



HAL
open science

Pré-requis minimal du vectoriel au lycée pour préparer le début du supérieur : quelques notions sur le vectoriel et ses notations, ses calculs, sa géométrie

Bruno Bêche

► To cite this version:

Bruno Bêche. Pré-requis minimal du vectoriel au lycée pour préparer le début du supérieur : quelques notions sur le vectoriel et ses notations, ses calculs, sa géométrie. Licence. France. 2020, pp.15. hal-04513457

HAL Id: hal-04513457

<https://hal.science/hal-04513457v1>

Submitted on 20 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

→

« Pré-requis minimal du vectoriel au lycée pour préparer le début du supérieur : quelques notions sur le vectoriel et ses notations, ses calculs, sa géométrie »

....vers l'entrée du Supérieur.

⇒ **Notions basiques à lire après son baccalauréat avant l'entrée du 1^{er} cours de Mécanique au 1^{er} semestre (pour l'été : 15 pages)**

1. **Généralités du Lycée (repère, base, vecteurs et propriétés, norme-distance, produit scalaire de vecteurs, analytique et géométrie)**
2. **Exercices sur quelques généralités du Lycée (base orthonormée, produit scalaire, symbole de Kronecker, changement de base)**
3. **Vers le supérieur : notion de repérage relatif, invariance de propriétés, covariance**
4. **Vers le supérieur : le produit vectoriel, simple et double (notion de transposé, de déterminant, produit vectoriel, analytique et géométrie, propriétés, exercice)**
5. **Vers le supérieur : le produit mixte (sens physique, propriétés et relations)**
6. **Vers le supérieur : Grandeurs-vecteurs vrais & Pseudo grandeurs pseudo-vecteurs (nature et exemples)**

Bruno Bêche, Université de Rennes 1

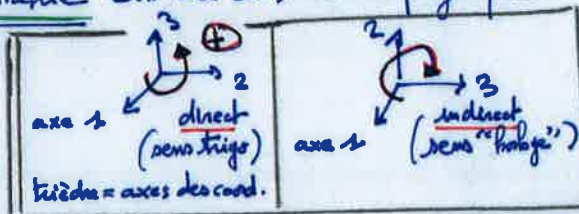
quelques notions sur le vecteur, son calcul et sa géométrie en préparation de "l'après-Lycée"...

Vers l'entrée du Supérieur... et ses portails...

Bruno Poëche, Université de Picardie

① Généralités du Lycée

- Les vecteurs en physique seront définis dans un espace et des bases. On parlera de repère direct ou indirect; la notion d'orientation et de symétrie existera en sciences physiques.



Repère \equiv [origine, base]
 référentiel \equiv { Repère, temps }
 L'il sera "relatif"

- Il existe des repères (spatiaux) et bases orthogonales et orthonormées.
- Dans un espace à 3 dimensions, l'«être mathématique» vecteur sera «repéré» par 3 composantes au sein d'une base associée B .
 $B =$ base = ensemble de vecteurs unitaires (normés); ici 3 vecteurs unitaires \Rightarrow exemple : $\vec{i} \equiv \vec{e}_1$ $\vec{j} \equiv \vec{e}_2$ $\vec{k} \equiv \vec{e}_3$ en cartésien

norme $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

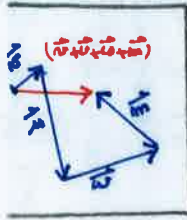
$$\text{Vecteur } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$B \in B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{composantes} \\ \text{du vecteur} \end{matrix}$$

le vecteur apparaît comme une combinaison linéaire (CL) des vecteurs unitaires constituant la base B

Résumé: 3 coordonnées = 3 informations = l'«être» vecteur en 3 Dim
 \equiv (direction, sens, norme ou "longueur")

la projection géométrique du vecteur \vec{v} sur les axes du \mathcal{E} nous donnent les 3 composantes x, y, z .



① Ces espaces vectoriels, d'éléments vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{m}, \dots$ sont bâtis sur des propriétés d'addition vectorielle [associativité $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{m} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{m})$; commutativité $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; élément symétrique $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ vecteur nul ou élément neutre / $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$]; de multiplication par un réel α, β [distributivité $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$; associativité $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$, d'élément neutre $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$]; de produits, "produit scalaire" et "produit vecteur" ... et mixte.

② Le produit scalaire de vecteurs (espace restreint euclidien)

produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ appelé aussi "carré scalaire"
 $\|\vec{u}\| =$ norme de \vec{u}
 \equiv "longueur de la flèche \vec{u} "
 $=$ une distance "d"

 $\|\text{vecteur unitaire}\| = 1$

Remarque: Pour créer en physique un vecteur unitaire à partir d'un vecteur non-unitaire \vec{u} , il suffit de le diviser par sa norme!

$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est un vecteur unitaire!



Remarque: Le calcul d'une norme (longueur) d'un vecteur dans un repère orthonormé se visualise très bien avec "Pythagore" en 2D ou 3D...
 $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 Base B 3D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

démonstration

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(x, y, z = coordonnées)

avec $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vecteur unitaire du repère cartésien

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= x^2 \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_1 + 2xy \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_0 + 2xz \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{k}}_0 + y^2 \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_1 + 2yz \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{k}}_0 + z^2 \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_1 \end{aligned}$$

Sauf

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \\ \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{cases}$$

le reste

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \\ \text{etc..} \end{cases}$$

car $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$

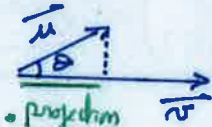
donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ C.Q.F.D

◉ produit scalaire de 2 vecteurs : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$ $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B$

• analytique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = \dots$ distributivité

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

• géométrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ projection de l'un sur l'autre



• projection de \vec{u} sur \vec{v}
 $= \|\vec{u}\| \cos \theta$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cos \theta \times \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

avec $\theta =$ angle entre (\vec{u}, \vec{v}) ou (\vec{v}, \vec{u}) !

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \end{cases}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \cdot \cos \theta$$

analytique & géométrique

avec cette formule globale, on remarque donc que connaissant les coordonnées des 2 vecteurs, on peut déterminer l'angle entre ces 2.

$$\vartheta = \arccos \left[\frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right]$$

Pour être utilisé pour accéder à l'angle ϑ au travers de la définition du produit scalaire \rightarrow (cristallographie, champs, ...
moteur de travail en mécanique ...)

② Exercices sur quelques généralités du Lycée.

• Exercice 1 : Calculer $\vec{i} \cdot \vec{i}$, $\vec{j} \cdot \vec{i}$, et $\vec{k} \cdot \vec{k}$ sachant que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormée cartésienne.

• Remarque : D'une manière générale on écrit la relation avec le symbole de Kronecker (Leopold Kronecker, 1823-1891, mathématicien allemand) symbole $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Soit pour une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ mais avons $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$ (pour $i, k = 1, 2, 3$)

• Exercice 2 : Soit $\mathcal{B}_2 (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé direct $\perp \|\vec{e}_i\|=1 \oplus$ utilisé pour le 'repérage' de 2 points $M \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ $N \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

• Exprimer le vecteur \overrightarrow{MN} dans \mathcal{B}_2 ; en déduire $\|\overrightarrow{MN}\|$.
Calculer l'angle $\vartheta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$

• Solution : $\overrightarrow{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = -4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$; $\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{29}$
 $\cos \vartheta = -\frac{4}{2\sqrt{2}\sqrt{13}} = -0,392$ $\vartheta = \arccos(-0,392) = \pm 113,1^\circ$

- Exercice 3: On considère $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$
 puis le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_B$ dans base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthogonale.
- Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forment une Base B' nouvelle orthogonale.
- Calculer les composantes ou coordonnées du vecteur \vec{v} dans cette nouvelle base B' . (On utilisera l'invariance du produit

- solution:
- Normé: il est évident que $\|\vec{e}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$
 de même $\|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$
 - ortho: par le calcul vérifiez que $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
 $j=1,2,3$
 ex: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$
 $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \Rightarrow B'(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthogonale
 Remarque: $(\vec{e}_3 \equiv \vec{k})$

"le produit scalaire est indépendant de la base utilisée"

Utiliser l'invariance du produit scalaire \rightarrow
 En effet $\vec{v} \xrightarrow[\vec{e}_i]{\text{même } \theta} \vec{v}'$, \forall la base, B
 l'angle entre les vecteurs est (reste) identique!!

\vec{v} dans B : $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_B$ $\vec{v} \begin{pmatrix} ?a \\ ?b \\ ?c \end{pmatrix}_{B'}$

$\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\vec{v} \cdot \vec{e}_3 = \frac{3}{1} = 3$

d'où $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \vec{e}_2 + 3 \vec{e}_3$ car si que $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$
 $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$

⊙ Remarques plus générales sur le produit scalaire :

⊖ Propriété : En plus de l'attribut invariant utilisé/montonné précédemment (exercice 2), d'autres propriétés se déclinent.

• En assimilant le produit vectoriel par exemple au travail en mécanique



: je travaille car je "Force"

sur une distance l | $W = \vec{F} \cdot \vec{l}$ | certaines propriétés

apparaissent simplement \square . $W = 0 = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{l}\| \cos \theta$ car $\theta = 90^\circ$ en effet si je tire perpendiculairement au déplacement, rien ne bougera selon l , il sera maximum par contre lorsque $\theta = 0$, je tire selon l'axe déplacement l peu-constant.

• $(\vec{u} + \vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v}$ les quantités de travail s'ajoutent si nous tirons à deux!

• si je suis " λ " plus fort mon travail sera augmenté en λ !

$\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{F} \cdot \vec{l} = \lambda \cdot \vec{F} \cdot \vec{l} = \lambda W \Rightarrow$ de même si tire quelque chose λ plus fort! (aspect bi-linéaire)

⊙ Le produit scalaire en Base non orthogonale (\vec{i}, \vec{j})
(non \perp)

• Alors par un calcul simple, sa définition (plus générale) devient:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx' \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_{\|\vec{i}\|^2} + xy' \vec{i} \cdot \vec{j} + yx' \vec{j} \cdot \vec{i} + yy' \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_{\|\vec{j}\|^2}$$

• De ceci, la longueur norme se motera: (faire $\vec{u} = \vec{v}$)

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x^2 \|\vec{i}\|^2 + 2xy \vec{i} \cdot \vec{j} + y^2 \|\vec{j}\|^2$$

- L'expression précédente (si $\|\vec{x}\|^2 = a$, $\|\vec{y}\|^2 = c$, $\vec{x} \cdot \vec{y} = b$)
on note
est une forme dite quadratique $\|\vec{u}\|^2 = ax^2 + bxy + cy^2$ du plan.
Les lignes de niveau sont des coniques.

• La notion du produit scalaire avec des vecteurs à coordonnées complexes existe et se généralise. (similitude)

◦ exemple: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 4 \end{pmatrix}$, montrer que:

addition
soustraction
multiplication
Vecteur \mathbb{C}^2

- $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} -1+3i \\ 7-i \end{pmatrix}$ / (avec $i^2 = -1$)
- $(2+i)\vec{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 7+i \end{pmatrix}$ /
- $3\vec{v} - (5-i)\vec{u} = \begin{pmatrix} 12-i \\ -11+i \end{pmatrix}$ /

◦ autre exemple avec produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, \vec{u} et $\vec{v} \in \mathbb{C}^3$

on utilisera la relation $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ \mathbb{C}^3

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i \in \mathbb{C} \\ v_i \in \mathbb{C} \end{array} \right. \quad i=1,2,3$$

• Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 0 \\ 4-5i \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 0 \end{pmatrix}$

Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3-i$

◦ Le produit $\vec{u} \cdot \vec{v}$ peut se noter $(\vec{u} | \vec{v})$ suivant la lecture.

◦ on pourra montrer en exercice que avec $\vec{v} = (1+i, 2)$ $\vec{u} = (i-3, 3-i)$,
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{6}$ $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{5}$ et $(\vec{v} | \vec{u}) = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{u} = 4+2i$

③ Vers le supérieur : Notion de repérage relatif ; invariance de propriétés.

Le choix du départ (et référentiel ensuite avec un temps 'propre' associé) va induire l'aspect et la motion de 'relativité' d'une mesure en physique. En effet depuis un endroit lieu spatial (puis temps) différent une même 'chose' peut nous 'apparaître' différente. Ex: un vecteur (flèche) 'apparaît' différemment suivant notre lieu $\xrightarrow{\text{regard}} \Delta \equiv \odot$ ses projections et donc ses coordonnées qui la composent seront différentes suivant la base ou repère (puis référentiel) choisi. Par contre certaines choses, propriétés, lois seront elles invariantes. On parlera de covariance en physique.

ex: \Rightarrow pour un vecteur \vec{v} , sa norme $\|\vec{v}\|$ ou 'longueur' est invariante.

regard \vec{v} dans B: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Base B ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) $= \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$

Remarque: \sum est le symbole Somme discrète permet une notation 'économique' en place

regard ailleurs \vec{v} de ce même \vec{v} dans B': $\vec{v} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ B' ($\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$) $= \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i$

invariant $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \cdot (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3)$
 $= x_1^2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_1 + x_2^2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_1 + x_3^2 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3}_1$
 $= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

de même $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}' = X_1'^2 + X_2'^2 + X_3'^2$

⇒ ces deux calculs de longueur seront le même "chiffre" pour un même vecteur



avec $\begin{cases} B \neq B' \text{ et donc } X_i \neq X_i' \\ \text{Bases } \neq \text{ et composantes } \neq \end{cases} \quad (i=1 \text{ à } 3)$

④ Vers le supérieur : le produit vectoriel $\rightarrow \hat{\wedge}$, simple et double

• Notation transposé \hat{t} d'un vecteur : si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\hat{t}\vec{u} (abc)$

au sens on "transpose" colonne \Leftrightarrow ligne

}. Règle : par exemple le produit scalaire peut aussi s'écrire
 $\hat{t}\vec{u} \cdot \vec{v} = (abc) \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$

• La notion de déterminant : son calcul ou règle $\hat{\otimes}$

le déterminant de 2 vecteurs dans le Plan Euclidien (2D) se note et calcule :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \hat{\otimes} = ae - bd$$

- Cette notion de déterminant est beaucoup utilisée en mathématiques des résolutions d'équations linéaires en système $\begin{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{cases}$
- Voir le lycée pour l'existence (ou pas) d'un couple solution (x, y) d'un système de 2 équations à 2 inconnues x, y .

appel :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$\exists!$ couple (x, y) si $\det | \text{ystème} | = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$
 sinon soit Solution = $\{ \} = \emptyset$ vide soit infinité de solutions "idéologiques"

• Le produit vectoriel de 2 vecteurs : Soit 2 vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ dans Repère 3D : \mathcal{O}_2

analytique

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \vec{m} \text{ un vecteur !!}$$

↑ signe du produit vectoriel

- le produit vectoriel de 2 vecteurs est un vecteur.
- la 1^{ère} composante (en vert encadré) du vecteur \vec{m} résultat a été obtenue en 'cachant' la 1^{ère} ligne de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et en effectuant le déterminant ou règle \otimes sur la 2^d et 3^{ème} ligne.

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \end{vmatrix} = \oplus \det$$

- la 2^d composante et 3^{ème} s'obtiennent par le même principe en 'cachant' respectivement la 2^d et 3^{ème} ligne en faisant $\ominus \det$ puis $\oplus \det$.

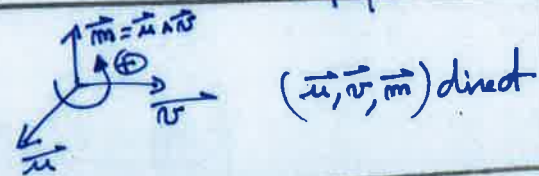
⇒ autre définition géométrique

• La norme de $\|\vec{m}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha$

avec $\alpha = \text{angle}(\vec{u}, \vec{v})$

• le vecteur \vec{m} est \perp au plan (\vec{u}, \vec{v})

et le trièdre $(\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{m}) \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{m})$ est DIRECT !!



• Exercice 4: Soit 2 vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

• Calculer $\vec{m} = \vec{u} \wedge \vec{v}$; déterminer $\|\vec{m}\|$ en analytique puis par voie géométrique

• Solution: $\vec{m} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)\vec{e}_3$

qui $\vec{m} \perp$

• $\|\vec{m}\| = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$, direct en analytique $\vec{u} \wedge \vec{v}$ $\hat{=}$ aire du parallélogramme $\hat{=}$ $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha(\vec{u}, \vec{v})$

• En géométrie, $\|\vec{m}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha$
 \Rightarrow trouver par exemple α avec le produit scalaire (des 2 définitions) avec $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$ (angle)

\Rightarrow trouver par exemple α avec le produit scalaire (des 2 définitions)

\Rightarrow puis en déduire $\|\vec{m}\| = 3 \times 2 \times \sin 75^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$
 $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

• Le double produit vectoriel: si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs quelconques, alors:

$$\underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{v})}_{\text{un vecteur}} \wedge \vec{w} = \underbrace{(\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{w}}_{\text{scalaire}}) \vec{v} - (\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{w}}_{\text{scalaire}}) \vec{u}}_{\text{un vecteur}}$$

• Exercice 5: En prenant des coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \dots \vec{w} \dots$
 Démontrer la relation (égalité) précédente.

• Prop: $\triangle!$ non associatif $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

⑤ Vers le supérieur : le produit mixte $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

- On appelle le produit mixte de 3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ le scalaire Δ :

$$\Delta = (\underbrace{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}_{\text{scalaire}}) = \underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{v})}_{\text{vecteur}} \cdot \underbrace{\vec{w}}_{\text{vecteur}}$$

- Sens physique et propriétés :

$|\Delta| =$ le volume du 'paré' construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$|\Delta| = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{w} = \|\vec{n}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha$

$A_{inc} = \|\vec{n}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ (2D)

- quelques relations :

- avec 'permutations' circulaires on obtient :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

- permutation des symboles $\wedge \Leftrightarrow \cdot$ (1 vecteur, 2 autres)

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \wedge \vec{w}$$

⑥ Vers le supérieur : grandeurs/vecteurs vrais & pseudo-grandeurs / pseudo-vecteurs


Nous définirons deux catégories de vecteurs, les vrais et les pseudo-vecteurs.

- Grandeurs - vecteurs vrais: leur signe, sens-direction est défini sans ambiguïté, indépendamment de toute 'convention' d'orientation de l'Espace.

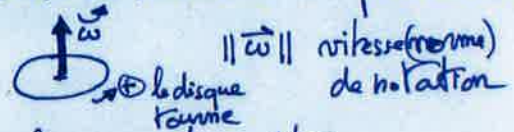
exemple: vrais scalaires ($>$ ou < 0) masse, charge électrique, potentiel, température, distance focale...

• vrais vecteurs (ou vecteurs polaires) force \vec{F} , champ \vec{E} , potentiel vecteur \vec{A} ...

- Pseudo-grandeurs, pseudo vecteurs (ou vecteur axial)

Le sens de l'axe est lié à la convention adoptée d'orientation de l'Espace. On peut utiliser la notation 

exemples: $\vec{\omega}$ \equiv axe de rotation d'une pièce-élément



• \vec{L} les moments cinétiques.

• \vec{B} les champs magnétiques



I boucle de courant

• Les conséquences de ces 2 notations en calcul:

\vec{v} = vecteur
 $p\vec{v}$ = pseudo-v

produit scalaire	$\vec{v} \cdot \vec{v} \equiv \text{scalaire}$ $\vec{v} \cdot p\vec{v} \equiv \text{pseudo-scalaire}$ $p\vec{v} \cdot p\vec{v} \equiv \text{scalaire}$
produit vectoriel	$\vec{v} \wedge \vec{v} \equiv p\vec{v}$ $\vec{v} \wedge p\vec{v} \equiv \vec{v}$ $p\vec{v} \wedge p\vec{v} \equiv p\vec{v}$

Ce domaine et notation auront un impact sur les SYMÉTRIES en physique.

• Autres exercices de manipulation et d'astuces sur les Vecteurs.

• Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs ; a, b, c, d quatre réels.

Démontrer que : $(a\vec{u} + b\vec{v}) \wedge (c\vec{u} + d\vec{v}) = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{\text{(determinant)}} (\vec{u} \wedge \vec{v})$

(se rappeler que $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$)

• Avec notation $\vec{u} \cdot \vec{v} \equiv (\vec{u} | \vec{v})$, montrer que :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b} | \vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} | \vec{c})(\vec{b} | \vec{d}) - (\vec{a} | \vec{d})(\vec{b} | \vec{c})$$

-14-

Vous êtes dorénavant les bienvenus aux séances de cours et travaux dirigés du 1^{er} cours de physique-mécanique du 1^{er} semestre. [16h]

⇒ plan page suivante.



PHYSIQUE L1 PCGS : MECANIQUE

PLAN DU COURS (1^{ère} partie ou S1)

8 séances de cours + 8 séances de TD

(bruno.beche@univ-rennes1.fr, B. Bêche Pr. UR1 - IPR CNRS)

♦ **INTRODUCTION** : Définitions, statistique, cinématique, dynamique, place de la mécanique classique de Newton, postulats associés sur la notion d'espace et de temps, la/les masse(s), ordres de grandeurs (distance et durée), unités et S.I. (MKS).

♦ **CHAPITRE I) CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL**

Référentiels (Galiléens ou d'inertie), repères et systèmes de coordonnées (2D, 3D) cartésiens, polaires, cylindriques, sphériques, notions de trajectoire, position, vitesse, accélération, expressions et mouvements. Vers les référentiels non Galiléens et la relativité des mouvements.

♦ **CHAPITRE II) FONDEMENTS DE LA DYNAMIQUE NEWTONNIENNE : INTERACTIONS ET FORCES**

Principe d'inertie, principe fondamental de la dynamique (PFD) et lien Chapitre I), notion de masse inertielle, principe de l'action/réaction, interactions en physique, notion de forces et exemples (forces de frottement solide puis visqueux, loi et force de l'attraction gravitationnelle, notion de masse gravitationnelle, poids, forces en électrostatique et électromagnétisme, ...) applications du PFD, équations différentielles gérant l'évolution du système, l'oscillateur harmonique en mécanique et en physique.

♦ **CHAPITRE III) FORMULATION INTEGRALE OU ENERGETIQUE : TRAVAIL, PUISSANCE, ENERGIE**

Travail le long d'une trajectoire, puissance, les énergies, énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique, énergie potentielle et notion de forces à circulation conservative, propriétés, notions de champs et de potentiels, énergie mécanique totale et loi de conservation, l'oscillateur harmonique, barrière et puits de potentiel en physique, notions d'équilibre et de stabilité.

♦ **Ouvrages et livres de références :**

→ Pour le cours :

'Mécanique : Cours de Physique de Berkeley', C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, vol. 1, Ed. Armand Colin.

'Mécanique 1&2 : Le cours de physique de Feynman', R. Feynman, Ed. Dunod.

→ Pour les exercices et les problèmes :

Tous les livres possibles et imaginables (du SDC – BU Sciences Campus Beaulieu) relatifs à la première année du supérieure en Licence 1 ou bien CPGE MPSI, PCSI... aux chapitres 'Mécanique'.

LISTES DES TRAVAUX DIRIGES ASSOCIES (1^{ère} partie ou S1)

- ♦ TD 1 et 2 : Cinématique (chapitre I du cours)
- ♦ TD 3 à 5 : Interactions, PFD et forces (chapitre II du cours)
- ♦ TD 6 à 8 : Formulation en énergie (chapitre III du cours)

Courage !