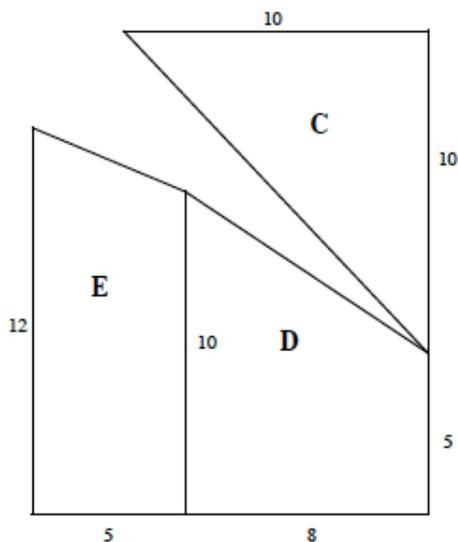
Queste due strategie si basano sulla conoscenza dei numeri interi naturali e degli ingrandimenti: per ingrandire, si aggiunge o si moltiplica per un numero intero. Il senso della moltiplicazione tra interi è quello dell'addizione reiterata.

Strategia 1: aggiungere 3 alla misura delle lunghezze dei lati degli «angoli retti»

Il numero di lati di ogni pezzo viene mantenuto, così come gli angoli retti: si aggiunge 3 alle

misure delle lunghezze dei lati degli angoli retti.

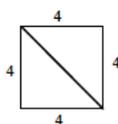
Qui di seguito, il risultato di questo procedimento sui pezzi «ingranditi» C, D ed E del puzzle:



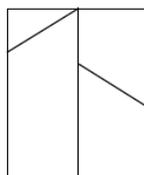
C'è una retroazione da parte del *milieu* materiale: i pezzi non si incastrano in modo approssimativo, il non incastramento dei pezzi è quindi indiscutibilmente percepibile.

- Dominio di validità della procedura 1.

Il dominio di validità in senso stretto di questa procedura (cioè che rispetta la forma geometrica dei pezzi) è l'insieme dei puzzle in cui tutti i pezzi sono composti da triangoli rettangoli isosceli di lato 4, per esempio:

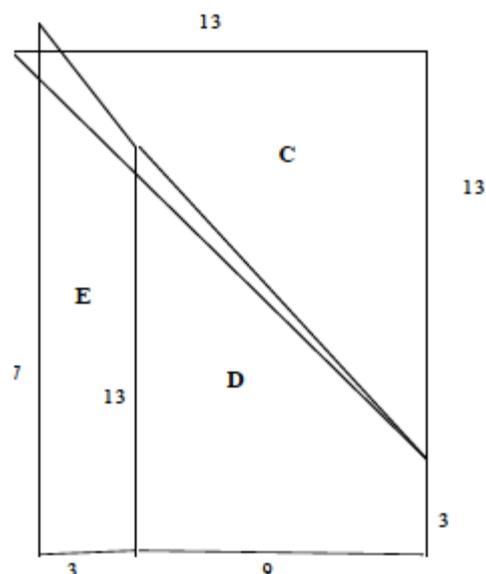


Se si definisce il dominio di validità in relazione al *milieu* materiale, e quindi si considera valido l'ingrandimento se i pezzi del puzzle si incastrano bene, allora il dominio di validità è più esteso e comprende anche i puzzle con una forma «a rettangolo» risultante dall'assemblaggio di pezzi «ad angolo retto» (con al massimo un lato obliquo) e tali che il rettangolo abbia i lati suddivisi dallo stesso numero. Il 3 viene poi aggiunto uno stesso numero di volte alla lunghezza di ciascun lato del quadrato.



Strategia 2: Moltiplicare ogni misura per 2 e sottrarre 1

Qui di seguito, il risultato di questa procedura sui pezzi «ingranditi» C, D ed E del puzzle:



C'è una retroazione del *milieu* materiale: i pezzi non si incastrano tra loro ma, per questa procedura, questa disposizione incorretta è *discutibile da un punto di vista percettivo*. Il puzzle è quasi giusto e gli allievi possono pensare che la disposizione incorretta sia il risultato di un ritaglio maldestro. Potrebbe essere necessario utilizzare un altro tipo di retroazione, basata sulla relazione tra le misure del puzzle iniziale e le misure del puzzle «immagine».

Ad esempio, per i pezzi E, D e C del puzzle iniziale, si ha la relazione che caratterizza la loro disposizione: $2 + 5 = 7$.

E che dire del puzzle «immagine»?

$$2 \rightarrow 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$5 \rightarrow 5 \times 2 - 1 = 9$$

$$7 \rightarrow 7 \times 2 - 1 = 13$$

e $3 + 9 \neq 13$, un criterio che attesta che i pezzi del puzzle «immagine» di questa procedura non si incastrano, consentendo di rifiutarla senza ambiguità.

Conoscenza emergente in questa situazione grazie all'insuccesso di queste strategie

Il significato della moltiplicazione per un intero è quello dell'addizione reiterata. Il significato della moltiplicazione per un razionale deve essere costruito rispetto a questo significato primario (primario per via della necessaria anteriorità della costruzione dei numeri interi rispetto a quella dei razionali).

Lo scopo di questa situazione è far sì che *gli allievi rifiutino esplicitamente le procedure che coinvolgono i numeri interi* (queste procedure d'ingrandimento sono spesso indicate come modelli additivi) e *costruiscano almeno implicitamente una regola d'invalidamento* che può essere formulata come segue: «se $a + b = c$ nel puzzle iniziale, allora $f(c) = f(a + b) = f(a) + f(b)$ nel puzzle ingrandito» (altrimenti i pezzi non si incastrano!).

Il rifiuto di questo modello additivo diventa quindi costitutivo del significato della moltiplicazione per un numero razionale. L'applicazione lineare, soluzione a questo problema, è $7/4$, cioè un razionale-operatore.

Alla fine di un lungo processo di apprendimento (Brousseau & Brousseau, 1987), questo primo senso della moltiplicazione per un razionale sarà dato dall'immagine di un numero razionale per un razionale-operatore.

Questa situazione può essere vissuta come adidattica?

- L'insegnante può limitare i suoi interventi a degli interventi neutrali rispetto alla conoscenza in gioco in questa situazione: può semplicemente incoraggiare e rilevare i fatti, senza pretendere nulla di particolare.
- Esiste una procedura di base fondata sulla conoscenza dei numeri interi: infatti, la conoscenza dei numeri interi ha la precedenza su qualsiasi conoscenza di altri numeri, cioè la costruzione di qualsiasi insieme di numeri (come i razionali, per esempio) si basa sull'esistenza dell'insieme dei numeri interi. Questa procedura di base utilizza le operazioni definite per i numeri interi.
- Esiste un milieu per la validazione della procedura, cioè la possibilità per gli alunni di sapere se la loro procedura è corretta o meno senza l'intervento dell'insegnante: il supporto è costituito, per ogni alunno, da tutti i pezzi «ingranditi» del puzzle prodotti autonomamente da lui e dai suoi compagni (fase 2).
- Questa procedura di base è insufficiente, poiché la procedura in questione prevede necessariamente un razionale: il risultato della procedura di base (spiegata nella fase 1) è che i pezzi non si incastrano quando i membri di uno stesso gruppo si riuniscono (fase 3).

4. Variabili didattiche: definizioni ed esempi

Le definizioni che seguono sono quelle date da Brousseau in due testi (datati¹³) della *deuxième école d'été*.

Un campo di problemi può essere generato da una situazione cambiando i valori di alcune variabili che, a loro volta, cambiano le caratteristiche delle strategie di soluzione (costo, validità, complessità, ecc.) [...]. Vanno considerati solo i cambiamenti che influiscono sulla gerarchia delle strategie (variabili rilevanti) e, tra le variabili rilevanti, quelle che l'insegnante può manipolare sono di particolare interesse: si tratta delle variabili didattiche (Brousseau, 1982a)

Queste variabili sono rilevanti a una determinata età nella misura in cui dettano comportamenti diversi. Saranno variabili didattiche nella misura in cui, agendo su di esse, si potranno ottenere degli adattamenti e delle regolazioni: degli apprendimenti. (Brousseau, 1982b)

Brousseau sottolinea quindi l'importanza di prendere in considerazione, per ogni situazione, le variabili il cui cambiamento di valore può (o meno) portare all'apprendimento. In Brousseau (1982b), l'autore analizza una situazione *fondamentale* della sottrazione (si veda al paragrafo 7, la nozione di situazione fondamentale).

Esempio. Variabili didattiche nella situazione "Ingrandimento del puzzle".

$$V_1 = (n, p)$$

dove n e p sono i numeri che definiscono il rapporto di proporzionalità.

I valori rilevanti sono p multiplo di n , $p = kn$ (k intero); $p = kn + n/2$ (k intero e n pari); p/n decimale (ma non il semi-intero); p/n razionale non decimale. Ad esempio, ecco alcune coppie di numeri interi che illustrano ciascuna categoria: (4,8); (4,6); (4,7); (3,7).

Un ingrandimento che fa passare da 4 a 8 implica l'addizione 4+4. L'allievo rimane sul modello additivo e sui numeri interi.

¹³ Poiché questi due testi non sono mai stati pubblicati ufficialmente, non riportiamo qui le pagine delle citazioni che abbiamo copiato dai nostri documenti personali.

Un ingrandimento da 4 a 6 viene spesso analizzato come «x più la metà di x». Abbiamo quindi un modello intermedio tra il modello additivo e il modello lineare, che è più «vicino» al modello additivo a causa dello statuto speciale della «metà», soprattutto perché in questo caso la metà è anche un numero intero.

Un ingrandimento da 4 a 7 non consente un passaggio semplice, anche se è possibile utilizzare le divisioni per 2: [l'ingrandimento da 4 a 7 potrebbe essere interpretato come «2 volte x meno la metà di x» o «x più la metà di x più la metà di x»].

C'è un salto informativo (vedi più avanti) quando si deve «passare da 3 a 7», perché nessuna relazione additiva è possibile. Si devono abbandonare l'additività e i numeri interi.

I valori di V_1 coinvolgono il significato della moltiplicazione per un razionale, possono consentire o meno il passaggio dalla moltiplicazione per un intero (modello additivo, addizione ripetuta) alla moltiplicazione per un razionale (modello moltiplicativo, immagine di un'applicazione lineare).

$V_2 =$ organizzazione dell'interazione tra allievi

I valori di questa variabile sono una n-upla che descrive i diversi tipi di fase nel tempo: lavoro individuale, cooperazione, consultazione, confronto, ecc. Nella situazione del puzzle, è descritta da: (consultazione, lavoro individuale, confronto). L'attuazione delle ultime due fasi consente una vera e propria retroazione del *milieu* sulla strategia decisa durante la prima fase. Se si riducono le fasi ad una sola (cooperazione per costruire il puzzle ingrandito), si priva il *milieu* del suo ruolo di validazione e alla situazione la sua natura adidattica.

$V_3 =$ configurazione del puzzle

I valori sono anche n-uple che descrivono le rispettive suddivisioni dei lati (per uno stesso numero o no), le misure delle parti, ecc. I valori pertinenti di questa variabile sono quelli che riguardano il dominio di validità delle strategie di base. In questo caso, le misure sono scelte in modo tale che la procedura «aggiungere 3» (che si presume sarà la strategia iniziale per la grande maggioranza degli allievi) porti alla costruzione di pezzi non incastrabili in modo percettivamente ovvio.

- V_1 si trova dalla parte de *sapere* in gioco (la moltiplicazione per un razionale non decimale, il numero come immagine di un'applicazione lineare).
- V_2 è *costitutiva del carattere adidattico* della situazione.
- V_3 è *legata alle conoscenze* degli allievi poiché si basa sulle ipotesi relative alle loro strategie di base.

Altre "variabili" o vincoli sembrano giocare un ruolo nella situazione. Ad esempio, i materiali a disposizione degli alunni, i fogli a quadretti e la riga graduata. Questi sono incorporati nella situazione per rendere più facile la costruzione dei pezzi e la misura delle lunghezze. Sono quindi legati alla misura. A questo elemento della situazione verrà attribuito lo statuto di variabile didattica? Per rispondere a questa domanda, si deve tornare alla conoscenza in gioco, cioè al passaggio dal modello additivo al modello lineare. La misura non è una questione di conoscenza in questa situazione. Questi elementi possono intervenire nella situazione, ma si parte dal presupposto (opinabile) che la loro presenza o assenza non la modifichi in modo sostanziale.

5. Analisi dell'apprendimento in una situazione d'insegnamento «ordinaria»

La nozione di situazione adidattica è anche un modello per analizzare l'apprendimento degli allievi in una situazione didattica ordinaria. Questo modello ci porta a porre le seguenti domande: in quale/i situazione/i adidattica/he potrebbero trovarsi gli studenti? In altre parole, cosa possono imparare in questa situazione di insegnamento (ricerca dei *milieux* possibili)? Per quale sapere?

In tutti gli insegnamenti esistono fasi adidattiche, generalmente fuori dal controllo dell'insegnante. Chevallard ha introdotto la nozione di tempo didattico per designare il tempo specifico dell'istituzione di insegnamento, un tempo segnato dallo sfasamento tra il momento dell'insegnamento e quello dell'apprendimento: nell'insegnamento esiste la finzione di un tempo didattico omogeneo. Nella sua tesi (1992), Alain Mercier mostra che l'introduzione ufficiale di nuovi oggetti di sapere modifica il rapporto con gli oggetti che sono già presenti, naturalizzati e trasparenti. All'allievo viene quindi devoluta una responsabilità in relazione a questi oggetti del sapere naturalizzati: in quanto oggetti anteriori, l'allievo ha la responsabilità di conoscerli. Questa può essere una fase adidattica per questi oggetti anteriori (anteriori in relazione al momento in cui sono stati insegnati) e quindi un momento di apprendimento a posteriori.

6. Diversi statuti del sapere, diversi tipi di situazioni adidattiche

Facendo riferimento al lavoro del matematico, Régine Douady (1986) parla di dialettica *strumento-oggetto* per designare il processo di cambiamento di statuto dei concetti, un processo che si verifica necessariamente nell'attività dell'allievo di fronte a un problema: distingue tre statuti per lo stesso concetto, quello di oggetto, quello di strumenti impliciti e quello di strumenti espliciti.

Brousseau distingue tre funzioni (e quindi tre statuti) del sapere: azione, formulazione e validazione. Questi sono i tipi di situazioni che permettono di caratterizzare le funzioni di un oggetto del sapere.

Nelle situazioni (adidattiche) di azione, un soggetto (un allievo) sviluppa delle conoscenze implicite come mezzo per agire sul *milieu* (per l'azione): questo *milieu* gli fornisce informazioni e retroazioni in cambio delle sue azioni.

Nelle situazioni (adidattiche) di formulazione, il soggetto (l'allievo) esplicita *egli stesso* il modello implicito delle sue azioni. Affinché abbia un significato per lui, questa formulazione deve essere essa stessa un mezzo di azione su un *milieu* che gli fornisce informazioni e retroazioni: questa formulazione deve rendere possibile il raggiungimento di un risultato o far sì che altri ottengano un risultato. La comunicazione tra gruppi di allievi è un esempio di questa situazione.

Nelle situazioni (adidattiche) di validazione, La validazione empirica proveniente dal *milieu* si rivela insufficiente: per convincere un avversario, il soggetto deve produrre una prova intellettuale. In matematica, ad esempio, le dichiarazioni esplicite sulla situazione diventano asserzioni le cui esattezza e pertinenza devono essere dimostrate secondo regole comuni per trasformarle in teoremi noti a tutti.

7. Situazione fondamentale

7.1. Introduzione

Nelle fasi adidattiche (modellizzate da una situazione adidattica), l'allievo deve risolvere un problema di cui ha la responsabilità. La questione centrale è: come possiamo garantire che il problema posto sia *pertinente* in relazione con il sapere? Qual è il legame tra il problema posto e la *ragion d'essere* dell'oggetto del sapere, problema dell'insegnamento? Che significato dà il problema al sapere?

Queste sono questioni epistemologiche.

Ipotesi epistemologica

Per ogni sapere, esiste una famiglia di situazioni che possono dargli un significato corretto. (Brousseau 1986a, p. 316)

Corretto in relazione con la storia del concetto, con il contesto sociale e con la comunità scientifica.

Per ogni conoscenza, è possibile costruire un gioco formale, *trasmissibile senza utilizzare questa conoscenza*¹⁴ ma che determina tuttavia la strategia ottimale. (Brousseau 1988a, pp. 314–315)

Una *situazione fondamentale* d'un sapere è un *modello* di una famiglia di situazioni *non didattiche* specifiche del sapere mirato.

Modellizzare una situazione di insegnamento consiste à produrre un gioco specifico del sapere in questione [...] (Brousseau 1986a, p. 334)

Questo modello è fondamentale:

- rispetto alla conoscenza: la situazione «deve essere tale che la conoscenza appaia nella forma scelta, come soluzione o come mezzo per stabilire la strategia ottimale»;
- rispetto all'attività didattica: la situazione deve permettere di rappresentare il maggior numero possibile di "situazioni osservate in classe, anche quelle meno soddisfacenti, purché riescano a far apprendere agli allievi una forma di conoscenza mirata... Si otterranno scegliendo alcune variabili caratteristiche di questa situazione (Brousseau 1986a, pp. 334-335).

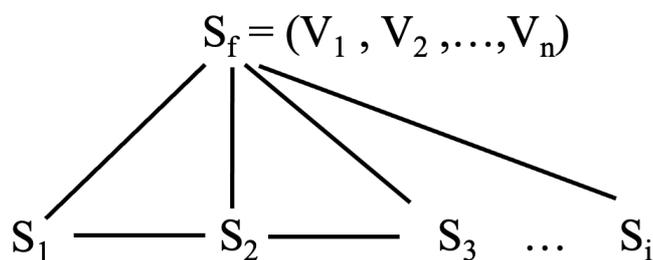
Una situazione fondamentale deve almeno permettere (giocando sui valori delle variabili didattiche):

- una genesi effettiva del sapere, cioè una genesi di situazioni rappresentative dei diversi significati di un sapere (le diverse occasioni in cui questo sapere viene utilizzato);
- una "rilettura" di questa genesi sulla base della logica dell'organizzazione del sapere.

Una situazione «fondamentale» può essere rappresentata da un insieme finito di variabili, pertinenti rispetto al significato del sapere che viene insegnato. Viceversa, attribuendo dei valori a queste variabili, si generano situazioni peculiari che conferiscono alla conoscenza un significato specifico.

Lo schema seguente (Figura 4) illustra il nostro punto di vista:

Figura 4. Situazione fondamentale S_f



¹⁴ Sottolineatura aggiunta dall'autrice.

7.2. Esempio - Analisi *a priori* d'una situazione fondamentale: «Il gioco della corsa a n » (Brousseau, 1978)

Jeu 1. «La corsa a 20»

Regole del gioco

Il gioco prevede che due avversari dicano a turno un numero. L'obiettivo è che un giocatore dica 20 per primo.

Chi gioca per primo ha il diritto di dire 1 o 2. Un numero può essere detto solo se si ottiene aggiungendo 1 o 2 al numero appena detto dall'avversario.

Giocare alcune partite e formulare una strategia vincente (cioè che permetta di vincere a prescindere da ciò che fa l'avversario).

Risposta: vince il giocatore che per primo dice 2, poi 5, 8, 11, 14, 17, 20 (che può dire indipendentemente da quello che dice l'avversario).

Commento. Molto rapidamente si "sa" che chi dice 17 ha vinto: la corsa verso il 20 diventa la corsa verso il 17. Si può quindi ripetere il ragionamento. In effetti, la sequenza vincente si trova procedendo "a ritroso": 20, 17, 14 ecc.

Le seguenti partite si giocano con le stesse squadre di avversari.

Gioco 2. «La corsa a 27»

L'obiettivo è dire per primo 27. Il giocatore che inizia il gioco ha il diritto di dire 1, 2, 3 o 4. Un numero può essere detto solo se si ottiene aggiungendo un numero non nullo minore o uguale a 4 al numero appena detto dall'avversario.

Formulare una strategia vincente

Per dire 27 per primo, che numero si deve dire subito prima?

(Ragionamento simile al 17 nella corsa a 20) Se dico 26, il mio avversario può aggiungere 1 e dire 27; se dico 25, il mio avversario può aggiungere 2 e dire 27; se dico 24, il mio avversario può aggiungere 3 e dire 27; se dico 23, il mio avversario può aggiungere 4 e dire 27; se dico 22, qualunque cosa il mio avversario aggiunga (1, 2, 3 o 4), io aggiungerò il complemento a 5: $1+4$, $2+3$, ...: dirò quindi 27 per primo.

Strategia vincente: vince chi gioca per primo e dice 2. Sequenza vincente: 27, 22, 17, 12, 7, 2.

Gioco 3. «La corsa a 24»

L'obiettivo è dire per primo 24. Chi gioca per primo, può dire un numero intero non nullo minore o uguale a 3. Si può dire un numero solo se si ottiene aggiungendo un numero non nullo minore o uguale a 3 al numero appena detto dall'avversario.

Potete vincere utilizzando la strategia che avete proposto dopo il gioco 2?

Risposta: No, vince chi gioca per secondo e dice 4, numero che non si potrà mai dire per primo!

Sequenza vincente: 24, 20, 16, 12, 8, 4.

Gioco 4. «La corsa a 5929»

L'obiettivo è dire per primo 5929. Chi gioca per primo ha il diritto di dire un numero intero non nullo minore o uguale a 2. Si può dire un numero solo se si ottiene aggiungendo un numero inferiore o uguale a 2 al numero appena detto dall'avversario.

Risposta: **Il gioco diventa: chi vince? Bisogna giocare per primi o per secondi? Dicendo quale numero?**

Se si inizia a ragionare come nei giochi precedenti, si cerca l'ultimo numero che si deve dire per poter dire per primo 5929. Il numero cercato è 5926, che è la distanza "giusta" da 5929, cioè la distanza 3: se il mio avversario aggiunge 1, io aggiungo 2 (e dico 5929 per primo) - se lui aggiunge 2, io aggiungo 1 (e dico di nuovo 5929 per primo). Il gioco della corsa a 5929 diventa il gioco della corsa a 5926.

5929, 5926, 5923...: questo elenco si ottiene con ripetute sottrazioni di 3.

Trovare l'intera sequenza vincente diventa molto oneroso: per risparmiare, cercheremo solo alcuni dei numeri interi della lista vincente per arrivare il più rapidamente possibile al numero intero più piccolo. Se sottraiamo 1000 volte 3 da 5929, otteniamo un intero dalla lista: 2929. Per trovare un intero più piccolo di 1000, sottrarre 800 volte 3 da 2929 per ottenere 529. E così via fino a 1.

Esempio: $5929 - 3 \times 1000 - 3 \times 800 - 3 \times 100 - 3 \times 70 - 3 \times 6 = 1$

Da qui la risposta: chi gioca per primo e dice 1, vince.

Una situazione generale dei giochi della corsa a n

Il gioco prevede che due avversari dicano a turno un numero. L'obiettivo è che un giocatore dica n per primo.

Chi gioca per primo ha il diritto di dire un numero intero *non nullo* inferiore a p . Un numero può essere detto solo se si ottiene aggiungendo un intero non nullo inferiore a p al numero appena detto dall'avversario [n e p sono numeri naturali con $n > p$].

Questa situazione genera i 4 giochi descritti in precedenza, attribuendo dei valori alle variabili n e p .

Quale sapere matematico fornisce uno strumento di risoluzione economico e ottimale per i giochi della corsa a n ?

La divisione euclidea di n per il numero intero $(p+1)$: $n = (p+1)q + r$, con $0 \leq r < (p+1)$ ¹⁵.

Il "senso" di questa divisione (nei giochi della corsa a n) è la sottrazione reiterata da $(p+1)$ a n : il numero di sottrazioni reiterate per arrivare al più piccolo intero è il quoziente di questa divisione, il più piccolo intero al quale si arriva è il resto. Il numero $(p+1)$ che si sottrae in maniera ripetuta è il divisore.

Per il gioco 1, dividendo 20 per 3 si ottiene 2 come resto e per arrivare a 2 bisogna sottrarre 6 volte 3.

Per il gioco 4, dividendo 5929 per 3 si ottiene 1 e il numero di sottrazioni di 3 è $1000 + 800 + 100 + 70 + 6$, cioè 1976.

Quali possono essere le variabili didattiche del problema della corsa a n per un apprendimento di questo sapere matematico?

V₁: n multiplo di $(p+1)$ o no

Se n non è un multiplo di $(p+1)$, bisogna iniziare - la sequenza vincente è una sequenza aritmetica con ragione $(p+1)$ e il resto come primo termine.

Se n è un multiplo di $(p+1)$, non bisogna iniziare - la sequenza vincente è una sequenza aritmetica con ragione $(p+1)$ [passaggio dai giochi 1, 2 al gioco 3].

V₂ (dimensione di n relativamente a p): n piccolo rispetto a p [n grande rispetto a p]

Se n è piccolo rispetto a p , è possibile scrivere tutti i numeri interi della sequenza vincente: la strategia della sottrazione ripetuta di $(p+1)$ è una strategia ottimale in competizione con la divisione euclidea, che non fornisce la lista!

Se n è molto grande rispetto a p , la strategia delle sottrazioni ripetute diventa molto onerosa (ancora di più se n è grande rispetto a p). Solo alcuni dei numeri interi della sequenza vincente possono essere raggiunti. La natura del gioco allora cambia: per vincere, si deve iniziare o giocare per secondo? dicendo quale numero?

La strategia delle sottrazioni ripetute deve essere adattata e trasformata in una strategia che ci permetta di (ri)trovare il significato della divisione euclidea: cerchiamo di sottrarre da n il più grande multiplo possibile di $(p+1)$. [passaggio dai giochi 1, 2, 3 al gioco 4: questo è un esempio di salto informazionale].

Conclusione: la corsa a n come situazione fondamentale

Se si modellizzano i giochi della corsa a n con una situazione generale, si ottiene una situazione fondamentale della divisione euclidea il cui significato è quello di sottrazione ripetuta.

¹⁵ Questo punto è piuttosto discutibile: non si tratterebbe piuttosto di una situazione fondamentale della congruenza modulo $(p+1)$? Ricerca in corso...

Nozione di salto informazionale:

Il salto informazionale consiste nel trovare una situazione fondamentale in cui un concetto “funziona” quindi scegliere i valori delle sue variabili in modo tale che le conoscenze precedenti consentano agli allievi di sviluppare strategie efficaci... poi, senza cambiare le regole del gioco, cambiare i valori delle variabili in modo tale da rendere la complessità del compito nettamente superiore. È necessario stabilire nuove strategie, che richiedono la costruzione di nuove conoscenze. (Brousseau 1986a, p.23)

8. Complementi: concezioni, ostacoli

Per alcuni tipi di conoscenza, esistono situazioni fondamentali che possono essere direttamente messe in scena al momento giusto:

Ma supponiamo che ci sia una conoscenza per la quale le condizioni di cui sopra non sono soddisfatte: non ci sono situazioni sufficientemente accessibili, sufficientemente efficaci e in numero sufficientemente ridotto da permettere agli allievi di qualsiasi età di accedere immediatamente, grazie a un adattamento, a una forma di sapere che possa essere considerato corretto e definitivo: dobbiamo accettare delle fasi nel processo di apprendimento. Il sapere, insegnato tramite adattamento nella prima fase, sarà temporaneamente non solo approssimativo, ma anche parzialmente *falso e inadeguato*. (Brousseau 1986a, pp. 316–317)

L'alternativa è insegnare direttamente un sapere conforme ai dettami della comunità scientifica, cioè il testo del sapere. Di conseguenza, non ci si aspetta più che l'allievo dia un significato al sapere: il sapere non è una risposta a un problema incerto di cui l'allievo si assume la responsabilità.

L'insegnante deve quindi scegliere tra l'insegnamento di un sapere formale privo di significato e l'insegnamento di un sapere più o meno falso che deve essere rettificato (Brousseau 1986a, p. 317).

Si può allora ipotizzare che lo stesso soggetto abbia relazioni contraddittorie con lo stesso oggetto del sapere (dal punto di vista di chi osserva le procedure), la cui coerenza va ricercata nella situazione particolare in cui il soggetto si trova: la nozione di concezione è una risposta a questo problema di modellizzazione delle conoscenze del soggetto.

In particolare, il concetto di concezione permette di rispondere alle seguenti domande: che cosa sanno gli allievi (e che cosa spiega le loro difficoltà ed errori)? In quali situazioni lo hanno imparato (quale dominio di validità)?

La nozione di contratto didattico completa questo modello per tenere conto dei vincoli della comunicazione didattica del sapere.

Postulato: l'errore è testimonianza di conoscenza

Questo postulato assume un forte significato in relazione all'ipotesi piagetiana sull'apprendimento come adattamento a un *milieu* che permette di rendersi conto di una contraddizione e di superarla:

L'errore non è solo l'effetto di ignoranza, d'incertezza o del caso, come credono le teorie empiriste o comportamentiste dell'apprendimento, ma l'effetto di conoscenze precedenti, che erano pertinenti e che funzionavano, ma che ora si stanno rivelando false o semplicemente inadatte. (Brousseau, 1983, p.171).

Già negli anni Settanta, Brousseau affermava che alcune di queste conoscenze sono necessarie per l'apprendimento: la traiettoria dell'allievo deve passare attraverso la costruzione (provvisoria) di conoscenze errate, perché la consapevolezza di questa erroneità costituisce il senso delle conoscenze che si intende costruire. Ispirandosi da Bachelard (1938, pp.13-22), Brousseau chiama *ostacoli epistemologici* questi punti di passaggio obbligati:

[...] una conoscenza, come un ostacolo, è sempre il risultato dell'interazione tra l'allievo e il suo milieu, e più precisamente con una situazione che rende questa conoscenza «interessante». (Brousseau 1998, p.123).

Si distinguono generalmente tre tipi di ostacoli, a seconda della loro origine.

- 1- Ostacolo *ontogenetico*, legato allo sviluppo psicogenetico del soggetto.
- 2- Ostacolo *didattico*, legato alla trasposizione didattica del sapere: si tratta di un ostacolo che può essere evitato senza conseguenze per la costruzione della conoscenza, che può scomparire agendo sulle situazioni di insegnamento.
- 3- Ostacolo *epistemologico*, legati allo sviluppo storico del concetto¹⁶:

[...] un ostacolo epistemologico è costitutivo di una conoscenza acquisita, nel senso che il suo invalidamento deve inevitabilmente essere esplicitato e di conseguenza lascia tracce, talvolta profonde, nel sistema delle conoscenze [...] (Brousseau 1983, p. 195).

Duroux (1983) fornisce i criteri per definire un ostacolo epistemologico:

- 1- È una conoscenza che funziona come tale su un insieme di situazioni e per certi valori delle variabili di queste situazioni...
- 2- L'ostacolo è una conoscenza che, nel tentativo di adattarsi ad altre situazioni o ad altri valori di variabili, produrrà errori specifici, identificabili e analizzabili.
- 3- L'ostacolo è una conoscenza stabile [...]
- 4- L'ostacolo potrà quindi essere superato solo in situazioni specifiche di rifiuto e costituirà un sapere [...] Il ritorno alla concezione d'ostacolo sarà parte integrante del nuovo sapere (Duroux, 1983, p.54).

Esempio. Ostacolo dei numeri interi

Esempio 1. Numeri decimali / Numeri interi

Per gli allievi, le proprietà dei numeri naturali sono quelle dei numeri in generale, di tutti i numeri. Tuttavia, quando l'insieme dei numeri naturali viene inserito in un sottoinsieme come quello dei numeri razionali o decimali, alcune nuove proprietà compaiono e altre scompaiono: non sono più vere per tutti i numeri, o addirittura per nessuno di essi; il risultato di una moltiplicazione può ridursi, un decimale non ha più un successore [...]. L'insegnante non può avvisare in modo adeguato l'allievo di questa rottura, perché né la cultura, e in particolare la tradizione, né l'ingegneria didattica hanno ancora prodotto gli strumenti necessari (esercizi, avvertimenti, concetti, osservazioni, paradossi...). Questa situazione porta a equivoci e malintesi da parte dell'insegnante e a errori da parte dell'allievo. Queste concezioni errate persistono perché sono legate a un certo modo di intendere le proprietà dei numeri naturali e gli effetti della rottura si manifestano per molti anni. Ciò che è ancora più importante è il meccanismo che sta alla base di questo ostacolo: non sono le conoscenze insegnate a mancare - gli insegnanti in genere compensano cercando di mantenere un discorso incompreso ma corretto - ma sono gli strumenti personali di

¹⁶ La nozione di ostacolo epistemologico è stata introdotta da Gaston Bachelard (1938).

comprensione dell'allievo. Non comprende più perché ciò che deve essere cambiato sono proprio i mezzi di ciò che prima chiamava «comprendere» (Brousseau 1998, capitolo 6).

Esempio 2. Situazione del puzzle per incontrare l'ostacolo dei numeri naturali (cfr. §3.3)

9. Complementi: Devoluzione/istituzionalizzazione (sapere/conoscenza)

I ruoli principali dell'insegnante sono caratterizzati dalla seguente duplice azione: il processo di devoluzione e il processo di istituzionalizzazione.

9.1. Devoluzione

Per fare questo, l'insegnante fa innanzitutto il lavoro opposto a quello del ricercatore: cerca di ricontestualizzare e ripersonalizzare il sapere da insegnare: *cerca problemi che diano un senso alle conoscenze da insegnare*, in modo che l'attività dello studente «assomigli» a volte a quella del ricercatore. La *responsabilità* della conoscenza viene devoluta all'allievo; viene devoluta una situazione didattica.

Il processo di devoluzione (di una situazione didattica) è descritto da André Rouchier nella sua tesi di dottorato (1991) come un processo che converte il sapere da insegnare in conoscenze per l'alunno (personalizzate, contestualizzate, temporalizzate).

La devoluzione consiste nel collegare l'intenzione di insegnare all'autonomia cognitiva del soggetto (Conne, 1992)

9.2. Istituzionalizzazione

Ma se questa fase ha funzionato bene, quando l'alunno ha trovato le soluzioni ai problemi posti, non sa di aver prodotto una conoscenza che potrà utilizzare in altre occasioni. Per trasformare le risposte e le conoscenze degli allievi in sapere, questi ultimi, con l'aiuto dell'insegnante, dovranno ridecontestualizzare e ri-depersonalizzare la conoscenza prodotta, in modo da riconoscere in ciò che hanno fatto qualcosa di universale, un *sapere* culturale che può essere riutilizzato.

In sintesi, il processo di istituzionalizzazione è l'inverso del processo di devoluzione, che converte una conoscenza dell'allievo in un sapere riutilizzabile (spersonalizzato, decontestualizzato, de-temporalizzato).

BIBLIOGRAFIA

- Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin éditeur.
- Balacheff N. (1995). Conception, connaissance et concept". In D. Grenier (Ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp.219-244). Grenoble : IMAG. <https://hal.science/hal-01072247>
- Bessot A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In C. Margolinas M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29–56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau G. (1978). *Étude locale des processus d'acquisitions scolaires, Enseignement élémentaire des mathématiques n°18*, Bordeaux : IREM. <https://hal.science/hal-00515106>
- Brousseau G (1980) Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire, *Revue de Laryngologie*. 101(3/4). 107–131. <https://hal.science/hal-00582614/>
- Brousseau G. (1982a). Les objets de la didactique des mathématiques. In *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet : IREM d'Orléans.
- Brousseau G. (1982b). Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude *a priori* d'une situation didactique. In *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 39-60). Olivet : IREM d'Orléans. <https://guy-brousseau.com/2381/d%E2%80%99un-probleme-a-l%E2%80%99etude-a-priori-d%E2%80%99une-situation-didactique-1982/>
- Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198. <https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>
- Brousseau G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. In *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 43–47). Olivet : IREM d'Orléans et IMAG Grenoble. <https://guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maitre-et-l%E2%80%99institutionnalisation-1984/>
- Brousseau G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'État de l'Université de Bordeaux. <https://guy-brousseau.com/46/resume-de-la-these-detat-1986/>
- Brousseau G. (1986b). La relation didactique : le milieu. In *Actes de la Quatrième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 54–68). Paris : IREM de Paris 7.
- Brousseau G. (1988a). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3). 309–336.
- Brousseau G. (1988b). Didactique fondamentale, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Actes de l'université d'été*, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.
- Brousseau G. (1997). *La théorie des situations didactiques. (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal)*. <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>.
- Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield)*. Grenoble : La Pensée Sauvage. (English Translation : Brousseau G. (2002). (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. (Eds.)). *Theory of didactical situations in mathematics*. Springer.
- Brousseau G. & Brousseau N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM. <https://hal.science/hal-00610769/fr/>

- (English translation: Brousseau, G and N, Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. Springer.)
- Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage. (1991 : 2^{ème} édition).
- Chevallard Y. (1986). Les programmes et la transposition didactique : Illusions, contraintes et possibles. *Bulletin de l'APMEP.*, 352, 32-50.
- Chevallard Y. (1989). *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Étude du cas de l'algèbre*. Habilitation à diriger des recherches. Université d'Aix-Marseille II.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73 – 112.
- Chevallard Y. & Jullien M. (1990-1991) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. *Petit x*, 27, 41–76.
- Chevallard Y., & Mercier A. (1984). La notion de situation didactique. In *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet: IREM d'Orléans et IMAG Grenoble.
- Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2). 5–31.
- Duroux A. (1983). La valeur absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x*, 3, 43-67.
- Duval R. & Pluvinage F. (1977). Démarches individuelles de réponse en mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 8. 51–116.
- Grenier D. (1984). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I. <https://theses.hal.science/tel-00331264>
- Grenier D. (1989). Le contrat didactique comme outil d'analyse des phases de dévolution et de bilan. In R. Gras R. (Ed.) *Actes de la 5^{ème} école d'été de didactique des mathématiques* (pp.21–26). IREM de Rennes. http://www.numdam.org/item/?id=PSMIR_1989__S6_21_0
- Klein F. (1846) *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaires*. Reproduction IREM de Paris 7.
- Laborde C. (1989). Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques. In G. Vergnaud, J. Rogalski and M. Artigue (Eds.) *Actes de la 13^e Conférence Internationale PME*, (vol. 1, pp.46–61). <https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/>
- Margolinas C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Mercier A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I. <https://theses.hal.science/tel-00278299>
- Piaget J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives problème central du développement*. Paris : Presses Universitaires de France (PUF).
- Rouchier A. (1991). *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itéro-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse d'état de l'Université d'Orléans.

Tonnelle J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, Mémoire de DEA de Didactique des mathématiques, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.

ALLEGATO I

Costruzione matematica versus costruzione pratica

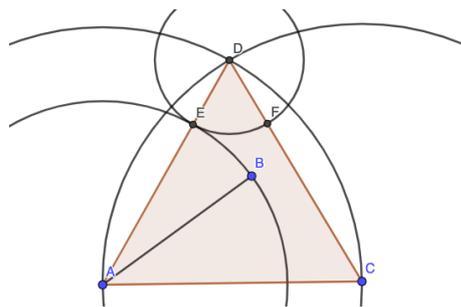
Costruzione matematica

Gli strumenti sono strumenti «ideali». Un problema di costruzione in matematica è innanzitutto un problema di *costruibilità*.

Il compasso di Euclide è uno «strumento» che, dati due punti, permette di tracciare un cerchio passante per uno dei due punti e per il quale l'altro punto è il suo centro.

Un compasso non «trasporta» delle distanze. Si dimostra che può trasportare delle distanze costruendo un segmento CF della stessa lunghezza di un dato segmento AB.

Siano tre punti (di base) A et B e C, non allineati. Tracciare un triangolo equilatero CAD¹⁷. Tracciare il cerchio di centro A passante per B; E è il punto di intersezione di questo cerchio con la retta AD. Tracciare il cerchio di centro D passante per E; F è il punto di intersezione di questo cerchio con la retta CD. CF è il segmento cercato (soluzione di Euclide con notazioni moderne).



Per quanto riguarda questa costruzione, possiamo ribadire quanto affermato da Chevallard & Jullien (1991) sulla costruzione del punto medio di un segmento:

L'interesse di questa costruzione può essere colto solo se si tiene conto del fatto che il punto di vista di Euclide è soprattutto quello della costruibilità: egli dimostra con una sequenza logica di proposizioni - permettendosi di utilizzare solo proposizioni già stabilite - che il punto medio di un segmento è costruibile con riga e compasso. (Chevallard & Jullien, 1991, p.65).

Una riga è uno "strumento" con un unico bordo rettilineo, che si presume illimitato e senza graduazioni o tacche.

La soluzione di un problema di costruzione geometrica può essere analizzata secondo i seguenti criteri:

1. Deve fornire la prova dell'esistenza dell'"oggetto" da costruire;
2. Deve fornire la prova della sua costruibilità;
3. Deve fornire un algoritmo di costruzione.
4. Eventualmente, può fornire la costruzione geometrografica¹⁸.

Questi requisiti sono ovviamente "incastrati" l'uno nell'altro, cioè la validità dell'ultimo porta alla validità degli altri tre, la validità del penultimo porta alla validità dei due precedenti e così via (Chevallard & Jullien, 1991, p.68)

¹⁷ Tracciare il cerchio di centro A passante per C. Tracciare il cerchio di centro C passante per A. D è uno dei punti di intersezione.

¹⁸ «...la geometrografia si occupa dei processi costruttivi, proponendosi di confrontarli per trovarne di più semplici, secondo criteri specifici [...] le soluzioni proposte dai matematici sono (spesso) pessime soluzioni» (Chevallard & Jullien, 1991, p. 66 et p. 68)

Costruzione pratica

Da un punto di vista pratico, il problema è trovare il modo di tracciare con strumenti materiali per ottenere un disegno soddisfacente in relazione alle misure. Ad esempio, per trovare gli assi di simmetria di un'ellisse con centro O dato, si disegnano i cerchi inscritti e circoscritti con un compasso puntato su O - cambiando gradualmente la sua apertura, ma *con una precisione tale che non è possibile mettere in discussione graficamente (o percettivamente) il tracciato ottenuto...* Un metodo di costruzione approssimativo è quindi accettabile, purché produca una soluzione grafica con sufficiente accuratezza.

Il divario tra i due punti di vista è evidente quando si affronta un caso di non costruibilità.

Per il disegnatore esiste sempre un algoritmo di costruzione, esatto o approssimativo, che richiede determinati strumenti e che gli consentirà di realizzare il suo progetto. La nozione di non costruibilità - e, di conseguenza, quella di costruibilità - diventa quindi obsoleta dal suo punto di vista. Ha poca rilevanza *grafica*, ma conserva tutta la sua rilevanza *matematica* (Chevallard & Jullien, 1991, p. 76)

Un esempio di problema di non costruibilità con riga e compasso:

La divisione esatta del cerchio in parti uguali con riga e compasso era possibile in precedenza solo per i numeri $2n$, 3, 5 e i loro vari multipli. Gauss aggiunse altri casi dimostrando la possibilità di dividere il cerchio in p parti, quando p è un intero della forma

$$p = 2^{2^n} + 1$$

e l'impossibilità di divisione in tutti gli altri casi.

Non c'è alcun vantaggio pratico da trarre da questi risultati; le considerazioni di Gauss hanno un significato puramente teorico... (Klein, 1846, p.10)

Problema. Come è possibile caratterizzare la costruzione con riga e compasso nell'insegnamento della geometria?

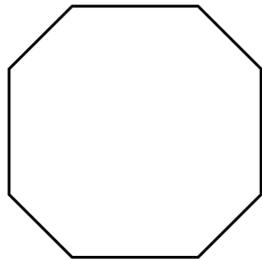
Nella costruzione dell'asse di simmetria, ciò che l'insegnante desidera non è né una costruzione «matematica» (nel senso di Klein o d'Euclide), né una costruzione pratica. Gli strumenti sono materiali e bisogna produrre un tracciato materiale (come in una costruzione "pratica"), ma ogni tracciato deve essere giustificato da una proprietà geometrica (come in una costruzione "matematica"): *il problema dell'esistenza non si pone.*

ALLEGATO II
Attività di costruzione di assi di simmetria (Grenier, 1984)

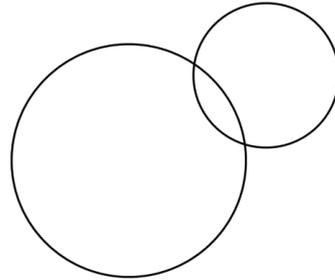
Per ciascuna delle seguenti figure, tracciare tutti gli assi di simmetria, con gli strumenti autorizzati.

Primo gruppo di figure

Strumenti autorizzati: riga graduata e squadra



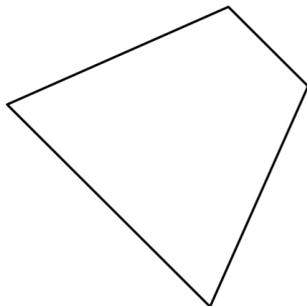
Ottagono



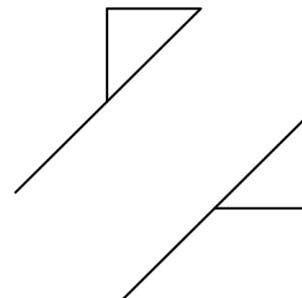
Cerchi senza il centro

Secondo gruppo di figure

Strumenti autorizzati: riga non graduata e squadra



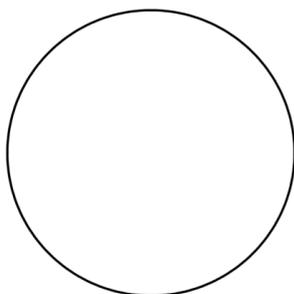
Trapezio isoscele



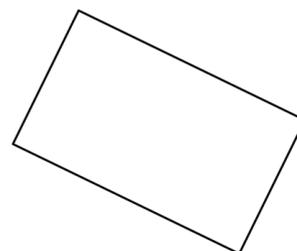
Bandiere

Terzo gruppo di figure

Strumenti autorizzati: riga non graduata e compasso



Cerchio senza il centro

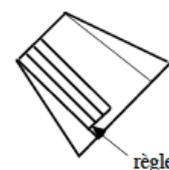
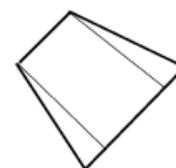
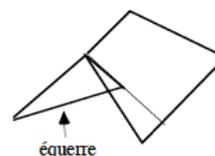
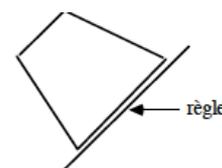
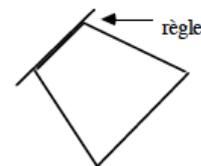


Rettangolo

ALLEGATO III

Trascrizione de «bilancio sull'attività di costruzione con strumenti, à proposito del trapezio» (Grenier, 1989)

- 1 Insegnante=I: Passiamo alla figura 3, il trapezio (E attacca la figura sulla lavagna)
- 2 I: il gruppo 3 per favore, shhh (la classe è rumorosa), allora avete a disposizione una riga non graduata e una squadra
- 3 Olivier (gruppo 3) prende entrambi gli strumenti e usa la riga
- 4 I Dammela (*I riprende la squadra*)
- 5 Olivier: allora noi abbiamo preso la riga /.../ L'abbiamo posizionata
- 6 I *prende la riga*: shh, per favore
- 7 Olivier: l'abbiamo posizionata e poi abbiamo messo un punto [sulla riga]
- 8 I: avete segnato sulla riga non graduata una graduazione per misurare la lunghezza del segmento
- 9 Olivier: e poi qui è uguale (posiziona la riga sulla base maggiore e misura)
- 10 I: Qui è uguale, ma è preciso?
- 11 XX: no
- 12 I: secondo te?
- 13 XX: questo può essere cancellato sulla riga
- 14 I: si può cancellare sulla riga. Questo non è molto preciso. Va bene! Allora dicci come hai fatto
- 15 Olivier: abbiamo visto che era circa la metà. Era il doppio di questo...
- 16 I: che espressione hai detto? Tu hai sentito?
- 17 X si
- 18 I: È preciso? (*ride*)
- 19 XX: no
- 20 I: vedi? Allora, siccome il tempo passa, continuiamo perché tu sei nel pressappoco, noi vogliamo della precisione
- 21 I a XF: tu hai qualcosa da proporre? *XF viene alla lavagna*
- 22 I (*a Olivier*): grazie Olivier
- 23 I (*à XF*): dammela se ti dà ingombro
- 24 XF *dà la riga e si tiene la squadra*
- 25 I: parla più forte per favore
- 26 XF: noi abbiamo posizionato la squadra sull'angolo
- 27 I: sì, al vertice dell'angolo
- 28 XF: Sì, e abbiamo fatto delle linee tratteggiate fino a giù (*XF traccia*)
- 29 I: Va bene, quindi una perpendicolare?
- 30 XF: sì
- 31 XF: stessa cosa dall'altro lato (*XF traccia*)
- 32 I: stessa cosa dall'altro lato. Due perpendicolari.
- 33 XF *restituisce la squadra e prende la riga non graduata a E*
- 34 XF: poi sembra che faccia un centimetro
- 35 I: Ah, sembra che...
- 36 XF: beh, è quello che hanno detto
- 37 I Questo è quello che hanno detto e tu ti fidi
- 38 XF *ride*
- 39 I: allora è preciso il 'sembra che'
- 40 François *protesta*
- 41 I: no, non ti stiamo accusando François! Ma discutiamone. È preciso?
- 42 X: no
- 43 I: voi pensavate che fosse un centimetro. Allora, vai avanti. Ti ascoltiamo ancora per due secondi...
- 44 XF: Poi hanno girato la riga per trovare quanti centimetri era e hanno diviso a metà.
- 45 I: Va bene. Quindi tu la pensi un po' come Olivier. È più preciso che
- 46 XF *torna al suo posto e dà a François gli strumenti*
- 47 I: Va bene, François? Vieni
- 48 François *va alla lavagna, prende la riga non graduata.*
- 49 I: hai anche la squadra



50 François posiziona la riga e segna con un trattino ogni riporto di porzione della riga.

51 I: Cosa segni dunque? È preciso quello che fai?

52 François: sì

53 I: questa è la lunghezza. Va bene, siamo allora d'accordo che credo che in molti l'hanno fatto, questo non è molto preciso perché entra in gioco lo spessore qui.

54 François continua a riportare la riga

55 I non sei più preciso di Olivier, mi dispiace

56 François torna al suo posto molto deluso.

57 Un allievo del gruppo 2 viene alla lavagna, prende la riga non graduata

58 il gruppo 2: per prima cosa tracciamo questo

59 I: Quindi, ecco fatto, tracciala. Cosa ne pensi?

60 I: chi può dire come si chiama questa retta qui, come l'hai chiamata tu?

61 il gruppo 2 : tracciamo una...

62 I: una diagonale, eh?

63 X: perpendicolare

64 I: una diagonale, poi l'altra. Shhh.

65 il gruppo 2 traccia l'altra

66 il gruppo 2: poi questo mi dà il centro

67 I: questo ti dà un punto

68 il gruppo 2: con la squadra (prende la squadra, la dispone sul punto e consegna la riga)

69 I scrive alla lavagna

70 I: questo punto, tu consideri...

71 il gruppo 2: che è il punto medio

72 I: che è su? (rumori)

73 il gruppo 2: ci dà questo (indica il segmento)

74 I: quindi, che cos'è?

75 il gruppo 2: la retta di simmetria

76 I: Questo ci dà la retta di simmetria. Dunque tu hai il punto, poi la perpendicolare (E scrive alla lavagna)

77 I: e questo ci dà la retta di simmetria. Hai scelto tu questo punto, Beh, all'inizio dici che è sulla retta di simmetria...

78 il gruppo 2: sì

79 I: va bene. Qualcuno ha costruito qualcos'altro? Tutto bene? (Alliev : sì)

80 X: avremmo potuto piegare il foglio e tracciare (risate d'altri alunni)

81 I: no, è con gli strumenti che si deve fare. Passiamo alla pagina successiva, che è « les bandiere ».

82 Yann: ma professore, c'era solo un punto!

83 I: sì, un punto e la perpendicolare (baccano) questo gli è bastato. Non sto dicendo che sia esattamente così...

84 Yann: Sì, sono necessari almeno due punti!

85 I: ah shhh! ... silenzio... credo che Yann ha un problema e ha bisogno di aiuto. Un punto non è sufficiente, dice Yann.

86 Yann: sì

87 I: quindi vai avanti, è un tuo problema

88 X: Beh, è un idiota perché... (risate)

89 I: ah no no! Tu posizioni la squadra su un lato e la fai scorrere finché il punto non si trova sull'altro lato della squadra. (mima i gesti alla lavagna) in modo da poterlo tracciare, è preciso.

90 Yann: sì

