



HAL
open science

Étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs : caractérisation et apports pour la recherche en didactique des mathématiques Document de travail

Cécile Ouvrier-Bufferet, Marie-Line Gardes, Simon Modeste, Sonia Yvain-Prébiski

► To cite this version:

Cécile Ouvrier-Bufferet, Marie-Line Gardes, Simon Modeste, Sonia Yvain-Prébiski. Étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs : caractérisation et apports pour la recherche en didactique des mathématiques Document de travail. 2024. hal-04518907

HAL Id: hal-04518907

<https://hal.science/hal-04518907>

Preprint submitted on 24 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs : caractérisation et apports pour la recherche en didactique des mathématiques

Document de travail

Marie-Line Gardes¹, Simon Modeste², Cécile Ouvrier-Buffer³, Sonia Yvain-Prébiski⁴

.....

Résumé : ce travail définit et illustre l'Étude Épistémologique de Pratiques Contemporaines de Chercheurs (EPCC) dans le contexte de la didactique des mathématiques. L'EPCC enrichit l'étude épistémologique classique en s'appuyant sur des pratiques de chercheurs mathématiciens et permet de concevoir et d'analyser des situations d'enseignement et d'apprentissage. Les résultats d'études EPCC existantes présentées dans cet article convergent. De telles études, dont les méthodes sont mises en évidence dans cet article, fournissent des critères pour concevoir, décrire et analyser des activités mathématiques en classe, tout en apportant un nouvel éclairage sur les contraintes et les leviers liés à l'enseignement. Les activités mathématiques étudiées dans l'article sont : activité de recherche, modélisation, définition, auxquelles s'ajoute l'étude du concept d'algorithme. L'article est structuré en quatre parties : présentation du contexte d'étude et de l'importance des études épistémologiques pour la didactique, caractérisation d'une étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs (étude EPCC), apports d'une étude EPCC pour la recherche en didactique des mathématiques, discussion et perspectives

Mots-clés : étude épistémologique, didactique des mathématiques, pratiques de chercheurs, modélisation, activité de recherche, définition, algorithme

.....

Since mathematical knowledge is always open to revision, the processes of creating mathematics gain in philosophical significance, for there is no ultimate product to focus on exclusively. Consequently, both the history and practice of mathematicians acquire a major epistemological significance (as well as needing to be accounted for naturalistically for descriptive purposes). (Ernest, 1994, p.337).

Ces vingt dernières années, plusieurs recherches en *mathematics education* explorent et décrivent les pratiques de mathématiciens professionnels (réf e.g. Burton 2004, Lockwood et al. 2016, Weber 2008, 2011), ainsi que les potentialités de collaborations entre mathématiciens et didacticiens (e.g. Nardi 2008, Gravier & Ouvrier-Buffer 2022). Les enjeux éducatifs et didactiques ne sont pas tous de même nature dans ces travaux, mais l'hypothèse sous-jacente est bien d'étudier et de prendre appui sur une épistémologie de mathématiciens contemporains pour envisager des diffusions aux curricula, à la formation des enseignants et

¹ HEP Vaud

² Université Montpellier

³ Université Paris-Est Créteil

⁴ Université Lyon 1

à la classe. En particulier, Weber et Dawkins (2018) soulignent que les recherches en *mathematics education* doivent aujourd'hui s'interroger sur les méthodologies des "*Mathematical Practice informing Pedagogy (MPP) research*". C'est ce que nous proposons de développer dans cet article, en adoptant un point de vue didactique : nous allons mettre en évidence les apports didactiques d'une étude épistémologique de pratiques contemporaines de mathématiciens.

Pour cela, nous reviendrons dans un premier temps sur la place de l'épistémologie dans le domaine de recherche qu'est la didactique, et, ainsi sur l'utilisation du mot "épistémologie" dans cet article. Nous pourrions alors préciser davantage ce que nous entendons par "Étude Épistémologique de Pratiques Contemporaines de Chercheurs" (étude EPCC). Nous nous appuyons sur quatre recherches distinctes ancrées en didactique des mathématiques ayant mobilisées ce type de méthode (Gardes 2013, Modeste 2012, Ouvrier-Bufferet 2013, Yvain-Prébiski 2018) : ces recherches permettront de justifier et d'illustrer la nécessité d'un recours à une étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs, de mettre en évidence une méthode pour conduire une telle étude EPCC, et de montrer l'impact de tels travaux pour la didactique. Les retombées de ces travaux seront alors discutées du point de vue de la recherche en didactique des mathématiques.

1. Contexte de l'étude

1.1. Les apports de l'épistémologie aux didactiques des disciplines scientifiques

La didactique des disciplines scientifiques s'est construite sur une volonté de prendre en compte les savoirs dans la réflexion sur leur enseignement et leur apprentissage (Johnsua & Dupin, 1993). En effet, l'épistémologie joue un rôle central dans la constitution même des didactiques des disciplines scientifiques, en permettant de rendre explicites les hypothèses quant à la nature et la structure des savoirs, qui agissent de manières explicites et implicites sur les choix d'enseignement. En fournissant des éléments relatifs à la genèse, à la nature, au rôle et à la place des savoirs, l'épistémologie contribue ainsi scientifiquement au travail didactique, permettant de justifier et d'éclairer des choix d'enseignement mais aussi de nourrir les questionnements de recherche en didactique des mathématiques. Rappelons que les principales théories développées en didactique des mathématiques relèvent d'une approche épistémologique (Dorier 1997, 2016). Certaines interactions entre mathématiciens et didacticiens permettent également de fonder des théories en didactique des mathématiques : c'est le cas de la théorie des jeux comme background de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1977, 1998) ou encore les jeux de cadres et la dialectique outil/objet (e.g. Douady 1987, Douady A. & Douady R. 1994).

L'article fondateur de Artigue (1990a) présente la relation entre didactique et épistémologie des mathématiques comme une "connaissance des processus par lesquels les concepts mathématiques se forment et se développent" (Artigue, 1990a, p. 243). Elle ajoute :

Au-delà de l'analyse conceptuelle, l'épistémologie intervient à ce niveau sur un plan plus général car ce que vise l'enseignement des mathématiques, ce n'est pas simplement la transmission de connaissances mathématiques, c'est plus globalement celle d'une culture. Il s'agit de faire entrer les élèves dans le jeu mathématique. Mais, qu'est ce jeu mathématique ? Quels sont les processus généraux de pensée qui le gouvernent ? C'est l'analyse épistémologique [...] qui est au premier chef concernée par ces questions. (Artigue, 1990a, p. 246).

Ces propos correspondent aussi à des problématiques curriculaires d'aujourd'hui : on peut citer, à titre d'exemples, les standards aux États-Unis et les curricula en France où la "mathematical maturity and expertise" (NGA Center & CCSSO, 2020) et "l'activité mathématique" (Villani & Torossian, 2018) doivent être développées de la maternelle (pre-school) à l'université. Ici, l'approche épistémologique trouve sa place pour questionner les choix curriculaires face aux évolutions et aux pratiques d'une discipline. De plus, l'épistémologie permet d'identifier et de discuter les frontières et les articulations entre les disciplines scolaires, l'introduction de nouveaux savoirs et de mutations d'une discipline dans l'enseignement (Viennot, 2009).

Ainsi, les théories et travaux développés dans le cadre de la didactique des mathématiques s'appuient sur l'épistémologie pour produire l'analyse de systèmes didactiques (c'est-à-dire de transmission des savoirs) mais aussi, et surtout, pour construire et proposer des approches, situations d'apprentissage, et organisations didactiques susceptibles de favoriser les apprentissages mathématiques que la société attend. Dans cette perspective, l'ingénierie didactique (Artigue, 1990b ; Margolinas et al., 2011) fournit une méthodologie de recherche permettant de prendre en charge ce travail dans son intégralité.

1.2. Panorama de recherches portant sur les pratiques de mathématiciens

"In contemporary mathematics education, we generally accept that there is a relationship between what professional mathematicians do and how mathematics is taught" (Weber & Dawkins, 2018, p.70)

Il existe, depuis longtemps, des travaux de recherche variés interrogeant les pratiques des mathématiciens et/ou impliquant des mathématiciens, en lien avec la communauté éducative et la recherche en didactique des mathématiques. Certains de ces travaux conçoivent et exploitent des entretiens avec des mathématiciens professionnels. Dans ce cadre, notre réflexion sur l'épistémologie nous conduit aux questions suivantes : Quels sont les objectifs et spécificités méthodologiques de ces travaux sur les mathématiciens professionnels ? Quels impacts didactiques ces travaux ont-ils pour la recherche en didactique des mathématiques, d'une part, et pour l'enseignement, d'autre part ?

Les entretiens conduits avec des mathématiciens par des chercheurs en *mathematics education* ont généralement pour but de caractériser certains processus, démarches, heuristiques des chercheurs et d'utiliser de tels résultats pour l'enseignement et la formation des enseignants. L'intérêt d'une telle démarche y est clairement affirmé (e.g. Burton 2001, Rasmussen et al. 2005).

Les articles en *mathematics education* présentant des entretiens avec des mathématiciens ont des caractéristiques communes. Les chercheurs souhaitent enrichir les connaissances en *mathematics education*, mais aussi en philosophie des mathématiques (e.g. Weber 2008), élaborer des propositions curriculaires (e.g. Weber 2011), étudier la pratique de mathématiciens pour envisager des transpositions à l'enseignement (e.g. Gardes 2013, Modeste 2012, Ouvrier-Buffet 2013, Yvain-Prébiski 2018), identifier des décalages, voire des incohérences, entre ce qui est enseigné dans les classes et la pratique des mathématiciens, ou encore proposer des leviers pour la classe qui ne sont pas encore présents dans les pratiques enseignantes (e.g. Lockwood et al. 2016).

Ces études récentes sont généralement réalisées sur de petits échantillons de mathématiciens. Il est alors difficile de parler de représentativité des mathématiciens

interviewés⁵, ce qui est de toute façon complexe, la communauté des mathématiciens elle-même étant hétérogène. La nature des mathématiques étudiées dans de tels entretiens nécessitent une compréhension des concepts et processus mathématiques en jeu dans la discussion par les deux parties (mathématicien et didacticien), ce qui limite parfois l'étude spécifique du domaine d'expertise du mathématicien. Quand des problèmes mathématiques sont étudiés en dialogue avec les mathématiciens, les concepts et problèmes relevant du discret semblent prédominants (e.g. Ouvrier-Buffet 2013). Dans de tels cas, les thèmes des entretiens portent davantage sur les heuristiques de la démarche mathématique (choix de problèmes, preuve, production d'exemples et contre-exemples, processus de définition). Ainsi, les travaux en *mathematics education* sur et/ou avec des mathématiciens contemporains apportent des éclairages sur la nature des mathématiques et des propositions potentielles pour l'enseignement. Mais ces contributions restent locales : les méthodologies de ces travaux semblent spécifiques à chaque étude, et la question de la généralisation des méthodes et des résultats n'est pas abordée en tant que telle.

2. Caractérisation d'une étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs (étude EPCC)

La section précédente a permis de souligner le fait que l'analyse épistémologique permet de questionner les concepts mathématiques et les processus propres à l'activité mathématique (telle que la preuve), afin d'apporter aux didacticiens le recul nécessaire à la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (e.g. Durand-Guerrier & Tanguay 2018). Une approche « classique » consiste alors à s'intéresser à la genèse historique des concepts mathématiques afin de mieux comprendre les problèmes pour lesquels ils se sont constitués comme une réponse de la discipline et comment ils ont évolué. Cependant, certains questionnements didactiques nécessitent une étude épistémologique spécifique. C'est par exemple le cas des questions portant sur l'étude d'activités mathématiques telles que l'activité de définition, l'activité de recherche ou encore l'activité de modélisation, qui sont associées à des pratiques évolutives dans la discipline. Ou encore sur des concepts parfois non encore complètement stabilisés dans la discipline elle-même. Nous présentons ci-après la pertinence et la faisabilité d'une telle étude épistémologique, que nous appelons étude Épistémologique de Pratiques Contemporaines de Chercheurs (désignée "étude EPCC" dans la suite).

2.1 Objectifs d'une étude EPCC

L'étude épistémologique d'activités mathématiques dans une perspective didactique revêt une complexité particulière. En effet, une activité mathématique est un processus qui se développe par la mobilisation de connaissances, de compétences et par leurs mises en œuvre en situation. Nous appelons "pratiques liées à une activité mathématique" ces mises en œuvre. Nous faisons l'hypothèse qu'identifier ces pratiques dans le travail de chercheurs permet de mieux caractériser l'activité mathématique et ainsi de produire des analyses didactiques (*a priori* et *a posteriori*). Si ces pratiques peuvent parfois être abordées au travers d'écrits anciens tels que des écrits réflexifs de mathématiciens (Poincaré, 1908 ; Hadamard, 1993 ;

⁵ A notre connaissance, seule l'étude de Burton (2004) est à large échelle (70 mathématiciens).

Fehr, 1908), l'accès à la pratique ordinaire, actuelle des mathématiciens peut se poser⁶ tout comme la prise en compte d'évolutions récentes de la discipline. C'est le cas, par exemple, avec le développement de l'informatique et des preuves assistées par ordinateurs et assistants de preuve (e.g. Hanna et al. 2019), tant du point de vue des pratiques que des concepts, domaines, processus de preuve ou mode de validation⁷. Ainsi, en plus de questionner les concepts et processus en jeu lors d'une activité mathématique, ces questions didactiques demandent de s'interroger sur la nature, l'émergence, l'évolution et l'état actuel des pratiques liées à cette activité mathématique. Cette réflexion s'étend donc au-delà des analyses épistémologiques réalisées classiquement dans les travaux en didactique. C'est donc bien cette étude que nous désignons par *étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs* (EPCC). Précisons que cette étude et le questionnement didactique associé se nourrissent mutuellement. En effet, comme nous l'avons déjà souligné, l'étude EPCC est conduite avec une visée didactique, celle de mieux caractériser une activité mathématique, par le biais de l'identification d'éléments invariants dans les pratiques observées. Les résultats obtenus sur ces invariants permettent en retour d'outiller le didacticien et d'enrichir ses analyses didactiques : analyse de la transposition à la classe⁸, analyse de l'activité mathématique des élèves, anticipation et analyse de la gestion de l'enseignant. A titre d'exemple, mettre en œuvre en classe des activités de preuve requiert, de la part de l'enseignant, une gestion de classe spécifique (cf. synthèse de Balacheff, sous presse) : au niveau international, les travaux convergent vers la nécessité d'approfondir les travaux de recherche à ce sujet (e.g. Mariotti et al. 2018, Stylianides 2016), ce qui implique à la fois d'identifier la nature de la preuve dans l'activité mathématique et d'approfondir les types de situations favorables à un tel apprentissage. Une étude EPCC peut permettre d'appréhender ces aspects, d'identifier des leviers pour l'enseignant (e.g. Ouvrier-Bufferet 2013), et ce en prenant en compte l'évolution du rapport à la preuve dans la discipline (pointée comme nécessaire par Hanna & Knipping 2020 par exemple).

2.2 Méthode pour conduire une étude EPCC - Exemples

L'objectif d'une étude EPCC est de mieux comprendre une activité mathématique par le biais des pratiques contemporaines associées. Ainsi, une telle étude se fonde, d'une part sur une **étude épistémologique classique** de l'activité mathématique (par exemple sur le processus de modélisation) et d'autre part sur une **étude épistémologique de pratiques contemporaines** liées à cette activité (par exemple sur les pratiques des chercheurs liées à une activité de modélisation). Dans cet article, nous qualifions de "classique", toute étude épistémologique de l'activité mathématique s'appuyant sur l'analyse de corpus de textes historiques, philosophiques et épistémologiques (sources primaires et secondaires). Les résultats de cette étude donnent de premiers éléments sur la caractérisation de l'activité mathématique, mais aussi sur l'évolution des pratiques associées.

Nous allons maintenant nous concentrer sur l'étude EPCC (Figure 1).

⁶ On peut aussi se demander à quel point la pratique décrite dans le discours coïncide avec la pratique réelle (cf. textes de Claude Bernard sur la démarche scientifique).

⁷ Le théorème des 4 couleurs en est un exemple (Gonthier 2019).

⁸ La question de la transposition « de quoi » serait à développer spécifiquement et mériterait un autre article. "Travailler comme les mathématiciens° c'est rencontrer leurs objets et entrer dans les problématiques que ceux-ci imposent : les mathématiciens° font ce qu'ils font parce que leurs objets sont ce qu'ils sont." (Balacheff, sous presse).

L'étude épistémologique de pratiques contemporaines soulève plusieurs questions méthodologiques. En effet, il s'agit d'avoir accès à des pratiques vivantes et contemporaines de chercheurs sur une activité mathématique spécifique. Il semble dès lors difficile de recueillir ces informations uniquement dans des documents écrits, dans la mesure où le passage à l'écrit peut induire une reconstruction *a posteriori* des pratiques⁹. Le recours à d'autres moyens semble nécessaire, tels que des entretiens avec les chercheurs ou des observations de chercheurs dans leur activité de recherche *in situ*. Les critères permettant la conception de tels entretiens ou observations et les analyses de ceux-ci sont fondés sur les résultats d'études épistémologiques classiques. Cette épistémologie classique est accessible dans des travaux antérieurs en didactique sur l'activité mathématique étudiée et, parfois, dans des articles écrits par des chercheurs et publiés dans des revues de recherche de la discipline concernée (tel l'*American Math Monthly* dans le domaine des mathématiques), où les chercheurs décrivent leurs propres pratiques (e.g. Thurston 1994, Edwards & Ward 2004). Il est également possible de trouver des résultats d'épistémologie classique dans le domaine de la philosophie des sciences lorsque des écrits de mathématiciens sont étudiés sous un prisme théorique : c'est le cas, par exemple, des travaux de Werndl (2009) qui a mis en évidence des démarches de mathématiciens à partir de leurs publications de recherche, en prenant le modèle de Lakatos (1961, 1976) comme cadre théorique. Où se situent alors les spécificités et les apports de l'étude épistémologique contemporaine de chercheurs ? Nous allons donner deux exemples.

Exemple 1 - étude EPCC sur l'activité de recherche mathématique

Dans ses travaux portant sur l'activité de recherche mathématique, Gardes (2013, 2017) a mené une étude EPCC. L'étude épistémologique classique, sur l'activité de recherche mathématique, s'est basée sur la lecture de textes de mathématiciens décrivant les processus de l'invention mathématique (e.g. Poincaré 1908, Hadamard 1993, Fehr 1908, Thurston 1994, Nimier 1989, Villani 2012) et d'autres explicitant l'heuristique de l'activité de recherche (e.g. Pólya 1945, 1989 ; Lakatos 1976). L'étude épistémologique des pratiques contemporaines liées à l'activité de recherche a consisté au suivi de travaux de recherche de chercheurs *in statu nascendi* sur un problème de recherche particulier (i.e. la conjecture d'Erdős-Straus), à partir de différents matériaux : des courriels, des articles, des rencontres, des entretiens. Ces données ont été recueillies « en direct ». Les correspondances électroniques rendent par exemple compte des avancées de la recherche des chercheurs « à l'instant t » et non *a posteriori*. Les documents joints ne sont pas des écrits retraçant, après réflexion, la démarche utilisée, ils sont des produits mêmes de la recherche. Cette étude a permis de mieux caractériser l'activité de recherche mathématique en identifiant notamment des invariants dans les pratiques associées. Des invariants généraux ont alors été mis en évidence : un processus de création en quatre étapes, le rôle du temps de la recherche, l'importance et les modalités variées des échanges entre pairs, l'importance de la documentation. Des invariants spécifiques, liés aux heuristiques et appelés "gestes de la recherche" ont également été caractérisés, notamment : désigner des objets, introduire un paramètre, construire et questionner des exemples, effectuer des contrôles locaux, etc. (Gardes 2013, 2017). Cette étude EPCC a ensuite permis de mettre en perspective les processus de recherche de

⁹ Notons que nous devrions discuter de la transposition elle-même avec une perspective épistémologique, sociologique, anthropologique et professionnelle plus large, pour permettre un retour sur le praticien et une « clarification des rapports entre savoirs et pratiques » et ainsi rendre des savoirs professionnels et compétences visibles (e.g. Perrenoud 1998, Rogalski & Samurçay 1994).

chercheurs, élèves et étudiants sur un même problème mathématique (i.e. la conjecture d'Erdős-Straus).

Exemple 2 - étude EPCC sur le concept d'algorithme

Modeste (2012, Modeste & Ouvrier Buffet, 2011) propose quant à lui une analyse contemporaine des conceptions de chercheurs en mathématiques et informatique sur le concept d'algorithme, et sa place et son rôle dans les activités mathématiques et informatiques. Il s'avère que le concept d'algorithme en tant qu'objet s'est développé relativement récemment et reste au cœur des recherches actuelles en informatique tout en apportant des perspectives nouvelles en mathématiques, ce qui justifiait le développement d'une EPCC, tout comme l'introduction récente de l'algorithmique dans les curricula français, à l'époque de l'étude en question. Ainsi, après une étude épistémologique classique du concept « algorithme », Modeste (2012) a mis en œuvre des entretiens semi-directifs avec 22 chercheurs en mathématiques et informatique afin d'intégrer des aspects plus contemporains ou liés aux usages du concept algorithme dans différents champs des mathématiques et de l'informatique (et notamment aux champs à l'interface). Les entretiens étaient basés sur des questions ouvertes posées aux chercheurs portant sur la définition du concept d'algorithme, des exemples et contre-exemples, la place et le rôle des algorithmes dans la discipline du chercheur et dans ses propres recherches. Des extraits de curriculum ont été utilisés pour faire réagir les interviewés et les amener à expliciter leurs conceptions¹⁰ de l'algorithme.

Les résultats obtenus ont permis :

- de valider et renforcer l'analyse épistémologique classique, en montrant qu'on retrouvait bien les éléments saillants de cette analyse chez une partie des chercheurs, et qu'aucun nouvel élément majeur n'avait été omis ;
- de montrer l'hétérogénéité des conceptions de chercheurs et de leurs pratiques, notamment en fonction de leur domaine de recherche, face à l'unité apparente dans le corpus du savoir savant (et bien que le concept d'algorithme soit le même) ;

Cette étude EPCC a ainsi débouché sur un modèle épistémologique pour l'analyse didactique intégrant divers aspects outil et objet du concept algorithme, et la diversité des représentations et des usages, afin d'analyser des ressources à disposition des enseignants, mais aussi des pratiques d'enseignants et d'élèves dans des activités de nature algorithmique.

¹⁰ Une articulation des cadres théoriques de Douady (1987), Balacheff (1995), Balacheff & Margolinas (2005) a été mobilisée pour mettre en évidence ces conceptions.

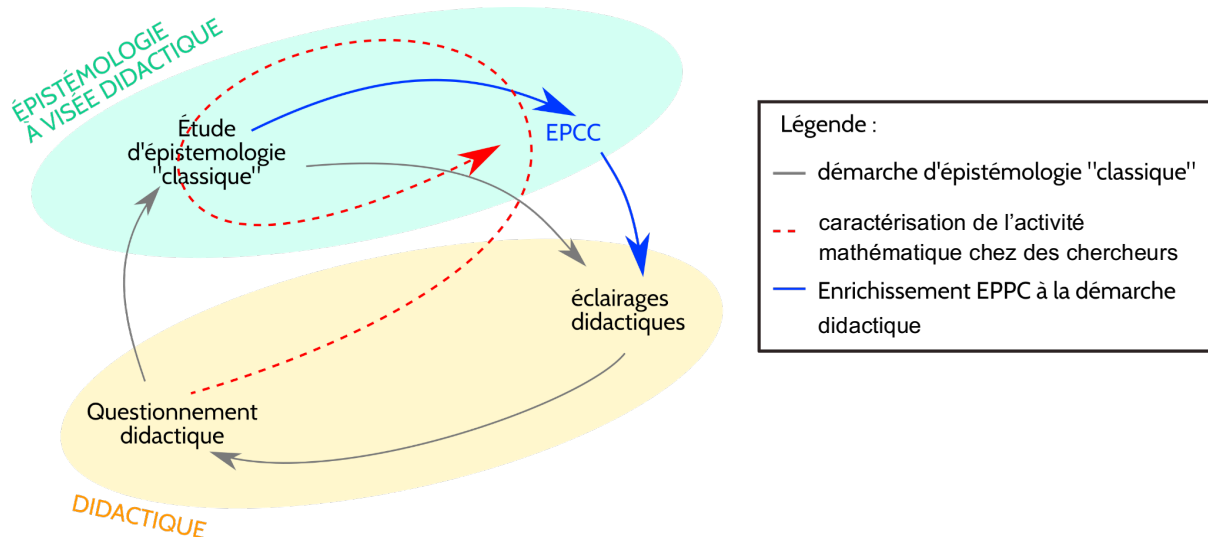


Figure 1 – Articulation entre étude épistémologique, étude EPCC et didactique

Synthèse sur les exemples précédents

Dans ces deux exemples (études EPCC sur l'activité de recherche mathématique et sur le concept d'algorithme), nous avons souligné le rôle de l'étude épistémologique classique dans le développement d'une étude EPCC dans une perspective didactique. Ainsi, l'étude d'épistémologie classique nourrit l'analyse *a priori* de l'activité mathématique (e.g. le processus de recherche) ou du concept étudié (e.g. le concept d'algorithme). Cela permet, en cohérence avec le questionnaire didactique posé, de définir les composantes d'une étude EPCC. Il s'agit alors d'identifier ce qu'il est pertinent d'observer dans les pratiques contemporaines de chercheurs (e.g. leurs conceptions, leurs gestes professionnels, leur organisation de phases dans leur activité, des aspects cognitifs etc.), puis de concevoir un dispositif d'étude expérimentale des pratiques de chercheurs. Un tel dispositif comprend nécessairement les éléments suivants :

- l'identification des tâches à étudier avec les chercheurs en lien avec le questionnaire didactique (par exemple : résolution de problème, preuve, validation, modélisation, rédaction de résultats, etc.) ;
- la caractérisation de la nature de ces tâches : activité "ordinaire" des chercheurs ou tâches spécifiques proposées aux chercheurs ;
- le type d'accès à l'activité du chercheur : observations naturalistes par exemple ;
- la conception des outils de recueil des données (entretien, questionnaire, "carnet de bord" d'un chercheur, mise en situation, etc.) et outils d'analyse de celles-ci.

Dans la suite de l'article, nous montrons en quoi les résultats d'une étude EPCC permettent de développer et d'enrichir le questionnaire didactique portant sur une activité mathématique spécifique.

3. Apports d'une étude EPCC pour la recherche en didactique des mathématiques

Comme nous l'avons souligné dans les sections précédentes, si la visée didactique guide une étude EPCC, les résultats obtenus permettent en retour d'outiller le chercheur et d'enrichir ses analyses didactiques. Nous avons identifié deux apports significatifs d'une étude EPCC :

l'élaboration de situations pour l'enseignement permettant de faire vivre aux élèves l'activité mathématique étudiée, d'une part, et l'élaboration d'outils pour anticiper, décrire et analyser les pratiques des élèves liées à cette activité mathématique, d'autre part. Nous les détaillons et les illustrons ci-après sur les activités mathématiques de modélisation et de recherche d'un problème.

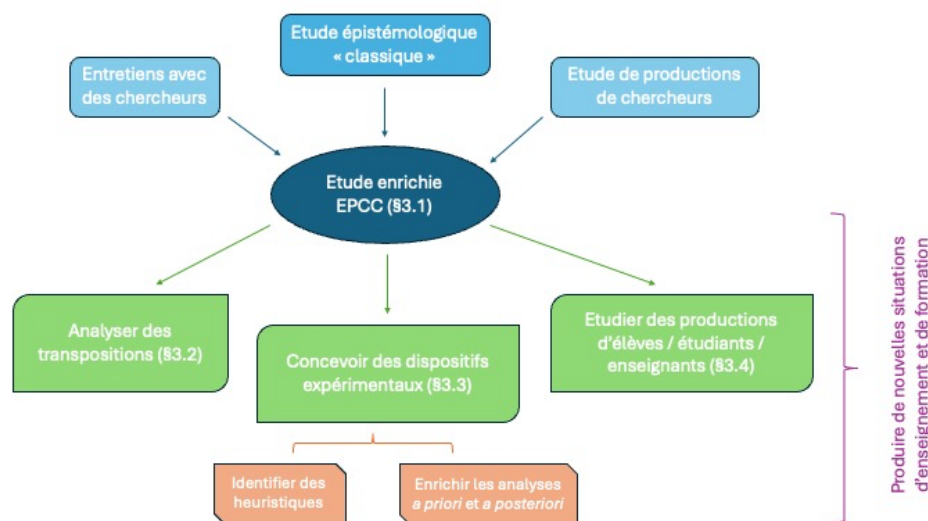


Figure 2 – Place et rôle de l'EPCC dans le travail didactique

3.1 L'EPCC complémentaire à l'étude épistémologique classique pour enrichir le référent épistémologique – l'exemple de l'activité de définition en mathématiques

Dans le cadre traditionnel du *problem solving*, ces vingt dernières années sont marquées par les recherches sur l'IBME (e.g. Artigue & Blomhoj 2013) et sur les heuristiques (e.g. Mousoulides & Sriraman 2020), en particulier sur les heuristiques des problèmes non routiniers (à l'image des travaux de Polya et Schoenfeld). En parallèle, on peut noter un intérêt croissant pour les mathématiques discrètes (e.g. Goldin 2004) favorisant les apprentissages des "transversaux" tels que "prouver" "définir" (*defining activities, defining situations* etc. e.g. Rasmussen et al. 2005). Certains de ces travaux se rejoignent avec ancrage fort dans l'épistémologie de Lakatos (1961, 1976). Parmi ceux-ci, l'activité mathématique "définir" (activité de définition) se détache. Épistémologiquement, elle apparaît clairement au cœur de l'activité mathématique chez Lakatos (1976), en dialectique avec la preuve, en appui sur des apports de travaux historiques de mathématiciens du XVIII^e et du XIX^e siècle. Cette épistémologie lakatosienne de l'activité de définition est reprise dans différents travaux à l'international en *mathematics education* (e.g. Rasmussen et al. 2005, Larsen & Zandieh 2008, Ouvrier-Bufferet 2006, 2011). On peut légitimement s'interroger sur l'évolution des pratiques des mathématiciens en la matière. Une étude EPCC permet ainsi d'actualiser l'activité de définition dans les mathématiques contemporaines et de confronter les connaissances issues de l'épistémologie classique (notamment celles de Lakatos) aux pratiques de la discipline mathématique d'aujourd'hui.

L'étude EPCC menée par Ouvrier-Bufferet (2013, 2015) a été conduite en exploitant une étude épistémologique classique de l'activité de définition (Ouvrier-Bufferet 2003) et en conduisant

des entretiens semi-dirigés auprès de huit mathématiciens contemporains. La modélisation des conceptions sur la définition en mathématiques (issues de l'épistémologie classique d'une part et des entretiens d'autre part) a été réalisée avec le cadre théorique de Balacheff (1995). Dans l'étude EPCC, la spécificité des recherches d'Ouvrier-Buffet (2013, 2015) est de caractériser les types de problèmes permettant d'engager une telle activité, de décrire les processus de définition en jeu et d'utiliser cette modélisation pour construire et mettre en œuvre des situations de définitions à l'université. Il est question ici de chercher à construire des outils fidèles à l'activité mathématique qui se pratique et à la connaissance mathématique qui se construit pour des études didactiques et une transposition en classe (cela concerne la formation scientifique d'élèves, d'étudiants, d'enseignants). On est là en appui et dans la lignée de l'épistémologie contemporaine de Lakatos et l'idée d'une mathématique faillible et on cherche à construire un modèle de réflexion épistémologique de la science mathématique qui se pratique et dont les lignes bougent. Ce qui revient à revoir, réviser, compléter ce que l'épistémologie et la philosophie proposent comme vision des mathématiques.

Pour cela, la méthodologie de type EPCC est la suivante :

- construire un premier modèle philosophico-épistémologique à partir de lectures autour de trois pôles identifiés avec une étude épistémologique classique (logique & langage ; preuves et réfutations ; construction axiomatique), et conduire une critique de ces lectures (e.g. Ouvrier-Buffet 2013) ;
- choix d'un cadre théorique permettant de décrire ce modèle et ainsi les conceptions au niveau épistémologique et ayant une opérationnalité en didactique (ici le cadre théorique cK ϕ de Balacheff 1995) ;
- étudier l'opérationnalité du modèle initial ainsi structuré pour concevoir des situations de construction de définition pour la classe et pour analyser les processus des étudiants ;
- conduire des entretiens avec des mathématiciens pour (in)valider/updater ce modèle de l'activité mathématique, ce modèle, pérenne, pouvant être révisé au fil du temps.

Les enjeux didactiques sont clairement du côté de l'enseignement et de l'apprentissage d'une pratique d'une activité mathématique¹¹. Les apports des travaux d'Ouvrier-Buffet (2003, 2013) se situent dans la description de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve, et dans la mise en œuvre de situations de constructions de définitions en classe. Le modèle issu de l'étude EPCC, outillé par les cadres de la didactique des mathématiques, permet également de proposer une gestion de classe spécifique à la construction de définition.

3.2 Étudier des transpositions didactiques

L'étude épistémologique permet de prendre la mesure de la distance entre le savoir savant et le savoir enseigné, c'est-à-dire prendre la mesure de la transposition didactique, et permet ainsi d'exercer ce qu'Artigue (1990a) appelle une *vigilance épistémologique*¹². Il ne s'agit pas

¹¹ Encore une fois, la question de la transposition didactique se pose difficilement, mais serait à poser, car il faudrait parvenir à identifier "suffisamment" le savoir savant, ce qui est complexe étant donné la variété des pratiques des mathématiciens (suivant leurs champs de recherche, la place de la dimension expérimentale, les types de raisonnements et de preuves et l'émergence de nouveaux problèmes dans la recherche).

¹² "Dans cette direction, celle de la vigilance épistémologique, de la prise de distance par rapport à l'objet d'étude, l'analyse épistémologique permet également au didacticien de prendre la mesure des disparités existant entre savoir "savant" [...] et savoir enseigné. En effet, alors que l'école vit sur la fiction consistant à voir dans les objets d'enseignement des copies simplifiées mais fidèles des objets de la science, l'analyse épistémologique, en nous permettant de comprendre ce qui gouverne

seulement de s'assurer de la conformité du savoir enseigné au savoir savant (ou d'une simplification fidèle de celui-ci), mais bien de comprendre les phénomènes qui amènent à une transformation du savoir pour permettre son enseignement, et la façon dont un concept ou des pratiques vont pouvoir cohabiter dans un système d'enseignement donné, à une époque donnée.

L'EPCC permet justement de questionner la transposition didactique du point de vue de la pratique des mathématiques (transposition d'une activité spécifique à la pratique des mathématiques comme la preuve ou l'activité de définition par exemple). Elle permet aussi de prendre en compte des évolutions récentes de la discipline, de ces concepts et de ses liens aux autres disciplines¹³. En ce sens, à titre d'exemple, le développement de l'informatique, comme outil pour les mathématiques et consommatrice de mathématiques, questionne les mathématiques contemporaines en tant que discipline (surviennent par exemple des questionnements épistémologiques sur ce qu'est une preuve), mais aussi leur enseignement.

Le modèle épistémologique construit par Modeste (2012, 2020) dans une démarche d'EPCC, a permis de réaliser une analyse détaillée de la transposition didactique du concept d'algorithme dans les curricula du lycée français de mathématiques et d'informatique mis en place pendant la période 2010-2012. Cela a permis de mettre en lumière une transposition didactique du concept d'algorithme dans le curriculum de mathématiques principalement centrée sur son usage comme outil, avec une centration sur les aspects langagiers du concept et un écrasement sur le concept de programme informatique.

Comme nous l'avons souligné dans des notes de bas de pages précédentes, la question de la transposition d'activités mathématiques, quant à elle, nécessiterait un article spécifique.

3.3 Élaborer des situations permettant aux élèves de réaliser l'activité mathématique étudiée

Comme nous l'avons souligné précédemment, une étude EPCC permet de mieux comprendre une activité mathématique par le biais des pratiques associées. Ces résultats donnent alors des points d'appui pour penser des situations d'enseignement qui permettent aux élèves de vivre l'activité mathématique en question. Illustrons cela par des exemples.

Yvain-Prébiski (2018, 2017) a mené une étude EPCC dans ses travaux de recherche portant sur la transposition des pratiques de chercheurs utilisant la modélisation mathématique dans les sciences de la vie. L'analyse des entretiens menés auprès de tels chercheurs a permis d'identifier des invariants dans leurs pratiques relatives à la mathématisation d'un problème posé dans ce contexte des sciences de la vie : mettre des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité, identifier des variables pertinentes qui influent sur la situation réelle, choisir des relations pertinentes entre les variables sélectionnées, choisir un modèle de départ qui est un modèle mathématique connu permettant d'envisager un travail mathématique quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus, associer certaines propriétés identifiées à des quantités. En appui sur ces invariants, Yvain (2018) a caractérisé des situations pour la classe favorisant le

l'évolution de la connaissance scientifique, nous aide à prendre conscience de la distance qui sépare l'économie des deux systèmes." (Artigue, 1990, p. 244-245).

¹³ Bien que les curricula de mathématiques paraissent plus figés et moins liés aux évolutions de la discipline, que ceux d'autres disciplines comme les sciences du vivant, l'analyse des curricula de mathématiques au cours du temps montre bien des évolutions liées au développement de la science mathématique elle-même.

travail de mathématisation en jeu lors du passage d'une situation extra-mathématique à une situation accessible à un traitement mathématique. Elle a élaboré une situation pour la classe, conçue à partir d'une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation sur la croissance des végétaux. Les choix didactiques ont été réalisés pour favoriser et attester du développement chez les élèves les invariants identifiés : par exemple la prise de conscience de la nécessité de faire des choix et l'identification de variables pertinentes pour traiter mathématiquement la situation.

Dans ses travaux, Gardes (2013) s'est appuyée sur les résultats de l'étude EPCC menée sur le processus de recherche des mathématiciens pour construire une situation d'enseignement permettant de faire vivre cette activité de recherche de problème aux élèves. Plus précisément, elle s'est appuyée sur les invariants généraux identifiés dans les pratiques de recherche des chercheurs (processus de création en quatre étapes, rôle du temps, importance des modalités variées des échanges entre pairs, importance de la documentation) pour élaborer une organisation didactique, dont voici les spécificités : proposer une recherche du problème sur un temps long, avec plusieurs séances de recherche, afin de prendre en compte le facteur "temps ouvert" ; construire des scénarios composés de différentes phases de recherche (individuelle, collective par petits groupes, collective pour des mises en commun et débat, synthèse) afin de prendre en compte la dimension sociale de l'activité de recherche sous toutes ses formes d'une part et d'approcher les différentes phases du processus de création mathématique d'autre part ; permettre l'accès à tout type de documentation (sauf Internet) afin d'approcher l'importance du recours à la documentation dans une recherche mathématique. L'ensemble de l'étude EPCC a également permis d'analyser finement les processus de recherche des élèves.

3.4 Anticiper, décrire et analyser l'activité mathématique grâce aux invariants identifiés dans les pratiques de chercheurs

Dans les travaux mentionnés précédemment, les résultats d'une étude EPCC permettent d'élaborer des situations d'enseignement pour faire vivre aux élèves une activité mathématique. La mise en œuvre de ces situations en classe permet donc au chercheur d'observer et analyser des pratiques associées à une activité mathématique. Les résultats de l'étude EPCC, en nourrissant les analyses *a priori*, fournissent des éléments pertinents pour construire une grille d'analyse et ainsi gérer les situations en classe et conduire des analyses didactiques *a posteriori*.

Dans les travaux d'Yvain-Prébiski (2018), l'étude épistémologique de pratiques de chercheurs en modélisation lors du passage du monde réel au monde mathématique a permis à l'auteure d'élaborer des critères d'analyse pour le questionnement didactique au cœur des travaux de l'auteure, à savoir les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution aux élèves de la mathématisation en jeu lors du passage d'une situation extra-mathématique à un problème mathématique, dans une activité de modélisation. Ces critères ont favorisé une analyse fine des démarches des élèves, permettant d'identifier comment les élèves rendent la situation extra-mathématique étudiée, accessible à un traitement mathématique (Yvain-Prébiski & Modeste 2020). Par exemple, ces critères mettent en évidence les choix d'éléments de contexte, de grandeurs pertinentes ou de modèles, opérés par les élèves en spécifiant si leurs justifications relèvent de considérations ancrées dans le réel ou d'un travail mathématique. En outre, en appui sur les éléments invariants identifiés dans les pratiques des

chercheurs, l'auteure a mis à l'étude la question des contraintes, les marges de manœuvre et les leviers potentiels associés à l'enseignement de la modélisation mathématique à partir d'une situation extra-mathématique. En particulier, elle a étudié dans quelle mesure, les enseignants identifient comme un enjeu d'apprentissage et d'enseignement le travail de mathématisation nécessaire lors du passage d'une situation posée dans un contexte a priori non mathématique à un problème mathématique (Yvain-Prébiski & Chesnais, 2019).

Dans les travaux de Gardes (2013, 2017), les résultats de l'étude EPCC ont permis d'élaborer un outil pour décrire et analyser l'activité de recherche mathématique. A partir des invariants spécifiques identifiés dans les pratiques des chercheurs (e.g les gestes de la recherche), l'auteure a construit une grille d'analyse des processus de recherche s'appuyant sur ces gestes. Cette analyse a permis de montrer comment un sujet agit sur le problème afin d'avancer dans sa résolution. Par exemple, dans la recherche de la conjecture d'Erdős-Straus¹⁴, la majorité des élèves effectuent le geste *Construire et questionner des exemples*, d'une part pour s'engager dans l'étude du problème (en essayant pour $n=2$, $n=3$, $n=4$, etc.) et d'autre part pour avancer dans leurs recherches en construisant une méthode de décomposition ou d'élimination des cas (par exemple pour n pair, pour n congru à 1 modulo 3, etc.). Cette analyse met en évidence que le processus de recherche des élèves s'effectue par des allers et retours permanents entre la recherche de décompositions pour certaines valeurs de n et la volonté de déterminer des identités générales. Plus généralement, les gestes identifiés dans l'activité de recherche des élèves mettent en évidence le recours aux connaissances mathématiques disponibles et mobilisables, le rôle des objets mathématiques en jeu, les heuristiques développées, la complexité des raisonnements mis en œuvre et les origines et la nature des avancées de la recherche. Notons que cet outil est ainsi pertinent pour étudier la question de la transposition du travail du chercheur. En effet, certains gestes identifiés dans les recherches des mathématiciens sont également relevés dans les recherches des élèves, quand ces derniers disposent des connaissances mathématiques favorisant leur émergence.

4. Conclusions et perspectives

L'origine de cet article est une discussion entre les auteurs en réaction à la contribution de Weber et Dawkins (2018) intitulée "Toward an evolving theory of Math Practice informing Pedagogy: what standards for this research should we adopt? Leur chapitre d'ouvrage se veut être une conceptualisation d'un schéma de recherche (*pattern of research*) nommé "Mathematics Practice informing Pedagogy" (MPP) basée sur quatre chapitres de la même monographie traitant de l'épistémologie de la preuve (Hanna 2018, Durand-Guerrier & Tanguay 2018, Harel 2018, Boero et al. 2018). Weber et Dawkins (2018) en appelle à des critères partagés, qu'ils pointent comme non présents dans les recherches de type MPP, pour évaluer les recherches MPP et leur pertinence pour la recherche en *mathematics education*¹⁵. Ils formulent plusieurs critiques et identifient des difficultés certaines :

¹⁴ Pour tout entier $n > 1$, $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.

¹⁵ "(...) we observe that MPP research has developed in a piecemeal manner without much consistency in how authors support their arguments (...) how do we verify that any stated pedagogical goals are true

- 1) Comment fonder des recommandations pédagogiques sur des pratiques de mathématiciens qui pourraient s'avérer isolées ? Comment définir des critères méthodologiques pour « transposer »¹⁶ les apports en histoire et épistémologie des mathématiques à la littérature en *mathematics education* ?
- 2) Comment évaluer des compétences chez les élèves/étudiants relevant de “meta-conceptions of mathematical practice”.
- 3) Si les études méta aident les chercheurs et peut-être les enseignants, faut-il cependant prioriser l'acquisition de compétences liées à l'activité mathématique chez les étudiants ?

Au vu de nos recherches, nous avons cherché à mettre en évidence la méthode épistémologique (et ainsi répondre au point 1 de Weber et Dawkins) que nous utilisons dans nos travaux en didactique des mathématiques. Certains de nos résultats permettent de répondre au point 2. Le point 3 est ouvert à la discussion, cela dépasse le cadre de la recherche en didactique des mathématiques et est au cœur de questionnements en lien avec les politiques éducatives.

3.1 Étude EPCC et méthode

Dans les recherches en didactique des mathématiques, nous avons montré l'importance des études épistémologiques que nous avons appelées « classiques » qui visent à comprendre et à appréhender le sujet étudié et les principaux enjeux et débats de la communauté mathématique. Rappelons également l'ancrage historique de la didactique des mathématiques française dans la discipline, comment les mathématiques irriguent des cadres théoriques (e.g. Douady & Douady 1994), mais aussi des collaborations fructueuses entre didacticiens et mathématiciens apportant une compréhension des pratiques mathématiques pour éclairer le travail didactique (e.g. Grenier & Payan 1998, Gardes & Mizony 2011, Gravier & Ouvrier-Buffet 2022, Grenier-Boley 2019). Ainsi, il semble naturel d'exploiter la proximité avec les praticiens de la discipline dans une visée didactique.

Dans la section 1, nous avons pointé l'intérêt des études Épistémologiques de Pratiques Contemporaines de Chercheurs (EPCC), puis, dans la section 2, mis en évidence les méthodes utilisées pour observer des pratiques contemporaines de chercheurs (e.g. leurs conceptions, leurs gestes professionnels, leur organisation de phases dans leur activité, des aspects cognitifs etc.), sous forme de dispositifs d'étude expérimentale des pratiques de chercheurs (e.g. Gardes 2013, Yvain-Prébiski 2018). Un tel dispositif comprend nécessairement les éléments suivants :

- l'identification des tâches à étudier avec les chercheurs en lien avec le questionnement didactique (par exemple : résolution de problème, preuve, validation, modélisation, rédaction de résultats, etc.) ;
- la caractérisation de la nature de ces tâches : activité “ordinaire” des chercheurs ou tâches spécifiques proposées aux chercheurs ;
- le type d'accès à l'activité du chercheur : observations naturalistes par exemple ;
- la conception des outils de recueil des données (entretien, questionnaire, “carnet de bord” d'un chercheur, mise en situation, etc.) et outils d'analyse de celles-ci.

to mathematical practice, available for assessment, and essential for instruction?” (Weber & Dawkins, 2018, p.75).

¹⁶ Notons qu'ici Weber et Dawkins ne considèrent pas la question de la transposition (didactique) à la classe.

Nous avons également au fil du texte apporté différentes illustrations de nos travaux permettant d'appréhender soit le concept d'algorithme, soit les activités mathématiques de recherche, de modélisation, de définition. Celles-ci ont permis de souligner l'interaction entre didactique et étude EPCC, en particulier pour produire des « modèles » épistémologiques à visée didactique, par exemple, en prenant appui sur des cadres théoriques de la didactique des mathématiques (cf. travaux de Modeste 2012, Ouvrier-Bufferet 2013).

Les apports didactiques se situent à différents niveaux : une formalisation de compétences ou savoirs mathématiques prenant en compte l'activité mathématique (si possible *in situ*), un outillage didactique renforcé pour concevoir des situations de classe et de formation et pour analyser les productions des apprenants (Gardes 2013, Modeste 2012, Ouvrier-Bufferet 2013, Yvain-Prébiski 2018).

3.2 Discussion – Apports et nouvelles questions

- Pour la recherche en didactique des maths

Si l'analyse épistémologique de pratiques contemporaines de mathématiciens est menée avec une visée didactique spécifique, elle produit des résultats enrichissants pour la recherche en didactique des mathématiques. En effet, comme nous l'avons mentionné, certains travaux permettent de décrire plus finement les heuristiques propres à l'activité de recherche en mathématiques (e.g. Gardes 2013, Ouvrier-Bufferet 2013) et enrichissent ainsi l'épistémologie du didacticien¹⁷.

Cependant, nous avons pointé en différents endroits la difficile question de la transposition des pratiques de mathématiciens à l'enseignement et la formation. Nos recherches permettent d'éclairer des transpositions existantes, avec une vigilance épistémologique et de proposer des analyses didactiques fines de situations pour la classe et la formation complexes du point de vue de l'activité mathématique. S'interroger sur la transposition elle-même nécessiterait d'adopter une perspective épistémologique, sociologique, anthropologique et professionnelle plus large, pour permettre un retour sur le praticien et une « clarification des rapports entre savoirs et pratiques » et ainsi rendre des savoirs professionnels et compétences visibles (e.g. Perrenoud 1998, Rogalski & Samurçay 1994). Mais les mathématiciens sont confrontés à des problèmes et des objets qu'ils ont choisis et dont les relations ne sont pas nécessairement congrues aux demandes curriculaires entre autres (cf. Balacheff, sous presse). Ces questionnements sont clairement à explorer davantage.

- Transposer des résultats d'études EPCC à la formation des enseignants

Nous avons vu que l'étude EPCC du concept d'algorithme (Modeste 2012) permet d'apporter une lecture des curricula, des ressources et de prendre du recul sur les outils et objets d'enseignements : c'est ainsi un outil au service de la formation des enseignants.

Par ailleurs, l'étude EPCC de la modélisation (Yvain-Prébiski 2018) a mis en évidence des critères irriguant encore la formation proposée par le groupe Résolution Collaborative de Problèmes (ResCo) (e.g. Yvain-Prébiski & Modeste 2020).

D'une manière plus large, les situations, pour l'enseignement et la formation, développées, analysées et expérimentées dans nos travaux s'inscrivent dans un temps long, nécessaire pour le développement de compétences propres à l'activité mathématique. La question de l'évaluation de telles compétences reste ouverte.

¹⁷ Mais aussi du mathématicien, comme on peut le voir dans les travaux de Grenier-Boley (2019).

Références

- Artigue, M. (1990a). Épistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 241–285.
- Artigue, M. (1990b). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281 – 308.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, 45(6), 797-810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Balacheff, N. (sous presse). Situations pour l'apprentissage de la preuve en mathématiques. In Ouvrier-Buffet, C., Vandebrouck, F. & Vivier, L. (Eds), *Synthèses et perspectives en didactique des mathématiques – Preuve, Modélisation, et technologies numériques*. <https://hal.science/hal-04028314v1>
- Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In D. Grenier (Ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp. 219-244). Grenoble : IMAG.
- Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). cK ϕ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1-32). La Pensée Sauvage.
- Boero, P., Fenaroli, G. & Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: the key role of the cultural analysis of the content. In A. J. Stylianides, G. Harel (Eds), *Advances in mathematics education research on proof and proving – An international perspective* (pp. 49-68). Springer
- Brousseau, G. (1977). La division à l'école élémentaire. *APMEP*, 19, 89-100.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners – and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal*, 27(5), 589-599.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Springer.
- Dorier, J.-L. (1997). *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions* (Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Joseph-Fourier - Grenoble 1). <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338400>
- Dorier, J.-L. (2016). La didactique des mathématiques, une épistémologie expérimentale. In M. Bächtold, V. Durand- Guerrier, & V. Munier (Eds.), *Épistémologie et Didactique. Actes de la troisième journée épistémologie de l'Université Montpellier 2*. Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Douady, R. (1987). Jeux de cadres et Dialectique Outil-Objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Douady, A. & Douady, R. (1994). Changements de cadres à partir des surfaces minimales. *Cahiers DIDIREM*, 23. IREM de Paris VII.
- Durand-Guerrier, V. & Tanguay, D. (2018). Working on proofs as contributing to conceptualization – The case of IR completeness. In A. J. Stylianides, G. Harel (Eds), *Advances in mathematics education research on proof and proving – An international perspective* (pp. 19-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_2
- Edwards, B. S. & Ward, M.B. (2004). Surprises from mathematics education research: student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5), 411-424.
- Ernest, P. (1994). The Philosophy of Mathematics and the Didactics of Mathematics. In R. Biehler, R. W. Scholtz, R. Straesser, & B. Winkelmann (Eds.), *The Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 335-349). Kluwer.
- Fehr, H. (1908). *Enquête de l'Enseignement Mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens*. Gauthier-Villars.
- Gardes, M.-L., & Mizony, M. (2011). La conjecture d'Erdős-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM*, 87, 79-90.
- Gardes, M.-L. (2017). Une étude d'épistémologie contemporaine sur l'activité de recherche mathématique de chercheurs : intérêt pour l'étude didactique. In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier et V. Munier (Eds.), *Épistémologie & Didactique, Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales* (pp. 177-192). Presses universitaires de Franche-Comté.

- Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse, Université Claude Bernard - Lyon I. https://theses.hal.science/tel-00948332v1/file/these_GARDES.pdf
- Goldin, G.A. (2004). Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36 (2), 56-60.
- Gonthier, G. (2019). A computer-checked proof of the four colour theorem. <http://research.microsoft.com/en-US/people/gonthier/4colproof.pdf>
- Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 59-100.
- Grenier-Boley, N. (2019). *La recherche en mathématiques : une ressource pour les didacticiens ?* Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Diderot. <https://inria.hal.science/tel-02418563/>
- Hadamard, J. (1993). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine Mathématique*. Les Grands Classiques Gauthiers-Villars. Editions Jacques Gabay.
- Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. In A. J. Stylianides, G. Harel (Eds), *Advances in mathematics education research on proof and proving – An international perspective* (pp. 3-18). Springer.
- Hanna, G. & Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: an overview. *Journal of Educational Research in Mathematics, Special Issue*, 1-13.
- Hanna, G., Reid, D.A., de Villiers, M. (2019). *Proof technology in mathematics research and teaching*. Springer.
- Johsua, S. & J.-J., Dupin (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. PUF.
- Harel, G. (2018). Types of epistemological justifications, with particular reference to complex numbers. In A. J. Stylianides, G. Harel (Eds), *Advances in mathematics education research on proof and proving – An international perspective* (pp. 35-48). Springer
- Lakatos, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.
- Lockwood, E., Ellis, A.B., Lynch, A.G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, 2, 165-196.
- Margolinas, C., et al. (Eds.). (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. La Pensée Sauvage. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00770768>
- Mariotti, M.A., Durand-Guerrier, V. & Stylianides, G.J. (2018). Argumentation and proof. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, K. Ruthven (Eds), *Developing research in mathematics education – Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (p.75-89). Taylor & Francis.
- Modeste, S. (2020). Prendre en compte l'épistémologie de l'algorithme. Quels apports d'un modèle de conceptions ? Quelle transposition didactique ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 40 (3), 363-404.
- Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pourquoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse, Université de Grenoble 1. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00783294/>
- Modeste, S., & Ouvrier-Buffet, C. (2011). The appearance of algorithms in curricula, a new opportunity to deal with proof ? In Pytlak, M., Rowland, T., & Swoboda, E. (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 7, February 9- 13, 2011). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów and ERME. (pp. 202-2012). <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME7-Proceedings-2011.pdf>
- Mousoulides, N., & Sriraman, B. (2020). Heuristics in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 331–333.
- Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians*. Springer.
- NGA Center & CCSSO (2020). *Standards for Mathematical Practice. Common Core State Standards Initiative*. <http://www.corestandards.org/Math/Practice/>
- Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens : l'heuristique mathématique*. IREM de Lyon.

- Gravier, S. & Ouvrier-Bufferet, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization – exemplification with Research-Situations for the Classroom. *ZDM – Mathematics Education*, 54, 925-940.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2015). A Model of mathematicians' approach to the defining processes. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the ninth congress of the European Society For Research In Mathematics Education (CERME9)* (pp.2214-2220). Prague, Czech Republic: Charles University In Prague, Faculty of Education and ERME.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve – Étude épistémologique et enjeux didactiques*. (Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot). <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00964093>
- Ouvrier-Bufferet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 165–182.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2006). Exploring Mathematical Definition Construction Processes. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 259-282.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble 1. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/>
- Perrenoud, P. (1998). La transposition didactique à partir de pratiques : des savoirs aux compétences. *Revue des sciences de l'éducation*, 24(3), 487-514.
- Poincaré, H. (1908). L'invention Mathématique. *Bulletin de l'Institut Général Psychologique*, 3, 175-187.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème*. Editions Jacques Gabay.
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51-73.
- Rogalski, J. & Samurçay, R. (1994). Modélisation d'un « savoir de référence » et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau. In G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand et A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35-71). La Pensée Sauvage.
- Larsen, S. & Zandieh, M. (2008). Proofs and Refutations in the Undergraduate Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 205-216.
- Stylianides A.J. (2016). *Proving in the Elementary Mathematics Classroom*. Oxford University Press.
- Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161–177.
- Viennot, L. (Ed.). (2009). *Didactique, épistémologie et histoire des sciences : Penser l'enseignement*. PUF.
- Villani, C. (2012). *Théorème vivant*. Grasset.
- Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'Éducation Nationale. <https://www.vie-publique.fr/sites/default/files/rapport/pdf/184000086.pdf>
- Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 431-459.
- Weber, K. (2011). Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 329-344.
- Weber, K. & Dawkins, P.C. (2018). Toward an evolving theory of mathematical practice informing pedagogy: what standards for this research paradigm should we adopt? In A. J. Stylianides, G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving – An international perspective* (pp. 69-82). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3>
- Werndl, C. (2009). Justifying Definitions in Mathematics - Going Beyond Lakatos. *Philosophia Mathematica*, 1–28.
- Yvain-Prébiski (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves*. Thèse, Université Montpellier.
- Yvain-Prébiski, S. & Chesnais, A. (2019). Horizontal mathematization: a potential lever to overcome obstacles to the teaching of modelling. In Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*

- (CERME11, February 6 – 10, 2019). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. hal-02409063
- Yvain-Prébiski, S. & Modeste, S. (2020). Collaborations between teachers and with academics in an irem group on a collaborative problem-solving device. In H. Borko & D. Potari (Eds.), *ICMI Study 25 – Conference proceedings*, Lisbon, Portugal. hal-02572440f
- Yvain-Prébiski, S. & Modeste, S. (2020). Design of situations fostering horizontal mathematization: benefits from epistemological analysis of experts' practices. CIEAEM 71, Jul 2019, Braga, Portugal. pp.139-150. (hal-03121679)
- Zandieh, M. & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 57–75.