

Résolution par résidus pondérés d'une formulation sous forme d'égalités de systèmes vibratoires avec frottement de Coulomb

16^e Colloque National en Calcul des Structures

Mathias Legrand¹ & Christophe Pierre²

¹McGill University, Canada

²Stevens Institute of Technology, USA

16 mai 2024



McGill



STEVENS
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
THE INNOVATION UNIVERSITY™

- Non-linéarités non-régulières en mécanique des structures
 - ▶ frottement sec (Coulomb) et contact unilatéral (Signorini)
 - ▶ exemple industriel : aube de turbomachines
- Formulation
 - ▶ formalisme explicite : complémentarité sous forme d'égalités et d'inégalités^[1]
 - ▶ formalisme implicite : égalités non-régulières avec projection^{[1][2]}
- Résolution temporelle
 - ▶ méthode à pas de temps ou à détection d'événements
 - ▶ méthode de tir pour les solutions périodiques
 - ▶ pénalisation, méthode des multiplicateurs de Lagrange
- Résolution fréquentielle : équilibrage harmonique
 - ▶ alternance temps/fréquence (AFT)^[3] et méthode hybride temps/fréquence (HFT)^[4]
 - ▶ régularisation de la non-régularité et/ou élimination de la masse à l'interface de contact
 - ▶ méthode DLFT : Dynamic Lagrangian Frequency/Time^[5]
 - ▶ AFT/HFT/DLFT : Fourier en déplacement, force de contact traitée en temps (semi-primales)

[1] [Acary and Brogliato](#). *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems: Applications in mechanics and electronics*. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, 2008.

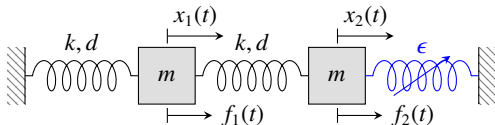
[2] [Xuewen, Soh, and Wanji](#). "A new non-smooth model for three dimensional frictional contact problems". *Computational Mechanics* (2000).

[3] [Cameron and Griffin](#). "An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems". *Journal of Applied Mechanics* (1989).

[4] [Poudou and Pierre](#). "Hybrid Frequency-Time Domain Methods for the Analysis of Complex Structural Systems with Dry Friction Damping". *44th Structural Dynamics and Materials Conference*. 2003.

[5] [Nacivet, Pierre, Thouverez, and Jézéquel](#). "A dynamic Lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems". *Journal of Sound and Vibration* (2003).

- Oscillateur à deux degrés de liberté avec raideur cubique



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), f_{nl}(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \quad \text{[masse 1]} \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - f_{nl} = 0 \quad \text{[masse 2]} \quad (2)$$

$$\Psi_{nl}(x_2, f_{nl}) = f_{nl} + \epsilon x_2^3 = 0 \quad \text{[raideur cubique]} \quad (3)$$

- (Re-)Formulation classique explicite

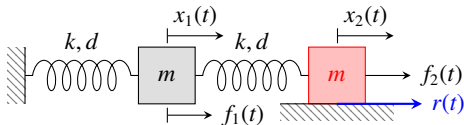
- ▶ inverser $\Psi_{nl}(x_2, f_{nl})$ dans l'Équation (3) en $f_{nl}(x_2) = -\epsilon x_2^3$
- ▶ insérer dans l'Équation (2)
- ▶ résoudre les Équations (1) et (2) par équilibrage harmonique

- Fonction $\Psi_{nl}(x_2, f_{nl})$ non inversible?

- ▶ formalisme des Équations Différentielles Algébriques
- ▶ méthode de l'équilibrage harmonique

Exemple illustratif : dynamique non-régulière

- Système



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), r(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \quad \text{[masse 1]} \quad (4)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - r = 0 \quad \text{[masse 2]} \quad (5)$$

$$\Psi_r(\dot{x}_2, r) = 0 \quad \text{[Loi de Coulomb/Tresca]} \quad (6)$$

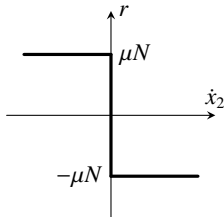
- Questions

- ▶ expression de $\Psi_r(\dot{x}_2, r)$?
- ▶ inversibilité de $\Psi_r(\dot{x}_2, r)$?

- Formulation^[6]

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 0 & \Rightarrow & |r| \leq \mu N & \text{[collement ou transition glissement]} \\ \dot{x}_2 \neq 0 & \Rightarrow & r = -\mu N \dot{x}_2 / |\dot{x}_2| & \text{[glissement]} \end{cases} \quad (7)$$

- Ensemble admissible



- Problème : application multivoque r en fonction de \dot{x}_2 (ou vice-versa)
 - ▶ pas d'application univoque $r(\dot{x}_2)$ (ou $\dot{x}_2(r)$)
 - ▶ résolution : régularisation de la loi de frottement et/ou suppression de la masse en frottement
 - ▶ niveau-0 de la fonction implicite $\Psi_f(\dot{x}_2, r)$ ^{[7][8][9]} → ensemble (\dot{x}_2, r) tel que $\Psi_f(\dot{x}_2, r) = 0$

[6] Acary, Brémond, and Huber. "On solving contact problems with Coulomb friction: formulations and numerical comparisons". *Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics*. Springer, 2018.

[7] Alart and Curnier. "A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods". *CMAME* (1991).

[8] Le van and Nguyen. "A weighted residual relationship for the contact problem with Coulomb friction". *Computers & Structures* (2009).

[9] Ben Dhia and Zammali. "Level-Sets and Arlequin framework for dynamic contact problems". *European Journal of Computational Mechanics* (2004).

- Expression possible^[10]

$$\Psi_r(\dot{x}_2, r) = \dot{x}_2 + \min(0, \rho(r + \mu N) - \dot{x}_2) + \max(0, \rho(r - \mu N) - \dot{x}_2); \quad \rho > 0 \quad (8)$$

- Fonction niveau-0 = ensemble de Coulomb

$$\Psi_r(\dot{x}_2, r) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} r = \mu N & \text{si } \dot{x}_2 < 0 \\ \dot{x}_2 = 0 & \text{si } -\mu N \leq r \leq \mu N \\ r = -\mu N & \text{si } \dot{x}_2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{Équation (7)} \quad (9)$$

- Projecteur^{[11][12][13]}

$$\text{proj}_{D(\mu N)}(r - \rho \dot{x}_2) = \begin{cases} +\mu N & \text{si } r - \rho \dot{x}_2 > \mu N \\ r - \rho \dot{x}_2 & \text{si } -\mu N \leq r - \rho \dot{x}_2 \leq \mu N \\ -\mu N & \text{si } r - \rho \dot{x}_2 < -\mu N \end{cases} \quad (10)$$

- Fonction niveau-0 = ensemble de Coulomb

$$\Psi_r(\dot{x}_2, r) = r - \text{proj}_{D(\mu N)}(r - \rho \dot{x}_2) = 0, \quad \rho > 0 \Leftrightarrow \text{Équation (9)} \quad (11)$$

[10] Leung, Guoqing, and Wanji. "Smoothing Newton method for solving two- and three-dimensional frictional contact problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1998).

[11] Moreau. "Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics". *Nonsmooth Mechanics and Applications*. CISM. Springer, 1988.

[12] Leine and Nijmeijer. *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer, 2006.

[13] Charroyer, Chiello, and Sinou. "Self-excited vibrations of a non-smooth contact dynamical system with planar friction based on the shooting method". *International Journal of Mechanical Sciences* (2018).

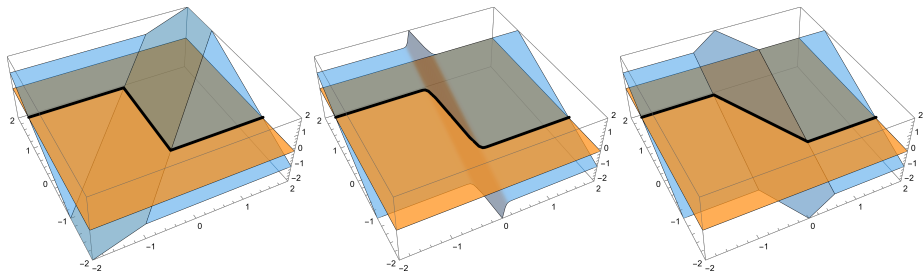


Figure 1: Fonction $\Psi_r(\dot{x}_2, r)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Coulomb \equiv intersection

De gauche à droite

- $\Psi_r(\dot{x}_2, r) = \dot{x}_2 + \min(0, r + \mu N - \dot{x}_2) + \max(0, r - \mu N - \dot{x}_2)$ [exact, non-régulier, multivoque]
- $\Psi_r(\dot{x}_2, r) = r + \mu N \tanh(\beta \dot{x}_2)$ [régulier, univoque]
- $\Psi_r(\dot{x}_2, r) = r + \mu N (\beta \dot{x}_2 + \min(1 - \beta \dot{x}_2, 0) + \max(-1 - \beta \dot{x}_2, 0))$ [non régulier, univoque]

- Dynamique

$$\Psi_1(x_1, x_2) = m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 \cos \omega t = 0 \quad (12)$$

$$\Psi_2(x_1, x_2, r) = m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - r = 0 \quad (13)$$

$$\Psi_r(\dot{x}_2, r) = \dot{x}_2 + \min(0, r + \mu N - \dot{x}_2) + \max(0, r - \mu N - \dot{x}_2) = 0 \quad (14)$$

→ Equation différentielle algébrique non-régulière

- Solution périodique approchée

$$x_i(t) \approx x_{1h}(t) = \sum_{k=1}^{N_h} x_{ik} \phi_k(t), \quad i = 1, 2 \quad r(t) \approx r_h(t) = \sum_{k=1}^{N_h} r_k \phi_k(t) \quad (15)$$

- ▶ $\phi_k(t)$: famille de fonctions de forme
- ▶ fonctions de Fourier → HBM : $\phi_k(t) = (\cos k\omega t, \sin k\omega t)$ dans la suite
- ▶ notation : $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{r}) \equiv (x_{1k}, x_{2k}, r_k)_{k=1, \dots, N_h}$
- ▶ $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{r})$: participations des fonctions de forme choisies → à calculer!

- Dérivées en temps terme à terme (pour x_1 et x_2)

$$\dot{x}_i(t) \approx \dot{x}_{1h}(t) = \sum_k x_{ik} \dot{\phi}_k(t), \quad \ddot{x}_i(t) \approx \ddot{x}_{ih}(t) = \sum_k x_{ik} \ddot{\phi}_k(t), \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

- Résidus pondérés → quadrature numérique si nécessaire (FFT, trapèzes)

$$\forall k, \int_0^T \phi_k(t) \Psi_1(x_{1h}(t), x_{2h}(t)) dt = 0 \quad [\text{dyn. masse 1: linéaire en } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \quad (17)$$

$$\forall k, \int_0^T \phi_k(t) \Psi_2(x_{1h}(t), x_{2h}(t), r_h(t)) dt = 0 \quad [\text{dyn. masse 2: linéaire en } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{r})] \quad (18)$$

$$\forall k, \int_0^T \phi_k(t) \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt = 0 \quad [\text{frottement : non-régulier en } (\mathbf{x}_2, \mathbf{r})] \quad (19)$$

- Systèmes d'équations régulières et non-régulières : $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$(17) \rightarrow \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 - \mathbf{f}_1 = \mathbf{0} \quad [\text{régulière, exacte}] \quad (20)$$

$$(18) \rightarrow \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 - \mathbf{A}_{2r}\mathbf{r} - \mathbf{f}_2 = \mathbf{0} \quad [\text{régulière, exacte}] \quad (21)$$

$$(19) \rightarrow \mathbf{g}_r(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad [\text{non-régulière, numérique}] \quad (22)$$

with

$$\mathbf{g}_{rk}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \int_0^T \phi_k(t) \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt \quad (23)$$

- Solveurs

- ▶ Newton non régulier ou similaire
- ▶ fsolve/root de Matlab®/Python® → Powell hybride : procédure à région de confiance dogleg

Illustration de $g_{rk}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \int_0^T \phi_k(t) \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt$

- Approximation à un terme ($\phi = \cos t$) (par simplicité)

$$x_{2h}(t) = a \cos t, \quad \dot{x}_{2h}(t) = -a \sin t, \quad r_h(t) = b \cos t \quad (24)$$

- Equation non-régulière de Coulomb/Tresca

$$\begin{aligned} g_r(a, b) &= \int_0^T \phi(t) \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt = \int_0^T \cos t \Psi_r(-a \sin t, b \cos t) dt \\ &= \int_0^T \cos t [-a \sin t + \min[0, b \cos t + \mu N - a \sin t] + \max[0, b \cos t - \mu N - a \sin t]] dt = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

- Approximation par somme de Riemann (par simplicité)

- ▶ discrétisation par N pas de temps sur $[0, T]$ de longueur $h = T/N$
- ▶ $t_i = (i-1)h, i = 0, \dots, N-1$
- ▶ intégrale approchée pour (a, b) donné

$$g_r(a, b) \approx \frac{T}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \cos t_i [-a \sin t_i + \min[0, b \cos t_i + \mu N - a \sin t_i] + \max[0, b \cos t_i - \mu N - a \sin t_i]] \quad (26)$$

Illustration de $\mathbf{g}_{rk}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \int_0^T \phi_k(t) \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt$

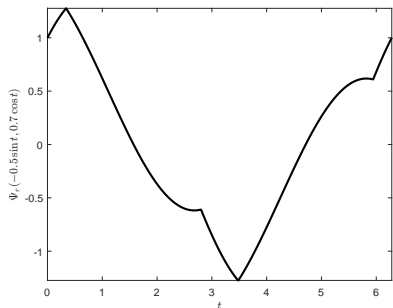


Figure 2: $\Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ avec $a = 0.5$, $b = 0.7$ et $\mu N = 1$

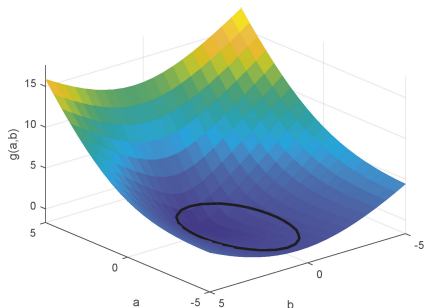


Figure 3: $g(a, b)$ sur $(a, b) \in [-5, 5] \times [-5, 5]$ et $\mu N = 1$

- Équations (20) et (21) résolues exactement par substitution → relation affine $\mathbf{x}_2 = \mathbf{B}\mathbf{r} + \mathbf{c}$ insérée dans l'Équation (22) → $\mathbf{g}_r(\mathbf{x}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
- Jacobien *faible*

$$(\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{g}_r)_{kj} = \frac{\partial g_{rk}}{\partial r_j} = \frac{\partial}{\partial r_j} \int_0^T \phi_k(t) \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt = \int_0^T \phi_k(t) \frac{\partial}{\partial r_j} \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt \quad (24)$$

- Dérivée de fonctions composées (correct avec max et min)

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial r_j} = \frac{\partial \Psi_r}{\partial \dot{x}_{2h}} \frac{\partial \dot{x}_{2h}}{\partial r_j} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial r_h} \frac{\partial r_h}{\partial r_j} \quad (25)$$

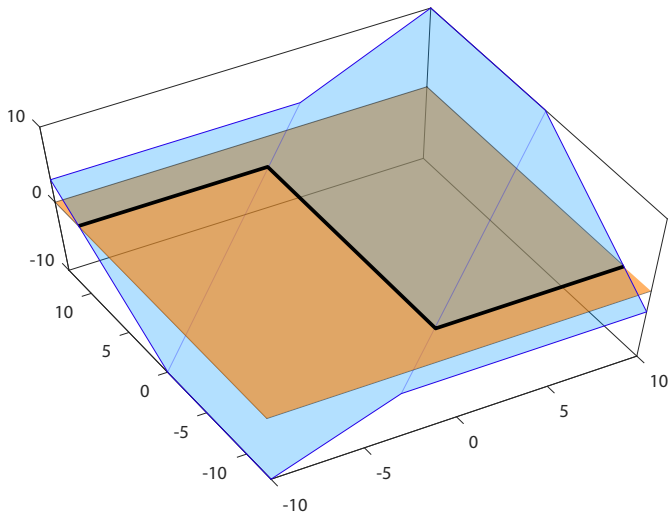
avec ($H \equiv$ fonction de Heaviside)

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial \dot{x}_{2h}} = H(r_h + \mu N - \dot{x}_{2h}) - H(r_h - \mu N - \dot{x}_{2h}) \quad (26)$$

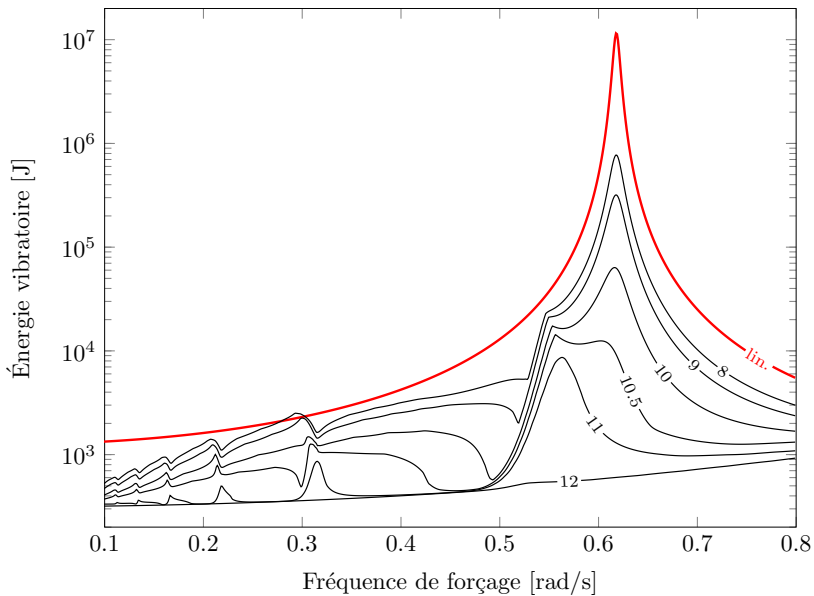
et

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial r_h} = 1 - H(r_h + \mu N - \dot{x}_{2h}) + H(r_h - \mu N - \dot{x}_{2h}) \quad (27)$$

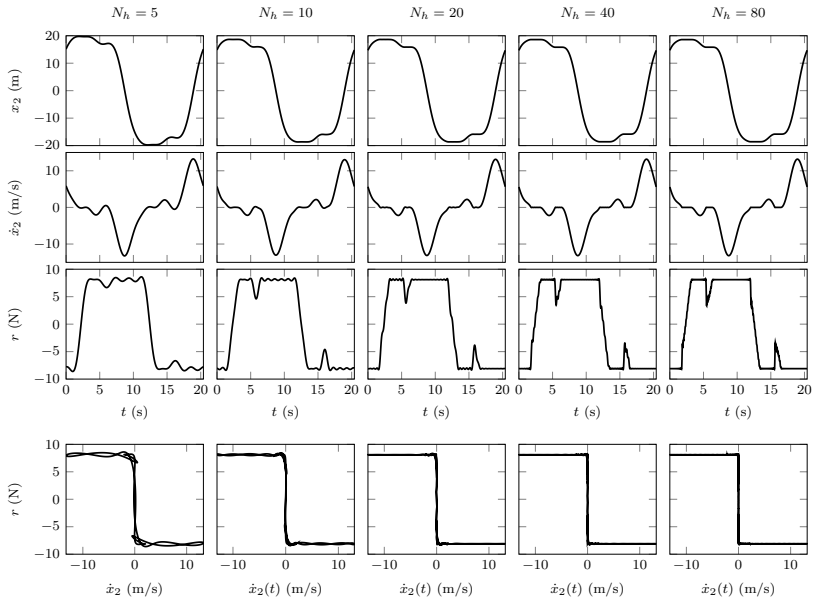
Itérations Powell hybride avec 10 harmoniques impaires



Réponse en fréquence



Analyse de convergence en fonction de N_h ($\phi_k = \text{Fourier}$)



Comparaison avec solution temporelle

- Équilibrage harmonique avec $N_h = 80$ [rouge]
- Euler implicite ($h = 10^{-4}$) [noir pointillé]
- $\omega = 0.308$ et $N = 9$

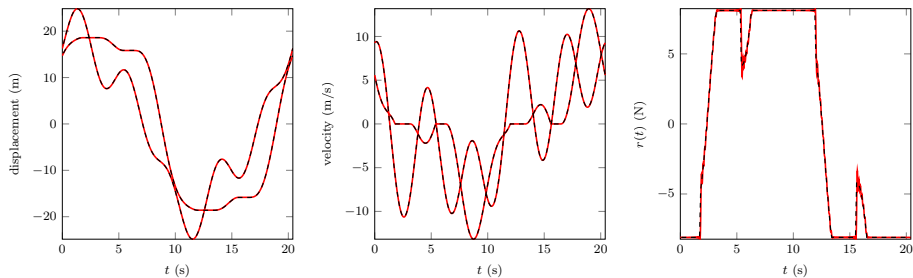
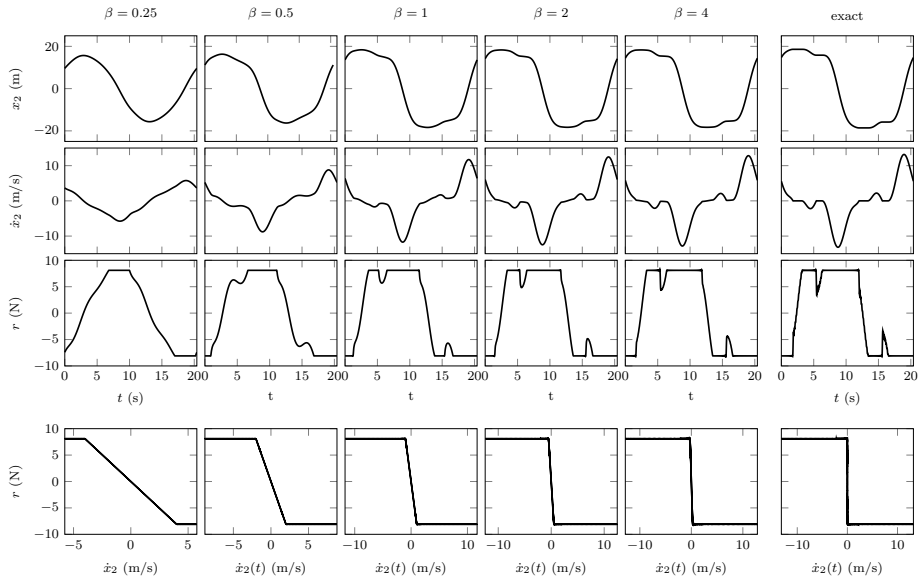
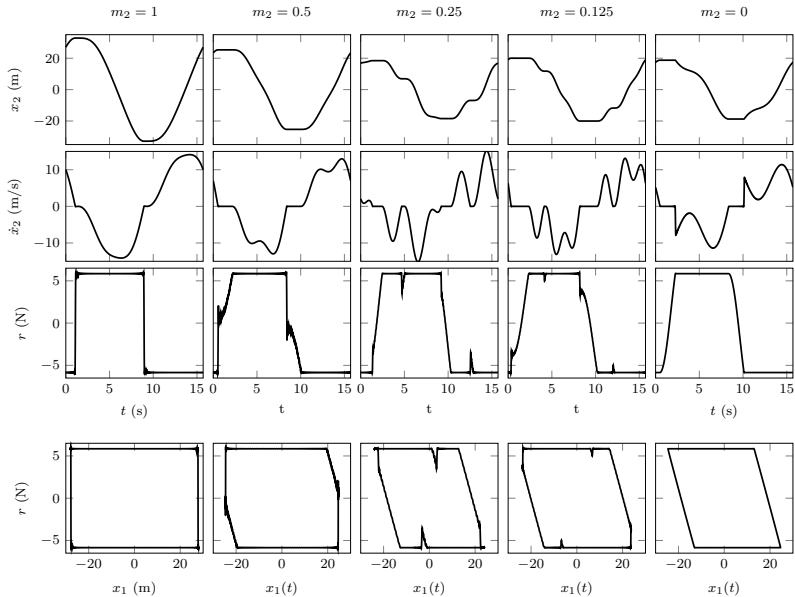


Figure 4: Solutions fréquentielle et temporelle (régime forcé) : [gauche] Déplacements x_1 et x_2 ; [milieu] Vitesses \dot{x}_1 et \dot{x}_2 ; [droite] Force de frottement r

Régularisation par morceau (paramètre β)



Cas $m \rightarrow 0$ (amortisseur sans masse)



- Interface de frottement surfacique: trajectoire en courbe fermée
- Méthodes de résolution existantes
 - ▶ Difficulté à déterminer la direction de frottement : angle de glissement
 - ▶ A chaque itération du solveur non-linéaire dans le domaine fréquentiel, passage dans le domaine temporel afin d'estimer la trajectoire 2D compatible avec les forces de frottement par intégration temporelle
 - ▶ Hypothèse simplificatrice de trajectoires circulaires ou elliptiques
 - ▶ Découplage des directions de glissement/frottement
- AFT/HFT^{[14][15]} : hypothèse systématique de frotteur sans masse (sorte de régularisation)
- DLFT^[16] : méthode la plus générale

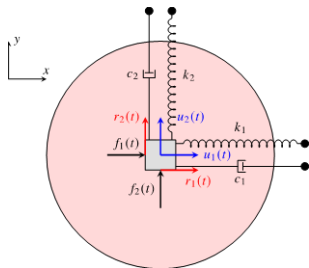


Figure 5: Oscillateur dans le plan

[14] Cameron and Griffin. "An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems". *Journal of Applied Mechanics* (1989).

[15] Poudou and Pierre. "Hybrid Frequency-Time Domain Methods for the Analysis of Complex Structural Systems with Dry Friction Damping". *44th Structural Dynamics and Materials Conference*. 2003.

[16] Nacivet, Pierre, Thouverez, and Jézéquel. "A dynamic Lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems". *Journal of Sound and Vibration* (2003).

- Dynamique

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 &= r_1 + f_1(t) \\ m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 &= r_2 + f_2(t) \end{aligned} \quad (28)$$

- Formulation de Coulomb en 2D

$$\begin{cases} \|\dot{\mathbf{x}}\| = 0 \Rightarrow \|\mathbf{r}\| \leq \mu N & \text{[collement]} \\ \|\dot{\mathbf{x}}\| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{r} = -\mu N \dot{\mathbf{x}} / \|\dot{\mathbf{x}}\| & \text{[glissement]} \end{cases} \quad (29)$$

- Égalité équivalente $[\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2)]^{[17]}$

$$\Psi_r(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{r}) = \mathbf{r} \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho \dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(\mathbf{r} - \rho \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (30)$$

- ▶ équivalente à l'expression avec projecteur

$$\mathbf{r} - \mathbf{proj}_{D(\mu N)}(\mathbf{r} - \rho \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{proj}_{D(\mu N)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \|\mathbf{x}\| \leq \mu N \\ \mu N \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\| & \|\mathbf{x}\| > \mu N \end{cases} \quad (31)$$

- ▶ deux équations (non régulières) avec symétrie dans les directions 1 et 2
- ▶ Régularisation univoque classique (et raide !)

$$\mathbf{r} \|\dot{\mathbf{x}}\| + \mu N \tanh(\alpha \|\dot{\mathbf{x}}\|) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (32)$$

[17] Hüeber, Stadler, and Wohlmuth. "A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with coulomb friction". *SIAM Journal on Scientific Computing* (2008).

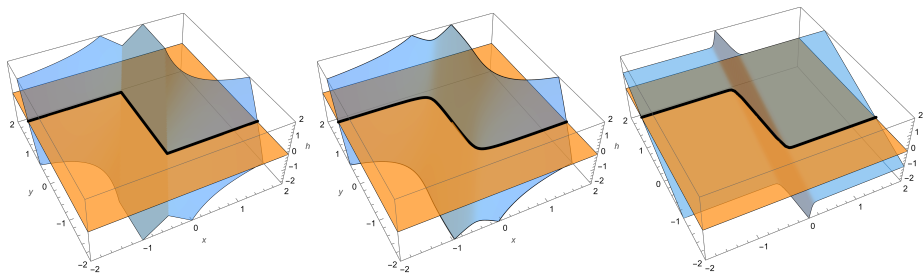


Figure 6: Fonction $\Psi_r(\hat{x}_2, r)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Coulomb \equiv intersection

De gauche à droite

- Non-régulier par projection
- Non-régulier régularisé : $|x| \approx \sqrt{x^2 + \epsilon}$, ϵ petit
- Tangente hyperbolique : $\mathbf{r} \|\dot{\mathbf{x}}\| + \mu N \tanh(\alpha \|\dot{\mathbf{x}}\|) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

[implicite, multivoque, non raide]

[implicite, multivoque, non raide]

[explicite, univoque, raide]

- Quatre inconnues (r_1, r_2, x_1, x_2) pour quatre équations type DAE \rightarrow HBM

$$m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = r_1 + f_1(t)$$

$$m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = r_2 + f_2(t)$$

$$r_1 \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(r_1 - \rho\dot{x}_1) = 0$$

$$r_2 \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(r_2 - \rho\dot{x}_2) = 0$$

(33)

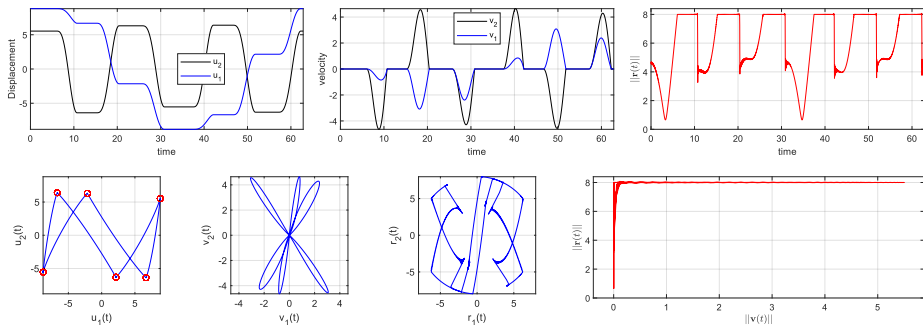


Figure 7: Trajectoire avec 4 phases de collement/glisement : $f_1(t) = 10 \cos \omega t$, $f_2(t) = 10 \cos 3\omega t$, $\omega = 0.1$

- Quatre inconnues (r_1, r_2, x_1, x_2) pour quatre équations type DAE \rightarrow HBM

$$m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = r_1 + f_1(t)$$

$$m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = r_2 + f_2(t)$$

$$r_1 \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(r_1 - \rho\dot{x}_1) = 0$$

$$r_2 \max(\mu N, \|\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{x}}\|) - \mu N(r_2 - \rho\dot{x}_2) = 0$$

(33)

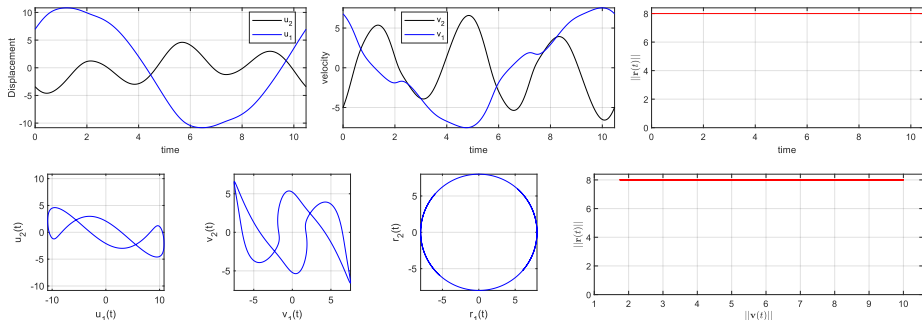
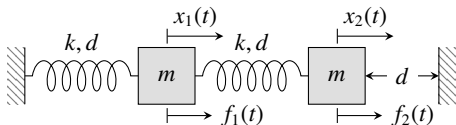


Figure 7: Trajectoire avec glissement pur : $f_1(t) = 10 \cos \omega t, f_2(t) = 10 \sin 3\omega t, \omega = 0.6$



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), \lambda(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \quad \text{[masse 1]} \quad (34)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - \lambda = 0 \quad \text{[masse 2]} \quad (35)$$

$$\lambda + \max(\rho(x_2 - d) - \lambda, 0) = 0, \quad \text{+ loi impact pour } e \neq 1? \quad \text{[contact]} \quad (36)$$

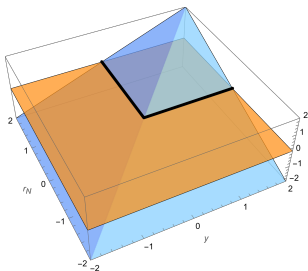
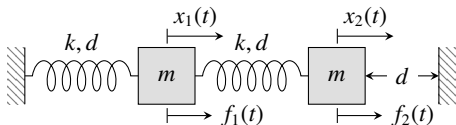


Figure 8: $\Psi_f(x_2, \lambda)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Signorini \equiv intersection



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), \lambda(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \quad \text{[masse 1]} \quad (34)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - \lambda = 0 \quad \text{[masse 2]} \quad (35)$$

$$\min(\rho(x_2 - d), \lambda) = 0, \quad \text{+ loi impact pour } e \neq 1? \quad \text{[contact]} \quad (36)$$

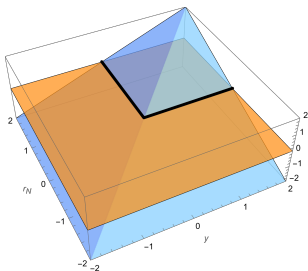
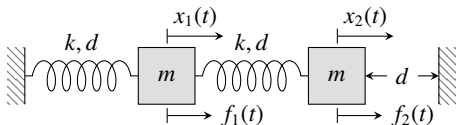


Figure 8: $\Psi_f(x_2, \lambda)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Signorini \equiv intersection



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), \lambda(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \quad \text{[masse 1]} \quad (34)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - \lambda = 0 \quad \text{[masse 2]} \quad (35)$$

$$-(x_2 - \lambda)^2 + |x_2|x_2 + |\lambda|\lambda = 0, \quad + \text{loi impact pour } e \neq 1? \quad \text{[Fisher Burmeister]} \quad (36)$$

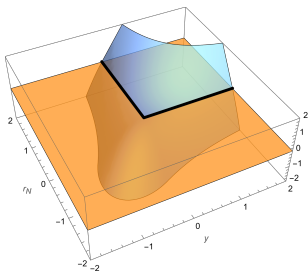
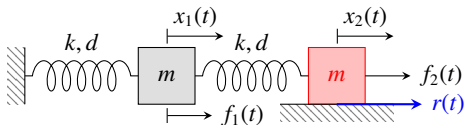


Figure 8: $\Psi_f(x_2, \lambda)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Signorini \equiv intersection



- Dynamique : inconnues $(x_1(t), x_2(t), r(t))$

$$m\ddot{x}_1 + d(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(2x_1 - x_2) - f_1 = 0 \quad \text{[masse 1]} \quad (37)$$

$$m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) - f_2 - r = 0 \quad \text{[masse 2]} \quad (38)$$

$$\dot{x}_2 + \min(r + (1 + \frac{1}{2} \exp(-2\dot{x}_2)) - \dot{x}_2, 0) + \max(r - (1 + \frac{1}{2} \exp(2\dot{x}_2)) - \dot{x}_2, 0) \quad \text{[Stribeck]} \quad (39)$$

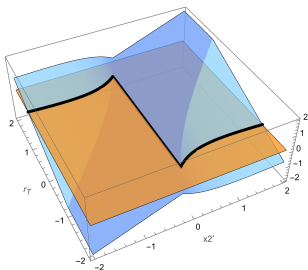


Figure 9: $\Psi_r(\dot{x}_2, r)$ (bleu) et ensemble niveau-0 (orange). Ensemble de Coulomb-Stribeck \equiv intersection

- Méthode de résolution
 - ▶ formulation mixte (primale-duale) : pas d'intégration en temps des forces de contact
 - ▶ facilité de programmation, robustesse numérique
 - ▶ pas de régularisation/pénalisation, pas d'élimination de masse au contact^[18]
 - ▶ paramètre $\rho = 1$ mais à adapter aux amplitudes de r , μN et \dot{x}_2
- Travail à venir
 - ▶ étude avec d'autres fonctions de forme $\{\phi_k(t)\}$: ondelettes ?
 - ▶ extension à des modèles de frottement plus avancés (Stribeck)
 - ▶ points de contact localisés multiples
 - ▶ application à des systèmes industriels (roues aubagées)
- Problèmes ouverts
 - ▶ nombre d'harmoniques différent pour déplacement, vitesse et force
 - ▶ couplage Signorini/Coulomb avec séparation → problème de la loi d'impact
 - ▶ adaptation au calcul de modes non linéaires de système avec frottement
 - ▶ force de frottement/contact distribuée : méthode de MORTAR ?
 - ▶ stabilité des solutions : valeurs propres du jacobien faible + Koopman^[19] ?
- Article et code
 - ▶ Legrand & Pierre, "A compact, equality-based weighted residual formulation for periodic solutions of systems undergoing frictional occurrences", Journal of Structural Dynamics, 2024; [\[hal-04189699\]](#)
 - ▶ *Equal[iseR]*; [\[hal-04525598\]](#)

[18] Baek and Epreanu. "Contact model identification for friction ring dampers in blisks with reduced order modeling". *International Journal of Non-Linear Mechanics* (2020).

[19] Bayer and Leine. "Sorting-free Hill-based stability analysis of periodic solutions through Koopman analysis". *Nonlinear Dynamics* (2023).